ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE SAPHAR

Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, n° 2 (1966), p. 113-151

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_2_113_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 113 à 151.

APPLICATIONS A PUISSANCE NUCLÉAIRE ET APPLICATIONS DE HILBERT-SCHMIDT

DANS

LES ESPACES DE BANACH

PAR M. PIERRE SAPHAR.

INTRODUCTION.

Ruston [9] et Grothendieck [6] ont montré que la théorie de Fredholm [2] pouvait être développée d'une manière naturelle dans le cadre des applications nucléaires ou applications à trace. Par ailleurs, Smithies [12] a construit une théorie de Fredholm généralisée dans le cadre des applications de Hilbert-Schmidt d'un espace de Hilbert dans lui-même.

Dans cet article on essaie d'aller plus loin.

Dans une première partie, on construit une théorie de Fredholm généralisée pour les applications à puissance nucléaire. Cette théorie est utilisable dans des situations variées. Citons-en quelques-unes :

1° Soient H un espace de Hilbert et p un nombre réel positif. On dit qu'une application linéaire compacte de H dans H est de puissance p^{ieme} sommable si les valeurs propres de $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ sont de puissance p^{ieme} sommables. Si k est le premier entier supérieur ou égal à p, on montre (*voir* [1], p. 1093) que T^k est nucléaire. Rappelons que si $p = 2$, T est une application de Hilbert-Schmidt.

2° Soient E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle fermé (0, 1) à valeurs complexes, $(x, y) \to K(x, y)$ une application continue de $(0, 1) \times (0, 1)$ dans $\mathbf{C}$ et α un nombre réel tel que $0 \leqq \alpha < 1$. Considérons l'application linéaire continue T de E dans E définie par

$$f \to \mathrm{T}(f) = \mathrm{F}, \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{K}(x, y) f(y)}{|x - y|^\alpha} dy.$$

Si k désigne le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{1-\alpha}$, on montre sans difficulté que T^k est défini par un noyau continu. Donc T^k est nucléaire (*voir* [6], p. 371). L'étude de ces applications a été faite par Poincaré [8]. Notre méthode redonne facilement les résultats de Poincaré.

3° Soit E un espace de Banach et T une application intégrale de E dans E (*voir* [3], p. 124). Alors on montre que T^2 est nucléaire [3], p. 134). Nous mettrons en évidence des propriétés particulières des applications intégrales dans le chapitre I, § 4 de ce travail.

Dans une deuxième partie, introduisant une topologie sur le produit tensoriel de deux espaces de Banach on obtient une notion raisonnable d'application de Hilbert-Schmidt d'un espace de Banach dans un autre. On peut alors construire pour ces applications une théorie de Fredholm généralisée analogue à celle de Smithies [12]. Enfin, on donne pour terminer quelques exemples de telles applications.

Une autre théorie des déterminants a été conçue par Lézansky [7] et Sikorsky (*voir* [11] qui contient une importante bibliographie). Elle ne sera pas utilisée ici.

Pour conclure, je voudrais mentionner que j'ai tiré le plus grand profit pendant l'élaboration de ce travail de conversations avec MM. L. Schwartz et J. Dixmier. Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

CHAPITRE I.

Applications a puissance nucléaire.

Soient E un espace de Banach complexe, $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'algèbre des applications linéaires continues de E dans E, $\mathcal{L}^1(\mathrm{E})$ l'algèbre des applications nucléaires (*voir* [3], chap. I, p. 78) de E dans E. Pour tout entier $k \geqq 1$, on désigne par $\mathcal{L}^k(\mathrm{E})$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ formé des éléments T tels que T^k soit nucléaire. Le but de ce chapitre est de montrer qu'on peut faire une théorie de Fredholm pour les éléments T de $\mathcal{L}^k(\mathrm{E})$, c'est-à-dire :

— Définir une application de $\mathcal{L}^k(\mathrm{E})$ dans $\mathbf{C} : \mathrm{T} \to \det_k(1 + \mathrm{T})$ qui joue dans une certaine mesure le rôle d'un déterminant;

— Exprimer la fonction méromorphe $z \to (1 - z\mathrm{T})^{-1}$ $(z \in \mathbf{C})$ sous la forme du quotient de deux fonctions entières;

— Donner des formules permettant le calcul des fonctions entières introduites.

Nous supposerons dans toute la suite du chapitre I, sauf mention expresse du contraire, que les espaces de Banach introduits satisfont à l'hypothèse d'approximation large (*voir* [3], chap. I, p. 164); k désignera un entier supérieur ou égal à 1.

1. LE DÉTERMINANT DE FREDHOLM D'ORDRE k. — Définissons la suite de fonctions entières suivantes :

$$\varphi_1(z) = 1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_k(z) = \exp\left[-z + \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{z^{k-1}}{k-1}\right].$$

On sait que pour tout k, il existe une fonction entière ψ_k telle que :

$$(1+z)\,\varphi_k(z) = 1 + z^k\psi_k(z).$$

Soit $T \in \mathcal{L}^k(E)$. Il est clair que l'application $(1+T)\varphi_k(T) - 1$ est nucléaire. Par ailleurs, si T est nucléaire, on sait (*voir* [6]) définir le déterminant de Fredholm de $1 + T$ que nous désignerons par $\det_1(1+T)$. On peut alors poser la :

DÉFINITION. — Soit $T \in \mathcal{L}^k(E)$. On appelle déterminant d'ordre k de $1 + T$, et l'on désigne par $\det_k(1+T)$ l'expression : $\det_1((1+T)\varphi_k(T))$.

THÉORÈME 1. — *Soit* $T \in \mathcal{L}^k(E)$. *Alors pour que* $1 + T$ *soit inversible, il faut et il suffit que* $\det_k(1+T) \neq 0$.

Démonstration. — En effet, la propriété $\det_k(1+T) \neq 0$ est équivalente au fait que $(1+T)\varphi_k(T)$ soit inversible. Puisque $\varphi_k(T)$ est inversible pour tout T, le résultat voulu est obtenu.

2. THÉORIE DE FREDHOLM GÉNÉRALISÉE. — Soit $T \in \mathcal{L}^k(E)$. Puisque T^k est compacte, le spectre de T est dénombrable avec seul point d'accumulation 0. Rangeons les valeurs propres non nulles de T par ordre de module décroissant : $\{z_1, z_2, \ldots\}$. On désigne par a_i la multiplicité algébrique de la valeur propre z_i [c'est-à-dire le plus petit entier tel que la suite des noyaux $\ker(T - z_i)^n$ stationne pour $n \geqq a_i$] et par b_i la multiplicité géométrique de z_i [c'est-à-dire la dimension de $\ker(T - z_i)^{a_i}$]. On sait que $a_i \leqq b_i$ et que l'ordre de multiplicité du pôle $\frac{1}{z_i}$ dans la fonction méromorphe $z \to (1 - zT)^{-1}$ est a_i. Pour tout z de $\mathbf{C}$, on pose $D_k(z) = \det_k(1 - zT)$. On a alors le :

THÉORÈME 2. — *La fonction* $z \to D_k(z)$ *est une fonction entière de* z. *L'ensemble des zéros de la fonction* $z \to D_k(z)$ *est l'ensemble des* $\left(\frac{1}{z_i}\right)$ *L'ordre de chaque zéro* $\left(\frac{1}{z_i}\right)$ *dans* $D_k(z)$ *est la multiplicité géométrique* b_i *de* z_i.

Démonstration. — Puisque la fonction $u \to \det_1(1+u)$ de $\mathcal{L}^1(E)$ dans $\mathbf{C}$ est entière (*voir* [6]), il en est de même de la fonction $z \to D_k(z)$. Soit z_i une valeur propre de T non nulle. On sait que les sous-espaces $E_1 = \ker(T - z_i)^{a_i}$ et $E_2 = \operatorname{Im}(T - z_i)^{a_i}$ sont supplémentaires topologiques dans E. De plus, chacun d'eux est stable par $(1 - zT)\varphi_k(-zT)$ pour tout z de $\mathbf{C}$. Soient P_1 et P_2 les projecteurs supplémentaires définis par $\operatorname{Im} P_i = E_i (i = 1, 2)$. Rappelons que

$$(1 - zT)\,\varphi_k(-zT) = 1 + (-zT)^k\,\psi_k(-zT).$$

D'après ([6], p. 351), on peut écrire

$$D_k(z) = \det_1(1 - (zT)^k\,\psi_k(-zT)\,P_1)\,\det_1(1 - (zT)^k\,\psi_k(-zT)\,P_2).$$

$1 - (zT)^k\psi_k(-zT)\,P_2$ est un isomorphisme pour $z = z_i$; donc

$$\det_1(1 - (z_iT)^k\psi_k(-z_iT)\,P_2) \neq 0.$$

Par ailleurs, puisque la dimension de E_1 est finie, on peut écrire

$$\begin{aligned}\det_1(1 - (zT)^k\psi_k(-zT)\,P_1) &= \det_1((1 - zT)\,\varphi_k(-zT) \mid E_1)\\ &= \det_1((1 - zT) \mid E_1)\,\det_1(\varphi_k(-zT) \mid E_1).\end{aligned}$$

Puisque, pour tout z de $\mathbf{C}$ $\det_1(\varphi_k(-zT) \mid E_1)$ est non nul, l'ordre de z_i dans $D_k(z)$ est égal à son ordre dans $\det_1((1 - zT) \mid E_1)$. Mais, E_1 est de dimension b_i et $(1 - z_iT) \mid E_1$ est nilpotent; on déduit que cet ordre est b_i. Le théorème est démontré.

Posant alors, pour tout $z \neq z_i$,

$$R_k(z) = (1 - zT)^{-1}\,D_k(z),$$

on a le :

Corollaire. — *La fonction $z \to R_k(z)$ est une fonction entière de z.*

La connaissance des fonctions D_k et R_k permet la détermination de $(1 - zT)^{-1}$ pour tout $z \neq z_i$. Nous allons maintenant donner des formules qui permettent le calcul de D_k et R_k.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Désignons par F_n l'application de $\mathbf{C}^n$ dans l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & n-1 & 0 & & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & x_1 & & 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & x_1 & 1 \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & & x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Citons alors un résultat classique dont nous aurons besoin :

Lemme 1. — *Soit $d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ une série entière convergente à coefficients* *complexes avec* $d_0 \neq 0$. *Si l'on pose* $\dfrac{d'(z)}{d(z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n+1} z^n$, *on a, pour tout* $n \geq 1$, *les formules*

$$d_n = \frac{(-1)^n}{n!} d_0 \det(\mathrm{F}_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)).$$

Démonstration. — On obtient aisément le résultat par identification de $-d'(z)$ et de $d(z) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n+1} z^n$.

PROPOSITION 1. — *Soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^k(\mathrm{E})$, $\mathrm{D}_k(z) = \det_k(1 - z\mathrm{T})$. *Alors, au voisinage de* $z = 0$, *on a*

$$\frac{\mathrm{D}'_k(z)}{\mathrm{D}_k(z)} = -\sum_{n=k}^{\infty} z^{n-1} \operatorname{tr}(\mathrm{T}^n),$$

[tr (T^n) désigne la trace de T^n, définie pour $n \geq k$ puisque T^k est nucléaire].

Démonstration. — Au voisinage de $z = 0$, on a d'après ([6], p. 350) :

$$\mathrm{D}_k(z) = \exp(\operatorname{tr} \operatorname{Log}((1 - z\mathrm{T})\, \varphi_k(-z\mathrm{T}))) \quad (^1).$$

En utilisant la continuité de la trace dans $\mathcal{L}^1(\mathrm{E})$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}'_k(z)}{\mathrm{D}_k(z)} &= \operatorname{tr}\left(\frac{d}{dz} \operatorname{Log}(1 - z\mathrm{T}) + \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(\varphi_k(-z\mathrm{T}))\right) \\
&= \operatorname{tr}(-\mathrm{T}(1 - z\mathrm{T})^{-1} + \mathrm{T} + z\mathrm{T}^2 + \ldots + z^{k-2}\mathrm{T}^{k-1}) \\
&= -\sum_{n=k}^{\infty} z^{n-1} \operatorname{tr}(\mathrm{T}^n).
\end{aligned}$$

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}^k(\mathrm{E})$. *Posons*

$$\mathrm{D}_k(z) = \det_k(1 - z\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k,n}(\mathrm{T})\, z^n.$$

On a alors $\alpha_{k,0}(\mathrm{T}) = 1$ *et, pour* $n > 1$,

$$\alpha_{k,n}(\mathrm{T}) = \frac{(-1)^n}{n!} \det\Big(\mathrm{F}_n(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1}, \operatorname{tr}(\mathrm{T}^k), \ldots, \operatorname{tr}(\mathrm{T}^n))\Big).$$

Démonstration. — Le théorème découle immédiatement de la proposition 1 et du lemme 1 une fois qu'on a constaté que $\mathrm{D}_k(0) = \alpha_{k,0}(\mathrm{T}) = 1$.

---

(1) Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ avec $|\mathrm{A}| < 1$, on pose

$$\operatorname{Log}(1 + \mathrm{A}) = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{A}^2}{2} + \ldots.$$

Nous aurons besoin dans la suite du corollaire suivant :

Corollaire. — *Soient* E_1 et E_2 *deux espaces de Banach complexes et* $T_i \in \mathcal{C}^k(E_i)$. *Supposons que* $\operatorname{tr}(T_1^n) = \operatorname{tr}(T_2^n)$ *pour tout* $n \geqq k$. *Alors*

$$\det_k(1 - zT_1) = \det_k(1 - zT_2).$$

Notamment T_1 *et* T_2 *ont les mêmes valeurs propres, chacune étant comptée avec le même ordre de multiplicité géométrique.*

Théorème 4. — *Soit* $T \in \mathcal{C}^k(E)$. *Posons*

$$R_k(z) = (1 - zT)^{-1} D_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n}(T)\, z^n.$$

On a alors les formules :

$$\beta_{k,0}(T) = 1,$$

$$\beta_{k,n}(T) = \frac{(-1)^n}{n!} \det \begin{bmatrix} 1 & n & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ & & F_n(0, \ldots, 0, \operatorname{tr}(T^k), \ldots, \operatorname{tr}(T^n)) & & & & \\ T^n & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Démonstration. — On a

$$(1 - zT)\, R_k(z) = D_k(z).$$

On déduit les relations

$$\beta_{k,0}(T) = 1,$$

$$\beta_{k,n}(T) - T\beta_{k,n-1}(T) = \alpha_{k,n}(T) \qquad (n \geqq 1).$$

Il est clair que ces relations déterminent complètement les $\beta_{k,n}(T)$. Posons

$$\rho_{k,0}(T) = 1, \qquad \rho_{k,n}(T) = \frac{(-1)^n}{n!} \det \begin{bmatrix} 1 & n & 0 & 0 & \\ T & & & & \\ \vdots & & F_n(0, \ldots, 0, \operatorname{tr}(T^k), \ldots, \operatorname{tr}(T^n)) & & \\ T^n & & & & \end{bmatrix}.$$

Développant le déterminant qui intervient dans l'expression de $\rho_{k,n}(T)$ suivant la première ligne, on obtient

$$\rho_{k,n}(T) = \alpha_{k,n}(T) + T\rho_{k,n-1}(T).$$

On conclut que $\beta_{k,n}(T) = \rho_{k,n}(T)$. Le résultat est obtenu.

3. Genre de $D_k(z)$.

Proposition 2. — *Soit* $T \in \mathcal{C}^k(E)$. *Alors le genre de* $D_k(z)$ *est inférieur ou égal à* $2k - 1$; *en particulier,* $\sum_i |z_i|^{2k} < +\infty$. *On a la formule*

$$D_k(z) = \exp\left(-\operatorname{tr}(T^k)\frac{z^k}{k} - \ldots - \operatorname{tr}(T^{2k-1})\frac{z^{2k-1}}{2k-1}\right) \prod_i (1 - zz_i) \exp\left(z_i z + \ldots + \frac{(z_i z)^{2k-1}}{2k-1}\right).$$

Si E *est un espace de Hilbert, le genre de* $D_k(z)$ *est inférieur ou égal à* $k-1$, *en particulier* $\sum_i |z_i|^k < +\infty$; *on a la formule*

$$D_k(z) = \prod_i (1 - z_i z) \exp\left(z_i z + \ldots + \frac{(z_i z)^{k-1}}{k-1}\right).$$

Démonstration. — Supposons que E soit un espace de Banach. Pour tout $n \geqq 2k$, $\operatorname{tr}(T^n) = \sum_i z_i^n$, puisque T^n est alors le produit de deux applications nucléaires (*voir* [3], chap. II, p. 15).

La décomposition en facteurs primaires de $D_k(z)$ s'écrit donc sous la forme

$$D_k(z) = \exp(f(z)) \prod_i (1 - z z_i) \exp\left(z z_i + \ldots + \frac{(z z_i)^{2k-1}}{2k-1}\right),$$

$f(z)$ étant une fonction entière. Donc, pour $|z|$ assez petit, on a

$$\frac{D'_k(z)}{D_k(z)} = f'(z) - \sum_{n=2k-1}^{\infty} z^n \operatorname{tr}(T^{n+1}).$$

Utilisant la proposition 1, on déduit que :

$$f'(z) = -z^{k-1} \operatorname{tr}(T^k) - \ldots - z^{2k-2} \operatorname{tr}(T^{2k-1}),$$

$$f(z) = -\frac{z^k}{k} \operatorname{tr}(T^k) - \ldots - \frac{z^{2k-1}}{2k-1} \operatorname{tr}(T^{2k-1}) + C.$$

Utilisant le fait que $D_k(0) = 1$ et la convergence uniforme du produit infini, on constate que $C = 0$. La formule désirée est obtenue. Supposons maintenant que E soit un espace de Hilbert. Alors pour tout $n \geqq k$, $\operatorname{tr}(T^n) = \sum_i z_i^n$ (*voir* [1], p. 1093). Utilisant la même méthode que précédemment, on obtient la formule voulue.

Corollaire. — *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}^2(E)$. *Supposons que* $\sum_i |z_i|^2 < +\infty$. *Alors*

$$D_2(z) = \exp\left(\frac{\sum_i z_i^2 - \operatorname{tr}(T^2)}{2} z^2 + \frac{\sum_i z_i^3 - \operatorname{tr}(T^3)}{3} z^3\right) \prod_i (1 - z z_i) \exp(z z_i).$$

Ce résultat découle directement de la proposition 2. On peut se demander si l'on n'a pas

$$\sum_i z_i^2 = \operatorname{tr}(T^2), \qquad \sum_i z_i^3 = \operatorname{tr}(T^3).$$

Nous verrons dans les applications un certain nombre de cas où la réponse est positive.

Remarque 1. — Dans le cas où E est un espace de Hilbert, nous verrons dans les applications que le résultat indiqué dans la proposition 2 sur le genre de $D_k(z)$ n'est pas améliorable. Dans le cas où E est un espace de Banach, la question est ouverte. Le problème qui se pose tout d'abord est de savoir si l'on peut trouver $T \in \mathcal{L}^k(E)$ de valeurs propres z_i telles que

$$\sum_i |z_i|^{2k} < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_i |z_i|^{2k-\varepsilon} = +\infty \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Nous avons pu obtenir le résultat suivant :

Proposition 3. — *Pour tout entier $k \geqq 1$, il existe une application* T *de puissance k^{ieme} nucléaire, de valeurs propres (z_i) telles que :*

$$\sum_i |z_i|^{k+1} < +\infty, \qquad \sum_i |z_i|^{k+1-\varepsilon} = +\infty \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Démonstration. — Soit T le tore à une dimension, $L^1(T)$ [resp. C (T)] l'espace de Banach des classes de fonctions complexes sommables sur T à valeurs complexes (resp. l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur T). A tout $g \in L^1(T)$ correspond une application linéaire continue A de C (T) dans C (T) définie par

$$f \to A(f) = f \star g \qquad (f \star g \text{ est la convolution de } f \text{ et } g).$$

Pour que A^k soit nucléaire, il suffit que $g \star g \star \ldots \star g$ (k facteurs) représente une fonction continue. On sait, par ailleurs, que les valeurs propres non nulles de A sont les coefficients de Fourier de g.

Considérons alors la série :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta} \frac{1}{(\operatorname{Log} n)^\gamma} \exp(ipn^\alpha + inx) \qquad (\alpha \in R,\ \beta \in R,\ \gamma \in R,\ x \in T,\ p \text{ réel positif}).$$

C'est la série de Fourier d'un élément de $L^1(T)$ si

$$0 < \alpha < 1, \qquad \beta = \frac{\alpha}{2}, \qquad \gamma > 1, \qquad p = 1 \quad \text{d'après ([13], p. 202)}.$$

Reprenant la même méthode que celle employée par Zygmund ([13], p. 200), on montre que c'est la série de Fourier d'une fonction continue si

$$0 < \alpha < 1, \qquad \beta + \frac{\alpha}{2} \geqq 1, \qquad \gamma > 1, \qquad n \text{ réel positif}.$$

Soit alors k un entier supérieur ou égal à 1 et $g \in L^1(T)$ défini par la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{k+1}}} \frac{1}{(\operatorname{Log} n)^2} \exp\left(in^{\frac{2}{k+1}} + inx\right).$$

On vérifie que l'application linéaire continue de C (T) dans C (T) définie par $f \to A(f) = f \star g$ est de puissance $k^{\text{ième}}$ nucléaire. Ses valeurs propres (z_i) sont telles que

$$\sum_i |z_i|^{k+1} < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_i |z_i|^{k+1-\varepsilon} = +\infty.$$

C'est le résultat que nous avions en vue.

Remarque 2. — Nous aurons besoin dans le chapitre II d'utiliser certains des résultats que nous venons d'obtenir dans des conditions un peu différentes. Regroupons-les ici :

On ne fait plus l'hypothèse que les espaces de Banach étudiés satisfont à l'hypothèse d'approximation. Soit E un espace de Banach complexe et T une application linéaire continue de rang fini de E dans E.

Alors si l'on pose

$$\det_2(1 - T) = \det_1((1 - T)\exp(T)) = \det_1(1 - T)\exp(\operatorname{tr}(T)),$$

on aura

$$\det_2(1 - T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2,n}(T),$$

les $\alpha_{2,n}(T)$ étant donnés par les formules du théorème 3.

Pour tous les z tels que $1 - zT$ soit inversible, on définit :

$$R_2(z) = (1 - zT)^{-1} \det_2(1 - zT) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2,n}(T)\, z^n.$$

Alors les $\beta_{2,n}(T)$ sont donnés par les formules du théorème 4. De plus, $R_2(z)$ est entière une fois prolongée par continuité à $\mathbf{C}$. Par ailleurs, l'expression $r_2(T) = R_2(1)$ vérifie la formule

$$(1 - T)\, r_2(T) = r_2(T)\,(1 - T) = \det_2(1 - T).$$

Enfin, si T_1 une application linéaire de rang fini d'un espace de Banach F dans lui-même telle que $\operatorname{tr}(T^n) = \operatorname{tr}(T_1^n)$ pour $n \geqq 2$, on aura

$$\det_2(1 - zT) = \det_2(1 - zT_1),$$

pour tout z complexe.

4. Cas des espaces de type L, C ou H. — Nous dirons qu'un espace de Banach E est

— de type L, s'il est isomorphe en tant qu'espace vectoriel normé à un espace $L^1(M)$ (M espace localement compact, muni d'une mesure μ positive);

— de type C, s'il est isomorphe en tant qu'espace vectoriel normé à l'espace de Banach des fonctions continues sur un espace localement compact M, « nulles à l'infini »;

— de type H si c'est un espace de Hilbert.

En application de résultats de Grothendieck [4] et de notre méthode, on a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Soient* F *et* G *deux espaces de Banach complexes. Supposons que* F *et* G *soient de type* L, C *ou* H, *les types de* F *et* G *étant différents. Soit* T *une application linéaire continue de* F *dans* F *qui se factorise sous la forme :*

$$\mathrm{T}:\quad \mathrm{F} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{F}, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{BA},$$

A *et* B *étant des applications linéaires continues. On a alors les résultats suivants :*

1° T *est de carré nucléaire;*

2° *Les valeurs propres de* T *sont de carrés sommables;*

3° *Si l'on désigne par* (z_i) *les valeurs propres de* T, *on* à

$$\mathrm{Det}_2(1 - z\mathrm{T}) = \prod_i (1 - zz_i)\exp(zz_i).$$

Démonstration. — 1° s'obtient directement en application de résultats de Grothendieck [4], p. 65). Démontrons 2° et 3°. Faisons un tableau des différents cas possibles :

Type de F.	Type de G.	
L	H.............	$\mathrm{L} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{L}$
H	L.............	$\mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{L} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{H}$
C	H.............	$\mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{C}$
H	C.............	$\mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{H}$
L	C.............	$\mathrm{L} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{L}$
C	L.............	$\mathrm{C} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{L} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{C}$

Dans le deuxième et le quatrième cas, on sait (d'après [4], p. 65), que T est de Hilbert-Schmidt et les résultats sont alors en évidence d'après la proposition 2.

Étudions le premier et le troisième cas. Posons K = AB. Il est clair que K est de Hilbert-Schmidt. Pour tout entier $n \geqq 2$, on a

$$\mathrm{tr}(\mathrm{T}^n) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA.BA} \ldots \mathrm{BA}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AB}, \ldots, \mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{K}^n),$$

(en effet, d'après [4], p. 65, ABA est déjà nucléaire) (¹).

(¹) Nous utilisons ici le résultat suivant :

LEMME. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, *u un élément du produit tensoriel projectif complété de* E′ *et* F. *Alors* tr (*u*T) = tr (T*u*).

Le résultat est immédiat si *u* est décomposé. On l'obtient par passage à la limite dans le cas général.

D'après le corollaire du théorème 3, on conclut que

$$\det_2(1 - zT) = \det_2(1 - zK).$$

Mais

$$\det_2(1 - zK) = \prod_i (1 - zz_i) \exp((zz_i)$$

d'après la proposition 2. Étudions enfin le cinquième et le sixième cas.

Prenons, par exemple, le cinquième cas. On sait (*voir* [4], p. 61) qu'une application linéaire continue $B : C \to L$ se factorise sous la forme

$$C \xrightarrow{B_1} H \xrightarrow{B_2} L,$$

B_1 et B_2 étant linéaires continues et H un espace de Hilbert. Donc T se factorise sous la forme :

$$L \xrightarrow{A} C \xrightarrow{B_1} H \xrightarrow{B_2} L.$$

Le cinquième cas est alors ramené au premier. De même, le sixième cas se ramène au troisième.

Lemme 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels,* U *une application linéaire de* E *dans* F, V *une application linéaire de* F *dans* E. *Alors pour tout entier* n *positif,* $\dim \ker (1_E + VU)^n = \dim \ker (1_F + UV)^n$ (nous convenons que la dimension d'un sous-espace vectoriel est un entier positif ou nul ou $+\infty$).

Démonstration. — On constate que

$$(1_E + VU)^n V = V(1_F + UV)^n.$$

Soit $x \in \ker (1_F + UV)^n$ et non nul. Alors $Vx \in \ker (1_E + VU)^n$ et l'on vérifie que $Vx \neq 0$. On déduit alors que

$$\dim \ker(1_E - VU)^n \geq \dim \ker(1_F + UV)^n.$$

Le lemme s'en déduit immédiatement.

Proposition 4. — *Soit* E *un espace de Banach complexe et* T *une application intégrale de* E *dans* E (*voir* [3], chap. I, p. 124) (on ne fait pas ici l'hypothèse que E vérifie la propriété d'approximation). *Alors les valeurs propres de* T *comptées avec leur ordre de multiplicité géométrique sont de carré sommables.*

Démonstration. — Si T est une application intégrale de E dans E, on sait ([3], chap. I, p. 162) qu'il existe un espace compact M et une mesure positive μ de masse finie sur M telle que T se factorise sous la forme :

$$E \to L^\infty(\mu) \to L^2(\mu) \to E,$$

ou même

$$E \xrightarrow{A} C \xrightarrow{B} L^2(\mu) \xrightarrow{D} E,$$

C désignant un espace de type C [on sait que tout espace $L^\infty(\mu)$ est isomorphe à un espace de type C]. On a alors $T = DBA$. Posons $K = BAD$. Il est clair que K est de Hilbert-Schmidt ([4], p. 65). D'après le lemme 2, pour tout z complexe et pour tout entier n, on a

$$\dim \ker(1 - zK)^n = \dim \ker(1 - zT)^n.$$

On conclut que K et T ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité géométrique et le résultat.

Corollaire. — *Si* E *vérifie l'hypothèse d'approximation et si* T *est une application intégrale de* E *dans* E *on a*

$$\det_2(1 - zT) = \prod_i (1 - zz_i)\exp(zz_i) \qquad et \qquad \operatorname{tr}(T^n) = \sum_i z_i^n \qquad (n \geqq 2).$$

Démonstration. — On démontre, sans difficulté, que pour $n \geqq 2$, $\operatorname{tr}(T^n) = \operatorname{tr}(K^n)$ (car BADBA est nucléaire, *voir* [4], p. 65). Les résultats en vue s'en déduisent immédiatement.

CHAPITRE II.

Produit tensoriel Hilbertien et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach.

Dans ce chapitre, il n'est pas supposé, sauf mention expresse du contraire, que les espaces de Banach étudiés satisfont à l'hypothèse d'approximation. Dans les paragraphes 1 et 2, ils seront, indifféremment, tous réels ou tous complexes.

1. Produit tensoriel hilbertien a droite et a gauche. — Désignons par l^2 l'espace de Hilbert des suites de scalaires de carrés sommables et par $(e_1, e_2, \ldots)$ la base orthonormale canonique de l^2. Soit F un espace de Banach. Rappelons (*voir* [5], p. 87) qu'une application linéaire continue B de l^2 dans F est définie par une suite $(y_1, y_2, \ldots)$ d'éléments de F scalairement de carrés sommables [c'est-à-dire telle que pour tout y' de F' la suite $(\langle y_i, y'_i \rangle)_i$ appartienne à l^2], à l'aide des formules : $B(e_i) = y_i$.

Nous désignerons par $M_2((y_i)_i)$, ou $M_2(y_i)$ s'il n'y a pas ambiguïté, la norme de l'application B. On a

$$M_2(y_i) = \sup_{\substack{(\alpha_i) \in l^2 \\ \sum_i |\alpha_i|^2 = 1}} \left| \sum_i \alpha_i y_i \right| = \sup_{\substack{y' \in F' \\ |y'| = 1}} \left(\sum_i |\langle y_i, y' \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si une suite (y_i) de F n'est pas scalairement de carré sommable, on posera $M_2(y_i) = +\infty$. Si $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est une suite finie d'éléments de F, on peut, en complétant cette suite par des zéros, considérer qu'elle définit une application de l^2 dans F. Remarquons par ailleurs que toute suite $(x'_i)_i$ scalairement de carré sommable de F′, définit une application linéaire continue A de F dans l^2 :

$$A : \quad x \to A(x) = \sum_i e_i \langle x, x'_i \rangle.$$

Puisque la boule unité de F muni de la topologie affaiblie est dense dans celle de F″, on déduit que

$$|A| = M_2(x'_i) = \sup_{\substack{x \in F \\ |x|=1}} \left(\sum_i |\langle x, x'_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, on constate immédiatement que $M_2(y_i)$ ne change pas si l'on permute les y_i. Si I est un ensemble dénombrable qui admet la partition $I = \bigcup_\lambda I_\lambda$ et si $(y_i)_{i\in I}$ désigne une famille d'éléments de F scalairement de carrés sommables, on vérifie que

$$M_2((y_i)_{i\in I}) \leq \sum_\lambda M_2((y_i)_{i\in I_\lambda}).$$

Soient E et F deux espaces de Banach et u un élément de $E \otimes F$. Posons

$$g_2(u) = |u|_{g_2} = \inf \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i),$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme

$$u = \sum_i x_i \otimes y_i.$$

Posons aussi

$$d_2(u) = |u|_{d_2} = \inf \left(\sum_i |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} M_2(x_i).$$

LEMME 1. — *Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des u de $E \otimes F$ qui admettent une représentation :*

$$u = \sum_i x_i \otimes y_i, \qquad \textit{avec} \quad \sum_i |x_i|^2 \leq 1 \quad \textit{et} \quad M_2(y_i) \leq 1.$$

Alors $\mathcal{V}$ est un ensemble convexe, absorbant, symétrique qui admet g_2 pour jauge.

Démonstration. — Soient u_1 et u_2 deux éléments de $\mathcal{V}$:

$$u_1=\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \qquad \text{avec} \quad \sum_i |x_i|^2 \leqq 1, \qquad M_2(y_i) \leqq 1;$$
$$u_2=\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes s_i, \qquad \text{avec} \quad \sum_i |t_i|^2 \leqq 1, \qquad M_2(s_i) \leqq 1$$

(on peut toujours supposer que u_1 et u_2 ont le même nombre de termes). Soient φ un nombre réel $\alpha_1 = \cos^2\varphi$, $\alpha_2 = \sin^2\varphi$. Montrons que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est un élément de $\mathcal{V}$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cos\varphi \otimes y_i \cos\varphi + t_i \sin\varphi \otimes s_i \sin\varphi.$$

Or, d'une part :

$$\sum_i |x_i|^2 \cos^2\varphi + |y_i|^2 \sin^2\varphi \leqq 1;$$

d'autre part, pour tout y' de F' de norme 1, on a

$$\sum_i |\langle y_i, y'\rangle|^2 \cos^2\varphi + |\langle s_i, y'\rangle|^2 \sin^2\varphi \leqq 1.$$

Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est un élément de $\mathcal{V}$; $\mathcal{V}$ est convexe. Il est par ailleurs clair que $\mathcal{V}$ est absorbant et symétrique. Enfin, on vérifie immédiatement que g_2 est la jauge de $\mathcal{V}$. Le lemme est démontré.

Par ailleurs, on sait que $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ sont en dualité. On a la propriété suivante :

Lemme 2. — *Soient* $u \in E \otimes F$ *et* $u' \in E' \otimes F'$. *Alors*

$$|\langle u, u'\rangle| \leqq |u|_{g_2} |u'|_{d_2}.$$

Démonstration. — Posons

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \qquad u' = \sum_{j=1}^{p} x'_j \otimes y'_j.$$

Alors :

$$\langle u, u'\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, x'_j\rangle \langle y_i, y'_j\rangle,$$

$$|\langle u, u'\rangle| \leqq \left(\sum_{i,j} \langle x_i, x'_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j} |\langle y_i, y'_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\sum |\langle x_i, x'_j\rangle|^2 \leqq M_2^2(x'_j)\, |x_i|^2.$$

D'où

$$\sum_{i,j} |\langle x_i, x'_j\rangle|^2 \leqq M_2^2(x'_j) \sum_i |x_i|^2.$$

De même,

$$\sum_{i,j} |\langle y_i, y'_j \rangle|^2 \leq M_2^2(y_i) \sum_i |y'_i|^2.$$

THÉORÈME 1. — *d_2 et g_2 sont des normes sur* $E \otimes F$.

Démonstration. — Le fait que g_2 soit une semi-norme découle du lemme 1. Soit alors $u \in E \otimes F$ avec $|u|_{g_2} = 0$. Puisque $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ sont en dualité, on déduit du lemme 2 que $u = 0$.

On procède de même pour d_2. Le résultat voulu est obtenu.

On note $E \otimes_{g_2} F$ (resp. $E \hat{\otimes}_{g_2} F$) le produit tensoriel de E et F muni de g_2 (resp. le produit tensoriel de E et F muni de g_2 et complété). On dit que $E \otimes_{g_2} F$ est le produit tensoriel hilbertien à gauche de E et F (resp. le produit tensoriel hilbertien à gauche complété). On définit et l'on désigne d'une manière analogue $E \otimes_{d_2} F$ et $E \hat{\otimes}_{d_2} F$.

Remarque. — Soit $u \in E \otimes F$. Notons $u \to {}^t u$ l'isomorphisme (algébrique) naturel de $E \otimes F$ sur $F \otimes E$. Alors $|u|_{d_2} = |{}^t u|_{g_2}$ et $|u|_{g_2} = |{}^t u|_{d_2}$.

2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES. — 1° *Propriétés du produit tensoriel hilbertien.* — Nous allons mettre en évidence les propriétés élémentaires des normes d_2 et g_2. Nous énoncerons, en général, ces propriétés pour g_2 seulement. On obtient sans difficulté les propriétés analogues pour d_2.

PROPOSITION 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* E′ *et* F′ *leurs duals topologiques,* $x \in E$, $y \in F$, $x' \in E'$, $y' \in F'$. *On a alors les propriétés suivantes :*

(1) $|x \otimes y|_{g_2} = |x| . |y|$;

(2) $\|x' \otimes y'\|_{g'_2} = |x'| . |y'|$ [2].

Démonstration. — Il est clair que $|x \otimes y|_{g_2} \leq |x| . |y|$.

Par ailleurs, soit

$$u \in E \otimes_{g_2} F, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \qquad u' = x' \otimes y';$$

$$\langle u, u' \rangle = \sum_i \langle x_i, x' \rangle \langle y_i, y' \rangle;$$

$$|\langle u, u' \rangle| \leq \left(\sum_i |\langle x_i, x' \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i |\langle y_i, y' \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$|\langle u, u' \rangle| \leq \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i)\, |x'| . |y'|.$$

[2] Soit $u' \in E' \otimes F'$. Alors $\| u' \|_{g'_2}$ désigne la norme de u' considéré comme élément de $(E \hat{\otimes}_{g_2} F)'$.

On déduit

$$|\langle u, u'\rangle| \leq |u|_{g_2} |x'|.|y'|.$$

Donc

$$\|u'\|_{g'_2} \leq |x'|.|y'|.$$

Posons alors $v = x \otimes y$. On a

$$\langle v, u'\rangle = \langle x, x'\rangle \langle y, y'\rangle;$$
$$|\langle v, u'\rangle| \leq |v|_{g_2} \|u'\|_{g'_2} \leq |x|.|x'|.|y|.|y'|.$$

Utilisant le théorème de Hahn-Banach, on conclut immédiatement

$$|x \otimes y|_{g_2} = |x|.|y| \qquad \text{et} \qquad \|x' \otimes y'\|_{g'_2} = |x'|.|y'|.$$

PROPOSITION 2. — *Soient* E, F, E_1, F_1 *quatre espaces de Banach,* A *une application linéaire continue de* E *dans* E_1, B *une application linéaire continue de* F *dans* F_1. *Alors* $A \otimes B$ *est une application linéaire continue de* $E \otimes_{g_2} F$ *dans* $E_1 \otimes_{g_2} F_1$. *Si l'on désigne par* $A \hat{\otimes}_{g_2} B$ *l'application étendue par continuité de* $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ *dans* $E_1 \hat{\otimes}_{g_2} F_1$, *on a*

$$|A \hat{\otimes}_{g_2} B| = |A|.|B|.$$

Démonstration. — Soit

$$u \in E \otimes_{g_2} F, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i.$$

Alors

$$(A \otimes B)(u) = \sum_{i=1}^{n} Ax_i \otimes By_i.$$

Or

$$\left(\sum_i |A(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(B(y_i)) \leq |A|.|B|\left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i).$$

On déduit

$$|(A \otimes B)(u)|_{g_2} \leq |A|.|B|.|u|_{g_2}.$$

Donc

$$|A \hat{\otimes}_{g_2} B| \leq |A|.|B|.$$

Mais

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By,$$
$$|(A \otimes B)(x \otimes y)|_{g_2} = |Ax|.|By|.$$

On conclut

$$|A \hat{\otimes}_{g_2} B| = |A|.|B|.$$

Remarque 1. — Les propositions 1 et 2 indiquent que d_2 et g_2 sont des normes tensorielles uniformes (uniform-cross-norm) au sens de Schatten ([10], p. 29). Par ailleurs, les topologies induites par d_2 et g_2 satisfont aux conditions 1, 2, 3 de Grothendieck ([3], p. 89, 93) (toujours d'après les propositions 1 et 2).

Remarque 2. — Soient $u \in E \otimes_{g_2} F$ fixé, M (resp. N) un sous-espace vectoriel de dimension finie de E (resp. de F). Supposons que $u \in M \otimes N$. Alors on constate immédiatement que la norme g_2 de u considéré comme un élément de $E \otimes_{g_2} F$ est la borne inférieure, prise sur l'ensemble des couples (M, N), des normes g_2 de u considéré comme élément de $M \otimes_{g_2} N$. Cette remarque, jointe aux propositions 1 et 2, implique que g_2 et d_2 sont des $\otimes$-normes au sens de Grothendieck ([4], p. 8′).

LEMME 3. — *Soient* (x_i) *une suite dans* E, (y_i) *une suite dans* F *telles que*

$$\sum_i |x_i|^2 < +\infty \qquad \textit{et} \qquad M_2(y_i) < +\infty.$$

Alors la famille $(x_i \otimes y_i)$ *est sommable dans* $E \hat{\otimes}_{g_2} F$.

Démonstration. — Soit N l'ensemble des entiers $\geqq 0$. A tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre une partie A finie de N telle que pour toute partie finie J de N vérifiant $J \cap A = \emptyset$, on ait

$$\left(\sum_{i \in J} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Alors

$$\left|\sum_{i \in J} x_i \otimes y_i\right|_{g_2} \leqq \varepsilon\, M_2((y_i)_{i \in J}) \leqq \varepsilon\, M_2(y_i).$$

Le lemme est démontré.

PROPOSITION 3. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $u \in E \widehat{\otimes_{g_2}} F$. *Alors, il existe une suite* (x_i) *de* E, *une suite* (y_i) *de* F *telles que*

$$\sum_i |x_i|^2 < +\infty, \qquad M_2(y_i) < +\infty, \qquad \textit{avec} \quad u = \sum_i x_i \otimes y_i.$$

De plus,

$$|u|_{g_2} = \inf\left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i),$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme $\sum_i x_i \otimes y_i$.

Démonstration. — Soit $u \in E \hat{\otimes}_{g_2} F$. Il existe une suite (u_n) d'éléments de $E \otimes_{g_2} F$ telle que $|u_n - u|_{g_2} \to 0$. Quitte à remplacer la suite (u_n) par une suite extraite, on peut supposer que $|u_n - u_{n-1}|_{g_2} \leq \frac{1}{2n^2}$.

On peut alors écrire

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots,$$

et aussi

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{i=1}^{k(n)} x_{i,n} \otimes y_{i,n}.$$

Par ailleurs, puisque $|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{2n^2}$, on peut choisir les $x_{i,n}$ et les $y_{i,n}$ tels que

$$\left(\sum_i |x_{i,n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n},$$

$$M_2((y_{i,n})_i) \leq \frac{1}{n},$$

Donc

$$\sum_{i,n} |x_{i,n}|^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad M_2((y_{i,n})_{i,n}) < +\infty.$$

On peut donc écrire

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i,$$

avec

$$\sum_i |x_i|^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad M_2(y_i) < +\infty.$$

Posons $v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. On a

$$|v_n|_{g_2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2((y_i)_{1 \leq i \leq n}) \leq \left(\sum_{1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i).$$

Par passage à la limite, on déduit

$$|u|_{g_2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i).$$

Par ailleurs,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i) \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] (M_2((y_i)_{1 \leq i \leq n}) + M_2((y_i)_{i>n})).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Quitte à bien choisir les x_i, les y_i et n, on peut supposer que

$$|v_n - v|_{g_2} < \varepsilon, \qquad |v_n|_{g_2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2((y_i)_{1 \leq i \leq n}) - \varepsilon, \qquad \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

$$M_2((y_i)_{i > n}) < \varepsilon,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K, \qquad M_2((y_i)_{1 \leq i \leq n}) \leq K,$$

K étant une constante qui ne dépend que de u. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i) \leq |v_n|_{g_2} + \varepsilon + K\varepsilon + K\varepsilon + \varepsilon^2$$

ou

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_2(y_i) \leq |u|_{g_2} + 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 2K\varepsilon.$$

Le résultat est complètement démontré.

2° *Les applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach.*

PROPOSITION 4. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Alors l'injection naturelle de* $E \otimes_{g_2} F$ *dans* $\mathcal{L}(E', F)$ *se prolonge en une application linéaire continue, de norme inférieure ou égale à* 1, *de* $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ *dans* $\mathcal{L}(E', F)$. *Cette application sera notée* $u \to \tilde{u}$.

Démonstration. — Soit

$$u \in E \otimes_{g_2} F, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i.$$

L'application $\tilde{u}$ est définie par

$$x' \to \tilde{u}(x') = \sum_{i=1}^{n} y_i \langle x_i, x' \rangle.$$

Désignons par l^2 l'espace de Hilbert des suites de carrés sommables et par (e_i) la base canonique de l^2. Alors, on peut écrire $\tilde{u} = BA$, avec :

$A \in \mathcal{L}(E', l^2)$ définie par

$$x' \to A(x') = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle x_i, x' \rangle;$$

$B \in \mathcal{L}(l^2, F)$ définie par

$$e_i \to B(e_i) = y_i,$$

(on pose $y_k = 0$ pour $k > n$).

Il est clair que

$$|A| = M_2((x_i)_{1 \leq i \leq n}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et que} \qquad |B| = M_2(y_i).$$

Puisque $|\tilde{u}| \leq |A|.|B|$, on déduit que : $|\tilde{u}| \leq |u|_{g_2}$.

Lorsqu'on prolonge l'application $u \to \tilde{u}$ à $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ il y a conservation de la norme. Le résultat est démontré.

Corollaire. — *Il existe une application linéaire continue naturelle* $E' \hat{\otimes}_{g_2} F$ *dans* $\mathcal{L}(E, F)$. *Cette application sera encore notée* $u \to \tilde{u}$.

Définition. — On dit qu'un élément T de $\mathcal{L}(E, F)$ est de Hilbert-Schmidt à gauche si T appartient à l'image de l'application naturelle de $E' \hat{\otimes}_{g_2} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble des applications de Hilbert-Schmidt à gauche sera noté : $L_g^2(E, F)$.

On démontre d'une manière analogue qu'il existe une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1, de $E' \hat{\otimes}_{d_2} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. L'image de cette application est notée $L_d^2(E, F)$; les éléments de cette image sont appelés applications de Hilbert-Schmidt à droite.

Si N est le noyau de l'application $E' \hat{\otimes}_{g_2} F \to \mathcal{L}(E, F)$, $L_g^2(E, F)$ peut s'identifier à l'espace quotient $E' \hat{\otimes}_{g_2} F/N$ et on le munira de la norme quotient qui en fait un espace de Banach. Si $T \in L_g^2(E, F)$, on note cette norme $|T|_{g_2}$. D'après la proposition 4, on a $|T| \leq |T|_{g_2}$. Par ailleurs, il est clair que $L_g^2(E, F)$ est formé d'applications compactes. On procède de même avec $L_d^2(E, F)$.

Remarque. — L'application de $E' \otimes_{g_2} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est injective. On ne sait si elle reste injective si on l'étend à $E' \hat{\otimes}_{g_2} F$. La liaison de cette question avec l'hypothèse d'approximation sera examinée dans la proposition 10.

Donnons maintenant quelques propriétés immédiates des applications de Hilbert-Schmidt.

Proposition 5. — *Soit* $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} F$, $\tilde{u}$ *l'élément de* $\mathcal{L}(E, F)$ *associé. Si l'on pose* $u = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y_i$, *on a la propriété suivante de factorisation de* $\tilde{u}$:

$$\tilde{u} : \quad E \xrightarrow{A} l^2 \xrightarrow{B} F.$$

Si l'on désigne par (e_i) *la base canonique de* l^2, A *est défini par*

$$x \to A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \langle x, x'_i \rangle$$

et B *par*

$$e_i \to B(e_i) = y_i.$$

On a $\tilde{u} = BA$. *Donc*

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \langle x, x'_i \rangle.$$

Enfin, si l'on pose $|A|_2 = \left(\sum_i |x'_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *on a*

$$|\tilde{u}|_{g_2} = \inf |A|_2 |B|,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de $\tilde{u}$ *de la forme* $\tilde{u} = BA$, *avec* $|A|_2 < +\infty$.

Démonstration. — Ces propriétés s'obtiennent immédiatement par passage à la limite, sauf la propriété indiquée pour $|\tilde{u}|_{g_2}$ qui s'obtient en utilisant la proposition 3 et la définition de $|\tilde{u}|_{g_2}$.

Remarque. — On peut énoncer des résultats analogues concernant les applications de Hilbert-Schmidt à droite.

Soient E, E_1, F, F_1 quatre espaces de Banach,

$$u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} F, \qquad A \in \mathcal{L}(F, F_1), \qquad B \in \mathcal{L}(E_1, E).$$

Alors $({}^tB \hat{\otimes}_{g_2} A)(u)$ est un élément de $E'_1 \hat{\otimes}_{g_2} F_1$. On pose

$$({}^tB \hat{\otimes}_{g_2} A)(u) = AuB.$$

On constate sans difficulté que l'application $(A, u, B) \to AuB$ est trilinéaire et de norme inférieure ou égale à 1; on vérifie par ailleurs que

$$(AuB)^{\sim} A\tilde{u}B \qquad \text{et aussi que} \qquad A_1(AuB)B_1 = (A_1A)\,u\,(BB_1).$$

De même, on vérifie que si

$$u_1 \in E'_1 \hat{\otimes}_{g_2} E, \qquad B \in \mathcal{L}(E, F), \qquad v_1 \in F' \hat{\otimes}_{g_2} F_1,$$

on a

$$(v_1 B)\,u_1 = v_1(Bu_1).$$

On pose alors

$$v_1 B u_1 = (v_1 B)\,u_1 = v_1(Bu_1).$$

Enfin, si $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} F$ et $v \in F' \hat{\otimes}_{g_2} G$ (E, F, G sont des espaces de Banach) on constate que $\tilde{v}u = v\tilde{u}$ est un élément de $E' \hat{\otimes}_{g_2} G$ qu'on note vu. La multiplication que nous venons de définir est associative; elle est telle que $|vu|_{g_2} \leq |v|_{g_2} |u|_{g_2}$ [pour s'assurer de cette inégalité, il suffit d'utiliser le fait que l'application $(A, u, B) \to AuB$ mentionnée plus haut est de norme inférieure ou égale à 1]. Il en découle que $E' \hat{\otimes}_{g_2} E$ est une algèbre de Banach (sans unité si E n'est pas de dimension finie). L'application de $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ dans $\mathcal{L}(E)$ est un homomorphisme d'algèbre.

Proposition 6. — *Soient* E, E_1, F, F_1 *quatre espaces de Banach*, $A\in\mathcal{L}(E_1, E)$, $B\in\mathcal{L}(F, F_1)$, $T\in L^2_g(E, F)$. *Alors* BTA *est une application de Hilbert-Schmidt à gauche de* E_1 *dans* F_1. *De plus*, $|BTA|_{g_2}\leqq|B|.|A|.|T|_{g_2}$.

Démonstration. — Soit $u\in E'\hat{\otimes}_{g_2}F$ tel que $\tilde{u}=T$.

Alors $BTA=B\tilde{u}A$. On déduit

$$|BTA|_{g_2}\leqq|B|.|A|.|u|_{g_2}.$$

Donc

$$|BTA|_{g_2}\leqq|B|.|A|.|T|_{g_2}.$$

Proposition 7. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* T *une application de Hilbert-Schmidt à gauche de* E *dans* F. *Supposons que* ImT *soit contenu dans un sous-espace de Banach* F_1 *de* F *et soit* T_1 *l'application linéaire continue de* E *dans* F_1 *qui prend les mêmes valeurs que* T. *Alors* T_1 *est une application de Hilbert-Schmidt à gauche et* $|T_1|_{g_2}=|T|_{g_2}$.

Démonstration. — D'après la proposition 5, il existe une factorisation de T sous la forme $T: E\xrightarrow{A}l^2\xrightarrow{B}F$, avec A et B linéaires continues et $|A|_2<+\infty$. Soit M la fermeture dans l^2 du sous-espace $B^{-1}(\mathrm{Im}T)$ et P le projecteur orthogonal de l^2 sur M. Désignons par B_1 l'application linéaire continue de l^2 dans F_1 qui prend les mêmes valeurs que BP. Alors $T_1=B_1A$. Il est clair que T_1 est une application de Hilbert-Schmidt à gauche et que $|T_1|_{g_2}\leqq\inf|B_1|.|A|_2$ (la borne inférieure est prise sur l'ensemble des représentations de T de la forme BA; à chaque B on associe B_1). On a évidemment $|B_1|\leqq|B|$. On déduit que $|T_1|_{g_2}\leqq|T|_{g_2}$. Par ailleurs, si i désigne l'injection de F_1 dans F, on a $T=iT_1$. D'après la proposition 6, on déduit $|T|_{g_2}\leqq|T_1|_{g_2}$. Le résultat est obtenu.

Corollaire 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach*, F_1 *un sous-espace de Banach de* F. *Alors l'injection naturelle de* $E\hat{\otimes}_{g_2}F_1$ *dans* $E\hat{\otimes}_{g_2}F$ *conserve la norme.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer le résultat pour l'injection de $E\otimes_{g_2}F_1$ dans $E\otimes_{g_2}F$. Utilisant l'application naturelle de $E\otimes_{g_2}F_1$ dans $\mathcal{L}(E', F_1)$ on se ramène immédiatement au résultat précédent.

Corollaire 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach*, E_1 *un sous-espace de Banach de* E. *Alors l'injection naturelle de* $E_1\hat{\otimes}_{d_2}F$ *dans* $E\otimes_{d_2}F$ *conserve la norme.*

Remarque. — Avec la terminologie de [4], (p. 25) les corollaires 1 et 2 s'énoncent sous la forme : g_2 est injective à droite, d_2 est injective à gauche.

3° *Relations avec le produit tensoriel projectif.* — Le produit tensoriel projectif (*voir* [3], p. 28) de deux espaces de Banach E et F sera noté $E \otimes_\pi F$ et la norme d'un élément u de cet espace, $|u|_\pi$.

Proposition 8. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Alors l'identité de* $E \otimes_\pi F$ *dans* $E \otimes_{g_2} F$ (*resp.* $E \otimes_{d_2} F$) *est continue et se prolonge en une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à* 1 *de* $E \hat{\otimes}_\pi F$ *dans* $E \hat{\otimes}_{g_2} F$.

Démonstration. — D'après Schatten ([10], p. 38) le résultat est évident puisque la norme π est la plus grande norme tensorielle uniforme (uniform cross norm). On peut en donner la démonstration élémentaire suivante :

Soit $u \in E \otimes F$. On peut écrire

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i, \qquad \text{avec} \quad |x_i| \leq 1, \qquad |y_i| \leq 1,$$

ou aussi

$$u = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\, x_i \otimes \sqrt{\lambda_i}\, y_i.$$

Alors

$$\left(\sum_i |\sqrt{\lambda_i}\, x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_i |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_2(y_i) = \sup_{\substack{y' \in F' \\ |y'|=1}} \left(\sum_i |\langle \sqrt{\lambda_i}\, y_i, y' \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_i |\lambda_i|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit que $|u|_{g_2} \leq |u|_\pi$. Le résultat est obtenu.

Corollaire. — *Désignons par* $L^1(E, F)$ *l'espace de Banach des applications nucléaires de* E *dans* F. *Alors il existe une injection canonique de norme inférieure ou égale à* 1 *de* $L^1(E, F)$ *dans* $L^2_g(E, F)$ [resp. $L^2_d(E, F)$].

Proposition 9. — *Soient* E, F, G *trois espaces de Banach. Alors l'application de* $(E' \otimes_{g_2} F) \times (F' \otimes_{g_2} G)$ *dans* $E' \otimes_\pi G$: $(u, v) \to vu$ *est continue et se prolonge par continuité en une application bilinéaire continue de norme inférieure ou égale à* 1 *de*

$$(E' \hat{\otimes}_{g_2} F) \times (F' \hat{\otimes}_{g_2} G) \quad \textit{dans}\ E' \hat{\otimes}_\pi G,$$

Démonstration. — Soient $u \in E' \otimes F$, $v \in F' \otimes G$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes y_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{p} s'_j \otimes t_j;$$

$$vu = \sum_{i,j} \langle y_i, s'_j \rangle x'_i \otimes t_j.$$

Posons

$$c_i = \sum_j \langle y_i, s'_j \rangle t_j,$$

alors

$$vu = \sum_i x'_i \otimes c_i;$$

$$|c_i|^2 \leqq M_2^2(t_j) \sum |\langle y_i, s'_j \rangle|^2;$$

$$\sum_i |c_i|^2 \leqq M_2^2(t_j) \sum_{i,j} |\langle y_i, s'_j \rangle|^2 \leqq M_2^2(t_j)\, M_2^2(y_i) \sum_j |s'_j|^2.$$

On déduit

$$\sum_i |x'_i| . |c_i| \leqq \left(\sum_i |x'_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} M_2(t_j)\, M_2(y_i) \left(\sum_j |s'_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut

$$|vu|_\pi \leqq |v|_{g_2} |u|_{g_2}.$$

Le résultat découle immédiatement.

Remarque. — On obtiendrait un résultat analogue avec la norme d_2.

Corollaire 1. — *Soit* $A \in L_g^2(E, F)$, $B \in L_g^2(F, G)$. *Alors* $BA \in L^1(E, G)$.

Corollaire 2. — *Soit* $u \in E' \otimes_{g_2} E$. *Alors pour tout entier* k *supérieur ou égal à* 2 *l'application* $u \to \mathrm{tr}\,(u^k)$ *est continue.*

Corollaire 3. — *Soit*

$$u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E, \qquad u = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y_i,$$

avec $\sum_i |x'_i|^2 < +\infty$ *et* $M_2(y_i) < +\infty$. *Soit* (e_i) *la base canonique de* l^2. *Posons* $v = \sum_i x'_i \otimes e_i$ *et désignons par* B *l'application linéaire continue de* l^2 *dans* E *définie par* $e_i \to B(e_i) = y_i$. *Alors* $v \in E' \hat{\otimes}_{g_2} l^2$ *et* $u = Bv$. *De plus,* vBv *appartient à* $E' \hat{\otimes}_\pi l^2$.

Le résultat que nous allons donner maintenant est indiqué par Grothendieck ([4], p. 15); nous le donnons ici pour être complet :

Proposition 10. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Supposons que* E *ou* F *satisfasse à l'hypothèse d'approximation. Alors l'application canonique de* $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ (resp. $E \hat{\otimes}_{d_2} F$) *dans* $\mathcal{L}(E', F)$ *est injective.*

Démonstration. — Nous allons faire la démonstration pour g_2 seulement. On sait ([3], chap. I, prop. 17, p. 94) que le dual de $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ s'identifie au sous-espace vectoriel H de $\mathcal{L}(E, F')$ formé des éléments A tels que l'application de $E \otimes_{g_2} F$ dans $F' \otimes_\pi F$: $u \to (A \otimes 1)(u)$ soit continue. Désignons par $(A \hat{\otimes} 1)$ l'application obtenue par extension par continuité de $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ dans $F' \hat{\otimes}_\pi F$. Pour tout u de $E \hat{\otimes}_{g_2} F$ on a alors

$$\langle u, A \rangle = \operatorname{tr}(A \hat{\otimes} 1)(u).$$

Soient $u \in E \hat{\otimes}_{g_2} F$, u l'élément de $\mathcal{L}(E', F)$ associé. Supposons que $\tilde{u} = 0$. Pour tout $A \in H$, on a alors $((A \hat{\otimes} 1)(u))^{\sim} = \tilde{u}\,{}^t A = 0$ [3]. Si F satisfait à l'hypothèse d'approximation, on conclut que $\operatorname{tr}(A \hat{\otimes} 1)(u) = 0$ pour tout $A \in H$. Donc $u = 0$.

Le résultat est démontré dans ce cas. On peut faire la même démonstration en utilisant la norme d_2 dans le cas où F vérifie l'hypothèse d'approximation. Utilisant alors l'isomorphisme entre $E \hat{\otimes}_{d_2} F$ et $F \hat{\otimes}_{g_2} E$ on obtient la propriété voulue dans le cas où E vérifie l'hypothèse d'approximation.

Corollaire. — *Si* F *ou* E′ *vérifie l'hypothèse d'approximation, l'application canonique de* $E' \hat{\otimes}_{g_2} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_2} F$) *dans* $\mathcal{L}(E, F)$ *est injective.*

4° *Relations avec le produit tensoriel hilbertien de deux espaces de Hilbert et les applications de Hilbert-Schmidt des espaces de Hilbert.*

Proposition 11. — *Soient* E *un espace de Hilbert et* F *un espace de Banach. Alors* $L^2_g(E, F)$ *est contenu dans* $L^2_d(E, F)$.

Démonstration. — D'après la proposition 5, $L^2_g(E, F)$ est formé des applications T qui se factorisent sous la forme $E \xrightarrow{A} l^2 \xrightarrow{B} F$, A étant une application de Hilbert-Schmidt (au sens usuel des espaces de Hilbert) et B étant linéaire, continue. Les applications telles que T ont la propriété de transformer toute base orthonormale de E en une suite de carré sommable, en norme, de F.

Par ailleurs, on vérifie immédiatement que $L^2_d(E, F)$ contient les applications T_1 qui ont la propriété suivante :

Il existe une base orthonormale (f_i) de E, telle que

$$\sum_i |T_1(f_i)|^2 < +\infty.$$

On conclut bien que $L^2_g(E, F)$ est contenu dans $L^2_d(E, F)$.

---

[3] On note aussi $v \to \tilde{v}$ l'application naturelle de $F' \otimes_\pi F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque 1. — Nous allons montrer, par un exemple, qu'on peut avoir $L_g^2(E, F) \neq L_d^2(E, F)$:

Soit T le tore à une dimension. Prenons pour E l'espace de Hilbert $L^2(T)$ et pour F l'espace de Banach des fonctions continues sur T, à valeurs scalaires, $C(T)$. Soit $h \in L^2(T)$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ défini par $f \xrightarrow{T} h \star f$.

Alors T appartient à $L_d^2(E, F)$. En effet, si $(e_n)_{n \in Z}$ représente la base orthonormale de E, obtenue à partir des fonctions $(x \to \exp(2\pi i n x))_{n \in Z}$, on vérifie immédiatement que $\sum_n |T(e_n)|^2 < +\infty$.

Prenons alors pour h l'élément défini à partir de la fonction $h(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\left(0 < x < 2\pi,\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$ et le système orthonormal de E défini à partir des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{n(n+1)}, \qquad \frac{2\pi}{n+1} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{n} \qquad (n \geqq 1),$$

$$= 0, \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{2\pi}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{n} < x \leqq 2\pi.$$

Alors, pour tout x tel que $\frac{2\pi}{n} \leqq x < 2\pi$, on a

$$\psi_n(x) = (T(f_n))\,(x) = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2\pi} \int_{\frac{22}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{dt}{(x-t)^\alpha}.$$

On déduit

$$\psi_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{(2\pi)^\alpha}\,\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(n(n+1))^{\frac{1}{2}-\alpha}}.$$

Donc

$$|\psi_n| \geqq \frac{K}{(n(n+1))^{\frac{1}{2}-\alpha}},$$

$$|\psi_n|^2 \geqq \frac{K^2}{(n(n+1))^{1-2\alpha}}.$$

On conclut que

$$\sum_n |\psi_n|^2 = +\infty \qquad \text{si} \quad \frac{1}{4} \leqq \alpha < \frac{1}{2}.$$

Alors l'application T appartient à $L_d^2(E, F)$ mais non à $L_g^2(E, F)$. Le résultat est démontré.

Remarque 2. — Soient E et F deux espaces de Banach, T une application linéaire continue de E dans F qui a la propriété suivante : il existe deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 tels que : T se factorise sous la forme

$$T: \quad E \xrightarrow{A} H_1 \xrightarrow{K} H_2 \xrightarrow{B} F,$$

A et B étant deux applications linéaires continues et K une application de Hilbert-Schmidt, au sens usuel des espaces de Hilbert. D'après la proposition 5, on constate que T appartient à

$$L_g^2(E, F) \cap L_d^2(E, F).$$

L'exemple précédent indique que $L_d^2(E, F)$ contient d'autres applications que celles qui se factorisent ainsi.

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Rappelons qu'on peut munir $E \otimes F$ d'une structure d'espace préhilbertien, telle qu'on ait la propriété suivante :

Si $x_i \in E$, $y_i \in F$ $(i = 1, 2)$, on a

$$(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = (x_1, x_2)(y_1, y_2).$$

Si $u \in E \otimes F$, on note $|u|_2$ sa norme préhilbertienne.

Proposition 12. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert. Alors, sur* $E \otimes F$, *les normes* g_2, d_2 *et la norme préhilbertienne sont identiques.*

Démonstration. — Soit

$$u \in E \otimes F, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i.$$

Désignons par (e_i) la base orthonormale canonique de l^2; si l'on pose

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i$$

et si l'on désigne par B l'application linéaire continue de l^2 dans F définie par

$$\begin{aligned} B(e_i) &= y_i \qquad (1 \leq i \leq n) \\ &= 0 \qquad (i > n), \end{aligned}$$

on a

$$u = Bv.$$

La norme préhilbertienne de v est

$$|v|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a

$$|u|_2 \leq |B| . |v|_2.$$

Par ailleurs,

$$|u|_{g_2} = \inf |B| . |v|_2,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme Bv. Donc

$$|u|_2 \leq |u|_{g_2}.$$

Par ailleurs, on peut trouver un système orthonormal $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ de F, tel que

$$u = \sum_{i=1}^{p} g_i \otimes f_i.$$

Alors

$$|u|_2 = \left(\sum_i |g_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $M_2(f_i) = 1$, on a

$$|u|_{g_2} \leq |u|_2.$$

On conclut que $|u|_{g_2} = |u|_2$ et l'on démontre de même que $|u|_{d_2} = |u|_2$.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert. Désignons par* HS(E, F) *l'ensemble des applications de Hilbert-Schmidt de* E *dans* F. *Alors*

$$L_g^2(E, F) = L_d^2(E, F) = HS(E, F).$$

Remarque. — Grothendieck a introduit dans [4] 14 $\otimes$-normes « naturelles ». Nous avons pu montrer que d_2 (resp. g_2) n'est pas équivalente à 13 de ces $\otimes$-normes. Nous conjecturons que d_2 (resp. g_2) est équivalente à la $\otimes$-norme $H/$ (resp. $\backslash H$). Cette question sera étudiée dans un prochain article.

3. Théorie de Fredholm pour les noyaux de Hilbert-Schmidt a droite et a gauche. — Dans tout ce paragraphe nous utiliserons uniquement la norme g_2. On pourrait faire une théorie analogue en utilisant d_2. E désigne un espace de Banach complexe de dimension infinie.

1° *Noyaux de Hilbert-Schmidt et noyaux de Fredholm.* — L'ensemble $E' \otimes_{g_2} E$ est une algèbre de Banach sans unité. Ses éléments seront appelés noyaux de Hilbert-Schmidt à gauche. De la manière habituelle, on munit $E' \hat{\otimes}_{g_2} E$ d'une unité 1; on appelle H (E) l'algèbre ainsi obtenue. On a alors un résultat analogue à celui de [6] (prop. 3, p. 353).

Proposition 13. — *Soit* $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. *Pour que* $1 + u$ *soit inversible dans* H(E), *il faut et suffit que* $1 + \tilde{u}$ *soit inversible dans* $\mathcal{L}(E)$. *Si* $1 + \tilde{u}$ *est inversible, il existe* $v \in E' \otimes_{g_2} E$ *tel que* $(1 + u)^{-1} = 1 + v$.

Démonstration. — Supposons que $1 + u$ soit inversible dans H(E). Son inverse est de la forme $1 + v$, avec $v \in E' \otimes_{g_2} E$, comme on le voit en considérant l'algèbre quotient $H(E)/E' \hat{\otimes}_{g_2} E$ qui est isomorphe à $\mathbf{C}$.

Il est clair que si $1 + u$ est inversible dans H(E), il en est de même de $1 + \tilde{u}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Réciproquement supposons que $1+\tilde{u}$ soit inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Alors, il existe $V \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(1+\tilde{u})^{-1} = 1 + V$. De l'égalité

$$(1+\tilde{u})(1+V) = 1,$$

on tire

$$V = -\tilde{u}V - \tilde{u}.$$

Donc, si l'on pose

$$v = -uV - u,$$

on a $V = \tilde{v}$.

Puisque $\tilde{u} + \tilde{u}.\tilde{v} + v = 0$, $w = u + v + uv$ appartient au noyau de l'application $u \to \tilde{u}$ et l'on vérifie que $1 + v - w$ est un inverse à droite de $1+u$. On montre de même que $1+u$ admet un inverse à gauche. La proposition est démontrée.

Appelons noyaux de Fredholm les éléments de $E'\hat{\otimes}_\pi E$ et désignons par Fred (E) l'algèbre de Banach des noyaux de Fredholm à laquelle est adjointe une unité 1. Soit ψ l'application canonique de Fred (E) dans H (E) (prop. 8). On a le résultat suivant :

PROPOSITION 14. — *Soit w un noyau de Fredholm. Pour que $1 + u$ soit inversible dans* Fred (E), *il faut et suffit que $1 + \psi(u)$ soit inversible dans* H (E).

Démonstration. — On connaît la propriété ([6], prop. 3, p. 353) : Pour que $1 + u$ soit inversible dans Fred (E) il faut et suffit que $1 + \tilde{u}$ soit inversible dans $\mathcal{L}(E)$. On obtient alors immédiatement le résultat à partir de la proposition 13 et du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fred}(E) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr] & H(E) \arrow[d] \\ & \mathcal{L}(A) \end{tikzcd}$$

2° *Le déterminant d'ordre 2 d'une application de rang fini.* — Soit u un élément de $E' \otimes_{g_2} E$. On sait qu'on peut identifier u à une application de rang fini de E dans E. D'après la remarque 2 (chap. I, fin du paragraphe 3), on peut écrire :

$$\det_2(1+u) = \det_1(1+u)\exp(-\operatorname{tr}(u)).$$

PROPOSITION 15. — *Pour tout u de $E' \otimes_{g_2} E$, on a la relation*

$$|\det_2(1+u)| \leq \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2\right).$$

Démonstration. — Posons $u = \sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes x_i$, on peut factoriser u sous la forme

$$u : \quad E \xrightarrow{A} \mathbf{C}^n \xrightarrow{B} E,$$

avec, en désignant par (e_i) la base canonique de $\mathbf{C}^n$:

$$\mathrm{A}: \quad x \to \mathrm{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle x, x'_i \rangle;$$

$$\mathrm{B}: \quad e_i \to \mathrm{B}(e_i) = x_i.$$

Alors, $\det_1(1+u) = \det_1(1+\mathrm{BA}) = \det_1(1+\mathrm{AB})$ (remarque 2, chap. I, fin du paragraphe 3). On peut donc écrire

$$\det_1(1+u) = \begin{vmatrix} 1+\langle x_1, x'_1 \rangle & \langle x_2, x'_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x'_1 \rangle \\ \langle x_1, x'_2 \rangle & 1+\langle x_2, x'_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x'_2 \rangle \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \langle x_1, x'_n \rangle & \dots\dots\dots\dots & \dots & 1+\langle x_n, x'_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Utilisant l'inégalité de Hadamard, on obtient

$$|\det_1(1+u)|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(1+\langle x_i, x'_i \rangle + \overline{\langle x_i, x'_i \rangle} + \sum_{k=1}^{n} |\langle x_i, x'_k \rangle|^2 \right).$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x'_i \rangle.$$

Donc,

$$|\det_2(1+u)|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\exp -\left(\langle x_i, x'_i \rangle + \overline{\langle x_i, x'_i \rangle}\right)\right)$$
$$\times \left(1+\langle x_i, x'_i \rangle + \overline{\langle x_i, x'_i \rangle} + \sum_{k=1}^{n} |\langle x_i, x'_k \rangle|^2 \right) \leq \exp\left(\sum_{i,k} |\langle x_i, x'_k \rangle|^2 \right).$$

Or

$$\sum_{i,k} |\langle x_i, x'_k \rangle|^2 \leq \mathrm{M}_2^2(x_i) \sum_{k} |x'_k|^2.$$

On déduit :

$$|\det_2(1+u)|^2 \leq \exp(|u|^2_{\mathfrak{S}_2}).$$

Le résultat est démontré.

Corollaire. — *Soit $z \in \mathrm{C}$. Si l'on pose*

$$\det_2(1-zu) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2,n}(u)\, z^n,$$

on a pour tout $n \geq 1$:

$$|\alpha_{2,n}(u)| \leq \frac{\exp\left(\frac{n}{2}\right)}{n^{\frac{n}{2}}} |u|^n_{\mathfrak{S}_2}.$$

Démonstration. — Puisque $|\det_2(1 - zu)| \leq \exp\left(\frac{1}{2}|zu|_{g_2}^2\right)$ on a, pour tout $r > 0$:

$$|\alpha_{2,n}(u)| \leq r^{-n} \exp\left(\frac{r^2}{2}|u|_{g_2}^2\right).$$

On obtient alors le résultat voulu en posant

$$r = n^{\frac{1}{2}}|u|_{g_2}^{-1}.$$

Soit $u \in E' \otimes_{g_2} E$. Utilisant encore la factorisation de u sous la forme

$$u: \quad E \xrightarrow{A} \mathbf{C}_n \xrightarrow{B} B.$$

On a le résultat suivant :

LEMME 1. — *On a la formule*

$$r_2(u) \det_1(1 - AB) + Br_2(AB)A$$

[*voir* la remarque 2, chap. I, fin du paragraphe 3 pour la définition de $r_2(u)$].

Démonstration. — On a ici $u = BA$,

$$(1 - BA)(\det_2(1 - AB) + Br_2(AB)A) = (1 - BA)\det_2(1 - AB) + B\det_2(1 - AB)A.$$

Utilisant la relation $\det_2(1 - AB) = \det_2(1 - BA)$, on obtient

$$(1 - BA)(\det_2(1 - AB) + Br_2(AB)A) = \det_2(1 - BA).$$

On montre de même que

$$\det_2(1 - AB) + Br_2(AB)A)(1 - BA) = \det_2(1 - BA).$$

Donc, si $1 - u$ est inversible, on a

$$r_2(u) = \det_2(1 - AB) + Br_2(AB)A.$$

Alors, pour tous les z complexes tels que $1 - zu$ soit inversible, on a

$$r_2(zu) = \det_2(1 - zAB) + zBr_2(zAB)A.$$

Les deux membres de cette égalité étant analytiques par rapport à z on en déduit la formule voulue.

Munissant $\mathbf{C}^n$ de sa structure naturelle d'espace de Hilbert on a le résultat suivant :

LEMME 2 :

$$|r_2(AB)| \leq \exp\left(\frac{1}{2}(1 + |AB|_2^2)\right)$$

($|AB|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de AB).

Démonstration. — Soient $x=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $y=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ deux éléments de $\mathbf{C}^n$ de norme 1

$$|r_2(\mathrm{AB})| \sup_{x, y} |(r_2(\mathrm{AB})\, x, y)|.$$

A l'aide des formules de Cramer classiques, on vérifie que si $1-\mathrm{AB}$ est inversible :

$$(r_2(\mathrm{AB})\, x, y)=\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \ldots & \bar{\mu}_n \\ \lambda_1 & 1-\langle x_1, x'_1\rangle & & \ldots & -\langle x_n, x'_1\rangle \\ \lambda_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \lambda_n & -\langle x_1, x'_n\rangle & & \ldots & 1-\langle x_n, x'_n\rangle \end{vmatrix} \exp(\operatorname{tr}(\mathrm{AB})).$$

On démontre alors de la même manière que précédemment que cette égalité est vraie quelles que soient A et B. Utilisant l'inégalité de Hadamard, on obtient alors

$$\begin{aligned} |r_2(\mathrm{AB})|^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} & \exp(\langle x_i, x'_i\rangle+\overline{\langle x_i, x'_i\rangle}) \\ & \times\left(|\mu_i|^2+1-\langle x_i, x'_i\rangle-\overline{\langle x_i, x'_i\rangle}+\sum_{k=1}^{n}|\langle x_i, x'_k\rangle|^2\right) \\ & \leqq \exp\left(1+\sum_{i, k}|\langle x_i, x'_k\rangle|^2\right). \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu.

PROPOSITION 16. — *Soit* $u \in \mathrm{E}' \otimes_{g_2} \mathrm{E}$. *Alors :*

$$|r_2(u)| \leqq \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2+|u|_{g_2}\sqrt{e}\right).$$

Démonstration. — D'après le lemme 1 :

$$r_2(u)=\det_2(1-\mathrm{AB})+\mathrm{B} r_2(\mathrm{AB})\, \mathrm{A}.$$

D'après le lemme 2 et la proposition 15, on a alors

$$(1) \qquad |r_2(u)| \leqq \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2\right)+|\mathrm{B}| . |\mathrm{A}| . |r_2(\mathrm{AB})|.$$

Soit (e_i) la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

A est bien définie par une suite $(x'_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ d'éléments de E' à l'aide de la formule

$$x \rightarrow \mathrm{A}(x)=\sum_{i=1}^{n} e_i\langle x, x'_i\rangle.$$

Posons

$$|A|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x'_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors $|A| \leqq |A|_2$. De plus :

$$|u|_{g_2} = \inf |B|.|A|_2,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme BA. Par ailleurs, $|AB|_2 \leqq |A|_2 |B|$.

A partir de l'inégalité (1) on déduit alors, à l'aide du lemme 2 :

$$|r_2(u)| \leqq \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2\right) + |u|_{g_2} \exp\left(\frac{1}{2}(1 + |u|_{g_2}^2)\right),$$

$$|r_2(u)| \leqq (1 + |u|_{g_2}\sqrt{e}) \exp\frac{1}{2}(|u|_{g_2}^2),$$

$$|r_2(u)| \leqq \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2 + |u|_{g_2}\sqrt{e}\right).$$

Le résultat est obtenu.

Corollaire. — *Si l'on pose*

$$R_2(z) = r_2(zu) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2,n}(u) z^n,$$

on a pour tout $n \geqq 1$:

$$|\beta_{2,n}(u)| \leqq \frac{\exp\left(\frac{n}{2} + \sqrt{ne}\right)}{n^{\frac{n}{2}}} |u|_{g_2}^n.$$

Démonstration. — D'après la proposition 16, pour tout $r > 0$, on a

$$|\beta_{2,n}(u)| \leqq r^{-n} \exp\left(\frac{1}{2}r^2 |u|_{g_2}^2 + r|u|_{g_2}\sqrt{e}\right).$$

Posant $r = n^{\frac{1}{2}} |u|_{g_2}^{-1}$, on obtient le résultat désiré.

3° *Théorie de Fredholm pour les noyaux de Hilbert-Schmidt.* — Il est maintenant facile d'étendre la théorie de Fredholm aux noyaux de Hilbert-Schmidt.

Proposition 17. — *Définissons les applications* $u \to \alpha_{2,n}(u)$ [resp. $u \to \beta_{2,n}(u)$] *de* $E' \hat{\otimes}_{g_2} E$ *dans* $\mathbf{C}$ [resp. dans H(E)] *suivantes :*

$$\alpha_{2,0}(u) = 1,$$

$$\alpha_{2,n}(u) = \frac{(-1)^n}{n!} \det(F_n(0, \operatorname{tr}(u^2), \ldots, \operatorname{tr}(u^n))) \qquad (n \geqq 1),$$

$$\beta_{2,0}(u) = 1,$$

$$\beta_{2,n}(u) = \frac{(-1)^n}{n!} \det \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & \ldots & 0 \\ u & \multicolumn{4}{c}{F_n(0, \operatorname{tr}(u^2), \ldots, \operatorname{tr}(u^n))} \\ \vdots & & & & \\ u^n & & & & \end{pmatrix}.$$

Alors on a les majorations

$$|\alpha_{2,n}(u)| \leqq \frac{\exp\left(\dfrac{n}{2}\right)}{n^{\frac{n}{2}}} |u|_{g_2}^n \qquad (n \geqq 1).$$

$$|(\beta_{2,n}(u))^{\sim}| \leqq \frac{\exp\left(\dfrac{n}{2} + \sqrt{ne}\right)}{n^{\frac{n}{2}}} |u|_{g_2}^n \qquad (n \geqq 1).$$

De plus, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2,n}(u) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_{2,n}(u))^{\sim},$$

sont absolument convergentes et uniformément convergentes sur tout ensemble borné de $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$. *Elles définissent des applications continues de* $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ *dans* $\mathbf{C}$ [resp. $\mathcal{L}(E)$] *notées* $u \to \det_2(1-u)$, $u \to r_2(u)$.

Enfin, on a les majorations

$$|\det_2(1-u) \leqq \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2\right),$$

$$|r_2(u)| \exp\left(\frac{1}{2}|u|_{g_2}^2 + |u|_{g_2}\sqrt{e}\right).$$

Démonstration. — Il est clair que les applications $u \to \alpha_{2,n}(u)$ et $u \to (\beta_{2,n}(u))^{\sim}$ sont continues de $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ dans $\mathbf{C}$ [resp. $\mathcal{L}(E)$]. Alors les majorations indiquées pour $\alpha_{2,n}(u)$ et $(\beta_{2,n}(u))^{\sim}$ vérifiées pour $u \in E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ le sont aussi pour $u \in E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ par continuité [d'après le corollaire 2 de la proposition 9, l'application $u \to \operatorname{tr}(u^k)$ est continue pour tout entier k supérieur ou égal à 2]. Les séries indiquées sont donc absolument convergentes et uniformément convergentes sur tout ensemble borné de $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$. Les applications $u \to \det_2(1-u)$ et $u \to r_2(u)$ sont alors continues et les inégalités sur $\det_2(1-u)$ et $r_2(u)$ se vérifient par continuité.

PROPOSITION 18. — *Soient u et v deux éléments de* $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$. *Alors on a l'égalité*

$$\det_2(1+u)(1+v) = \det_2(1+u)\det_2(1+v)\exp(-\operatorname{tr}(uv)).$$

Démonstration. — Soient u et v deux éléments de $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$. On a

$$\begin{aligned}\det_2(1+u)(1+v) &= \det_2(1+u+v+uv)\\ &= \det_1(1+u+v+uv)\exp(-\operatorname{tr}(u)-\operatorname{tr}(v)-\operatorname{tr}(uv)),\\ \det_2(1+u)(1+v) &= \det_2(1+u)\det_2(1+v)\exp(-\operatorname{tr}(uv)).\end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité voulue par prolongement par continuité.

THÉORÈME 2. — *Soit* $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. *Pour que* $1 - u$ *soit inversible dans* H(E) [ou pour que $1 - \tilde{u}$ soit inversible dans $\mathcal{L}(E)$], *il faut et suffit que* $\det_2(1 - u) \neq 0$. *On a alors la formule*

$$(1 - \tilde{u})^{-1} = \frac{r_2(u)}{\det_2(1 - u)}.$$

Démonstration. — Soit $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. On a l'égalité

$$(1 - \tilde{u})\, r_2(u)\, (1 - \tilde{u}) = \det_2(1 - u)$$

(elle est vérifiée pour les $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$; on l'étend par continuité). Supposons $1 - u$ inversible dans H(E). Alors

$$(1 - u)^{-1} = 1 - v \qquad (v \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E).$$

Donc $(1 - u)(1 - v) = 1$ et l'on déduit de la proposition 18 que $\det_2(1 - u) \neq 0$. On conclut alors que

$$(1 - \tilde{u})^{-1} = \frac{r_2(u)}{\det_2(1 - u)}.$$

Réciproquement si $\det_2(1 - u) \neq 0$. On a immédiatement les résultats voulus.

THÉORÈME 3. — *Soit* $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. *Désignons par* (z_i) *l'ensemble des valeurs propres non nulles de* $\tilde{u}$ *comptées chacune avec son ordre de multiplicité géométrique. Alors la fonction entière* $\det_2(1 - zu)$ *a pour zéros l'ensemble des* $\left(\frac{1}{z_i}\right)$ *; chaque zéro* $\frac{1}{z_i}$ *a pour ordre dans la fonction* $\det_2(1 - zu)$ *l'ordre de multiplicité géométrique de la valeur propre* z_i. *On a, de plus,*

$$\sum_i |z_i|^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad \det_2(1 - zu) = \prod_i (1 - zz_i) \exp(zz_i),$$

Démonstration. — Soit $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. D'après le corollaire 3 de la proposition 2, on peut écrire $u = Bv$ avec $v \in E' \hat{\otimes}_{g_2} l^2$ et $B \in \mathcal{L}(l^2, E)$. Posons $u_1 = vB$. Alors u_1 peut être identifié à une application de Hilbert-Schmidt de l^2 dans l^2. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(u^2) &= \operatorname{tr}(BvBv), \\ &= \operatorname{tr}(vBvB), \\ &= \operatorname{tr}(u_1^2) \end{aligned}$$

car vBv appartient à $E' \hat{\otimes}_\pi l^2$, d'après la proposition 9, corollaire 3).

On démontre de même que pour tout entier $k \geq 2$, $\operatorname{tr}(u^k) = \operatorname{tr}(u_1^k)$. Alors, pour tout entier n positif ou nul $\alpha_{2,n}(u) = \alpha_{2,n}(u_1)$. On déduit que $\det_2(1 - zu) = \det_2(1 - zu_1)$ pour tout z de $\mathbf{C}$. Désignons par (z_i) l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{u}$ (ou de u_1, d'après le lemme 2 du chapitre I), chacune étant comptées avec son ordre de multiplicité géométrique. D'après la proposition 2 du chapitre I, on a

$$\det_2(1 - zu) = \prod_i (1 - zz_i)\exp(zz_i).$$

Corollaire. — *Soit $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. Alors, pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\operatorname{tr}(u^n) = \sum_i z_i^n.$$

Démonstration. — En effet, on a

$$\operatorname{tr}(u^n) = \operatorname{tr}(u_1^n) \qquad (n \geq 2).$$

Or on sait que $\operatorname{tr}(u_1^n) = \sum_i z_i^n$, car u_1 est le produit de deux applications nucléaires (*voir* [3], chap. II, p. 15). Pour les applications, il est utile d'avoir le résultat suivant :

Proposition 19. — *Soit $u \in E' \hat{\otimes}_{g_2} E$. Supposons qu'il existe $k \leq 2$ tel que*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y_i, \qquad \text{avec} \quad \sum_i |x'_i|^k < +\infty \quad \text{et} \quad M_2(y_i) < +\infty.$$

Soit (z_i) l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{u}$ comptées avec leur ordre de multiplicité géométrique. Alors

$$\sum_i |z_i|^k < +\infty.$$

Démonstration. — Soit (e_i) la base canonique de l^2. Alors on peut poser

$$u = Bv, \qquad \text{avec} \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes e_i \qquad \text{et} \qquad B \in \mathcal{L}(l^2, E)$$

définie par $e_i \to B(e_i) = y_i$; $u_1 = vB$ peut être identifiée à une application de Hilbert-Schmidt de l^2 dans l^2 telle que $u_1(e_i) = \sum_j e_j \langle y_i, x'_j \rangle$. Désignant par u_1^* la transposée de u_1 on a

$$u_1^*(e_i) = \sum_j e_j \overline{\langle y_j, x'_i \rangle},$$

$$|u_1^*(e_i)| \leq M_2(y_i)\,|x'_i|,$$

$$\sum_i |u_1^*(e_i)|^k \leq [M_2(y_i)]^k \sum_i |x'_i|^k.$$

Alors, d'après ([1], p. 1116), u_1^* est de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable. Les valeurs propres de u_1^* sont donc de puissance $k^{\text{ième}}$ sommables. Il en est de même de celles de u_1 et de $\tilde{u}$.

Définition. — Soit k un nombre réel inférieur ou égal à 2. On désigne par $E'\hat{\otimes}_{g_k}E$ l'espace vectoriel des éléments u de $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ tels que

$$u=\sum_{i=1}^{\infty} x'_i \otimes y_i, \qquad \text{avec} \quad \sum_i |x'_i|^k < +\infty \qquad \text{et} \qquad M_2(y_i) < +\infty.$$

L'image canonique de $E'\hat{\otimes}_{g_k}E$ dans $\mathcal{L}(E)$ sera notée $L_g^k(E)$. On définit de même $E'\hat{\otimes}_{d_k}E$ et $L_d^k(E)$. On vérifie immédiatement que $L_g^k(E)$ est un espace vectoriel et que si A appartient à $\mathcal{L}(E)$ et B à $L_g^k(E)$, AB et BA sont des éléments de $L_g^k(E)$.

4. Exemples et applications. — La représentation des applications de Hilbert-Schmidt par des séries permet aisément de montrer que certaines applications usuelles sont des applications de Hilbert-Schmidt et de généraliser certaines propriétés connues d'applications de Hilbert-Schmidt d'espace de Hilbert. Nous allons en donner quelques exemples.

1° Soit T le tore à une dimension, $E = L^1(T)$, $g \in L^2(T)$. Alors l'application linéaire continue A de E dans E définie par $f \to f \star g$ est une application de Hilbert-Schmidt à gauche. En effet, désignons par $(x'_n)_{n\in Z}$ les éléments de E' définis par

$$f \to \langle f, x'_n \rangle = \int_T f(x) \exp(-2\pi inx)\, dx$$

et posons $\langle g, x'_n \rangle = b_n$. Soit $(\varphi_n)_{n\in Z}$ l'ensemble des éléments de E définis par $x \to \exp(2\pi inx)$. Alors, on constate que

$$A = \sum_{n\in Z} b_n x'_n \otimes \varphi_n.$$

On vérifie que $\sum_n |b_n x'_n|^2 < +\infty$ et que $M_2(\varphi_n) < +\infty$ [puisque E vérifie l'hypothèse d'approximation on identifie $E'\hat{\otimes}_{g_2}E$ et $L_g^2(E)$].

2° Soit T le tore à une dimension, $F = C(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur T à valeurs complexes, $g \in L^2(T)$. Alors, l'application linéaire continue V de F dans F définie par $V : f \to f \star g$ est de Hilbert-Schmidt à gauche. En effet, procédant comme dans 1°, on peut écrire

$$V = \sum_{n\in Z} x'_n \otimes b_n \varphi_n, \qquad \text{avec} \quad M_2(x'_n) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_n |b_n \varphi_n|^2 < +\infty.$$

3° Posons $E_1 = L^1(0, 1)$. Soit $\mathcal{J}_1$ l'application linéaire continue de E_1 dans E_1 définie par $f \to F$, avec $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Désignons par f_0 l'élément de $L^1(0, 1)$ obtenu à partir de l'application $x \to x$. Désignons par $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ l'ensemble d'éléments de E_1 définis par $x \to \exp(2\pi inx)$ et par $(x'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ les éléments de E'_1 définis par

$$f \to \langle f, x'_n \rangle = \int_0^1 f(x) \exp(-2\pi inx)\, dx.$$

Soit B l'application linéaire continue de E_1 dans E telle que

$$B(\varphi_n) = \frac{1}{in} \qquad (n \neq 0),$$

$$B(\varphi_0) = f_0.$$

Alors, on vérifie que

$$\mathfrak{T}_1 = x'_0 \otimes f_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{in} x'_n \otimes \varphi_n - B.$$

Donc $\mathfrak{T}_1$ est un élément de $L_g^{1+\varepsilon}(E_1)$ pour tout ε positif.

4° Posons $E_3 = \mathbf{C}(0, 1)$ et soit $\mathfrak{T}_3$ l'application linéaire continue de E_3 dans E_3 définie par $f \to F$, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Alors, on vérifie, comme dans 3°, que $\mathfrak{T}_3$ est un élément de $L_d^{1+\varepsilon}(E_3)$ pour tout ε positif.

Enfin, on sait ([1], p. 1116) que l'application $\mathfrak{T}_2$ de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ définie par $f \to F$ et $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ est de puissance $(1+\varepsilon)^{\text{ième}}$ sommable.

Citons une application. Soit $(x, y) \to K(x, y)$ une fonction complexe mesurable sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Nous dirons que K a la propriété (P) si elle définit une application linéaire continue A de $E = L^1(0, 1)$ dans E à l'aide de la formule

$$f \to A(f) = g, \qquad g(x) = \int^1 K(x, y) f(y)\, dy.$$

Supposons de plus que K soit absolument continue par rapport à y pour chaque x et que l'application $(x, y) \to \frac{\partial}{\partial y} K(x, y)$ ait aussi la propriété (P). Alors, on peut écrire

$$\int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy = \left[K(x, y) \int_0^y f(t)\, dt \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \int_0^y f(t)\, dt \right) dy.$$

On constate que A appartient à $L_g^{1+\varepsilon}(E)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc les valeurs propres de T sont de puissance $1+\varepsilon$ sommables.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part II, Interscience Publishers, 1964.

[2] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta Mathematica*, vol. 27, 1903, p. 365-390).

[3] A. Grothendieck, *Thèse*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1955.

[4] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (*Bol. Soc. Math. Sao Paulo*, vol. 8, 1956, p. 1-79).

[5] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers* (*Bol. Soc. Math. Sao Paulo*, vol. 8, 1956).

[6] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm* (*Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1956, p. 319-384).

[7] T. Lezansky, *The Fredholm theory of linear equations in Banach Spaces* (*Studia Mathematica*, vol. 13, 1953, p. 244-276).

[8] Poincaré, *Remarques diverses sur l'équation de Fredholm* (*Acta Mathematica*, vol. 33, 1910, p. 57-86).

[9] A. Ruston, *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach Space* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 2, nº 53, 1951, p. 109-124).

[10] R. Schatten, *A theory of Cross spaces*, Princeton University Press, 1950.

[11] R. Sikorsky, *Determinant theory of Banach spaces* (*Colloquium Mathematicum*, vol. VIII, fasc. 2, 1961, p. 141-197).

[12] F. Smithies, *The Fredholm theory of integral equations* (*Duke Math. J.*, vol. 8, 1941, p. 107-130).

[13] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Cambridge University Press, t. I, 1959.