ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

O. PYLARINOS

Sur une classe spéciale de surfaces-*W*

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 1 (1966), p. 53-74

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_1_53_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 53 à 74.

SUR
UNE CLASSE SPÉCIALE DE SURFACES-W

PAR M. O. PYLARINOS.

Une surface isothermique réelle de l'espace ordinaire — ni cylindrique ni sphérique — dont chaque famille de lignes de courbure est une famille de trajectoires isogonales — non orthogonales — d'une famille de ∞^1 de ses géodésiques, est d'après des théorèmes que j'ai établis dans un article antérieur ([1]) — une surface-W engendrée par les diverses positions d'une courbe gauche, invariable de forme, qui se meut de manière que la trajectoire de chacun de ses points la coupe constamment à angle droit; les positions diverses de cette courbe sont les géodésiques jouissant de la propriété indiquée.

Les surfaces isothermiques — non sphériques — dont les lignes de courbure jouissent de la propriété d'isogonalité signalée et qui, d'après les théorèmes mentionnés, à moins qu'elles ne soient cylindriques, sont des surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution, appartiennent évidemment à la classe des surfaces-W réelles, non sphériques, dont les lignes de courbure jouissent de la même propriété, et c'est à l'étude des surfaces-W appartenant à cette classe spéciale que le présent article est consacré. Dans ce qui suit les surfaces-W de cette classe sont appelées, pour abréger, *Surfaces*-Wg.

Je montre d'abord que toute surface-Wg est engendrée par les diverses positions d'une courbe, invariable de forme, qui se meut de manière que la trajectoire de chacun de ses points coupe ses diverses positions sous le même angle; cet angle, à moins que la surface ne soit isothermique, varie d'un point à l'autre de la courbe, et les diverses positions de cette courbe sont les géodésiques de la surface dont les lignes de courbure de chaque

([1]) O. PYLARINOS, *Sur les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution* [*Ann. Mat. pura ed appl.*, (IV), vol. 59, 1962, p. 319-350, 321 et 336].

famille sont de trajectoires isogonales. Je donne en outre deux équations différentielles ordinaires auxquelles doivent satisfaire la courbure et la torsion d'une courbe gauche, considérées comme fonctions de l'arc de cette courbe, afin qu'elle puisse se mouvoir de manière que ses diverses positions engendrent une surface-Wg non isothermique, et à l'intégration du système desquelles peut être ramené le problème de la détermination de toutes les surfaces-Wg non isothermiques. Je montre ensuite que toute surface-Wg est applicable sur une surface de révolution, et qu'à moins qu'elle ne soit une surface à courbure moyenne constante, elle admet une seconde famille de ∞^1 géodésiques qui sont les positions diverses d'une courbe gauche invariable de forme. Enfin je montre que la courbure totale K de toute surface-Wg non isothermique est une fonction de sa courbure moyenne H vérifiant une équation différentielle du troisième ordre algébrique par rapport aux dérivées de K dont les coefficients sont des polynomes à coefficients numériques des H, K.

1. — Soit S une surface réelle, courbe, non sphérique de l'espace ordinaire dépourvue de points singuliers, rapportée à un réseau paramétrique (u, v) orthogonal dont les courbes $v =$ Cte sont des géodésiques, u étant l'arc sur ces courbes, la surface étant définie par rapport au système de référence considéré dans l'espace par l'équation vectorielle

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v). \tag{1.1}$$

Si l'on désigne par E, F, G; L, M, N les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de S rapportée aux paramètres u, v considérés; par K, H ses courbures totale et moyenne et par $\bar{t}_u$, $\bar{t}_v$ les vecteurs-unités des directions positives des tangentes aux courbes $v =$ Cte, $u =$ Cte issues du point courant $P(u, v)$, on aura

$$E \equiv 1, \qquad F \equiv 0, \qquad G > 0; \tag{1.2}$$

$$\bar{t}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \qquad \bar{t}_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \tag{1.3}$$

et

$$K = L\frac{N}{G} - \frac{M^2}{G}, \qquad H = \frac{1}{2}\left\{L + \frac{N}{G}\right\}, \tag{1.4}$$

les coefficients L, M, N, G étant des fonctions des u, v vérifiant l'équation de Gauss et les deux équations de Codazzi. Ces équations, grâce aux (1.2), affectent la première la forme

$$L\frac{N}{G} - \frac{M^2}{G} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \tag{1.5}$$

et les deux dernières [*voir* E. Study [2]] la forme

$$(1.6)\qquad \sqrt{G}\frac{\partial L}{\partial v}=\frac{\partial(M\sqrt{G})}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{G}}\right)+\left(L+\frac{N}{G}\right)\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial N}{\partial u}\quad [3].$$

Par ailleurs, si k_u, k_v; σ_{g_u}, σ_{g_v} sont respectivement les courbures normales et les torsions géodésiques des courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ qui passent par P, d'après des formules connues, on aura, en vertu des (1.2),

$$(1.7)\qquad k_u=L,\qquad k_v=\frac{N}{G};\qquad \sigma_{g_u}=-\sigma_{g_v}=\frac{M}{\sqrt{G}}.$$

Mais les courbes $v = \text{Cte}$ sont des géodésiques de S. Donc, si elles ne sont pas des droites et qu'on désigne par k, σ leur courbure et leur torsion, on aura

$$(1.8)\qquad L=k_u=\varepsilon k,\qquad \frac{M}{\sqrt{G}}=\sigma_{g_u}=\sigma,$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que L, s'il ne s'annule pas au point P, est $>$ ou <0.

En outre, si k_1, k_2 sont les courbures normales des lignes de courbure C_1, C_2 de S qui passent par P — c'est-à-dire les courbures principales de S en P — et qu'on désigne par $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ les vecteurs-unités des directions positives des tangentes aux courbes C_1, C_2 en P et par ω' l'angle orienté des vecteurs $\bar{t}_1$, $\bar{t}_u$:

$$(1.9)\qquad \omega'=\left(\widehat{\bar{t}_1,\,\bar{t}_u}\right)=-\left(\widehat{\bar{t}_u,\,\bar{t}_1}\right)\equiv-\omega,$$

d'après les formules d'Euler pour la courbure normale et de O. Bonnet pour la torsion géodésique d'une courbe tracée sur une surface, on aura, eu égard aux équations (1.7), (1.8) et (1.9),

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \varepsilon k=k_u=k_1\cos^2\omega'+k_2\sin^2\omega'=k_1\cos^2\omega+k_2\sin^2\omega,\\ \sigma=\sigma_g=\cos\omega'\sin\omega'(k_2-k_1)=-\cos\omega\sin\omega\,(k_2-k_1).\end{cases}$$

Enfin, si k_{g_u}, k_{g_1}, k_{g_2} sont respectivement les courbures géodésiques de la courbe $v = \text{Cte}$ et des lignes de courbure C_1, C_2 qui passent par P, en tenant compte des (1.9), on aura [4]

$$(1.11)\qquad k_{g_u}=\frac{d\omega'}{du}+k_{g_1}\cos\omega'+k_{g_2}\sin\omega'=-\frac{d\omega}{du}+k_{g_1}\cos\omega-k_{g_2}\sin\omega=0,$$

---

[2] *Voir*, par exemple, K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie*, vol. III, Berlin, 1959, p. 191.

[3] On suppose que les opérations de dérivation qui seront faites dans cet article sont légitimes dans les intervalles considérés.

[4] *Voir*, par exemple, A. R. FORSYTH, *Lectures on the differential geometry of curves and surfaces*, Cambridge, 1920, p. 153.

la courbe $v =$ Cte étant une géodésique de S et le paramètre u l'arc de cette courbe.

2. — Les valeurs μ_1, μ_2 du rapport $\frac{du}{dv}$, qui correspondent aux tangentes aux lignes de courbure C_1, C_2 de S qui passent par son point P sont, comme on sait, les racines du polynome

$$(MG - NF)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (LG - NE)\frac{dv}{du} + (LF - ME)$$

qui, dans le cas envisagé, grâce aux (1.2), devient

$$\text{(2.1)} \qquad M\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(L - \frac{N}{G}\right)\frac{dv}{du} - \frac{M}{G}.$$

En outre, en vertu des (1.2), on a

$$\text{(2.2)} \qquad \operatorname{tg}(\bar{t}_u, \bar{t}_1) = \operatorname{tg}\omega = -\operatorname{tg}\omega' = \mu_1\sqrt{G}, \qquad \operatorname{tg}(\bar{t}_u, \bar{t}_2) = \mu_2\sqrt{G},$$

le réseau (u, v) étant orthogonal.

Pour que le rapport $\frac{k_{g_1}}{k_{g_2}}$ des courbures géodésiques des lignes de courbure C_1, C_2 qui passent par un point quelconque de S, soit égal à une constante finie et $\neq 0$, il faut et il suffit que l'une des familles des lignes de courbure de S soit une famille de trajectoires isogonales — non orthogonales — d'une famille de ∞^1 géodésiques de la surface ([5]).

Or, si la famille des lignes de courbure de S, qui correspond à la racine μ_1 du polynome (2.1), est une famille de trajectoires isogonales des géodésiques $v =$ Cte coupant ces courbes sous l'angle constant ω_1 — où $0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}$ — d'après (1.11) et (2.2), on aura

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{k_{g_1}}{k_{g_2}} = \operatorname{tg}\omega_1 = -\operatorname{tg}\omega'_1 = \mu_1\sqrt{G} = c,$$

où c, d'après la supposition faite, est une constante finie et $\neq 0$, et si l'on exprime que la valeur $\mu_1 = \frac{c}{\sqrt{G}}$ du rapport $\frac{dv}{du}$ est une racine du polynome (2.1), il vient

$$\text{(2.4)} \qquad \frac{N}{G} = L + 2a\frac{M}{\sqrt{G}},$$

où

$$\text{(2.5)} \qquad a = \frac{c^2 - 1}{2c} = -\frac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega}$$

est aussi une constante finie.

([5]) O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 321.

Il est à noter que, dans le cas envisagé, M est évidemment $\not\equiv 0$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, les géodésiques $v =$ Cte seraient des lignes de courbure de S et la constante c serait $= 0$.

D'autre part, si les coefficients L, M, N, G sont liés par une relation de la forme (2.4), où a est une constante, cette relation exprime que la valeur $\frac{c}{\sqrt{G}}$ du rapport $\frac{dv}{du}$, où c est l'une des racines du polynome $c^2 - 2ac - 1$, est une racine du polynome (2.1); ce qui montre que l'une des familles des lignes de courbure de S est une famille de trajectoires isogonales de ces géodésiques $v =$ Cte, coupant ces courbes sous l'angle constant ω_1 tel que $\operatorname{tg}\omega_1 = c$.

On peut donc énoncer le :

THÉORÈME I. — *Pour que chacune des familles de lignes de courbure d'une surface non sphérique* S, *rapportée à un réseau orthogonal* (u, v) *dont les courbes* $v =$ Cte *sont des géodésiques* (*u étant l'arc de ces courbes*), *soit une famille de trajectoires isogonales — non orthogonales — de ces géodésiques, il faut et il suffit que les coefficients* E, F, G; L, M, N *des deux formes quadratiques fondamentales de* S *soient des fonctions de* u, v *vérifiant, en dehors des conditions* (1.2), (1.5) et (1.6), *une équation de la forme* (2.4), *ou* a *est une constante finie.*

3. — Si S est une surface, non sphérique, dont l'une des familles de lignes de courbure est une famille de trajectoires isogonales — non orthogonales — de ses géodésiques $v =$ Cte, les coefficients L, M, N, G seront liés, d'après le théorème I, par une relation de la forme (2.4), où a est une constante finie. On aura donc, en tenant compte des (1.4), (1.7) et (1.8),

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{N}{G} = k_u + 2a\sigma = \varepsilon k + 2a\sigma, \qquad H = k_u + a\sigma = \varepsilon k + a\sigma, \\ K = k_u^2 + 2ak_u\sigma - \sigma^2 = k^2 + 2\varepsilon ak\sigma - \sigma^2 = H^2 - (1 + a^2)\,\sigma^2. \end{cases}$$

Les deux dernières formules (3.1) montrent que, si S est une surface-W, c'est-à-dire s'il y a une relation entre ses courbures principales k_1, k_2, la relation qui existe entre la courbure k et la torsion σ d'une quelconque des géodésiques $v =$ Cte est la même pour toutes ces courbes. D'autre part, si la relation qui existe entre k, σ est la même pour toutes les géodésiques $v =$ Cte, S est nécessairement, d'après les deux dernières formules (3.1), une surface-W. On peut donc formuler le

THÉORÈME II. — *Si les lignes de courbure de chaque famille d'une surface* S, *non sphérique, sont des trajectoires isogonales — non orthogonales — d'une famille de* ∞^1 *géodésiques, la relation qui existe entre la courbure et* *la torsion d'une quelconque de ces géodésiques n'est la même pour toutes ces courbes que dans le cas où* S *est une surface*-Wg.

Il est à noter que, si S est une surface développable, ses génératrices rectilignes constituent l'une des familles de ses lignes de courbure, et sont, comme on sait, les droites rectifiantes de toutes les géodésiques non rectilignes. Pour que S soit de plus une surface-Wg, c'est-à-dire pour que ses génératrices rectilignes soient des trajectoires isogonales d'une famille de ∞^1 géodésiques (non rectilignes), il faut et il suffit que S soit une surface cylindrique, les géodésiques, trajectoires isogonales des génératrices étant les diverses positions d'une même hélice de cette surface, se mouvant de manière que les trajectoires de ses points soient les génératrices rectilignes.

On a donc le :

THÉORÈME III. — *Les seules surfaces*-Wg *développables sont les surfaces cylindriques.*

Par ailleurs, si S est une surface-Wg et que la torsion σ de ses géodésiques $v =$ Cte ne soit pas constante, la courbure normale k_u de ces courbes est, d'après le théorème II, une fonction de la seule variable σ.

On aura donc

$$\mathrm{L} = k_u = k_u(\sigma) = k_u\left(\frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)$$

et les équations (1.6) de Codazzi peuvent, comme on le reconnaît aisément, s'écrire sous la forme

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dk_u}{d\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial v} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\sqrt{\mathrm{G}} = 2\sigma\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} - \left\{\dfrac{dk_u}{d\sigma} + 2a\right\}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\sqrt{\mathrm{G}} = 2a\sigma\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}. \end{cases}$$

Si l'on suppose de plus que les géodésiques $v =$ Cte soient des courbes à courbure constante c_1 (la même pour toutes ces courbes), les équations (3.2) deviennent

$$(3.3)\qquad -\frac{\partial\sigma}{\partial u}\sqrt{\mathrm{G}} = 2\sigma\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} - 2a\frac{\partial\sigma}{\partial u}\sqrt{\mathrm{G}} = 2a\sigma\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}$$

et l'on peut distinguer quatre cas, suivant qu'on a : soit $a = 0$; soit $a \neq 0$, $\frac{\partial\sigma}{\partial u} = 0$; soit $a \neq 0$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$; soit enfin, $a \neq 0$, $\frac{\partial\sigma}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v} \neq 0$.

Si $a = 0$, d'après (2.3) et (2.5), on a $c = \operatorname{tg}\omega_1 = \pm 1$ et $\cos^2\omega_1 = \sin^2\omega_1 = \frac{1}{2}$. On en déduit que S, en vertu de la première équation (1.10) est, dans ce cas, une surface à courbure moyenne constante $\mathrm{H}_1 = \varepsilon c_1$, et par suite isothermique. Elle est donc applicable sur une surface de révolution, ses géodésiques $v = \mathrm{Cte}$ étant les diverses positions d'une courbe gauche à courbure constante, se mouvant de manière que les trajectoires de ses points soient les trajectoires orthogonales de ses différentes positions [6].

Si

$$a \neq 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial u} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} \not\equiv 0,$$

la première équation (3.3) donne

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

la torsion σ des courbes $v = \mathrm{Cte}$ étant $\not\equiv 0$.

Il en résulte, eu égard à l'équation (1.5) de Gauss, que S est alors une surface développable, et par suite, d'après le théorème III, cylindrique; ses géodésiques $v = \mathrm{Cte}$ étant les diverses positions d'une de ses hélices se mouvant de manière que les trajectoires de ces points soient les génératrices rectilignes de la surface.

Si

$$a \neq 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial u} \not\equiv 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} \equiv 0,$$

la torsion σ des courbes $v = \mathrm{Cte}$ est une fonction de la seule variable u : $\sigma(u)$ et la première équation (3.3) montre que, dans ce cas, $\sqrt{G}$ est nécessairement une fonction des u, v de la forme

$$\sqrt{G} = \frac{f(v)}{\sqrt{\sigma(u)}}.$$

On en déduit, en tenant compte des (1.2), que S est une surface applicable sur une surface de révolution et qu'en outre le réseau (u, v) est isotherme. Il en est donc de même pour le réseau des lignes de courbure de S, dont les courbes de chaque famille sont des trajectoires isogonales des courbes $v = \mathrm{Cte}$ [7]. En conséquence, S est une surface-Wg isothermique et, à moins qu'elle ne soit cylindrique, c'est une surface à courbure moyenne constante, ses géodésiques $v = \mathrm{Cte}$ étant les diverses positions d'une courbe gauche à courbure constante.

Enfin, si

$$a \neq 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} \not\equiv 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} \not\equiv 0, \tag{3.4}$$

---

[6] O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 336.

[7] O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 325.

les deux équations (3.3) peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$\sqrt{G} = \frac{1}{a} \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}}{\frac{\partial\sigma}{\partial v}}, \qquad \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{2a\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{3.5}$$

Or, si l'on exprime que le second membre de la seconde équation (3.5) est égal à la dérivée par rapport à u du second membre de la première, on a

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = -\frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{3.6}$$

En outre, l'équation (1.5) de Gauss, grâce aux (3.4) et (3.5), affecte la forme

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + A\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\frac{\partial\sigma}{\partial u}}, \tag{3.7}$$

où

$$A \equiv A(\sigma) = 2\sigma K = 2\sigma(c_1^2 + 2\varepsilon a c_1\sigma - \sigma^2) \not\equiv 0, \tag{3.8}$$

Si, en effet, $A \equiv 0$, on aurait aussi $K \equiv 0$, puisqu'on a $\sigma \not\equiv 0$. S, d'après le théorème III, serait alors une surface cylindrique, ses géodésiques $v =$ Cte étant les diverses positions d'une de ses hélices, dont la courbure est constante. La torsion de cette courbe serait aussi nécessairement constante, et celà, d'après (3.4), est exclu.

On a donc $A \not\equiv 0$ et si l'on porte dans l'équation (3.6) la valeur (3.7) de la dérivée $\frac{\partial^2\sigma}{du\,dv}$, on trouve, en tenant compte des (3.4), pour la dérivée $\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}$ l'expression

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} = \frac{3}{2\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2 + A. \tag{3.9}$$

Or, en dérivant l'équation (3.9) par rapport à v et en ayant égard à (3.7), il vient

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right) = \frac{3}{2\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \left(\frac{3A}{\sigma} + \frac{dA}{d\sigma}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{3.10}$$

D'autre part, en dérivant l'équation (3.7) par rapport à u et en tenant compte des (3.6), (3.7) et (3.9), on a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}\right) = \frac{3}{2\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \left(\frac{3A}{2\sigma} + \frac{dA}{d\sigma}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{3.11}$$

On aura donc, en vertu des (3.10) et (3.11),

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}\right) = \frac{3A}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{3.12}$$

Mais le second membre de (3.12) est, d'après (3.4) et (3.8), $\neq 0$, ce qui montre que les deux équations aux dérivées partielles (3.6) et (3.7) auxquelles doit satisfaire la torsion $\sigma(u, v)$ des géodésiques $v =$ Cte, si l'on a $a \neq 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v} \neq 0$, sont incompatibles. En conséquence, si les géodésiques $v =$ Cte sont des courbes à courbure constante, la constante a, ou l'une des dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ doivent être $= 0$.

On peut donc énoncer le :

THÉORÈME IV. — *Une surface-*Wg, *non cylindrique, dont les lignes de courbure de chaque famille sont des trajectoires isogonales — non orthogonales — d'une famille de ∞^1 géodésiques ayant toutes la même courbure constante, est nécessairement une surface à courbure moyenne constante, applicable sur une surface de révolution. Les géodésiques dont les lignes de courbure de chaque famille sont des trajectoires isogonales, sont les diverses positions d'une courbe à courbure constante, invariable de forme, qui se meut de manière que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses différentes positions.*

4. — Supposons maintenant que S soit une surface-Wg et qu'en outre les géodésiques $v =$ Cte dont les lignes de courbure de chaque famille sont des trajectoires isogonales, ne soient pas des courbes à courbure constante.

Dans ce cas, d'après le théorème II, la torsion σ des géodésiques $v =$ Cte est une fonction de la seule variable k_u, c'est-à-dire de leur courbure normale.

On aura donc, grâce aux (1.7) et (1.8),

$$\frac{M}{\sqrt{G}} = \sigma = \sigma(k_u) \tag{4.1}$$

et, à l'aide de (4.1), les équations (1.6) de Codazzi, comme on le voit facilement, prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial k_u}{\partial v} - \frac{d\sigma}{dk_u}\frac{\partial k_u}{\partial u}\sqrt{G} &= 2\sigma\frac{\sqrt{G}}{\partial u}, \\ \frac{d\sigma}{dk_u}\frac{\partial k_u}{\partial v} - \left(1 + 2a\frac{d\sigma}{dk_u}\right)\frac{\partial k_u}{\partial u}\sqrt{G} &= 2a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sigma. \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

Eu égard à la forme de ces équations, on peut distinguer trois cas suivant qu'on a : soit

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} \neq 0, \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v} \equiv 0,$$

soit

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} \equiv 0, \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v} \neq 0,$$

soit enfin

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} \neq 0, \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v} \neq 0.$$

a. Si l'on a

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} \neq 0, \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v} \equiv 0, \tag{4.3}$$

on déduit d'abord de la seconde équation (4.2) que la constante a doit être $\neq 0$ et, en tenant compte de la seconde formule (3.1), on tire des deux équations (4.2) :

$$1 + a\frac{d\sigma}{dk_u} = \frac{d\mathrm{H}}{dk_u} = 0,$$

ce qui montre que, dans ce cas, la surface-Wg considérée est une surface à courbure moyenne constante

$$\mathrm{H}_1 = k_u + a\sigma \tag{4.4}$$

et est, en conséquence, isothermique; elle est donc applicable sur une surface de révolution et ses géodésiques $v =$ Cte sont les diverses positions d'une hélice ou d'une courbe de Bertrand, suivant qu'on a $\mathrm{H}_1 =$ ou $\neq 0$, qui se meut de manière que les trajectoires de ses points soient en même temps les trajectoires orthogonales de ses positions [8].

b. Si

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} \equiv 0, \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v} \neq 0, \tag{4.5}$$

on tire des deux équations (4.2), eu égard au fait que, d'après (4.5), k_u est une fonction de la seule variable v,

$$\frac{d\sigma}{dk_u} = a, \qquad \sigma = ak_u + b \equiv \sigma(v), \tag{4.6}$$

où b est une constante. On aura donc, en vertu des (4.6), et de la première équation (4.2) :

$$\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = \frac{1}{2\sigma(v)}\frac{dk_u}{dv} \equiv \;(v)$$

et, en conséquence,

$$\frac{\partial^2\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u^2} = 0,$$

ce qui montre, d'après (1.5), que la surface-Wg considérée est, dans ce cas, développable. Elle est donc, d'après le théorème III, cylindrique, et les géodésiques $v =$ Cte sont les diverses positions d'une hélice de cette surface

---

[8] O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 336.

qui se meut de manière que les trajectoires de ses points soient les génératrices rectilignes de la surface.

c. Enfin, si

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} \neq 0, \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v} \neq 0, \tag{4.7}$$

on tire des deux équations (4.2) :

$$\left\{\frac{d\sigma}{dk_u} - a\right\}\frac{\partial k_u}{\partial v} - \left\{1 + a\frac{d\sigma}{dk_u}\right\}\frac{\partial k_u}{\partial u}\sqrt{G} = 0. \tag{4.8}$$

Cette équation montre d'abord que, dans ce cas, on doit avoir

$$\frac{d\sigma}{dk_u} \neq a. \tag{4.9}$$

En effet, si

$$\frac{d\sigma}{dk_u} = a, \tag{4.10}$$

l'équation (4.8) se réduit à

$$1 + a\frac{d\sigma}{dk_u} = \frac{dH}{dk_u} = 0;$$

mais de cette équation, si l'on tient compte de (4.10), on tire $a^2 + 1 = 0$ et $\sigma = \pm ik + b$, où b est une constante. Or, les courbes $v =$ Cte étant supposées réelles, on aura $\sigma \equiv 0$ et, par suite, d'après (1.8), $M \equiv 0$, ce qui est exclu.

Pour les mêmes raisons, dans ce cas, comme il résulte de l'équation (4.8), on aura

$$1 + a\frac{d\sigma}{dk_u} = \frac{dH}{dk_u} \neq 0. \tag{4.11}$$

On aura donc, d'après (4.6), (4.9) et (4.11),

$$\sqrt{G} = \frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a}{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}} \; \frac{\dfrac{\partial k_u}{\partial v}}{\dfrac{\partial k_u}{\partial u}} \tag{4.12}$$

et, eu égard à cette formule, la première équation (4.2) donne pour la dérivée $\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ l'expression

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1 + 2a\dfrac{d\sigma}{dk_u} - \left(\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)^2}{2\sigma\left(1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)} \frac{\partial k_u}{\partial v}. \tag{4.13}$$

Cette formule montre que, si l'on a

$$1+2a\frac{d\sigma}{dk_u}-\left(\frac{d\sigma}{dk_u}\right)^2\equiv 0,$$

la surface — comme il résulte de l'équation (1.5) de Gauss — est une développable, et par suite, d'après le théorème III, est cylindrique, les géodésiques $v=$ Cte étant les diverses positions d'une hélice de la surface.

Donc, si S est une surface-Wg non cylindrique, on aura de plus

$$1+2a\frac{d\sigma}{dk_u}-\left(\frac{d\sigma}{dk_u}\right)^2\not\equiv 0, \tag{4.14}$$

et les deux équations (4.12) et (4.13), si l'on tient compte de ce que, d'après le théorème II, σ est une fonction de la seule variable k_u, donnent

$$\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}=\frac{1+2a\dfrac{d\sigma}{dk_u}-\left(\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)^2}{2\sigma\left(\dfrac{d\sigma}{dk_u}-a\right)}\frac{\partial k_u}{\partial u}\equiv f(k_u)\frac{\partial k_u}{\partial u}.$$

ce qui montre que, dans ce cas, $\sqrt{G}$ doit être une fonction des v, k_u de la forme

$$\sqrt{G}=\varphi(v)\,f_1(k_u), \tag{4.15}$$

où

$$f_1(k_u)=\int f(k_u)\,dk_u.$$

Or, si l'on considère la variable v' liée avec v par la relation

$$dv'=\varphi(v)\,dv \tag{4.16}$$

et qu'on rapporte S aux paramètres u, v', en désignant par E′, F′, G′; L′, M′, N′ les coefficients des deux formes fondamentales de la surface rapportée à ces paramètres, on aura

$$\left\{\begin{array}{llll} E'\equiv 1, & F'\equiv 0, & G'=G'(k_u)=\{f_1(k_u)\}^2\equiv\dfrac{G}{(\varphi(v))^2}; \\ L'=k_u, & \dfrac{M'}{\sqrt{G'}}=\dfrac{M}{\sqrt{G}}=\sigma(k_u), & \dfrac{N'}{G'}=\dfrac{N}{G}=k_u+2a\sigma, \end{array}\right. \tag{4.17}$$

ce qui montre, le coefficient G′ étant une fonction de la seule variable k_u, que même les coefficients M′, N′ sont des fonctions de la seule variable k_u.

Il est à remarquer que, d'après les discussions précédentes, si $\dfrac{\partial k_u}{\partial u}\not\equiv 0$, $\dfrac{\partial k_u}{\partial v}\not\equiv 0$, la surface-Wg considérée n'est ni cylindrique ni à courbure moyenne constante et, en conséquence, *n'est pas isothermique*. On peut donc énoncer le :

THÉORÈME V. — *Les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales d'une surface*-Wg *non isothermique, rapportée au réseau orthogonal* (u, v) *dont les courbes* $v =$ Cte *sont les géodésiques admettant les lignes de courbure des deux familles comme trajectoires isogonales, peuvent, par un choix convenable des paramètres* u, v, *devenir des fonctions de la seule variable* k_u, *c'est-à-dire de la courbure normale de ces géodésiques*.

5. — Les formules (4.12) et (4.13), lorsque S est une surface-Wg non isothermique rapportée aux paramètres u, v' prennent, comme on le voit aussitôt en tenant compte des (4.17), la forme

$$(5.1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{G'} = \frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a}{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}} \, \frac{\dfrac{\partial k_u}{\partial v'}}{\dfrac{\partial k_u}{\partial u}}, \\ &\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u} = \frac{1 + 2a\dfrac{d\sigma}{dk_u} - \left(\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)^2}{2\sigma\left(1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)} \, \frac{\partial k_u}{\partial v'}. \end{aligned}\right.$$

On aura donc, si l'on exprime que le second membre de la seconde équation (5.1) est la dérivée du second membre de la première par rapport à u,

$$\frac{1 + 2a\dfrac{d\sigma}{dk_u} - \left(\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)^2}{2\sigma\left(1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)} \, \frac{\partial k_u}{\partial v'} = \frac{\partial k_u}{\partial v'} \, \frac{d}{dk_u}\left\{\frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a}{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}\right\} + \left\{\frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a}{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}\right\} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\dfrac{\partial k_u}{\partial v'}}{\dfrac{\partial k_u}{\partial u}}\right\}$$

ou finalement, si l'on pose

$$(5.2)\qquad A = \frac{\left\{1 + 2a\dfrac{d\sigma}{dk_u} - \left(\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)^2\right\}\left\{\dfrac{d\sigma}{dk_u}a + 1\right\} - 2(1 + a^2)\sigma\dfrac{d^2\sigma}{dk_u^2}}{2\sigma\left\{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a\right\}\left\{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right\}} :$$

$$(5.3)\qquad \frac{\partial^2 k_u}{\partial u\,\partial v'}\,\frac{\partial k_u}{\partial u} - \frac{\partial^2 k_u}{\partial u^2}\,\frac{\partial k_u}{\partial v'} = \frac{D\left(k_u, \dfrac{\partial k_u}{\partial u}\right)}{D(u, v')} = A\left(\frac{\partial k_u}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial k_u}{\partial v'},$$

ce qui montre, eu égard aux (4.7), que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D\left(k_u, \dfrac{\partial k_u}{\partial u}\right)}{D(u, v')}$, à moins qu'on n'aie $A \equiv 0$, ne s'annule pas identiquement.

Or, si

$$(5.4)\qquad A \not\equiv 0,$$

en dérivant la seconde équation (5.1) par rapport à u et en tenant compte de l'équation (1.5) de Gauss et de la troisième formule (3.1), on trouve pour la dérivée $\frac{\partial^2 k_u}{\partial u\,\partial v'}$ l'expression

$$\frac{\partial^2 k_u}{\partial u\,\partial v'} = \mathrm{B}\frac{\partial k_u}{\partial u}\frac{\partial k_u}{\partial v'} + \mathrm{C}\frac{\frac{\partial k_u}{\partial v'}}{\frac{\partial k_u}{\partial u}}, \tag{5.5}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B} &= -\frac{d}{dk_u}\log\frac{1+2a\frac{d\sigma}{dk_u}-\left(\frac{d\sigma}{dk_u}\right)^2}{2\sigma\left(1+a\frac{d\sigma}{dk_u}\right)} \equiv \mathrm{B}(k_u),\\ \mathrm{C} &= -\frac{\frac{d\sigma}{dk_u}-a}{1+2\frac{d\sigma}{dk_u}-\left(\frac{d\sigma}{dk_u}\right)^2}\{k_u^2+2ak_u\sigma-\sigma^2\} \equiv \mathrm{C}(k_u),\end{aligned}\right. \tag{5.6}$$

et

$$\mathrm{C} \not\equiv 0, \tag{5.7}$$

la surface-Wg considérée étant non isothermique et, en conséquence, non développable.

Si l'on remplace maintenant dans (5.3) la dérivée $\frac{\partial^2 k_u}{\partial u\,\partial v'}$ par sa valeur (5.5), il vient

$$\frac{\partial^2 k_u}{\partial u^2} = (\mathrm{B}-\mathrm{A})\left(\frac{dk_u}{du}\right)^2 + \mathrm{C}, \tag{5.8}$$

la dérivée $\frac{\partial k_u}{\partial v'}$ étant, d'après la supposition faite, $\not\equiv 0$.

En dérivant l'équation (5.8) par rapport à v' on trouve

$$\frac{\partial^3 k_u}{\partial u^2\,\partial v'} = \left\{\frac{d\mathrm{B}}{dk_u}-\frac{d\mathrm{A}}{dk_u}\right\}\left\{\frac{\partial k_u}{\partial u}\right\}^2\frac{\partial k_u}{\partial v'} + 2\{\mathrm{B}-\mathrm{A}\}\frac{\partial k_u}{\partial u}\frac{\partial^2 k_u}{\partial u\,\partial v'} + \frac{d\mathrm{C}}{dk_u}\frac{\partial k_u}{\partial v'},$$

où, finalement, si l'on y remplace la dérive $\frac{\partial^2 k_u}{\partial u\,\partial v'}$ par sa valeur (5.5),

$$\frac{\partial^3 k_u}{\partial u^2\,\partial v'} = \left\{\frac{d\mathrm{B}}{dk_u}-\frac{d\mathrm{A}}{dk_u}+2(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right\}\left\{\frac{\partial k_u}{\partial u}\right\}^2\frac{\partial k_u}{\partial v'} + \left\{2(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{C}+\frac{d\mathrm{C}}{dk_u}\right\}\frac{\partial k_u}{\partial v'}. \tag{5.9}$$

D'autre part, en dérivant l'équation (5.5) par rapport à v' et en tenant compte des (5.3), (5.5) et (5.8), il vient

$$\frac{\partial^3 k_u}{\partial u^2\,\partial v'} = \left\{\frac{d\mathrm{B}}{dk_u}+\mathrm{B}^2+(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{B}\right\}\left\{\frac{\partial k_u}{\partial u}\right\}^2\frac{\partial k_u}{\partial v'} + \left\{2\mathrm{BC}+\mathrm{AC}+\frac{d\mathrm{C}}{dk_u}\right\}\frac{\partial k_u}{\partial v'}. \tag{5.10}$$

On aura donc, en égalant les seconds membres des (5.9) et (5.10),

$$\left\{\left(\frac{d\mathrm{A}}{dk_u}+\mathrm{AB}\right)\left(\frac{\partial k_u}{\partial u}\right)^2+3\mathrm{AC}\right\}\frac{\partial k_u}{\partial v'} = 0. \tag{5.11}$$

Or, si $A \not\equiv 0$, le premier facteur du premier membre de (5.11) est nécessairement $\not\equiv 0$, car, s'il n'en n'était pas ainsi, la dérivée $\frac{\partial k_u}{\partial u}$ serait une fonction de la seule variable k_u et l'on aurait $\frac{D\left(k_u, \frac{\partial k_u}{\partial u}\right)}{D(u, v')} \equiv 0$, ce qui, d'après (5.3), n'est pas possible, le coefficient A étant supposé $\not\equiv 0$. D'autre part, on a $\frac{\partial k_u}{\partial v'} \not\equiv 0$, la surface-Wg considérée étant non isothermique. Il faudra donc, pour que la condition (5.11) soit remplie,

$$A \equiv 0 \tag{5.12}$$

et, par suite, d'après (5.3), $\frac{D\left(k_u, \frac{\partial k_u}{\partial u}\right)}{D(u, v)} \equiv 0$, ce qui montre que, dans le cas envisagé, la dérivée $\frac{\partial k_u}{\partial u}$ est nécessairement une fonction de la seule variable k_u.

En outre, dans ce cas, c'est-à-dire *dans le cas où la surface*-Wg *n'est pas isothermique*, la torsion σ des géodésiques $v =$ Cte dont les lignes de courbure des deux familles sont des trajectoires isogonales, est une fonction de la courbure normale k_u de ces courbes, vérifiant l'équation différentielle du second ordre

$$2(1+a^2)\sigma\frac{d^2\sigma}{dk_u^2} - \left\{1 + 2a\frac{d\sigma}{dk_u} - \left(\frac{d\sigma}{dk_u}\right)^2\right\}\left\{1 + a\frac{d\sigma}{dk_u}\right\} = 0, \tag{5.13}$$

où a est une constante, à laquelle on parvient en remplaçant A dans l'équation (5.12) par sa valeur (5.13).

Par ailleurs, la dérivée $\frac{\partial k_u}{\partial v'}$ doit être aussi une fonction de la seule variable k_u, comme il résulte de la première formule (5.1), la dérivée $\frac{\partial k_u}{\partial u}$ et le coefficient G' étant des fonctions de la seule variable k_u.

On aura donc

$$\frac{\partial k_u}{\partial u} = f_1(k_u), \qquad \frac{\partial k_u}{\partial v'} = f_2(k_u), \tag{5.14}$$

Mais le rapport $\frac{f_2(k_u)}{f_1(k_u)}$ doit être égal — on le voit aussitôt eu égard à la condition d'intégrabilité des équations (5.14) — à une constante μ qui, d'après (4.7), doit être $\not\equiv 0$. En conséquence, k_u doit être une fonction de la seule variable

$$w = u + \mu v', \tag{5.15}$$

où μ est une constante (finie) et $\not\equiv 0$.

Or, si l'on pose

$$v_1 = \mu v' \tag{5.16}$$

on aura, en tenant compte des (4.17) et (5.1), pour les coefficients E_1, F_1, G_1; L_1, M_1, N_1 des deux formes fondamentales de la surface, rapportée aux paramètres u, v_1; les expressions,

$$\left\{\begin{aligned} & E_1 \equiv 1, \qquad F_1 \equiv 0, \qquad G_1 = \frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a}{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}} \equiv C_1(u + v_1), \\ & L_1 = k_u(u + v_1), \qquad \frac{M_1}{\sqrt{G_1}} = \frac{M'}{\sqrt{G'}} = \sigma(u + v_1), \qquad \frac{N_1}{G_1} = \frac{N'}{G'} = k_u + 2a\sigma \end{aligned}\right. \tag{5.17}$$

et, le coefficient G_1 étant une fonction de la seule variable $w = u + v_1$, il en est de même pour les coefficients M_1, N_1.

On a donc le :

Théorème VI. — *Les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales d'une surface-*Wg *non isothermique, rapportée au réseau orthogonal* (u, v) *dont les courbes* $u =$ Cte *sont les trajectoires orthogonales des géodésiques de la surface, coupant les lignes de courbure de chaque famille sous un angle constant, deviennent par un choix convenable des paramètres* u, v *des fonctions de la seule variable* $w = u + v$.

6. — Si la surface-Wg considérée n'est pas isothermique, les géodésiques $v_1 =$ Cte, d'après (5.17), admettent la même courbure et la même torsion en leurs points situés sur la même courbe $w = u + v_1 =$ Cte.

Or, si l'on rapporte cette surface aux paramètres $w = u + v_1$, v_1, on trouve aisément pour les coefficients E'_1, F'_1, G'_1; L'_1, M'_1, N'_1 de ses deux formes quadratiques fondamentales les expressions

$$\left\{\begin{aligned} & E'_1 = 1, \qquad F'_1 = -1, \qquad G'_1 = 1 + G_1, \\ & L'_1 = L_1, \qquad M'_1 = -L_1 + M_1, \qquad N'_1 = L_1 - 2M_1 + N_1, \end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

et ces coefficients, d'après (5.17), sont des fonctions de la seule variable $w = u + v_1$.

En outre, si ds_w est la différentielle de l'arc des courbes $v_1 =$ Cte, d'après la première formule (6.1), on a

$$(ds_w)^2 = (dw)^2, \tag{6.2}$$

ce qui montre que le paramètre w est l'arc des géodésiques $v_1 =$ Cte de la surface, mesuré à partir des points où ces courbes coupent une même courbe $w =$ Cte. En conséquence, la correspondance entre deux courbes quelconques $v_1 =$ Cte, obtenue en faisant correspondre les points de ces courbes situés sur une même courbe $w =$ Cte, est une correspondance avec égalité des arcs homologues. En outre, ces courbes, d'après (5.17), admettent la même courbure et la même torsion en leurs points correspondants. Elles sont donc les diverses positions d'une courbe invariable de forme, et les courbes $w =$ Cte sont les trajectoires des points de cette courbe dont les diverses positions engendrent la surface.

Par ailleurs, si ω_1 est l'angle des directions positives des tangentes aux courbes $v_1 =$ Cte, $w =$ Cte qui passent par un point $P(u, v_1)$ de la surface, en vertu des (6.1), on a

$$(6.3) \qquad \cos\omega_1 = \frac{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}{\sqrt{\left(1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}\right)^2 + \left(\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a\right)^2}} \equiv f(k_u) = \varphi(w).$$

Donc, ω_1 conserve la même valeur le long de chaque courbe $w =$ Cte. En d'autres termes, la trajectoire de chacun des points de la courbe dont les diverses positions engendrent la surface, coupe les diverses positions de cette courbe sous le même angle. Cet angle varie en général d'un point à l'autre de la courbe. Pour qu'il soit constant, il faut qu'on ait ou bien

$$\frac{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}{\dfrac{d\sigma}{dk_u} - a} = \text{Cte}$$

et dans ce cas la surface, comme on le voit aussitôt eu égard aux (5.1), est développable et par suite cylindrique, ou bien

$$1 + a\frac{d\sigma}{dk_u} = \frac{dH}{dk_u} = 0, \qquad \cos\omega_1 = 0$$

et dans ce cas la courbure moyenne H de la surface est constante, avec en outre $\omega_1 = \frac{\pi}{2}\cdot$ L'angle ω_1, à moins que la surface ne soit isothermique, n'est donc pas constant. On peut donc formuler le :

Théorème VII. — *Toute surface réelle*-Wg *est engendrée par les diverses positions d'une courbe gauche — invariable de forme — qui se meut de manière que la trajectoire de chacun de ses points coupe ses diverses positions sous le même angle. Cet angle, à moins que la surface ne soit isothermique, varie d'un point à l'autre de la courbe, et les diverses positions de cette courbe sont les géodésiques de la surface dont les lignes de courbure de chaque famille sont des trajectoires isogonales*.

Il est à remarquer que, les coefficients E'_1, F'_1, G'_1 de la première forme fondamentale de la surface-Wg considérée, rapportée aux paramètres w, v_1 étant, d'après (6.1), des fonctions de la seule variable w, la surface est nécessairement applicable sur une surface de révolution ([9]). En outre, puisque k_u et σ sont aussi, d'après (5.17), des fonctions de la seule variable w, il en est de même pour la courbure totale K de la surface. Il en résulte que la courbure totale K de la surface conserve la même valeur le long de chaque courbe $w = \text{Cte}$ et, en conséquence, les trajectoires orthogonales de ces courbes sont nécessairement les géodésiques de la surface ayant pour images les méridiens de la surface de révolution sur laquelle elle est applicable. Ces géodésiques dans le cas où la surface-Wg est isothermique, non cylindrique, coïncident avec les géodésiques de la surface dont les lignes de courbure sont trajectoires isogonales. Si la surface-Wg n'est pas isothermique, ces géodésiques sont nécessairement les diverses positions d'une courbe gauche, invariable de forme, qui se meut de manière que les trajectoires de ses points soient les trajectoires orthogonales de ses positions; car, s'il n'en n'était pas ainsi, la surface, étant une surface-W applicable sur une surface de révolution, serait isothermique ([10]). On parvient ainsi au :

THÉORÈME VIII. — *Toute surface*-Wg *réelle est applicable sur une surface de révolution, et les géodésiques de cette surface déformées des méridiens sont les diverses positions d'une même courbe, invariable de forme. Ces géodésiques, à moins que la surface ne soit isothermique, ne coïncident pas avec les géodésiques de la surface dont ses lignes de courbure sont trajectoires isogonales.*

Donc, sur chaque surface-Wg non isothermique il y a deux familles distinctes de géodésiques constituées l'une et l'autre, par les diverses positions d'une courbe gauche, de forme invariable.

7. — La torsion d'une courbe gauche, susceptible de se mouvoir de manière que ses diverses positions engendrent une surface-Wg non isothermique, est une fonction de $k_u = \varepsilon k$ ($\varepsilon = \pm 1$), la courbure (non constante) de la courbe étant, d'après ce qui est exposé au paragraphe 5, astreinte à vérifier une équation différentielle de la forme (5.13), où a est une constante.

Or, pour que la torsion d'une telle courbe soit une fonction linéaire à coefficients constants de sa courbure, il faut — d'après (5.13) — qu'on ait

$$\left\{1 + a\frac{d\sigma}{dk_u}\right\}\left\{1 + 2a\frac{d\sigma}{dk_u} - \left(\frac{d\sigma}{dk_u}\right)^2\right\} = 0. \tag{7.1}$$

Mais, d'après ce qui a été exposé au paragraphe 4, pour que l'un des facteurs du premier membre de (7.1) s'annule, il faut que la surface soit,

---

([9]) A. R. FORSYTH, *loc. cit.*, p. 170-171.

([10]) O. PYLARINOS, *Sur les surfaces*-W *applicables sur des surfaces de révolution* [*Ann. Mat. pura ed Appl.*, (IV), vol. 63, 1963, p. 33-70, 59].

ou bien une surface à courbure moyenne constante, ou bien une surface cylindrique; il faut donc qu'elle soit une surface isothermique, et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Une surface-*Wg *dont les géodésiques qui coupent les lignes de courbure de chaque famille sous un angle constant sont les diverses positions d'une courbe gauche dont la courbure et la torsion sont liées par une relation linéaire à coefficients constants, est nécessairement isothermique.*

Par ailleurs, si une surface-Wg est une surface à courbure totale constante $K_1 \neq 0$, elle n'est pas nécessairement isothermique, car si elle l'était, sa courbure moyenne H serait aussi constante et la surface se réduirait à une sphère. De là résulte, en vertu du théorème IV, que la courbure k de la courbe dont les diverses positions engendrent la surface, et en conséquence $k_u = \varepsilon k$, n'est pas nécessairement constante. En outre, dans ce cas, la torsion σ de la courbe sera liée à k_u, d'après la troisième formule (3.1), par la relation

$$k_u^2 + 2ak_u\sigma - \sigma^2 = K_1 = \text{Cte}. \tag{7.2}$$

En dérivant cette équation par rapport à k_u, il vient

$$\frac{d\sigma}{dk_u}\{\sigma - ak_u\} = k_u + a\sigma. \tag{7.3}$$

Mais d'après le théorème IX, on a

$$k_u + a\sigma \neq 0, \qquad \sigma - ak_u \neq 0.$$

Donc, grâce à (7.3), on aura

$$\frac{d\sigma}{dk_u} = \frac{k_u + a\sigma}{\sigma - ak_u}, \tag{7.4}$$

et en dérivant l'équation (7.4) par rapport à k_u on trouve, en remplaçant dans la dérivée du second membre de cette équation la dérivée $\frac{d\sigma}{dk_u}$ par sa valeur (7.4),

$$\frac{d^2\sigma}{dk_u^2} = \frac{(1 + a^2)\,(\sigma^2 - k_u^2 - 2a\sigma k_u)}{(\sigma - ak_u)^2}. \tag{7.5}$$

Or, si l'on porte les valeurs (7.4) et (7.5) des $\frac{d\sigma}{dk_u}$, $\frac{d^2\sigma}{dk_u^2}$ dans le premier membre de l'équation (5.13), il vient

$$\sigma\{\sigma^2 - k_u^2 - 2a\sigma k_u\} = 0$$

et ce produit, la courbure totale K_1 de la surface étant $\neq 0$, est nécessairement $\neq 0$. En effet, pour qu'il s'annule, puisque $\sigma \neq 0$, on doit avoir $\frac{\sigma}{k_u} = \text{Cte}$, et s'il en est ainsi la surface est nécessairement cylindrique car sinon sa courbure moyenne, d'après le théorème IX, serait constante, et la surface serait sphérique. On peut donc énoncer le :

THÉORÈME X. — *Les seules surfaces-*Wg *à courbure totale constante sont les surfaces cylindriques.*

Il est à noter que l'équation de Gauss, qui correspond à une surface-Wg non isothermique rapportée aux paramètres w, v_1 considérés au paragraphe 6, où w est l'arc des courbes $v_1 = \text{Cte}$ mesuré à partir des points où ces courbes coupent une même courbe $w = \text{Cte}$, affecte la forme

$$(7.6)\qquad \frac{d^2}{dw^2}\left\{\frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u}-a}{1+a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}\right\} = -\frac{\left\{\dfrac{d\sigma}{dk_u}-a\right\}\{k_u^2+2ak_u\sigma-k_n^2\}}{1+a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}.$$

On parvient à cette équation en remplaçant E, F, G et K dans la formule connue ([11]) par leurs valeurs (6.1) et (3.1).

Or à chaque couple de fonctions $k_u(w)$, $\sigma(w')$ satisfaisant aux deux équations différentielles (5.13) et (7.6), pour une valeur donnée de la constante a correspond une courbe gauche c, définie à un déplacement près, dont la courbure et la torsion, considérées comme fonctions de l'arc $s = w$ sont les fonctions de s :

$$k(s) = |k_u(s)| \equiv |k_u(w)|,\ \sigma(s) \equiv \sigma(w).$$

En outre, à ce couple de fonctions correspond une surface-Wg non isothermique, définie à un déplacement près, engendrée par les diverses positions de cette courbe se mouvant de manière que la trajectoire de chacun de ses points coupe ses positions successives sous le même angle. En effet, si l'on pose $w = u + v$ et qu'on considère les fonctions des u, v,

$$(7.7)\qquad \left\{\begin{aligned} &E=1, \qquad F=0, \qquad G=\left\{\frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u}-a}{1+a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}\right\}^2,\\ &L=k_u, \qquad M=\sigma\frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u}-a}{1+a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}, \qquad N=\{k_u+2a\sigma\}\left\{\frac{\dfrac{d\sigma}{dk_u}-a}{1+a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}\right\}^2, \end{aligned}\right.$$

on reconnaît aisément, eu égard aux équations (5.1) qui sont équivalentes aux équations (4.2), que ces fonctions, lorsque k_u, σ sont des fonctions

([11]) *Voir*, par exemple, K. STRUBECKER, *loc. cit.*, vol. IV, p. 115.

de $w = u + v$, satisfaisant aux équations différentielles (5.13) et (7.6) pour une valeur donnée de a, vérifient l'équation (1.15) de Gauss, les équations (1.6) de Codazzi et, en outre, une équation de la forme (2.4). Elles définissent donc, à un déplacement près, une surface rapportée à un réseau orthogonal (u, v) dont les courbes $v =$ Cte sont des géodésiques coupant les lignes de courbure de chaque famille sous un angle constant.

*Le problème de la détermination des surfaces-*Wg *non isothermiques se ramène donc ainsi à celui de l'intégration du système de deux équations différentielles de la forme* (5.13), (7.6), *où a est une constante.*

Le problème de la détermination des surfaces-Wg à courbure moyenne constante H_1, se ramène à l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{(1 - c'^2)\sigma^2 - H_1^2}{\sqrt{\sigma}},$$

où σ est la torsion de la courbe dont les diverses positions engendrent la surface, regardée comme fonction de l'arc s et liée à la courbure k par la relation $k - c'\sigma = H_1$, c' étant une constante ([12]).

8. — La courbure moyenne H d'une surface-Wg non isothermique — d'après ce qui est exposé dans les paragraphes précédents — n'est pas constante; elle est, en outre, une fonction de la seule variable k_u, c'est-à-dire de la courbure normale des géodésiques de la surface dont les lignes de courbure sont des trajectoires isogonales et, d'après la seconde formule (3.1), compte tenu de ce que

$$1 + a\frac{d\sigma}{dk_u} = \frac{dH}{dk_u} \neq 0,$$

on a

$$\frac{dk_u}{dH} = \frac{1}{1 + a\dfrac{d\sigma}{dk_u}}. \tag{8.1}$$

En outre, la courbure totale d'une telle surface d'après le théorème X, n'est pas constante; c'est une fonction de la courbure moyenne H, et de plus elle est liée à H, σ et a, d'après la troisième formule (3.1), par la relation algébrique à coefficients numériques

$$R_1(K, H, \sigma, a) \equiv K - H^2 + (1 + a^2)\sigma^2 = 0. \tag{8.2}$$

([12]) O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 337-338.

Or, en dérivant successivement l'équation (8.2) par rapport à H et en tenant compte à chaque dérivation de la valeur (8.1) de la dérivée $\frac{dk_u}{dH}$, on parvient aux trois équations

$$(8.3)\qquad R_2\left(K, H, \frac{dK}{dH}, \sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, a\right) = 0;$$

$$(8.4)\qquad R_3\left(K, H, \frac{dK}{dH}, \frac{d^2K}{dH^2}, \sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, \frac{d^2\sigma}{dk_u^2}, a\right) = 0;$$

$$(8.5)\qquad R_4\left(K, H, \frac{dK}{dH}, \frac{d^2K}{dH^2}, \frac{d^3K}{dH^3}, \sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, \frac{d^2\sigma}{dk_u^2}, \frac{d^3\sigma}{dk_u^3}, a\right) = 0$$

qui sont algébriques et à coefficients numériques par rapport aux arguments qui y figurent.

D'autre part, la torsion σ des géodésiques de la surface, dont les lignes de courbure de chaque famille sont des trajectoires isogonales, est une fonction de leur courbure normale k_u satisfaisant à l'équation différentielle (5.13) qui est aussi une équation

$$(8.6)\qquad F_1\left(\sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, \frac{d^2\sigma}{dk_u^2}, a\right) = 0$$

algébrique par rapport aux $\sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, \frac{d^2\sigma}{dk_u^2}, a$, à coefficients numériques. La dérivation de l'équation (8.6) par rapport à k_u conduit à une nouvelle équation

$$(8.7)\qquad F_2\left(\sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, \frac{d^2\sigma}{dk_u^2}, \frac{d^3\sigma}{dk_u^3}, a\right) = 0$$

qui est aussi algébrique et à coefficients numériques par rapport aux arguments qui y figurent.

En éliminant $\sigma, \frac{d\sigma}{dk_u}, \frac{d^2\sigma}{dk_u^2}, \frac{d^3\sigma}{dk_u^3}, a$ entre les quatre équations $R_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$ et les deux équations $F_i = 0$ $(i = 1, 2)$ on parvient dès lors à une équation

$$(8.8)\qquad R\left(K, H, \frac{dK}{dH}, \frac{d^2K}{dH^2}, \frac{d^3K}{dH^3}\right) = 0,$$

algébrique par rapport à K, H et aux dérivées de K.

L'équation (8.8) *est une équation différentielle du troisième ordre à laquelle doit satisfaire la courbure totale* K *de toute surface*-Wg *non isothermique,* K *étant considérée comme fonction de la courbure moyenne, algébrique par rapport aux dérivées de* K, *dont les coefficients sont des polynomes à coefficients numériques en* H, K.