ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. GUICHARDET

Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 1 (1966), p. 1-52
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_1_1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 1 à 52.

PRODUITS TENSORIELS INFINIS ET REPRÉSENTATIONS DES RELATIONS D'ANTICOMMUTATION

PAR M. A. GUICHARDET.

TABLE DES MATIÈRES.

C'est au cours de conversations avec G. Rideau que l'idée nous est venue d'utiliser les produits tensoriels infinis de C*-algèbres dans la recherche des représentations des relations d'anticommutation; en fait, plusieurs auteurs avaient déjà utilisé dans le même but les produits tensoriels infinis d'espaces hilbertiens introduits par von Neumann (*voir*, par exemple, Wightman-Schweber, Cordesse); mais la théorie des C*-algèbres nous semble plus apte à coordonner les différents aspects de la question; nous démontrons (cor. 3.1) que la recherche des représentations des relations d'anticommutation équivaut à celle des représentations d'une certaine C*-algèbre A, produit tensoriel d'une suite infinie d'algèbres isomorphes à l'algèbre des matrices complexes 2×2; ce point de vue permet entre autres de démontrer qu'il existe une et, à une quasi-équivalence près, une seule représentation factorielle de type fini (II_1) (propos. 3.1); et aussi de construire un grand nombre de représentations irréductibles comme produits tensoriels de représentations irréductibles — mais malheureusement pas toutes (*cf.* § 3.6, n° 5). Mais A peut aussi être définie (propos. 3.2) comme le produit croisé d'une C*-algèbre commutative — l'algèbre des fonctions continues sur le produit d'une suite d'espaces à deux éléments — par un groupe d'automorphismes — le produit restreint d'une suite de groupes à deux éléments; c'est d'ailleurs sous cet aspect que A se relie le plus commodément aux relations d'anticommutation; ce deuxième point de vue permet de retrouver les résultats de Gånding et Wightman. En troisième lieu A peut être définie comme C*-algèbre de Clifford d'un espace hilbertien réel de dimension infinie dénombrable — et ceci relie les travaux déjà cités à ceux de I. E. Segal, Shale et Stinespring.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à une étude systématique des produits tensoriels infinis, et d'abord des produits tensoriels infinis d'espaces hilbertiens, pour lesquels on a jugé bon de reprendre l'étude sous une forme différente de celle de von Neumann, à savoir, essentiellement, en ignorant le « produit complet » au profit des divers « produits incomplets » qu'il contient; la théorie des représentations permet, d'autre part, de simplifier notablement certaines démonstrations, comme celle de la proposition 2.8, (i). En ce qui concerne les produits tensoriels infinis de $C^\star$-algèbres, beaucoup de leurs propriétés se déduisent aisément de celles des produits finis par passage à la limite inductive; signalons toutefois une propriété sans analogue dans le cas fini : la tendance très nette des produits infinis à être antiliminaires (propos. 2.11). On a groupé au chapitre 0 quelques brefs rappels sur les produits tensoriels infinis en Algèbre, destinés à éclaircir les rapports existant entre les diverses notions introduites par la suite. L'auteur tient, pour terminer, à s'excuser des longueurs que contient certainement ce travail : c'est qu'il ambitionne d'être lu par des mathématiciens aussi bien que par des physiciens, et le choix des explications à donner ou à ne pas donner fut souvent bien difficile à faire — et probablement bien arbitraire...

CHAPITRE 0.

Préliminaires algébriques.

0.1. Produits tensoriels d'espaces vectoriels. — Soit $(\mathrm{E}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'espaces vectoriels complexes; on définit en Algèbre (*cf.* [2], App. 1) le produit tensoriel $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour toute famille (x_i), où $x_i \in \mathrm{E}_i$, il existe un élément $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}} x_i$ de $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ dépendant multilinéairement des x_i; tout élément de $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ est combinaison linéaire de tels éléments;

(ii) (propriété universelle) Pour toute application multilinéaire u de $\prod \mathrm{E}_i$ dans un espace vectoriel F, il existe une application linéaire unique φ de $\bigotimes \mathrm{E}_i$ dans F telle que $\varphi(\bigotimes x_i) = u((x_i))$;

(iii) (associativité) Pour toute partition $\mathrm{I} = \bigcup_{\lambda\in\mathrm{L}} \mathrm{I}_\lambda$ de I, il existe un isomorphisme unique de $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i$ sur $\bigotimes_{\lambda\in\mathrm{L}}\left(\bigotimes_{i\in\mathrm{I}_\lambda} \mathrm{E}_i\right)$ transformant tout élément $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}} x_i$ en l'élément $\bigotimes_{\lambda\in\mathrm{L}}\left(\bigotimes_{i\in\mathrm{I}_\lambda} x_i\right)$.

Nous utiliserons exclusivement ici des sous-espaces vectoriels de $\bigotimes \mathrm{E}_i$ définis de la façon suivante : on se donne pour tout i un élément non nul a_i de E_i et l'on prend le sous-espace vectoriel de $\bigotimes \mathrm{E}_i$ engendré par les éléments $\bigotimes x_i$, où $x_i = a_i$ pour presque tout i (on entend par là : sauf pour un nombre fini d'indices); le sous-espace en question sera noté $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}}^{(a_i)} \mathrm{E}_i$ ou encore $\bigotimes_{i\in\mathrm{I}}^{a} \mathrm{E}_i$.

Ce nouveau produit tensoriel peut aussi être défini comme *limite inductive :* si J et K sont des parties finies de I vérifiant $\mathrm{J} \subset \mathrm{K}$, écrivons $\bigotimes_{\mathrm{K}} \mathrm{E}_i = \left(\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathrm{K}-\mathrm{J}} \mathrm{E}_i\right)$ et définissons une application linéaire injective $\varphi_{\mathrm{J},\mathrm{K}}$ de $\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i$ dans $\bigotimes_{\mathrm{K}} \mathrm{E}_i$ par

$$\varphi_{\mathrm{J},\mathrm{K}}\left(\bigotimes_{\mathrm{J}} x_i\right) = \left(\bigotimes_{\mathrm{J}} x_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathrm{K}-\mathrm{J}} a_i\right);$$

les $\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i$ forment maintenant un système inductif car, pour $\mathrm{J} \subset \mathrm{K} \subset \mathrm{L}$, on a trivialement $\varphi_{\mathrm{K},\mathrm{L}} \circ \varphi_{\mathrm{J},\mathrm{K}} = \varphi_{\mathrm{J},\mathrm{L}}$; d'autre part, on peut aussi écrire $\bigotimes_{\mathrm{I}}^{a} \mathrm{E}_i = \left(\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathrm{I}-\mathrm{J}}^{a} \mathrm{E}_i\right)$ et définir une application linéaire injective φ_{J} de $\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i$ dans $\bigotimes_{\mathrm{I}}^{a} \mathrm{E}_i$ par

$$\varphi_{\mathrm{J}}\left(\bigotimes_{\mathrm{J}} x_i\right) = \left(\bigotimes_{\mathrm{J}} x_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathrm{I}-\mathrm{J}} a_i\right);$$

les φ_{J} forment un système inductif, i. e. $\varphi_{\mathrm{K}} \circ \varphi_{\mathrm{J},\mathrm{K}} = \varphi_{\mathrm{J}}$ pour $\mathrm{J} \subset \mathrm{K}$; d'où une application linéaire de $\varinjlim\left(\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i\right)$ dans $\bigotimes^{a} \mathrm{E}_i$ qui est visiblement un *isomorphisme; on identifiera le plus souvent* $\bigotimes^{a} \mathrm{E}_i$ à $\varinjlim\left(\bigotimes_{\mathrm{J}} \mathrm{E}_i\right)$.

La propriété (ii) est encore vraie pour le produit tensoriel $\bigotimes^{a} \mathrm{E}_i$; notons aussi la propriété fonctorielle suivante :

(iv) Si l'on a, pour tout i, deux espaces vectoriels E_i et F_i, des vecteurs non nuls a_i et b_i de E_i et F_i respectivement et une application linéaire u_i de E_i dans F_i transformant a_i en b_i, il existe une application linéaire unique $\bigotimes u_i$ de $\bigotimes^{a} \mathrm{E}_i$ dans $\bigotimes^{b} \mathrm{F}_i$ transformant tout élément $\bigotimes x_i$ (où $x_i = a_i$ pour presque tout i) en $\bigotimes u_i(x_i)$; si les u_i sont injectifs, il en est de même de $\bigotimes u_i$.

On notera φ_i au lieu de $\varphi_{\{i\}}$ l'application canonique de E_i dans $\bigotimes^{a} \mathrm{E}_i$.

0.2. Produits tensoriels d'algèbres involutives unitaires. — Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'algèbres involutives complexes, chaque A_i ayant un élément unité e_i; on écrira $\bigotimes \mathrm{A}_i$ au lieu de $\bigotimes^{(e_i)} \mathrm{A}_i$; tout élément de $\bigotimes \mathrm{A}_i$ est donc combinaison linéaire d'éléments de la forme $\bigotimes x_i$, où $x_i = e_i$ pour presque tout i; $\bigotimes \mathrm{A}_i$ est une algèbre involutive unitaire où la multiplication est caractérisée par $(\bigotimes x_i)(\bigotimes y_i) = \bigotimes x_i y_i$ et l'involution par $(\bigotimes x_i)^\star = \bigotimes (x_i^\star)$; les applications $\varphi_{\mathrm{J},\mathrm{K}}$, φ_{J}, φ_i sont des morphismes d'algèbres involutives unitaires; en particulier, $\bigotimes A_i$ est limite inductive d'un système inductif d'algèbres involutives unitaires; les $\operatorname{Im}\varphi_i$ sont des sous-algèbres involutives unitaires deux à deux permutables de $\bigotimes A_i$.

De plus, $\bigotimes A_i$ possède la propriété universelle suivante :

(v) Si l'on a une algèbre involutive unitaire B et des morphismes d'algèbres involutives unitaires $u_i : A_i \to B$ *deux à deux permutables* [on entend par là que $u_i(x_i).u_j(x_j) = u_j(x_j).u_i(x_i)$ quels que soient $i \neq j$, $x_i \in A_i$ et $x_j \in A_j$], alors il existe un morphisme d'algèbres involutives unitaires et un seul $u : \bigotimes A_i \to B$ vérifiant $u_i = u \circ \varphi_i$ pour tout i, c'est-à-dire encore $u(\bigotimes x_i) = \prod u_i(x_i)$ en supposant que $x_i = e_i$ pour presque tout i.

CHAPITRE 1.

Produits tensoriels d'espaces hilbertiens et d'algèbres de von Neumann.

1.1. Produits tensoriels d'espaces hilbertiens. — On va reprendre l'étude de [20] d'un point de vue quelque peu différent.

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces préhilbertiens complexes séparés; pour tout i, soit a_i un vecteur normé [1] de H_i; pour toute partie finie J de I on fait de $\bigotimes_J H_i$ un espace préhilbertien séparé en posant

$$\Big(\bigotimes_J x_i \,\Big|\, \bigotimes_J y_i\Big) = \prod_J (x_i \,|\, y_i);$$

alors les applications $\varphi_{J,K}$ du paragraphe 0.1 sont isométriques et l'on peut faire de $\bigotimes^a H_i$ un espace préhilbertien séparé en posant

$$(\varphi_J(x) \,|\, \varphi_J(y)) = (x \,|\, y) \qquad \text{pour} \quad x, y \in \bigotimes_J H_i$$

ou encore

$$(\bigotimes x_i \,|\, \bigotimes y_i) = \prod (x_i \,|\, y_i),$$

où $x_i = y_i = a_i$ pour presque tout i; les applications φ_i et φ_J sont alors *isométriques*. On a, d'autre part, la propriété d'associativité suivante : soit $I = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$ une partition de I; pour tout $\lambda \in L$ posons $a_\lambda = \bigotimes_{i \in I_\lambda} a_i$; il existe un isomorphisme unique et isométrique de $\bigotimes_{i \in I}^a H_i$ sur $\bigotimes_{\lambda \in L}^{(a_\lambda)}\Big(\bigotimes_{i \in I_\lambda}^a H_i\Big)$

(1) C'est-à-dire de norme 1.

transformant tout élément $\bigotimes_{i\in I} x_i$ (où $x_i = a_i$ pour presque tout i) en $\bigotimes_{\lambda\in L}\left(\bigotimes_{i\in I_\lambda} x_i\right)$.

Supposons maintenant les H_i *hilbertiens*; nous noterons $\overset{h}{\bigotimes_{i\in I}}{}^{(a_i)} H_i$ ou $\overset{h}{\bigotimes_{i\in I}}{}^{a} H_i$ l'espace hilbertien complété de $\bigotimes_{i\in I}^{a} H_i$; pour toute partie finie J de I, on notera $\overset{h}{\bigotimes_{i\in J}} H_i$ l'espace hilbertien complété de $\bigotimes_{i\in J} H_i$; les applications $\varphi_{J,K}$ et φ_J se prolongent en des applications isométriques, notées de la même façon, de $\overset{h}{\bigotimes_{J}} H_i$ dans $\overset{h}{\bigotimes_{K}} H_i$ et $\overset{h}{\bigotimes_{I}}{}^{a} H_i$ respectivement. Le produit tensoriel $\overset{h}{\bigotimes_{I}}{}^{a} H_i$ est limite inductive des $\overset{h}{\bigotimes_{J}} H_i$ au sens suivant : si l'on a un espace hilbertien K et des applications linéaires isométriques u_J : $\overset{h}{\bigotimes_{J}} H_i \rightarrow K$ formant un système inductif, il existe une application linéaire isométrique unique u : $\overset{h}{\bigotimes_{I}}{}^{a} H_i \rightarrow K$ telle que $u \circ \varphi_J = u_J$ pour tout J. Enfin la propriété d'associativité s'énonce comme ci-dessus.

Définition de $\bigotimes x_i$ pour certaines familles (x_i).

Proposition 1.1. — *Soit (x_i) une famille de vecteurs vérifiant*

$$\sum_i \left| \| x_i \|^2 - 1 \right| < +\infty; \tag{1}$$

$$\sum_i \left| (x_i \mid a_i) - 1 \right| < +\infty; \tag{2}$$

alors le produit $\prod \| x_i \|$ existe, et est nul si et seulement si l'un des x_i est nul; de plus, la famille $\left(\varphi_J\left(\bigotimes_J x_i\right)\right)$, où J est une partie finie variable de I, *admet une limite dans $\overset{h}{\bigotimes_{I}}{}^{a} H_i$, dont la norme est égale à $\prod \| x_i \|$. Cette limite sera notée $\bigotimes x_i$.*

La proposition étant triviale si l'un des x_i est nul, supposons les x_i non nuls; alors (1) implique que $\prod \| x_i \|^2$ existe et est non nul (*cf.* [20] lemme 2.4.1); posons $c = \prod_J \| x_i \|^2$; les produits finis $\prod \| x_i \|$ sont majorés par un nombre k. D'autre part, comme on a $(x_i \mid a_i) \neq 0$ pour presque tout i, on peut supposer $(x_i \mid a_i) \neq 0$ pour tout i; alors (2) implique que $\prod (x_i \mid a_i)$ existe et est non nul, soit d sa valeur. Soit maintenant $\varepsilon > 0$;

il existe une partie finie J telle que pour toute partie finie K contenant J on ait

$$\left|\prod_{\mathrm{K}}\|x_i\|^2-c\right|\leqq\frac{\varepsilon c}{4k+\varepsilon};$$

$$\left|\prod_{\mathrm{K}}(x_i\,|\,a_i)-d\right|\leqq\frac{\varepsilon|d|}{8k+\varepsilon};$$

si $\mathrm{K}\supset\mathrm{J}$, on a, en posant $\mathrm{L}=\mathrm{K}-\mathrm{J}$:

$$\begin{aligned}\Big\|\bigotimes_{\mathrm{L}}x_i-\bigotimes_{\mathrm{L}}a_i\Big\|^2&=\Big\|\bigotimes_{\mathrm{L}}x_i\Big\|^2+1-2\,\mathrm{Re}\Big(\bigotimes_{\mathrm{L}}x_i\,\Big|\,\bigotimes_{\mathrm{L}}a_i\Big)\\&\leqq\left|\prod_{\mathrm{L}}\|x_i\|^2-1\right|+2\left|\prod_{\mathrm{L}}(x_i\,|\,a_i)-1\right|\\&\leqq\left|\frac{\prod_{\mathrm{K}}\|x_i\|^2-c+c-\prod_{\mathrm{J}}\|x_i\|^2}{\prod_{\mathrm{J}}\|x_i\|^2}\right|\\&\quad+2\left|\frac{\prod_{\mathrm{K}}(x_i\,|\,a_i)-d+d-\prod_{\mathrm{J}}(x_i\,|\,a_i)}{\prod_{\mathrm{J}}(x_i\,|\,a_i)}\right|\leqq\frac{\varepsilon}{k};\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\Big\|\varphi_{\mathrm{K}}\Big(\bigotimes_{\mathrm{K}}x_i\Big)-\varphi_{\mathrm{J}}\Big(\bigotimes_{\mathrm{J}}x_i\Big)\Big\|&=\Big\|\bigotimes_{\mathrm{K}}x_i-\varphi_{\mathrm{J,K}}\Big(\bigotimes_{\mathrm{J}}x_i\Big)\Big\|\\&=\prod_{\mathrm{J}}\|x_i\|.\Big\|\bigotimes_{\mathrm{L}}x_i-\bigotimes_{\mathrm{L}}a_i\Big\|\leqq(\varepsilon k)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

d'où l'assertion.

1.2. Relations entre les divers espaces $\overset{h}{\underset{i\in\mathrm{I}}{\bigotimes}}{}^a\,\mathrm{H}_i$.

Proposition 1.2. — *Les relations*

$$\sum_i|1-(a_i\,|\,b_i)|<+\infty$$

et

$$\sum_i(1-|(a_i\,|\,b_i)|)<+\infty$$

entre familles de vecteurs normés sont des relations d'équivalence; si l'on note la première $a\approx b$ et la seconde $a\sim b$, on a $a\sim b$ si et seulement si il existe une famille (α_i) de nombres complexes de module 1 telle que $(b_i)\approx(\alpha_i a_i)$.

Ces deux relations sont visiblement réflexives et symétriques; la première est transitive : en effet, supposons aussi $(b_i)\approx(c_i)$; alors

$$1-(a_i\,|\,c_i)=1-(a_i\,|\,b_i)+1-(b_i\,|\,c_i)+(a_i-b_i\,|\,b_i-c_i);$$

comme

$$\| a_i - b_i \|^2 = 2 - 2\,\mathrm{Re}\,(a_i \mid b_i) \leq 2 \mid 1 - (a_i \mid b_i) \mid,$$

on voit que

$$\sum_i \| a_i - b_i \|^2 < +\infty \qquad \text{et de même,} \qquad \sum_i \| b_i - c_i \|^2 < +\infty;$$

alors

$$\sum_i \| a_i - b_i \| . \| b_i - c_i \| < +\infty$$

et, finalement,

$$\sum_i \mid 1 - (a_i \mid c_i) \mid < +\infty.$$

Démontrons maintenant la dernière assertion : si $(b_i) \approx (\alpha_i a_i)$, on a

$$\sum_i (1 - \mid (a_i \mid b_i) \mid) = \sum_i (1 - \mid (\alpha_i a_i \mid b_i) \mid) \leq \sum_i \mid 1 - (\alpha_i a_i \mid b_i) \mid < +\infty;$$

réciproquement, supposons $a \sim b$; posons

$$\alpha_i = \begin{cases} \mid (a_i \mid b_i) \mid / (a_i \mid b_i) & \text{si} \quad (a_i \mid b_i) \neq 0, \\ 1 & \text{sinon}; \end{cases}$$

alors

$$\sum_i \mid 1 - (\alpha_i a_i \mid b_i) \mid = \sum_i (1 - \mid (a_i \mid b_i) \mid < +\infty.$$

La transitivité de $\sim$ est maintenant immédiate.

Proposition 1.3. — *Supposons $a \sim b$ et, plus précisément,*

$$\sum_i \mid 1 - (\alpha_i a_i \mid b_i) \mid < +\infty, \qquad \textit{avec} \quad \mid \alpha_i \mid = 1;$$

alors il existe un isomorphisme unique de $\overset{h}{\bigotimes}{}^a \mathrm{H}_i$ *sur* $\overset{h}{\bigotimes}{}^b \mathrm{H}_i$ *transformant tout élément* $\bigotimes x_i$ *de* $\overset{h}{\bigotimes}{}^a \mathrm{H}_i$ (avec $x_i = a_i$ pour presque tout i) *en l'élément* $\bigotimes \alpha_i x_i$ *de* $\overset{h}{\bigotimes}{}^b \mathrm{H}_i$.

L'unicité est évidente; pour prouver l'existence, prenons une partie finie J de I, écrivons

$$\overset{h}{\underset{\mathrm{I}}{\bigotimes}}{}^b \mathrm{H}_i = \Bigl(\overset{h}{\underset{\mathrm{J}}{\bigotimes}} \mathrm{H}_i\Bigr) \overset{h}{\bigotimes} \Bigl(\overset{h}{\underset{\mathrm{I-J}}{\bigotimes}}{}^b \mathrm{H}_i\Bigr)$$

et définissons une application linéaire u_J de $\overset{h}{\bigotimes_J} H_i$ dans $\overset{h}{\bigotimes_J}{}^b H_i$ par

$$u_J\left(\bigotimes_J x_i\right) = \left(\bigotimes_J \alpha_i x_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I-J} \alpha_i a_i\right),$$

ce qui a un sens d'après la proposition 1.1; les u_J sont isométriques et forment un système inductif; il en résulte une application linéaire isométrique u de $\overset{h}{\bigotimes}{}^a H_i$ dans $\overset{h}{\bigotimes}{}^b H_i$ qui transforme tout $\bigotimes x_i$ en l'élément voulu; pour voir que u est surjective, il suffit de voir que tout élément $\bigotimes y_i$ de $\overset{h}{\bigotimes}{}^b H_i$ avec $y_i = b_i$ pour presque tout i, est limite d'éléments de $\operatorname{Im} u$; soit donc $y_i = b_i$ sauf pour $i \in J$ finie; prenons $K \supset J$ et $x_i = \bar{\alpha}_i y_i$ ou a_i suivant que i appartient ou non à K; on a

$$\| u(\otimes x_i) - \otimes y_i \| = \left\| \left(\bigotimes_K y_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{I-K} \alpha_i a_i - \bigotimes_{I-K} b_i\right) \right\| = \| \otimes y_i \| \cdot \left\| \bigotimes_{I-K} \alpha_i a_i - \bigotimes_{I-K} b_i \right\|$$

et le deuxième facteur tend vers zéro d'après la démonstration de la proposition 1.1.

Remarque 1.1. — L'espace $\overset{h}{\bigotimes}{}^a H_i$ est noté, dans [20], $\prod_{\alpha \in I} \bigotimes{}^{\mathcal{C}} H_\alpha$, où $\mathcal{C}$ désigne la classe de a selon la relation $\approx$; si l'on prend un représentant de chaque classe, puis la somme hilbertienne des produits correspondants, on obtient l'espace noté $\prod_{\alpha \in I} \bigotimes H_\alpha$; enfin si l'on ne prend que des représentants appartenant à une même classe selon $\sim$, on obtient $\prod_{\alpha \in I} \bigotimes{}^{\mathcal{C}_w} H_\alpha$.

1.3. Produits tensoriels de sommes et d'intégrales hilbertiennes. — Le résultat suivant se trouve, sous une forme légèrement différente, dans [4], lemme 3.3.

Proposition 1.4. — *Soient* I *un ensemble, pour tout* $i \in I$, X_i *un ensemble et* α_i *un élément de* X_i; *pour tout* i *et tout* $\chi_i \in X_i$, H_{i,χ_i} *un espace hilbertien et* a_{i,χ_i} *un élément de cet espace, normé si* $\chi_i = \alpha_i$ *et nul dans le cas contraire; pour tout* $i \in I$ *posons* $H_i = \bigoplus_{\chi_i \in X_i} H_{i,\chi_i}$ (somme hilbertienne) *et* $a_i = (a_{i,\chi_i})$; *soit* X *le sous-ensemble de* $\prod X_i$ *formé des familles* (χ_i) *telles que* $\chi_i = \alpha_i$ *pour presque tout* i; *pour tout* $\chi = (\chi_i) \in X$ *posons*

$$H_\chi = \left(\overset{h}{\bigotimes_K} H_{i,\chi_i}\right) \overset{h}{\otimes} \left(\overset{h}{\bigotimes_{I-K}}{}^{(a_i,\chi_i)} H_{i,\chi_i}\right)$$

(K est l'ensemble des i pour lesquels $\chi_i \neq \alpha_i$), *que nous noterons aussi* $\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(a_i,\chi_i)} H_{i,\chi_i}$ *bien que* a_{i,χ_i} *soit non normé par un nombre fini d'indices. Alors il existe un isomorphisme unique de* $\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(a_i)} H_i$ *sur* $\bigoplus_{\chi \in X} H_\chi$ *transformant* *tout élément* $\bigotimes_i x_i$ [où $x_i = (x_{i,\chi_i})$ et $x_i = a_i$ pour presque tout i] *en la famille* $\chi \to \bigotimes_i x_{i,\chi_i}$.

L'unicité est évidente; pour établir l'existence, prenons une partie finie J de I; on sait qu'il existe un isomorphisme

$$u_J : \overset{h}{\bigotimes_J} H_i \to \bigoplus_{\chi_J \in \prod_J \chi_i} \Big(\overset{h}{\bigotimes_J} H_{i,\chi_i} \Big)$$

transformant tout élément $\bigotimes_J x_i$ en la famille $\chi_J \to \bigotimes_J x_{i,\chi_i}$; d'autre part, il existe une application linéaire isométrique

$$v_J : \bigotimes_{\chi_J \in \prod_J \chi_i} \Big(\overset{h}{\bigotimes_J} H_{i,\chi_i} \Big) \to \bigotimes_{\chi \in X} H_\chi$$

transformant toute famille $\chi_J \to y_{\chi_J}$ en la famille $\chi \to y_{\chi_J} \otimes \Big(\bigotimes_{I-J} a_{i,\chi_i} \Big)$; les applications $v_J \circ u_J : \overset{h}{\bigotimes_J} H_i \to \bigoplus_{\chi \in X} H_\chi$ sont isométriques et forment un système inductif; il en résulte une application de $\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(a_i)} H_i$ dans $\bigoplus_{\chi \in X} H_\chi$ dont on voit sans peine qu'elle possède les propriétés de l'énoncé.

Corollaire 1.1. — *Définissons* X_i, α_i *et* X *comme ci-dessus; pour tout* i, *soit* a_i *la fonction de Dirac en* α_i (2) *considérée comme élément de* $l^2(X_i)$; *il existe un isomorphisme unique de* $\overset{h}{\bigotimes}{}^{(a_i)} l^2(X_i)$ *sur* $l^2(X)$ *transformant tout élément* $\bigotimes f_i$ (où $f_i = a_i$ pour presque tout i) *en la fonction* $x \to \prod f_i(x_i)$.

Corollaire 1.2. — *Soient* $(G_i)_{i\in I}$ *une famille de groupes discrets,* a_i *la fonction de Dirac en* ε_i, *élément neutre de* G_i; G *le produit restreint des* G_i, *ensemble des familles* $(s_i) \in \prod G_i$ *telles que* $s_i = \varepsilon_i$ *pour presque tout* i; *il existe un isomorphisme unique de* $\overset{h}{\bigotimes}{}^{(a_i)} l^2(G_i)$ *sur* $l^2(G)$ *transformant tout élément* $\bigotimes f_i$ (*où* $f_i = a_i$ pour presque tout i) *en la fonction* $x \to \prod f_i(x_i)$.

Lemme 1.1. — *Soit* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'espaces localement compacts; pour tout* i, *soient* μ_i *une mesure positive sur* X_i, $\chi_i \to H_{i,\chi_i}$ *un champ* μ_i*-mesurable d'espaces hilbertiens,* $(t_{i,n})$ *une suite fondamentale de champs* μ_i*-mesurables de vecteurs; posons* $X = \prod X_i$, $\mu = \bigotimes \mu_i$. *Il existe sur le champ* $\chi \to \overset{h}{\bigotimes_i} H_{i,\chi_i}$ *une structure de champ* μ*-mesurable et une seule*

(2) Ou fonction égale à 1 en α_i et à 0 ailleurs.

rendant mesurables les champs de vecteurs $\chi = (\chi_i) \to \bigotimes_i t_{i,n_i}(\chi_i)$*; il existe alors un isomorphisme unique*

$$u : \overset{h}{\bigotimes_i} \int^{\oplus} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i) \to \int^{\oplus} \overset{h}{\bigotimes_i} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu(\chi)$$

transformant tout élément $\bigotimes_i x_i$ *en le champ de vecteurs* $\chi \to \bigotimes_i x_i(\chi_i)$.

Pour la première assertion, il suffit ([5], chap. II, § 1, propos. 4) de vérifier que les fonctions $\chi \to \left(\bigotimes_i t_{i,n_i}(\chi_i) \,\middle|\, \bigotimes t_{i,n'_i}(\chi_i)\right)$ sont mesurables et que pour tout χ les vecteurs $\bigotimes_i t_{i,n_i}(\chi_i)$ forment une suite totale dans $\overset{h}{\bigotimes} \mathrm{H}_{i,\chi_i}$ — ce qui est immédiat. En ce qui concerne la deuxième assertion, remarquons qu'on a une application multilinéaire

$$u' : \prod_i \int^{\oplus} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i) \to \int^{\oplus} \overset{h}{\bigotimes_i} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu(\chi)$$

transformant toute famille (x_i) en le champ $\chi \to \bigotimes_i x_i(\chi_i)$; il en résulte une application linéaire u comme indiqué dans l'énoncé; il est facile de voir qu'elle est isométrique; enfin on vérifie qu'elle est surjective en utilisant [5], chap. II, § 1, propos. 7.

Proposition 1.5. — *Soient* I *un ensemble dénombrable,* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille d'espaces compacts; pour tout i, soient* μ_i *une mesure positive de masse totale* 1 *sur* X_i, $\chi_i \to \mathrm{H}_{i,\chi_i}$ *un champ* μ_i*-mesurable d'espaces hilbertiens;* (t_{i,n_i}) *une suite fondamentale de champs de vecteurs mesurables;* a_i *un champ de vecteurs mesurable tel que* $\|a_i(\chi_i)\| = 1$ *pour presque tout* χ_i*; posons* $\mathrm{X} = \prod_i \mathrm{X}_i$, $\mu = \bigotimes_i \mu_i$, *et pour tout* $\chi \in \mathrm{X}$, *soit* $\mathrm{H}_\chi = \overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(a_i(\chi_i))} \mathrm{H}_{i,\chi_i}$. *Il existe sur le champ* $\chi \to \mathrm{H}_\chi$ *une structure de champ* μ*-mesurable et une seule rendant mesurables les champs de vecteurs*

$$\chi \to \Big(\bigotimes_{i\in\mathrm{J}} t_{i,n_i}(\chi_i)\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{i\in\mathrm{I}-\mathrm{J}} a_i(\chi_i)\Big) \qquad \text{(J, partie finie variable de I);}$$

il existe de plus un isomorphisme unique

$$\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(a_i)} \int^{\oplus} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i) \to \int^{\oplus} \mathrm{H}_\chi\, d\mu(\chi)$$

transformant tout élément $\bigotimes x_i$ (où $x_i = a_i$ pour presque tout i) *en le champ* $\chi \to \bigotimes x_i(\chi_i)$.

La première assertion se démontre comme au lemme précédent; passons à la deuxième : pour toute partie finie J de I, on a d'après le lemme un isomorphisme

$$u_\mathrm{J} : \overset{h}{\bigotimes_{i\in\mathrm{J}}} \int^{\oplus} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i) \to \int^{\oplus} \overset{h}{\bigotimes_{i\in\mathrm{J}}} \mathrm{H}_{i,\chi_i}\, d\mu_\mathrm{J}(\chi_\mathrm{J}),$$

où $\mu_J = \bigotimes_{i\in J} \mu_i$ et $\chi_J \in \prod_{i\in J} X_i$; d'autre part, on a une application isométrique naturelle

$$v_J : \int^{\oplus} \overset{h}{\bigotimes_{i\in J}} H_{i,\chi_i}\, d\mu_J(\chi_J) \to \int^{\oplus} \overset{h}{\bigotimes_{i\in J}} H_{i,\chi_i}\, d\mu(\chi)$$

transformant tout champ $\chi_J \to y(\chi_J)$ en le champ $\chi \to y(\chi_J)$, où le deuxième χ_J désigne la projection canonique de χ sur $\prod_J X_i$. Enfin pour tout χ on a une application isométrique évidente $w_{J,\chi}$ de $\overset{h}{\bigotimes_{i\in J}} H_{i,\chi_i}$ dans H_χ; il en résulte une application isométrique

$$w_J : \int^{\oplus} \overset{h}{\bigotimes_{i\in J}} H_{i,\chi_i}\, d\mu(\chi) \to \int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$$

transformant tout champ $\chi \to \bigotimes_J x_i(\chi_i)$ en le champ

$$\chi \to \Big(\bigotimes_J x_i(\chi_i)\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{I-J} a_i(\chi_i)\Big); \tag{1}$$

$w_J \circ v_J \circ u_J$ est une application isométrique de $\overset{h}{\bigotimes_{i\in J}} \int^{\oplus} H_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i)$ dans $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$ transformant tout élément $\bigotimes x_i$ en le champ (1). Ces applications forment un système inductif, et par suite définissent une application isométrique comme indiqué dans l'énoncé; on voit qu'elle est surjective en utilisant ([5], chap. II, § 1, propos. 7).

COROLLAIRE 1.3. — *Définissons* X_i, μ_i, X *et* μ *comme ci-dessus; notons* a_i *la fonction* 1 *sur* X_i; *alors il existe un isomorphisme unique de* $\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(a_i)} L^2(X_i, \mu_i)$ *sur* $L^2(X, \mu)$ *transformant tout élément* $\bigotimes_i f_i$ (où $f_i = 1$ pour presque tout i) *en la fonction* $\chi \to \prod_i f_i(\chi_i)$.

1.4. PRODUITS TENSORIELS D'ALGÈBRES DE VON NEUMANN. — Soient $(H_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces hilbertiens, $a = (a_i)$ une famille de vecteurs normés, $H = \overset{h}{\bigotimes}{}^a H_i$; pour tout $j \in I$ écrivons $H = H_j \overset{h}{\otimes} \Big(\overset{h}{\bigotimes_{i\neq j}}{}^a H_i\Big)$ et pour tout $T \in \mathcal{L}(H_j)$ notons $\overline{T}$ l'opérateur linéaire continu dans H défini par $\overline{T} = T \otimes 1$; l'application $T \to \overline{T}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(H_j)$ sur une algèbre de von Neumann dans H; les diverses algèbres de von Neumann ainsi obtenues sont deux à deux permutables. Pour toute famille (T_i) où $T_i \in \mathcal{L}(H_i)$ et $T_i = 1$ pour presque tout i, on posera $\otimes T_i = \prod \overline{T}_i$; noter que cet opérateur n'est autre que l'image de l'élément $\otimes T_i$ de l'algèbre $\otimes \mathcal{L}(H_i)$ par un morphisme évident de $\otimes \mathcal{L}(H_i)$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Donnons-nous maintenant pour tout i une algèbre de von Neumann A_i dans H_i; nous noterons $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ l'algèbre de von Neumann dans H engendrée par les opérateurs $\overline{T}_i$, où T_i parcourt A_i et i parcourt I; on a trivialement $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A'_i \subset \left(\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i\right)'$.

Le résultat qui suit se trouve partiellement dans [4], propos. 3.2 et corollaire.

Proposition 1.6. — *L'algèbre* $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ *est un facteur si et seulement si chaque* A_i *est un facteur; on a* $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i = \mathcal{L}(H)$ *si et seulement si* $A_i = \mathcal{L}(H_i)$ *pour tout* i.

Deuxième assertion (contenue dans [20] théorème X) : Si le commutant d'une des A_i, soit A_{i_0}, contient un opérateur T non scalaire, le commutant de $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ contient $\overline{T}$ qui n'est pas scalaire; réciproquement supposons $A_i = \mathcal{L}(H_i)$ pour tout i et démontrons que $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i = \mathcal{L}(H)$; rappelons d'abord que cela est vrai si I est fini; ensuite il suffit de montrer que le seul sous-espace vectoriel fermé de H non nul et invariant par $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ est H, ou encore que, étant donnés deux vecteurs normés x et y de H et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe $T \in \overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ tel que $\| Tx - y \| < \varepsilon$; or il existe une partie finie J de I et des vecteurs normés x', $y' \in \operatorname{Im}\varphi_J$ tels que $\| x' - x \|$ et $\| y' - y \| < \varepsilon$; puis il existe $T \in \overset{c}{\bigotimes}_J A_i = \mathcal{L}\left(\overset{h}{\bigotimes}_J H_i\right)$ tel que $\| T \| = 1$ et que $Tx' = y'$; alors

$$\| Tx - y \| \leq \| Tx - Tx' \| + \| Tx' - y' \| + \| y' - y \| < 2\varepsilon.$$

Première assertion : Si le centre d'une des A_i, soit A_{i_0}, contient un opérateur T non scalaire, le centre de $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ contient $\overline{T}$ qui n'est pas scalaire; réciproquement supposons que chaque A_i soit un facteur; comme on a $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A'_i \subset \left(\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i\right)'$, l'algèbre de von Neumann engendrée par $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ et son commutant contient tous les opérateurs $\overline{S}.\overline{T}$, où $S \in A_i$ et $T \in A'_i$, donc tous les $\overline{R}$ où $R \in \mathcal{L}(H_i)$, donc est égale à $\mathcal{L}(H)$, ce qui signifie que $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ est un facteur.

Remarque 1.2. — La nature de $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ dépend essentiellement du choix de a; par exemple, prenant $H_i = \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, $A_i = \mathcal{L}(\mathbf{C}^2) \otimes 1$ et faisant varier a, on peut obtenir des facteurs de type I, II ou III (*cf.* § 3.6).

Remarque 1.3. — Takeda définit dans [25] un produit tensoriel abstrait, limite inductive des produits tensoriels finis, et dont les divers $\overset{c}{\bigotimes}{}^a A_i$ sont des quotients; cette notion sera utilisée dans la démonstration de la proposition 2.8.

1.5. Produits tensoriels de représentations unitaires de groupes discrets. — Soient $(G_i)_{i\in I}$ une famille de groupes discrets, ε_i l'élément neutre de G_i, π_i une représentation unitaire de G_i dans un espace hilbertien H_i, a_i un vecteur normé de H_i; G le produit restreint des G_i (*voir* définition au corollaire 1.2); associant à tout élément $s=(s_i)$ de G l'opérateur $\pi(s)=\bigotimes \pi_i(s_i)$ dans $\overset{h}{\bigotimes}{}^a H_i$, on obtient une représentation unitaire, notée $\bigotimes^a \pi_i$, de G dans $\overset{h}{\bigotimes}{}^a H_i$; l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$ n'est autre que le produit tensoriel des algèbres de von Neumann engendrées par les $\pi_i(G_i)$.

Proposition 1.7. — *Si* $H_i=l^2(G_i)$, $a_i=$ *fonction de Dirac en* ε_i *et si* π_i *est la représentation régulière gauche de* G_i, *alors* $\bigotimes^a \pi_i$ *est équivalente à la représentation régulière gauche de* G.

Cela résulte immédiatement du corollaire 1.2.

1.6. Produits tensoriels d'algèbres hilbertiennes. — On utilise la définition des algèbres hilbertiennes donnée dans ([5], chap. I, § 5).

Soit (A_i) une famille d'algèbres hilbertiennes, chaque A_i admettant un élément unité e_i de norme 1; $A=\bigotimes A_i$ est une algèbre involutive et un espace préhilbertien; c'est en fait une algèbre hilbertienne : les axiomes (i) (ii) et (iv) sont trivialement vérifiés; quant à l'axiome (iii), il suffit de vérifier que l'application $y\to xy$ est continue pour tout x de la forme $\bigotimes x_i$ ou $x_i=e_i$ pour presque tout i, soit pour $i\notin J$ finie; écrivons $\bigotimes A_i=\left(\bigotimes_J A_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{I-J} A_i\right)$; alors l'application $y\to xy$ est de la forme $T\bigotimes 1$ et T est continue puisqu'il s'agit maintenant d'un produit tensoriel fini. Si l'on désigne par H_i et H les espaces hilbertiens complétés respectifs de A_i et A, on a $H=\overset{h}{\bigotimes}{}^{(e_i)} H_i$.

Proposition 1.8. — *On a*

$$\mathcal{U}(\bigotimes A_i)=\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{U}(A_i) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}(\bigotimes A_i)=\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{V}(A_i).$$

Si $\bigotimes x_i\in\bigotimes A_i$, on a

$$U_{\otimes x_i}=\bigotimes U_{x_i}\in\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{U}(A_i),$$
$$V_{\otimes x_i}=\bigotimes V_{x_i}\in\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{V}(A_i);$$

comme $\mathcal{U}(\bigotimes A_i)$ et $\mathcal{V}(\bigotimes A_i)$ sont engendrées respectivement par les $U_{\otimes x_i}$ et $V_{\otimes x_i}$, on a

$$\mathcal{U}(\bigotimes A_i)\subset\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{U}(A_i),$$
$$\mathcal{V}(\bigotimes A_i)\subset\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{U}(A_i),$$

puis

$$\mathcal{U}(\bigotimes A_i)=(\mathcal{V}(\bigotimes A_i))'\supset\left(\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{V}(A_i)\right)'$$
$$\supset\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}(\mathcal{V}(A_i))'=\overset{c}{\bigotimes}{}^{(e_i)}\mathcal{U}(A_i).$$

CHAPITRE 2.

PRODUITS TENSORIELS DE C*ALGÈBRES.

2.1. CAS DES PRODUITS TENSORIELS FINIS. — On va rappeler brièvement, dans ce paragraphe, les définitions et résultats principaux concernant les produits tensoriels finis de C*-algèbres.

Produit tensoriel $\check{\otimes}$. — Les démonstrations sont données dans [16] dans le cas du produit tensoriel de deux algèbres.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de C*-algèbres admettant chacune un élément unité e_i et φ_i le morphisme canonique $A_i \to \otimes A_i$; pour tout morphisme unitaire u de l'algèbre involutive $\otimes A_i$ dans une C*-algèbre B et tout élément $x = \sum_p \bigotimes_i x_{i,p}$ de $\otimes A_i$, on a

$$\| u(x) \| \leq \sum_p \prod_i \| u(\varphi_i(x_{i,p})) \| \leq \sum_p \prod_i \| x_{i,p} \|;$$

si l'on pose $\| x \|_\vee = \sup \| u(x) \|$, la borne supérieure étant prise pour toutes les C*-algèbres B et tous les morphismes u, on obtient une norme d'algèbre involutive sur $\otimes A_i$ qui vérifie en outre

$$\left\| \bigotimes_i x_i \right\| = \prod_i \| x_i \| \qquad (x_i \in A_i); \tag{1}$$

$$\| x x^* \| = \| x \|^2 \qquad (x \in \otimes A_i), \tag{2}$$

et qui est la plus grande parmi celles qui vérifient ces conditions. En complétant $\otimes A_i$ pour cette norme, on obtient une C*-algèbre notée $\check{\otimes} A_i$; elle possède la propriété universelle suivante : pour toute famille (u_i) de mosphismes unitaires *deux à deux permutables* des A_i dans une C*-algèbre unitaire B, il existe un morphisme unitaire unique $u : \check{\otimes} A_i \to B$ tel qu'on ait $u(\otimes x_i = \prod_i u_i(x_i)$ pour toute famille (x_i). Ce produit tensoriel est associatif en un sens évident (*cf.* chap. 0).

Produit tensoriel $\overset{*}{\otimes}$. — Il existe sur $\otimes A_i$ une plus petite norme d'algèbre involutive vérifiant (1) et (2); elle est notée $\| \quad \|_*$ et peut être définie de la façon suivante : soit, pour tout i, π_i une représentation fidèle (donc isométrique) de A_i dans un espace hilbertien H_i; alors la représentation $\otimes \pi_i$ de $\otimes A_i$ dans $\overset{h}{\otimes} H_i$ est isométrique pour la norme $\| \quad \|_*$, ceci quel que soit le choix des H_i et des π_i; la complétée de $\otimes A_i$ pour cette norme est une C*-algèbre notée $\overset{*}{\otimes} A_i$ ([26], [27], [30]).

Les normes $\| \quad \|_{\vee}$ et $\| \quad \|_{*}$ peuvent être distinctes (*cf.* remarque 2.2); elles sont égales si les A_i sont postliminaires; dans le cas général, l'application identique de $\bigotimes A_i$ se prolonge en un morphisme surjectif $\overset{*}{\bigotimes} A_i \to \overset{*}{\bigotimes} A$, qui est dit *canonique* ([16], [26]).

Si les A_i sont simples, il en est de même de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ (noter que pour les C^*-algèbres unitaires, « simple » signifie aussi bien « sans idéaux autoadjoints non triviaux » que « sans idéaux autoadjoints fermés non triviaux »); si les A_i sont liminaires (resp. postliminaires), il en est de même de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ ([26], [30], [31]).

Soit, pour tout i, π_i une représentation de A_i dans un espace hilbertien H_i; il existe une représentation unique $\overset{*}{\bigotimes} \pi_i$ de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ dans $\overset{h}{\bigotimes} H_i$ telle que $\left(\overset{*}{\bigotimes} \pi_i\right)(\bigotimes x_i) = \bigotimes \pi_i(x_i)$ pour toute famille (x_i); son noyau ne dépend que des noyaux des π_i; en particulier, si les π_i sont fidèles, $\overset{*}{\bigotimes} \pi_i$ l'est aussi; l'algèbre de von Neumann engendrée par $\operatorname{Im} \overset{*}{\bigotimes} \pi_i$ est le produit tensoriel des algèbres de von Neumann engendrées par les $\operatorname{Im} \pi_i$. On a la propriété de distributivité suivante : soit, pour tout i, (π_{i,λ_i}), avec $\lambda_i \in L_i$ une famille de représentations de A_i; posons $L = \prod_i L_i$; alors les représentations $\overset{*}{\bigotimes}_{i \in L} \left(\bigoplus_{\lambda_i \in L_i} \pi_{i,\lambda_i}\right)$ et $\bigoplus_{\lambda \in L}\left(\overset{*}{\bigotimes}_{i \in L} \pi_{i,\lambda_i}\right)$ sont équivalentes. Si les A_i sont postliminaires, toute représentation irréductible de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ est équivalente à un produit tensoriel de représentations irréductibles; ceci est faux dans le cas général ([15], [30]).

Soit, pour tout i, f_i une forme linéaire positive sur A_i; il existe une forme linéaire positive unique $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ sur $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ telle qu'on ait

$$\left(\overset{*}{\bigotimes} f_i\right)(\bigotimes x_i) = \prod f_i(x_i).$$

pour toute famille (x_i); la représentation canoniquement associée à $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ est équivalente au produit tensoriel des représentations canoniquement associées aux f_i; en particulier, $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ est pure si et seulement si les f_i le sont; si les f_i sont centrales, $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ l'est aussi; en particulier, si les f_i sont des caractères finis, $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ est aussi un caractère fini; réciproquement, tout caractère fini de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ est le produit tensoriel de ses restrictions, qui sont elles-mêmes des caractères finis; en d'autres termes, toute représentation factorielle de type fini de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ est quasi équivalente à un produit tensoriel de représentations factorielles de type fini ([15], [30]).

Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille finie de groupes localement compacts; il existe un isomorphisme unique de $\overset{*}{\bigotimes} C^*(G_i)$ sur $C^*\left(\prod G_i\right)$ transformant tout élément $\otimes f_i$, où $f_i \in \mathcal{K}(G_i)$ en la fonction sur $\prod G_i : s = (s_i) \to \prod f_i(s_i)$; si, de plus, le dual de chaque G_i est identique à son dual réduit (sur cette notion, *voir* [6], 18.3), il en est de même de $\prod G_i$ et l'on a de plus

$$\check{\otimes}\, C^\star(G_i) = \overset{\star}{\otimes}\, C^\star(G_i) \quad ([15], [16]).$$

2.2. DÉFINITION DE $\check{\otimes} A_i$ DANS LE CAS GÉNÉRAL. — Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $C^\star$-algèbres ayant chacune un élément unité e_i; notons φ_i les morphismes canoniques $A_i \to \otimes A_i$; pour tout élément x de $\otimes A_i$ posons $\| x \|_\vee = \sup \| u(x) \|$, la borne supérieure étant prise pour tous les morphismes unitaires u d'algèbres involutives de $\otimes A_i$ dans toutes les $C^\star$-algèbres unitaires; comme au paragraphe 2.1, on voit que $\| x \|_\vee$ est fini et que $\| \quad \|_\vee$ est une semi-norme vérifiant les conditions (2) et

$$\| \otimes x_i \|_\vee \leq \prod \| x_i \| \quad \text{pour } x_i \in A_i \qquad \text{et} \qquad x_i = e_i \quad \text{pour presque tout } i;$$

pour montrer que c'est une norme et qu'elle vérifie (1), choisissons pour tout i une représentation fidèle π_i de A_i dans un espace hilbertien H_i et un vecteur normé ξ_i de H_i; notons π la représentation correspondante de $\otimes A_i$ dans $\overset{h}{\otimes}{}^{\xi} H_i$; soit $x = \sum_{p=1}^{n} \otimes x_{i,p}$ un élément de $\otimes A_i$; il existe une partie finie J de I telle que $i \notin J$ implique $x_{i,p} = e_i$ pour tout $p = 1, \ldots, n$; écrivons

$$\bigotimes_I A_i = \Big(\bigotimes_J A_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{I-J} A_i\Big),$$

$$\overset{h}{\bigotimes_I}{}^{\xi} H_i = \Big(\overset{h}{\bigotimes_J} H_i\Big) \overset{h}{\otimes} \Big(\overset{h}{\bigotimes_{I-J}}{}^{\xi} H_i\Big);$$

alors on peut écrire

$$x = x_J \otimes \Big(\bigotimes_{I-J} e_i\Big),$$

$$\pi(x) = \pi_J(x_J) \otimes 1,$$

où $x_J \in \bigotimes_J A_i$ et $\pi_J = \bigotimes_J \pi_i$; π_J étant fidèle, on voit que π est fidèle, donc que $\| \quad \|_\vee$ est une norme; par ailleurs, supposons $n = 1$; alors

$$\| \pi(x) \| = \| \pi_J(x_J) \| = \prod \| x_i \|,$$

d'où résulte la condition (1). Il est facile de voir que $\| \quad \|_\vee$ est en fait la plus grande norme d'algèbre involutive vérifiant (1) et (2).

En complétant $\otimes A_i$ pour cette norme, on obtient une $C^\star$-algèbre notée $\check{\bigotimes}_{i\in I} A_i$ ou $\check{\otimes} A_i$ et qui possède la propriété universelle suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Pour toute famille* (u_i) *de morphismes unitaires deux à deux permutables des* A_i *dans une* $C^\star$-*algèbre unitaire* B, *il existe* *un morphisme unitaire unique* u *de* $\check{\bigotimes} A_i$ *dans* B *tel que* $u(\bigotimes x_i) = \prod u_i(x_i)$, *pour toute famille* (x_i), *où* $x_i \in A_i$ *et* $x_i = e_i$ *pour presque tout* i.

En effet, d'après le paragraphe 0.2, il existe un morphisme $u : \bigotimes A_i \to B$ vérifiant cette condition, et u se prolonge à $\check{\bigotimes} A_i$ puisque $\| u(x) \| \leq \| x \|_{\vee}$ pour tout $x \in \bigotimes A_i$.

Le produit tensoriel $\check{\bigotimes}$ est associatif au sens suivant : pour toute partition $I = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$ de I il existe un isomorphisme unique de $\check{\bigotimes}_i A_i$ sur $\check{\bigotimes}_{\lambda \in L} \left(\check{\bigotimes}_{i \in I_\lambda} A_i \right)$ transformant tout élément $\bigotimes_i x_i$, où $x_i = e_i$ pour presque tout i, en $\bigotimes_{\lambda \in L} \left(\bigotimes_{i \in I_\lambda} x_i \right)$.

Définition de $\check{\bigotimes} A_i$ *comme limite inductive.* — Soient $J \subset K$ deux parties finies de I; le morphisme $\varphi_{J,K} : \bigotimes_J A_i \to \bigotimes_K A_i$ défini au chapitre 0 se prolonge en un morphisme $\check{\varphi}_{J,K} : \check{\bigotimes}_J A_i \to \check{\bigotimes}_K A_i$; si l'on écrit

$$\check{\bigotimes}_K A_i = \left(\check{\bigotimes}_J A_i \right) \check{\bigotimes} \left(\check{\bigotimes}_{K-J} A_i \right),$$

on a

$$\check{\varphi}_{J,K}(x) = x \otimes \left(\bigotimes_{K-J} e_i \right) \quad \text{pour tout } x \in \check{\bigotimes}_J A_i,$$

ce qui prouve que $\check{\varphi}_{J,K}$ est *isométrique*. Il est clair que les $\check{\bigotimes}_J A_i$ forment maintenant un système inductif. D'autre part, les morphismes $\psi_J : \bigotimes_J A_i \to \bigotimes_I A_i$ se prolongent en des morphismes $\check{\psi}_J : \check{\bigotimes}_J A_i \to \check{\bigotimes}_I A_i$ qui sont isométriques pour la même raison que les $\check{\varphi}_{J,K}$; les $\check{\psi}_J$ forment un système inductif et, par suite, définissent un morphisme $\psi : \varinjlim \check{\bigotimes}_J A_i \to \check{\bigotimes}_I A_i$ (pour la définition des limites inductives, *cf.* [25]); ψ est évidemment isométrique; il est surjectif puisque son image contient $\bigotimes A_i$; c'est donc un *isomorphisme de* $\varinjlim \check{\bigotimes}_J A_i$ *sur* $\check{\bigotimes}_I A_i$.

Remarque 2.1. — Indiquons sans démonstration le résultat suivant, analogue à la proposition 1.1 : soit (x_i) une famille vérifiant

$$\sum_i \| x_i - e_i \| < +\infty;$$

alors le produit $\prod \| x_i \|$ existe et est nul si et seulement si l'un des x_i est nul; la famille $\left(\varphi_J \left(\bigotimes_J x_i \right) \right)$ admet une limite dans $\check{\bigotimes} A_i$, dont la norme est égale à $\prod \| x_i \|$.

2.3. Définition de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ dans le cas général. — Rappelons la définition donnée dans [25] : les produits tensoriels finis $\overset{*}{\bigotimes}_J A_i$ forment un système inductif avec des morphismes $\overset{\star}{\varphi}_{J,K}$ analogues aux $\check{\varphi}_{J,K}$ du paragraphe précédent et l'on pose $\overset{\star}{\bigotimes}_J A_i = \varinjlim \overset{\star}{\bigotimes}_J A_i$; on a la même propriété d'associativité que pour $\check{\bigotimes} A_i$.

Proposition 2.2. — *La* C*-*algèbre* $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$ *s'identifie canoniquement à l'algèbre complétée de* $\bigotimes A_i$ *pour une certaine norme* $\| \ \|_\vee$ *qu'on peut décrire comme suit : soient, pour tout* i, π_i *une représentation fidèle de* A_i *dans un espace hilbertien* H_i *et* ξ_i *un vecteur normé de* H_i*; soit* π *la représentation correspondante de* $\bigotimes A_i$ *dans* $\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i$*; alors on a* $\| \pi(x) \| = \| x \|_\star$ *pour tout* $x \in \bigotimes A_i$.

Les morphismes composés $\bigotimes_J A_i \to \overset{\star}{\bigotimes}_J A_i \to \overset{\star}{\bigotimes}_I A_i$ forment un système inductif et par suite définissent un morphisme $\varphi : \bigotimes_I A_i \to \overset{\star}{\bigotimes}_I A_i$ qui, visiblement, est injectif et a une image partout dense; ensuite la norme $x \to \| \pi(x) \|$ sur $\bigotimes A_i$ induit sur chaque $\bigotimes_J A_i$ la norme $\| \ \|_\star$ (*cf.* § 2.1), ce qui prouve que φ est isométrique.

C. Q. F. D.

Il est facile de voir que $\| \ \|_\star$ est en fait la plus petite norme sur $\bigotimes A_i$ vérifiant (1) et (2).

Si les A_i sont commutatives, soit $A_i = \mathcal{C}(X_i)$, X_i espace compact, $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{C}\left(\prod X_i\right)$, à tout élément $\bigotimes x_i$ de $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$ correspondant la fonction sur $\prod X_i : \chi = (\chi_i) \to \prod x_i(\chi_i)$ (*voir* [25], théor. 6).

La norme $\| \ \|_\star$ sur $\bigotimes A_i$ étant inférieure à la norme $\| \ \|_\vee$, l'application identique de $\bigotimes A_i$ se prolonge en un morphisme de $\check{\bigotimes} A_i$ dans $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$, évidemment surjectif; il sera dit *canonique*; c'est la limite inductive des divers morphismes canoniques $\check{\bigotimes}_J A_i \to \overset{\star}{\bigotimes}_J A_i$.

Proposition 2.3. — *Si les* A_i *sont postliminaires, le morphisme canonique* $\check{\bigotimes} A_i \to \overset{\star}{\bigotimes} A_i$ *est un isomorphisme.*

Car tous les morphismes canoniques $\check{\bigotimes} A_i \to \overset{\star}{\bigotimes} A_i$ sont des isomorphismes.

Proposition 2.4. — *Si les* A_i *sont simples* (*voir* définition au § 2.1), $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$ *l'est aussi.*

Car soit u un morphisme non nul de $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$ dans une C*-algèbre B; il existe une partie finie J de I telle que $u \big| \overset{\star}{\bigotimes}_J A_i \neq 0$; pour toute partie finie K de I, $u \Big| \overset{*}{\bigotimes}_{J \cap K} A_i$ est non nulle, donc isométrique puisque $\overset{*}{\bigotimes}_{J \cup K} A_i$ est simple; $u \Big| \overset{*}{\bigotimes}_{K} A_i$ est isométrique, donc aussi u puisque la réunion des $\overset{*}{\bigotimes}_{K} A_i$ est partout dense dans $\overset{*}{\bigotimes}_{I} A_i$.

Remarque 2.2. — Les A_i peuvent être simples sans que $\check{\bigotimes} A_i$ le soit. Soient, en effet, G le groupe libre à deux générateurs, $H = l^2(G)$, π et ρ les représentations régulières gauche et droite de G, A (resp. $\mathcal{A}$) la C^*-algèbre (resp. l'algèbre de von Neumann) engendrée par $\pi(G)$; comme π et ρ sont équivalentes, A (resp. $\mathcal{A}$) est isomorphe à la C^*-algèbre (resp. à l'algèbre de von Neumann) engendrée par $\rho(G)$; on a donc deux morphismes u et v de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(H)$, où u est l'identité et v envoie $\mathcal{A}$ sur $\rho(G)'' = \mathcal{A}'$; comme u et v sont permutables, il en résulte un morphisme w de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(H)$ tel que $w(x \otimes y) = u(x)\, v(y)$; w n'est pas continu pour la norme $\| \;\|_*$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, car ladite norme induit sur $A \otimes A$ la norme $\| \;\|_*$, et il est prouvé dans [16] (théor. 6) que $w \mid A \otimes A$ n'est pas continue pour cette norme; le morphisme canonique $\mathcal{A} \check{\otimes} \mathcal{A} \to \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}$ a donc un noyau distinct de $\{0\}$ et de $\mathcal{A} \check{\otimes} \mathcal{A}$, laquelle n'est donc pas simple. D'autre part, $\mathcal{A}$ est un facteur de type II_1 parce que toute classe d'éléments conjugués de G non réduite à l'élément neutre est infinie (*cf.* [5], chap. III, § 7, propos. 5); $\mathcal{A}$ est donc simple (*ibid.*, § 5, cor. 3 de la propos. 2).

2.4. Produits tensoriels de représentations. — Posons $A = \overset{*}{\bigotimes}_{i \in I} A_i$; soient, pour tout i, H_i un espace hilbertien, π_i une représentation de A_i dans H_i et ξ_i un vecteur normé de H_i; posons $H = \overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i$.

Proposition 2.5. — *Il existe une représentation unique* $\pi = \overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *de* A *dans* H *telle que* $\pi(\otimes x_i) = \otimes \pi_i(x_i)$ *pour* $x_i \in A_i$ *et* $x_i = e_i$ *pour presque tout* i; *si* $\mathcal{A}_i$ (resp. $\mathcal{A}$) *désigne l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\operatorname{Im} \pi_i$ (resp. $\operatorname{Im} \pi$), *on a* $\mathcal{A} = \overset{c}{\bigotimes}{}^{\xi} \mathcal{A}_i$.

L'existence de π résulte de ce que, pour toute partie finie J de I, la restriction de la représentation $\otimes \pi_i$ de $\otimes A_i$ à $\bigotimes_J A_i$ est de norme ≤ 1; les autres assertions de l'énoncé sont triviales.

Corollaire 2.1. — *La représentation* $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *est factorielle* (resp. irréductible) *si et seulement si toutes les* π_i *le sont.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 1.6.

Proposition 2.6. — *Le noyau de* $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *ne dépend que des noyaux des* π_i; $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *est fidèle si et seulement si chaque* π_i *est fidèle.*

Soient π_i et π'_i deux représentations de A_i ayant même noyau; on sait que pour toute partie finie J de I, $\overset{*}{\bigotimes_J} \pi_i$ et $\overset{*}{\bigotimes_J} \pi'_i$ ont même noyau; donc pour tout $x \in \overset{*}{\bigotimes_J} A_i$, on a

$$\left\| \left(\overset{*}{\bigotimes_J} \pi_i \right) (x) \right\| = \left\| \left(\overset{*}{\bigotimes_J} \pi'_i \right) (x) \right\|$$

ou encore

$$\left\| \left(\overset{*}{\bigotimes} \pi_i \right) (x) \right\| = \left\| \left(\overset{*}{\bigotimes} \pi'_i \right) (x) \right\|$$

et cela reste vrai, par continuité, pour tout $x \in A$; d'où la première assertion; la seconde est immédiate à partir de la proposition 2.2.

Comparaison des diverses représentations $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *obtenues en faisant varier* ξ [3].

Proposition 2.7. — *Si* $\xi \sim \xi'$ (*voir* définition à la proposition 1.2), *les représentations* $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *et* $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i$ *sont équivalentes.*

On a $\sum | 1 - (\alpha_i \xi_i \mid \xi'_i) | < +\infty$, où les α_i sont des nombres complexes de module 1; d'après la proposition 1.3, il existe un isomorphisme u de $\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i$ sur $\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} H_i$ transformant tout élément $\bigotimes \eta_i$, où $\eta_i = \xi_i$ pour presque tout i en l'élément $\bigotimes \alpha_i \eta_i$; on va démontrer que

$$u \circ \left(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i \right) (x) = \left(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i \right) (x) \circ u$$

pour tout $x \in \bigotimes A_i$, ou, ce qui est équivalent, pour $x = \bigotimes x_i$ avec $x_i = e_i$ pour presque tout i; ou enfin que

$$u\left(\left(\left(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i \right) \left(\bigotimes x_i \right)\right) \left(\bigotimes \eta_i \right)\right) = \left(\left(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i \right) \left(\bigotimes x_i \right)\right) \left(u \left(\bigotimes \eta_i \right)\right),$$

avec $\eta_i = \xi_i$ pour presque tout i; alors, prenant J telle que $x_i = e_i$ pour $i \notin J$, puis $K \supset J$, on a

$$\begin{aligned} 2 \text{ membre} &= \left(\bigotimes \pi_i (x_i) \right) \left(\lim_K \left(\left(\bigotimes_K \alpha_i \eta_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{I-K} \xi'_i \right) \right) \right) \\ &= \lim_K \left(\left(\bigotimes_K \pi_i (x_i) \,.\, \alpha_i \eta_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{I-K} \xi'_i \right) \right) \\ &= \bigotimes \pi_i (x_i) \,.\, \alpha_i \eta_i = 1^{\text{er}} \text{ membre}. \end{aligned}$$

Proposition 2.8. — *Réciproquement, si les* π_i *sont irréductibles et si* $\xi \not\sim \xi'$, *les représentations* $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ *et* $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i$ *sont inéquivalentes.*

(i) Commençons par démontrer un cas particulier (d'ailleurs contenu dans le théorème X de [20]) : celui où $A_i = \mathcal{L}(H_i)$ et où π_i est l'application identique.

---

(3) On trouvera des résultats voisins dans [18'], théor. 5.

On a, par hypothèse,

$$\sum (1 - |(\xi_i | \xi'_i)|) = +\infty\,;$$

soit I_0 un sous-ensemble dénombrable de I tel que

$$\sum_{i \in I_0} (1 - |(\xi_i | \xi'_i)|) = +\infty\,;$$

d'après [20], lemme 2.4.1, on a

$$\prod_{i \in I_0} |(\xi_i | \xi'_i)| = 0\,;$$

distinguons deux cas :

a. $(\xi_i | \xi'_i) \neq 0$ pour presque tout i; on peut alors supposer $(\xi_i | \xi'_i) \neq 0$ pour tout $i \in I_0$; notons T_i l'opérateur (dans H_i) de projection sur ξ_i; soit (J_n) une suite strictement croissante de parties finies de I_0 ayant pour réunion I_0; posons

$$S_n = \Big(\bigotimes_{J_n} T_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{I - J_n} 1\Big) \in \bigotimes \mathcal{L}(H_i)\,;$$

on va voir que $\Big(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i\Big)(S_n)$ tend fortement vers zéro, mais non $\Big(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i\Big)(S_n)$, ce qui démontrera la proposition; pour montrer que $\Big(\Big(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i\Big)(S_n)\Big)(\eta) \to 0$ pour tout $\eta \in \overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} H_i$, on peut se borner à prendre $\eta \in \bigotimes^{\xi'} H_i$ (parce que les opérateurs considérés sont de norme ≤ 1), puis, par linéarité, $\eta = \bigotimes \eta_i$ avec $\eta_i = \xi'_i$ pour presque tout i et $\|\eta_i\| \leq 1$; soit K l'ensemble des i pour lesquels $\eta_i \neq \xi'_i$; on a

$$\begin{aligned}
\Big\| \Big(\Big(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i\Big)(S_n)\Big)\Big(\bigotimes \eta_i\Big) \Big\| &= \Big\| \Big(\bigotimes_{J_n \cap K} T_i \eta_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{J_n - K} T_i \xi'_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{I - J_n} \xi'_i\Big) \Big\| \\
&\leq \prod_{J_n - K} \| T_i \xi'_i \| \\
&= \prod_{J_n - K} |(\xi_i | \xi'_i)| \\
&= \Big(\prod_{J_n} |(\xi_i | \xi'_i)|\Big) \Big/ \Big(\prod_{J_n \cap K} |(\xi_i | \xi'_i)|\Big)
\end{aligned}$$

et cette expression tend vers zéro parce que son numérateur tend vers zéro et que son dénominateur reste minoré par un nombre > 0. D'autre part, $\Big(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i\Big)(S_n)$ ne tend pas fortement vers zéro, car il prend sur $\bigotimes \xi_i$ la valeur constante $\bigotimes \xi_i$.

b. $(\xi_i | \xi'_i) = 0$ pour une infinité de i; on peut alors supposer que cela a lieu pour tout $i \in I_0$; le raisonnement est analogue à celui de *a*, en plus simple puisque $\Big(\Big(\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i\Big)(S_n)\Big)\Big(\bigotimes \eta_i\Big)$ est nul dès que J_n rencontre $I_0 - K$.

(ii) Passons maintenant au cas général. Les produits tensoriels finis $\overset{c}{\underset{J}{\bigotimes}} \mathcal{L}(H_i)$ forment un système inductif d'algèbres de von Neumann avec des morphismes normaux évidents $\overset{c}{\underset{J}{\bigotimes}} \mathcal{L}(H_i) \to \overset{c}{\underset{K}{\bigotimes}} \mathcal{L}(H_i)$ pour $J \subset K$; soit $\mathfrak{A}$ la limite inductive de ce système inductif dans la catégorie des algèbres de von Neumann avec morphismes normaux (*voir*, par exemple, une définition dans [17], § 7); les morphismes normaux évidents

$$\overset{c}{\underset{J}{\bigotimes}} \mathcal{L}(H_i) \to \mathcal{L}\left(\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i\right),$$
$$\overset{c}{\underset{J}{\bigotimes}} \mathcal{L}(H_i) \to \mathcal{L}\left(\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} H_i\right)$$

définissent des morphismes normaux

$$u:\quad \mathfrak{A} \to \mathcal{L}\left(\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i\right),$$
$$u':\quad \mathfrak{A} \to \mathcal{L}\left(\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} H_i\right)$$

qui sont des représentations non équivalentes; en effet, $\bigotimes \mathcal{L}(H_i)$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathfrak{A}$, et les restrictions de u et u' à cette sous-algèbre sont inéquivalentes, d'après (i); d'autre part les divers morphismes composés $\underset{J}{\bigotimes} A_i \to \overset{c}{\underset{J}{\bigotimes}} \mathcal{L}(H_i) \to \mathfrak{A}$ définissent un morphisme $v : \bigotimes A_i \to \mathfrak{A}$ dont l'image est ultra-faiblement dense dans $\mathfrak{A}$; de plus, $u \circ v$ et $u' \circ v$ sont respectivement les restrictions de $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ et $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i$ à $\bigotimes A_i$; si ces deux représentations étaient équivalentes, il existerait un isomorphisme F de $\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i$ sur $\overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} H_i$ tel que

$$F \circ u(v(x)) = u'(v(x)) \circ F \quad \text{pour tout } x \in \bigotimes A_i;$$

par continuité ultra-faible, on aurait

$$F \circ u(y) = u'(y) \circ F \quad \text{pour tout } y \in \mathfrak{A},$$

ce qui contredirait le fait que u et u' sont inéquivalentes.

Remarque 2.3. — Si $\xi \not\sim \xi'$ et si les π_i ne sont pas irréductibles, les représentations $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ et $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi'} \pi_i$ peuvent être de types très différents, comme on le verra au paragraphe 3.6.

2.5. Produits tensoriels d'états.

Proposition 2.9. — *Soient, pour tout* i, f_i *un état* (ou forme linéaire positive de norme 1) *sur* A_i, π_i *la représentation et* ξ_i *le vecteur totalisateur normé canoniquement associés à* f_i; *il existe un état unique sur* $\bigotimes A_i$, *noté* $\overset{*}{\bigotimes} f_i$, *vérifiant* $(\overset{*}{\bigotimes} f_i)\,(\bigotimes x_i) = \prod f_i(x_i)$ *pour* $x_i \in A_i$ *et* $x_i = e_i$ *pour presque tout* i; *la représentation de* $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ *canoniquement associée à* $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ *est équivalente à* $\bigotimes^{\xi} \pi_i$.

On sait qu'il existe pour toute partie finie J de I un état $\overset{*}{\bigotimes_J} f_i$ sur $\overset{*}{\bigotimes_J} A_i$ vérifiant

$$\Big(\overset{*}{\bigotimes_J} f_i\Big)\Big(\bigotimes_J x_i\Big) = \prod_J f_i(x_i);$$

soient maintenant $K \supset J$ et $\varphi_{J,K} : \overset{*}{\bigotimes_J} A_i \to \overset{*}{\bigotimes_K} A_i$ le morphisme canonique; on a facilement

$$\Big(\overset{*}{\bigotimes_K} f_i\Big) \cdot \varphi_{J,K} = \overset{*}{\bigotimes_J} f_i;$$

on peut donc définir une forme linéaire positive f' sur la limite inductive algébrique A′ des $\overset{*}{\bigotimes_J} A_i$ en posant $f'(x) = \Big(\overset{*}{\bigotimes_J} f_i\Big)(x_J)$ pour tout $x \in A'$, tout J et tout $x_J \in \overset{*}{\bigotimes_J} A_i$ ayant x pour image canonique dans A′; de plus, $\overset{*}{\bigotimes_J} f_i$ étant de norme 1, on a

$$|f'(x)| \leqq \|x_J\| = \|x\|$$

et f' se prolonge en une forme linéaire positive $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ sur $\overset{*}{\bigotimes} A_i$, qui vérifie visiblement la première relation indiquée. Ensuite il est facile de voir que $\bigotimes \xi_i$ est totalisateur pour la représentation $\bigotimes^{\xi} \pi_i$; reste à voir qu'on a

$$\big(\overset{*}{\bigotimes} f_i\big)(x) = \big(\big(\bigotimes^{\xi} \pi_i\big)(x) \otimes \xi_i \mid \otimes \xi_i\big)$$

pour tout $x \in \overset{*}{\bigotimes} A_i$, ou, ce qui suffira, pour $x = \bigotimes x_i$ où $x_i = e_i$ pour presque tout i; et dans ce cas, la vérification est immédiate.

Corollaire 2.2. — *L'état* $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ *est pur si et seulement si chaque* f_i *est pur.*

Produits tensoriels d'états centraux. (Les états centraux sont ceux qui vérifient $f(xy) = f(yx)$ pour tout x et tout y; ce sont aussi les traces finies de norme 1; sur ce point on pourra consulter [6], § 6 ou [14].)

Si les f_i sont centraux, il en est de même de $\overset{*}{\bigotimes} f_i$; si, de plus, les f_i sont des caractères, $\overset{*}{\bigotimes} f_i$ est un caractère, puisqu'alors les π_i sont factorielles, et par suite aussi $\bigotimes^{\xi} \pi_i$ (*cf.* § 2.1); réciproquement on a la

Proposition 2.10. — *Tout caractère fini normé de* $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ *est égal au produit tensoriel de ses restrictions aux* A_i, *lesquelles sont elles-mêmes des caractères.*

Soit f un caractère fini normé de $\overset{\star}{\bigotimes} A_i$; soient π la représentation associée, $\mathfrak{A}$ le facteur fini engendré par $\operatorname{Im}\pi$; pour tout i, soient φ_i le morphisme canonique $A_i \to \overset{\star}{\bigotimes} A_i$, $f_i = f \circ \varphi_i$, $\pi_i = \pi \circ \varphi_i$, et $\mathfrak{A}_i$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\operatorname{Im}(\pi_i)$; les $\mathfrak{A}_i$ permutent deux à deux et engendrent le facteur $\mathfrak{A}$, donc sont des facteurs finis; soient Tr et Tr_i les traces canoniques normées sur $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_i$.

Pour tout $x \in \overset{\star}{\bigotimes} A_i$ on a $f(x) = \operatorname{Tr}\pi(x)$ et pour tout $x_i \in A_i$:

$$f_i(x_i) = \operatorname{Tr}\pi(\varphi_i(x_i)) = \operatorname{Tr}_i\pi(\varphi_i(x_i)) = \operatorname{Tr}_i\pi_i(x_i)$$

et comme π_i est factorielle, f_i est un caractère. Montrons maintenant que pour toute partie finie J de I et toute famille $(T_i)_{i\in J}$, où $T_i \in \mathfrak{A}_i$, on a

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Tr}\Big(\prod_J T_i\Big) = \prod_J \operatorname{Tr} T_i;$$

on peut se borner au cas où les T_i sont positifs et non nuls; (1) étant vraie pour card J = 1, supposons-la vraie pour card $J \leq n-1$ et démontrons-la pour card $J = n$; soit $J = \{ i_1, \ldots, i_n \}$; l'application $T_{i_n} \to \operatorname{Tr}(T_{i_1} \ldots T_{i_n})$ est une trace normale finie sur $\mathfrak{A}_{i_n}^+$; elle est fidèle : on sait en effet que si deux opérateurs non nuls appartiennent, l'un à un facteur et l'autre à son commutant, leur produit est non nul; on en déduit de proche en proche que $T_{i_1} \ldots T_{i_n} \neq 0$, donc $\operatorname{Tr}(T_{i_1} \ldots T_{i_n}) \neq 0$; cette trace est donc proportionnelle à Tr_{i_n}, soit

$$\operatorname{Tr}(T_{i_1} \ldots T_{i_n}) = k \operatorname{Tr}_{i_n}(T_{i_n}) = k \operatorname{Tr}(T_{i_n});$$

prenant $T_{i_n} = 1$, on voit que

$$k = \operatorname{Tr}(T_{i_1} \ldots T_{i_{n-1}}) = \operatorname{Tr} T_{i_1} \ldots \operatorname{Tr} T_{i_{n-1}}$$

d'après l'hypothèse de récurrence; d'où la relation (1).

Reste à prouver que $f(x) = \big(\overset{\star}{\bigotimes} f_i\big)(x)$ pour tout $x \in \overset{\star}{\bigotimes} A_i$, ou, ce qui suffira, pour $x = \bigotimes x_i$, où $x_i = e_i$ pour presque tout i; alors

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{Tr}\pi(x) &= \operatorname{Tr}\Big(\pi\Big(\prod_i \varphi_i(x_i)\Big)\Big) \\ &= \prod_i \operatorname{Tr}_i(\pi_i(x_i)) = \prod_i f_i(x_i) \\ &= \big(\overset{\star}{\bigotimes} f_i\big)(x). \end{aligned}$$

2.6. Autres propriétés de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$.

Proposition 2.11. — *Si* I *est infini et si chaque* A_i *admet suffisamment* ([4]) *de représentations irréductibles de dimension* $\geqq 2$, *alors* $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ *est antiliminaire.*

Pour tout i, A_i admet une famille $(\pi_{i,\lambda_i})_{\lambda_i \in L_i}$ de représentations irréductibles dans des espaces hilbertiens H_{i,λ_i} de dimension $\geqq 2$ telle que $\bigoplus_{\lambda_i \in L_i} \pi_{i,\lambda_i}$ soit fidèle; soient ξ_{i,λ_i} et ξ'_{i,λ_i} des vecteurs normés orthogonaux de H_{i,λ_i}; pour tout $\lambda = (\lambda_i) \in \prod L_i$, posons

$$\pi_\lambda = \overset{*}{\bigotimes}{}^{(\xi_i,\lambda_i)} \pi_{i,\lambda_i} \qquad \text{et} \qquad \pi'_\lambda = \overset{*}{\bigotimes}{}^{(\xi'_i,\lambda_i)} \pi_{i,\lambda_i};$$

les représentations π_λ et π'_λ sont irréductibles (cor. 2.1), de même noyau (propos. 2.6) et inéquivalentes (propos. 2.8); pour démontrer la proposition, il suffit, d'après ([10], théor. 1), de prouver que $\bigoplus_{\lambda \in L} \pi_\lambda$ et $\bigoplus_{\lambda \in L} \pi'_\lambda$ sont fidèles $\left(\text{on a posé } L = \prod L_i\right)$; faisons-le par exemple pour la première : soit J une partie finie de I; on sait que la représentation $\overset{*}{\bigotimes}_{i \in J} \left(\bigoplus_{\lambda_i \in L_i} \pi_{i,\lambda_i}\right)$ de $\overset{*}{\bigotimes}_{J} A_i$ est fidèle, et d'autre part, qu'elle est équivalente à $\bigoplus_{\lambda \in \prod_J L_i} \left(\overset{*}{\bigotimes}_{i \in J} \pi_{i,\lambda_i}\right)$; la représentation $\bigoplus_{\lambda \in L}\left(\overset{*}{\bigotimes}_{i \in J} \pi_{i,\lambda_i}\right)$, qui est un multiple de la précédente, est fidèle; comme $\overset{*}{\bigotimes}_{i \in J} \pi_{i,\lambda_i}$ est équivalente à une sous-représentation de $\pi_\lambda \big| \overset{*}{\bigotimes}_{J} A_i$, la représentation $\bigoplus_{\lambda \in L}\left(\pi_\lambda \big| \overset{*}{\bigotimes}_{J} A_i\right)$ est fidèle, donc aussi $\left(\bigoplus_{\lambda \in L} \pi_\lambda\right) \Big| \overset{*}{\bigotimes}_{J} A_i$ qui lui est équivalente; la représentation $\bigoplus_{\lambda \in L} \pi_\lambda$ étant isométrique sur chaque $\overset{*}{\bigotimes}_{J} A_i$, l'est aussi par continuité sur $\overset{*}{\bigotimes}_{J} A_i$.

Remarque 2.4. — Si A est une $C^\star$-algèbre, l'intersection N des noyaux des représentations irréductibles de dimension $\geqq 2$ de A est le plus grand idéal autoadjoint fermé commutatif de A; si, de plus, A n'est pas commutative, A/N admet suffisamment de représentations irréductibles de dimension $\geqq 2$. Cela dit, on peut déduire de la proposition 2.11 ce qui suit : soit (A_i) une famille infinie de $C^\star$-algèbres unitaires, postliminaires et non commutatives; pour tout i, soit N_i le plus grand idéal autoadjoint fermé commutatif de A_i; soit N le sous-espace vectoriel fermé de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$ engendré par les éléments $\bigotimes x_i$, où $x_i = e_i$ pour presque tout i et où $x_i \in N_i$

([4]) i. e. si pour tout x non nul de A_i il existe une représentation π irréductible de dimension $\geqq 2$ de A_i telle que $\pi(x) \neq 0$.

pour au moins un i; alors N est un idéal autoadjoint fermé de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$, et $(\overset{*}{\bigotimes} A_i)/N$ est isomorphe à $\overset{*}{\bigotimes} (A_i/N_i)$ et antiliminaire.

Lemme 2.1. — *Soient* H_1 *et* H_2 *des espaces hilbertiens,* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *des facteurs dans* H_1 *et* H_2 *dont les commutants sont hyperfinis continus; il existe un espace hilbertien* K *et un facteur* $\mathcal{B}$ *dans* K, *isomorphe à* $\mathcal{A}_1$ *et dont le commutant est isomorphe à* $\mathcal{A}_2$.

Le facteur $\mathcal{A}'_2$ est isomorphe à un facteur standard $\mathcal{D}$; il existe donc un espace hilbertien L et un projecteur $E \in (\mathcal{D} \overset{c}{\otimes} C_L)' = \mathcal{D}' \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(L)$ tel que $\mathcal{A}'_2$ soit spatialement isomorphe à $(\mathcal{D} \overset{c}{\otimes} C_L)_E$; alors $\mathcal{A}_2$ est spatialement isomorphe à $(\mathcal{D}' \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(L))_E$; d'autre part, $\mathcal{D}'$ est hyperfini continu, donc isomorphe à $\mathcal{A}'_1$; $\mathcal{D}' \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(L)$ est isomorphe à $\mathcal{A}'_1 \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(L)$; soit F le projecteur de $\mathcal{A}'_1 \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(L)$ correspondant à E par cet isomorphisme; alors $\mathcal{A}_2$ est isomorphe à $(\mathcal{A}'_1 \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(L))_F$; posons $K = F(H_1 \overset{h}{\otimes} L)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{A}_1 \overset{c}{\otimes} C_L)_F$; alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont isomorphes respectivement à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

Proposition 2.12. — *On suppose* I *infini dénombrable et, pour tout* i, A_i *postliminaire, séparable et admettant suffisamment de représentations irréductibles de dimension* ≥ 2; *alors il existe une représentation irréductible de* $\overset{*}{\bigotimes}_{i \in I} A_i$ *qui n'est pas équivalente à un produit tensoriel de représentations.*

Soit $I = I_1 \cup I_2$ une partition de I en deux sous-ensembles infinis; on peut écrire $\overset{*}{\bigotimes}_{i \in I} A_i = B_1 \overset{*}{\otimes} B_2$, où $B_j = \overset{*}{\bigotimes}_{i \in I_j} A_i$; B_1 et B_2 sont séparables et antiliminaires (propos. 2.11); d'après ([7], théor. 1), elles admettent des représentations π_1 et π_2 dont les commutants sont des facteurs hyperfinis continus $\mathcal{A}'_1$ et $\mathcal{A}'_2$; définissons K et $\mathcal{B}$ comme dans le lemme; transportons π_1 et π_2 en des représentations ρ_1 et ρ_2 des mêmes algèbres dans K telles que $\operatorname{Im}\rho_1$ et $\operatorname{Im}\rho_2$ engendrent respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; ρ_1 et ρ_2 étant des morphismes permutables de B_1 et B_2 dans $\mathcal{L}(K)$, il existe un morphisme ρ de $B_1 \overset{\vee}{\otimes} B_2$ dans $\mathcal{L}(K)$ tel que

$$\rho(z_1 \otimes z_2) = \rho_1(z_1) \cdot \rho_2(z_2) \qquad (z_j \in B_j);$$

mais comme B_1 et B_2 sont limites inductives de C*-algèbres postliminaires, on a d'après ([26], théor. 5), $B_1 \overset{\vee}{\otimes} B_2 = B_1 \overset{*}{\otimes} B_2$; ρ est une représentation irréductible qui n'est pas équivalente au produit tensoriel d'une représentation de B_1 et d'une représentation de B_2, puisque ses restrictions ρ_1 et ρ_2 à B_1 et B_2 ne sont pas de type I; considérée comme une représentation irréductible de $\overset{*}{\bigotimes} A_i$, ρ n'est donc pas non plus équivalente à un produit tensoriel de représentations des A_i.

2.7. Produits tensoriels et produits croisés. — Étant donnés une C^*-algèbre unitaire A et un groupe G opérant dans A par automorphismes, on va définir une C^*-algèbre « produit croisé » de A par G d'une façon différente de [28], encore qu'elle ne soit pas très originale ([5]); commençons par quelques rappels algébriques.

Soient A une algèbre involutive unitaire, d'élément unité e, et G un groupe, d'élément neutre ε, opérant dans A par automorphismes notés $(s, x) \to s.x$ pour $s \in G$ et $x \in A$; on définit en Algèbre une algèbre involutive « produit croisé » (G, A) de la façon suivante : (G, A) est l'ensemble des applications f : G $\to$ A nulles presque partout, muni d'une structure d'espace vectoriel évidente, d'une multiplication définie par

$$(ff')(s) = \sum_t (f(t))(t.f'(t^{-1}s))$$

et d'une involution définie par

$$(f^*)(s) = s.(f(s^{-1}))^*;$$

on définit un morphisme ∂ de G dans le groupe des éléments unitaires de (G, A) par

$$(\partial(s))(t) = \begin{cases} e & \text{pour } t = s, \\ 0 & \text{pour } t \neq s \end{cases}$$

et un morphisme ζ de A dans (G, A) par

$$(\zeta(x))(t) = \begin{cases} x & \text{pour } t = \varepsilon, \\ 0 & \text{pour } t \neq \varepsilon; \end{cases}$$

on a les relations suivantes :

$$\zeta(s.x) = \partial(s)\,\zeta(x)\,\partial(s)^{-1}, \quad \text{où} \quad s \in G, \quad x \in A; \tag{1}$$

$$f = \sum_s \zeta(f(s))\,\partial(s) \quad \text{pour toute } f \in (G, A); \tag{2}$$

enfin le triplet ((G, A), ∂, ζ) possède la propriété universelle suivante : pour toute algèbre involutive unitaire B, tout morphisme σ de G dans le groupe des éléments unitaires de B et tout morphisme ρ de A dans B vérifiant

$$\rho(s.x) = \sigma(s)\,\rho(x)\,\sigma(s)^{-1}, \qquad \text{où} \quad s \in G, \quad x \in A, \tag{3}$$

il existe un morphisme unique π : (G, A) $\to$ B vérifiant

$$\begin{cases} \sigma = \pi \circ \partial, \\ \rho = \pi \circ \zeta; \end{cases} \tag{4}$$

([5]) Elle a été définie indépendamment, entre autres, par Zeller-Meier et D. Kastler [17'].

π est donné par

$$\pi(f) = \sum_s \rho(f(s)) \cdot \sigma(s).$$

Supposons maintenant que A soit une C*-algèbre unitaire; notons π un morphisme unitaire de (G, A) dans une C*-algèbre unitaire B et définissons σ et ρ par (4); pour toute $f \in$ (G, A) on a

$$\| \pi(f) \| = \left\| \sum_s \rho(f(s)) \cdot \sigma(s) \right\| \leq \sum_s \| f(s) \|;$$

si donc on pose $\|f\| = \sup \| \pi(f) \|$, où la borne supérieure est prise pour toutes les C*-algèbres B et tous les morphismes π, on obtient une semi-norme sur (G, A); on démontre que cette semi-norme est en fait une norme. La complétée de (G, A) pour cette norme est une C*-algèbre que nous noterons C*(G, A); elle possède la *propriété universelle suivante :* pour toute C*-algèbre unitaire B, tout morphisme σ de G dans le groupe des éléments unitaires de B et tout morphisme ρ de A dans B vérifiant (3), il existe un morphisme unique π : C*(G, A) $\to$ B vérifiant (4); autrement dit, il y a correspondance bijective entre couples (σ, ρ) vérifiant (3) et morphismes π.

On notera que si $A = \mathbf{C}$, C*(G, A) n'est autre que la C*-algèbre du groupe (discret) G.

Relation avec les produits tensoriels. — Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de C*-algèbres unitaires; pour tout i, soit G_i un groupe, d'élément neutre ε_i, opérant dans A_i par automorphismes, ∂_i et ζ_i les morphismes canoniques respectivement de G_i et A_i dans $C^*(G_i, A_i)$; le produit restreint G des G_i (défini au cor. 1.2) opère dans $\check{\bigotimes} A_i$ de la façon suivante : soit $s = (s_i) \in G$, avec $s_i = \varepsilon_i$, sauf pour $i \in J$ partie finie de I; on écrit

$$\check{\bigotimes_I} A_i = \Big(\check{\bigotimes_J} A_i\Big) \check{\otimes} \Big(\check{\bigotimes_{I-J}} A_i\Big)$$

et l'on prend l'automorphisme $\Big(\check{\bigotimes_J} s_i\Big) \otimes 1$; notons ∂ et ζ respectivement les morphismes canoniques de G et $\check{\bigotimes} A_i$ dans $C^*\big(G, \check{\bigotimes} A_i\big)$.

PROPOSITION 2.13. — *Il existe un isomorphisme unique de* $C^*\big(G, \check{\bigotimes} A_i\big)$ *sur* $\check{\bigotimes} C^*(G_i, A_i)$ *transformant* $\zeta(\otimes x_i)$ *en* $\otimes \zeta_i(x_i)$ *pour tout* $\otimes x_i \in \otimes A_i$ *et* $\partial((s_i))$ *en* $\otimes \partial_i(s_i)$ *pour tout* $(s_i) \in G$.

L'unicité résulte de ce que les éléments $\zeta(\otimes x_i)$ et $\partial((s_i))$ engendrent $C^*\big(G, \check{\bigotimes} A_i\big)$; pour prouver l'existence notons

$$\varphi_i : \ A_i \to \check{\bigotimes} A_i, \qquad \psi_i : \ C^*(G_i, A_i) \to \check{\bigotimes} C^*(G_i, A_i) \qquad \text{et} \qquad \omega_i : \ G_i \to G$$

les morphismes canoniques; les morphismes $\psi_i \circ \zeta_i$ sont deux à deux permutables et par suite définissent un morphisme $\rho : \bigotimes A_i \to \bigotimes C^\star(G_i, A_i)$; les morphismes $\psi_i \circ \partial_i$ sont deux à deux permutables et, par suite, définissent un morphisme $\sigma : G \to \check{\bigotimes} C^\star(G_i, A_i)$; ρ et σ vérifient (3) et, par suite, définissent un morphisme $\pi : C^\star(G, \check{\bigotimes} A_i) \to \check{\bigotimes} C^\star(G_i, A_i)$ qui possède bien les deux propriétés de l'énoncé. D'autre part, pour tout i les morphismes $\partial \circ \omega_i$ et $\zeta \circ \varphi_i$ vérifient l'analogue de (3) et, par suite, définissent un morphisme

$$\pi'_i : \quad C^\star(G_i, A_i) \to C^\star(G, \check{\bigotimes} A_i);$$

les π'_i sont deux à deux permutables, d'où un morphisme

$$\pi' : \quad \check{\bigotimes} C^\star(G_i, A_i) \to C^\star(G, \check{\bigotimes} A_i);$$

enfin il n'est pas difficile de voir que π et π' sont mutuellement réciproques.

COROLLAIRE 2.3. — *Il existe un isomorphisme unique de* $\check{\bigotimes} C^\star(G_i)$ *sur* $C^\star(G)$ *transformant tout élément* $\bigotimes f_i$ (où f_i est une fonction à support fini sur G_i égale pour presque tout i à la fonction de Dirac en ε_i) *en la fonction* $s = (s_i) \to \prod_i f_i(s_i)$.

COROLLAIRE 2.4. — *Supposons que le dual de chaque* G_i *soit égal à son dual réduit* (sur la notion de dual réduit, *voir* [6], 18.3); *alors il en est de même de* G; *de plus, on a*

$$\check{\bigotimes} C^\star(G_i) = \overset{*}{\bigotimes} C^\star(G_i).$$

On sait que pour toute partie finie J de I on a

$$\check{\bigotimes_J} C^\star(G_i) = \overset{*}{\bigotimes_J} C^\star(G_i);$$

ceci entraîne la deuxième assertion par passage à la limite inductive. Notons u l'isomorphisme du corollaire 2.3, π_i la représentation régulière gauche de G_i, π celle de G, δ_i la fonction de Dirac en ε_i; identifions $\overset{h}{\bigotimes}{}^{\delta} l^2(G_i)$ et $l^2(G)$ par l'isomorphisme du corollaire 1.2; il est facile de voir, en utilisant la proposition 1.7, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overset{*}{\bigotimes} C^\star(G_i) & \xrightarrow{\;u\;} & C^\star(G) \\ & {\scriptstyle \overset{*}{\bigotimes}{}^{\delta}\pi_i} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi} & \\ & \mathcal{L}(l^2(G)) & \end{array}$$

est commutatif; les π_i étant injectives par hypothèse, il en est de même de $\overset{*}{\bigotimes}{}^{\delta}\pi_i$ (propos. 2.6), donc de π, d'où la première assertion.

CHAPITRE 3.

Représentations des relations d'anticommutation.

3.1. Un exemple de produit tensoriel de $C^\star$-algèbres. — Nous utiliserons dans tout ce chapitre les notations suivantes :

I, ensemble des nombres entiers strictement positifs;

A_i, $C^\star$-algèbre des matrices complexes 2×2;

$e_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad e'_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

élément quelconque de A_i :

$$x_i=\begin{pmatrix} x_{i00} & x_{i01} \\ x_{i10} & x_{i11} \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad y_i=\ldots,$$

C_i, sous-algèbre de A_i formée des matrices diagonales;

$A=\check{\bigotimes} A_i=\overset{\star}{\bigotimes} A_i$ (*cf.* propos. 2.3);

$C=\check{\bigotimes} C_i=\overset{\star}{\bigotimes} C_i$, considérée comme sous-algèbre de A;

$e=\bigotimes e_i=$ élément neutre de A;

φ_i, application canonique de A_i dans A;

$p_i=\varphi_i\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\in A$;

$u_i=\varphi_i(e'_i)\in A$;

$a_i=(2p_1-e)(2p_2-e)\ldots(2p_{i-1}-e)(e-p_i)u_i\in A.$

Proposition 3.1. — *La $C^\star$-algèbre* A *est simple* (i. e. sans idéaux auto-adjoints autres que $\{0\}$ et A) *et antiliminaire; si π est une représentation irréductible de* A, $\pi(A)$ *ne contient pas d'opérateur compact autre que* 0; A *admet un seul état central, qui est un caractère, à savoir le produit tensoriel des traces sur les* $A_i\left(x_i\to\frac{1}{2}(x_{i00}+x_{i11})\right)$*; la représentation associée engendre un facteur hyperfini continu.*

A est simple d'après la proposition 2.4 ou encore d'après ([9], th. 5.1); elle est antiliminaire d'après la proposition 2.11; soit π une représentation irréductible de A dans un espace hilbertien H, K l'algèbre des opérateurs compacts dans H; si $\pi(A)\cap K$ était non nul, on aurait $\pi(A)\supset K$ ([6], § 4.1.10), d'où $\pi(A)=K$ puisque A est simple; A étant unitaire, ceci entraînerait $\dim H<+\infty$, donc $\dim K=\dim A<+\infty$ — ce qui n'est pas le cas. (Ceci prouve à nouveau que A est antiliminaire.) A admet un seul caractère fini de norme 1 d'après la proposition 2.10, donc un seul état central, puisque tout état central est une intégrale de caractères ([6], § 8.8); le facteur correspondant à ce caractère est visiblement hyperfini continu; tout ceci résulte aussi de ([9], théor. 4.1).

Remarque 3.1. — La C*-algèbre A est utilisée systématiquement dans ([10] et [6], § 9) pour étudier les C*-algèbres antiliminaires; disons *grosso modo* que toute C*-algèbre antiliminaire « contient approximativement » A.

3.2. Autre définition de A. — Nous utiliserons dans tout ce chapitre les notations suivantes :

X_i, ensemble $\{0, 1\}$ dont un élément quelconque sera noté χ_i;

$X = \prod_i X_i$ muni de la topologie produit; espace compact dont les éléments seront notés $\chi = (\chi_i)$;

G_i, groupe à deux éléments $\{0, 1\}$ (isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$); 0 et 1 seront aussi notés ε_i et ε'_i; un élément quelconque sera noté s_i;

G, produit restreint (ou somme directe) des G_i, ensemble des familles (s_i), où $s_i = \varepsilon_i$ pour presque tout i;

ε, élément neutre de G;

γ_i, image canonique de ε'_i dans G;

pour toute famille (g_i), où $g_i \in \mathcal{C}(X_i)$ (algèbre des fonctions sur X_i) et $g_i = 1$ pour presque tout i, on note $\otimes g_i$ la fonction sur X :

$$\chi \to \prod_i g_i(\chi_i).$$

G_i opère dans X_i par addition modulo 2, opération notée $(s_i, \chi_i) \to s_i\chi_i$; il opère donc dans $\mathcal{C}(X_i)$ par $(s_i g_i)(\chi_i) = g_i(s_i\chi_i)$. Puis G opère dans X par addition modulo 2 composante par composante, opération notée $(s, \chi) \to s\chi$; il opère donc dans $\mathcal{C}(X)$ (algèbre des fonctions continues sur X) par $(sg)(\chi) = g(s\chi)$. Noter que $\mathcal{C}(X_i)$ et $\mathcal{C}(X)$ sont isomorphes respectivement à C_i et C.

On reprend les notations ∂ et ζ du paragraphe 2.7.

Proposition 3.2. — *Il existe un isomorphisme unique de* $C^*(G, \mathcal{C}(X))$ *sur* A *transformant tout élément* $\partial(s)$ *en* $\otimes x_i$, *où* $x_i = e_i$ *ou* e'_i *suivant que* $s_i = \varepsilon_i$ *ou* ε'_i; *et tout élément* $\zeta(\otimes g_i)$ *en* $\otimes y_i$, *où*

$$y_i = \begin{pmatrix} g_i(0) & 0 \\ 0 & g_i(1) \end{pmatrix}.$$

Pour tout i on a un morphisme $\rho_i : \mathcal{C}(X_i) \to A_i$ transformant tout élément g_i en $\begin{pmatrix} g_i(0) & 0 \\ 0 & g_i(1) \end{pmatrix}$ et un morphisme σ_i de G_i dans le groupe des éléments unitaires de A_i, transformant ε_i en e_i et ε'_i en e'_i; on a

$$\rho_i(s_i g_i) = \sigma_i(s_i)\,\rho_i(g_i)\,\sigma_i(s_i)$$

pour tout $s_i \in G_i$ et tout $g_i \in \mathcal{C}(X_i)$; il en résulte un morphisme $\pi_i : C^\star(G_i, \mathcal{C}(X_i)) \to A_i$ donné par

$$\pi_i(f_i) = \begin{pmatrix} f_i(\varepsilon_i)(0) & f_i(\varepsilon'_i)(0) \\ f_i(\varepsilon'_i)(1) & f_i(\varepsilon_i)(1) \end{pmatrix}$$

pour toute $f_i \in C^\star(G_i, \mathcal{C}(X_i))$; on voit ainsi que π_i est un *isomorphisme*. D'autre part, $\mathcal{C}(X)$ est isomorphe à $\check{\bigotimes} \mathcal{C}(X_i) = \overset{\star}{\bigotimes} \mathcal{C}(X_i)$ (*cf.* § 2.3); enfin la proposition 2.13 fournit un isomorphisme de $C^\star(G, \check{\bigotimes} \mathcal{C}(X_i))$ sur $\check{\bigotimes} C^\star(G_i, \mathcal{C}(X_i))$; l'isomorphisme de l'énoncé s'obtient en composant les isomorphismes suivants :

$$C^\star(G, \mathcal{C}(X)) \to C^\star(G, \check{\bigotimes} \mathcal{C}(X_i)) \to \check{\bigotimes} C^\star(G_i, \mathcal{C}(X_i) \to \check{\bigotimes} A_i.$$

Remarque 3.2. — L'isomorphisme réciproque Φ transforme p_i en l'élément de $C^\star(G, \mathcal{C}(X))$ qui envoie ε sur la fonction $\chi \to 1 - \chi_i$ et tout autre élément de G sur 0; u_i en l'élément qui envoie γ_i sur 1 et tout autre élément de G sur 0 [ou encore p_i en $\zeta(\chi \to 1 - \chi_i)$ et u_i en $\partial(\gamma_i)$]; et enfin a_i en l'élément qui envoie γ_i sur la fonction $\chi \to \chi_i . (-1)^{\chi_1 + \ldots + \chi_{i-1}}$ et tout autre élément de G sur 0. En effet, $p_i = \bigotimes y_j$, où $y_j = e_j$ pour $j \neq i$ et $y_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc $\Phi(p_i) = \zeta(\bigotimes g_j)$, où $g_j = 1$ pour $j \neq i$ et $g_i(\chi_i) = 1 - \chi_i$; puis $u_i = \bigotimes x_j$, où $x_j = e_j$ pour $j \neq i$ et $x_i = e'_i$; donc $\Phi(u_i) = \partial(s)$, où $s_j = \varepsilon_j$ pour $j \neq i$ et $s_i = \varepsilon'_i$; i. e. $s = \gamma_i$. Enfin $\Phi(2p_i - e)$ est l'image par ζ de la fonction $\chi \to 1 - 2\chi_i = (-1)^{\chi_i}$; donc $\Phi(a_i) = \zeta(\chi \to \chi_i(-1)^{\chi_1 + \ldots + \chi_{i-1}} \partial(\gamma_i)$.

3.3. Relation entre représentations de A et représentations des relations d'anticommutation.

Définition. — On dit que des éléments $b_1, b_2, \ldots$ d'une algèbre involutive admettant un élément unité 1 *vérifient les relations d'anticommutation* (ou, en abrégé, r. a. c.) si l'on a pour tout i et tout j

$$b_i b_j + b_j b_i = 0,$$
$$b_i b_j^\star + b_j^\star b_i = \delta_{i,j} . 1.$$

On appelle *représentation des relations d'anticommutation* dans un espace hilbertien H toute suite d'éléments de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant les r. a. c.; on dit qu'une représentation $b_1, b_2, \ldots$ des r. a. c. est *factorielle de type* I, II, III si l'algèbre de von Neumann engendrée par les b_i est un facteur de type I, II, III; *irréductible* si cette algèbre de von Neumann est $\mathcal{L}(H)$. On dit que deux représentations $b_1, b_2, \ldots$ et $b'_1, b'_2, \ldots$ des r. a. c. dans deux espaces H et H' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme de H sur H' transformant b_i en b'_i pour tout i; *quasi équivalentes* s'il existe un isomorphisme de l'algèbre de von Neumann engendrée par les b_i sur l'algèbre de von Neumann engendrée par les b'_i transformant b_i en b'_i pour tout i.

LEMME 3.1. — *Soit* B *une algèbre involutive admettant un élément unité* 1; *il existe une correspondance bijective entre, d'une part les suites* (b_i) *vérifiant les r. a. c. et, d'autre part, les couples de suites* $((q_i), (v_i))$, *où les* q_i *sont des éléments idempotents hermitiens deux à deux permutables et les* v_i *des éléments unitaires de carré* 1, *deux à deux permutables et vérifiant* $v_i q_j v_i = q_j$ *si* $i \neq j$ *et* $1 - q_i$ *si* $i = j$; *la correspondance en question est donnée par les formules*

$$\begin{cases} q_i = b_i^* b_i, \\ v_i = (2b_1^* b_1 - 1) \ldots (2b_{i-1}^* b_{i-1} - 1)(b_i^* + b_i), \end{cases}$$
$$b_i = (2q_1 - 1) \ldots (2q_{i-1} - 1)(1 - q_i) v_i.$$

La démonstration, fastidieuse mais sans difficultés, consiste en une longue suite de vérifications.

Indiquons par exemple comment on passe des propriétés des b_i à celles des q_i et des v_i : d'abord les q_i sont visiblement hermitiens; ils sont idempotents, car

$$q_i^2 = b_i^* b_i b_i^* b_i = b_i^* (1 - b_i^* b_i) b_i = b_i^* b_i = q_i;$$

ils sont deux à deux permutables car, si $i \neq j$:

$$q_i q_j = b_i^* b_i b_j^* b_j = b_j^* b_j b_i^* b_i = q_j q_i;$$

notons ici que

$$q_i b_i = b_i^* q_i = 0,$$
$$b_i q_i = b_i b_i^* b_i = (1 - b_i^* b_i) b_i = b_i,$$
$$q_i b_i^* = b_i^*$$

et que, pour $i \neq j$,

$$q_i b_j = b_j q_i \quad \text{et} \quad b_j^* q_i = q_i b_j^*;$$

enfin que les éléments $2q_i - 1$ sont unitaires, de carré 1 et deux à deux permutables. Les v_i sont de carré 1, car

$$v_i^2 = (2q_1 - 1) \ldots (2q_{i-1} - 1)(b_i^* + b_i)(2q_1 - 1) \ldots (2q_{i-1} - 1)(b_i^* + b_i) = (b_i^* + b_i)^2 = 1$$

et comme ils sont hermitiens, ils sont unitaires; ils sont deux à deux permutables, car si $i < j$, on a

$$\begin{aligned} v_i v_j &= (2q_1 - 1) \ldots (2q_{i-1} - 1)(b_i^* + b_i)(2q_1 - 1) \ldots (2q_{j-1} - 1)(b_j^* + b_j) \\ &= (b_i^* + b_i)(2q_i - 1) \ldots (2q_{j-1} - 1)(b_j^* + b_j) \\ &= (b_i - b_i^*)(2q_{i+1} - 1) \ldots (2q_{j-1} - 1)(b_j^* + b_j^*) \\ &= (2q_{i+1} - 1) \ldots (2q_{j-1} - 1)(b_j^* + b_j)(b_i^* - b_i) \\ &= (2q_{i+1} - 1) \ldots (2q_{j-1} - 1)(b_j^* + b_j)(2q_i - 1)(b_i^* + b_i) = v_j v_i. \end{aligned}$$

Enfin

$$v_i q_i v_i = (b_i^* + b_i) b_i^* b_i (b_i^* + b_i) = b_i b_i^* b_i b_i^* = (1 - q_i)^2 = 1 - q_i$$

et, si $i \neq j$:

$$v_i q_j v_i = (b_i^* + b_i) b_j^* b_j (b_i^* + b_i) = b_j^* b_j (b_i^* + b_i)^2 = q_j.$$

Il en résulte que les éléments a_i de A définis au paragraphe 3.1 vérifient les r. a. c.; cette réalisation des r. a. c. dans une C*-algèbre est « universelle » au sens suivant :

Proposition 3.3. — *Soit* B *une* C*-*algèbre unitaire; si l'on associe à tout morphisme unitaire* π *de* A *dans* B *la suite* $(\pi(a_i))$, *on obtient une correspondance bijective entre morphismes unitaires de* A *dans* B *et suites d'éléments de* B *vérifiant les relations d'anticommutation.*

Il est d'abord clair que pour tout morphisme unitaire π les $\pi(a_i)$ vérifient les r. a. c.; l'application $\pi \to (\pi(a_i))$ est injective, car la sous-C*-algèbre unitaire de A engendrée par les a_i est A [en effet, cette sous-C*-algèbre contient les p_i et les u_i d'après le lemme; elle contient donc tous les $\operatorname{Im}\varphi_i$]. Reste à voir que l'application en question est surjective; soient $b_1, b_2, \ldots$ des éléments de B vérifiant les r. a. c., q_i et v_i les éléments qu'on en déduit d'après le lemme; pour tout i on a un morphisme ρ_i de $\mathcal{C}(X_i)$ dans B :

$$\rho_i(g_i) = g_i(0)\, q_i + g_i(1)\,(1 - q_i);$$

ces morphismes sont deux à deux permutables, d'où un morphisme ρ de l'algèbre

$$\check{\bigotimes}\, \mathcal{C}(X_i) = \overset{*}{\bigotimes}\, \mathcal{C}(X_i) = \mathcal{C}(X)$$

dans B tel que $\rho(\bigotimes g_i) = \prod_i \rho_i(g_i)$ pour $g_i \in \mathcal{C}(X_i)$ et $g_i = 1$ pour presque tout i.

D'autre part, on a pour tout i un morphisme σ_i de G_i dans le groupe des éléments unitaires de B : $\sigma_i(\varepsilon_i) = 1$ et $\sigma_i(\varepsilon'_i) = v_i$; ces morphismes sont deux à deux permutables, d'où un morphisme σ de G dans le groupe des éléments unitaires de B : $\sigma((s_i)) = \prod_i \sigma_i(s_i)$.

On a, pour $s \in G$ et $g \in \mathcal{C}(X)$:

$$\rho(sg) = \sigma(s)\, \rho(g)\, \sigma(s);$$

pour le voir, on peut se borner au cas où $g = \bigotimes g_i$ et $s = \gamma_j$, i. e. $s_i = \varepsilon'_j$ si $i = j$ et ε_i sinon; alors

$$\begin{aligned}
\sigma(s)\, \rho(g)\, \sigma(s) &= v_j \prod_i (g_i(0)\, q_i + g_i(1)\,(1 - q_i))\, v_j \\
&= (g_j(0)\,(1 - q_j) + g_j(1)\, q_j) \prod_{i \neq j} (g_i(0)\, q_i + g_i(1)\,(1 - q_i)) \\
&= \prod_i \rho_i(s_i g_i) = \rho(sg).
\end{aligned}$$

Il en résulte un morphisme π de $C^\star(G, \mathcal{C}(X))$ dans B tel que

$$\pi(\zeta(\otimes g_i)) = \rho(\otimes g_i) = \prod_i (g_i(0)\, q_i + g_i(1)(1 - q_i)),$$

$$\pi(\partial((s_i))) = \sigma((s_i)) = \prod_i \sigma_i(s_i);$$

considéré comme morphisme de A dans B, π transforme, d'après la remarque 3.2, p_i en q_i et u_i en v_i; enfin a_i en b_i d'après le lemme 3.1.

Corollaire 3.1. — *Si à toute représentation* π *de* A *dans un espace hilbertien on associe la suite* $(\pi(a_i))$, *on obtient une correspondance bijective entre représentations de* A *et représentations des relations d'anticommutation; les* $\pi(a_i)$ *engendrent la même algèbre de von Neumann que* $\pi(A)$; *la correspondance en question respecte l'équivalence et la quasi-équivalence.*

3.4. Relation entre représentations de A et représentations de certains groupes. — L'espace X peut être considéré comme un groupe commutatif compact, produit direct des groupes à deux éléments X_i isomorphes aux G_i; comme le groupe dual d'une somme directe de groupes commutatifs discrets est le produit direct des duaux, et comme chaque G_i est isomorphe à son propre dual, X s'identifie au dual de G avec la formule de dualité

$$\langle \chi, s \rangle = (-1)^{\Sigma s_i \chi_i}.$$

(On notera que G s'identifie à un sous-groupe de X et opère dans X par translations.)

Il en résulte que $\mathcal{C}(X)$ est isomorphe à la $C^\star$-algèbre de G; il existe donc une correspondance bijective entre représentations ρ de $\mathcal{C}(X)$ et représentations ρ' de G, donnée par $\rho'(s) = \rho(\hat{s})$ en désignant par $\hat{s}$ la fonction $\chi \to \langle \chi, s \rangle$ sur X; pour $t \in G$ on a $t\hat{s} = \langle t, s \rangle \hat{s}$. Soit maintenant σ une représentation de G dans le même espace hilbertien que ρ; pour qu'on ait

$$\rho(tg) = \sigma(t)\, \rho(g)\, \sigma(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \in G \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{C}(X),$$

il faut et il suffit que cela soit vrai pour les g de la forme $\hat{s}$, i. e. qu'on ait

$$(1) \qquad \sigma(t)\, \rho'(s) = \langle t, s \rangle\, \rho'(s)\, \sigma(t) \quad \text{pour tous } s \text{ et } t \in G.$$

On voit ainsi que la donnée d'une représentation de A dans un espace hilbertien H équivaut à la donnée d'un couple (ρ', σ) de représentations de G dans H vérifiant (1); mais ceci équivaut encore à la donnée d'une application τ [où $\tau(s, t) = \rho'(s)\, \sigma(t)$] de $G \times G$ dans le groupe des opérateurs unitaires de H vérifiant

$$\tau(\varepsilon, \varepsilon) = I,$$
$$\tau((s, t).(s', t')) = \tau(s, t).\tau(s', t') \langle t, s' \rangle,$$

c'est-à-dire d'une *représentation projective* de $G \times G$ de multiplicateur $((s, t), (s', t')) \to \langle t, s' \rangle$.

Ceci à son tour équivaut à la donnée d'une représentation (vérifiant une certaine condition) d'une extension de $G \times G$ par le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$ qui remplace ici le groupe des complexes de module 1 intervenant dans [18] parce que le multiplicateur ne prend que les valeurs ± 1; plus précisément, soit Γ le groupe formé des triplets (s, t, λ), où $s, t \in G$ et $\lambda = \pm 1$, avec la loi de composition

$$(s, t, \lambda)\,(s', t', \lambda') = (ss', tt', \lambda\lambda' \langle t, s' \rangle);$$

alors il y a une correspondance bijective entre représentations projectives de $G \times G$ pour le multiplicateur indiqué et représentations ω de Γ vérifiant $\omega(\varepsilon, \varepsilon, \lambda) = \lambda I$; cette correspondance est donnée par

$$\tau(s, t) = \omega(s, t, 1),$$
$$\omega(s, t, \lambda) = \tau(s, t).\lambda.$$

En résumé on peut énoncer :

PROPOSITION 3.4. — *Soit* H *un espace hilbertien; il existe une correspondance bijective entre représentations* π *de* A *dans* H *et représentations unitaires* ω *de* Γ *dans* H *vérifiant* $\omega(\varepsilon, \varepsilon, \lambda) = \lambda I$; *cette correspondance est donnée par*

$$\pi(p_i) = \frac{1}{2}(\omega(\gamma_i, \varepsilon, 1) + 1),$$
$$\pi(u_i) = \omega(\varepsilon, \gamma_i, 1).$$

En effet, la fonction $\chi \to 1 - \chi_i$ est égale à $\frac{1}{2}(\hat{\gamma}_i + 1)$; on a donc

$$\pi(p_i) = \rho\left(\frac{1}{2}(\hat{\gamma}_i + 1)\right) = \frac{1}{2}(\rho'(\gamma_i) + 1) = \frac{1}{2}(\tau(\gamma_i, \varepsilon) + 1) = \frac{1}{2}(\omega(\gamma_i, \varepsilon, 1) + 1),$$
$$\pi(u_i) = \sigma(\gamma_i) = \tau(\varepsilon, \gamma_i) = \omega(\varepsilon, \gamma_i, 1).$$

Remarque 3.3. — Dans ([18], § 9, ex. 2), la recherche des représentations des r. a. c. est ramenée à celle des représentations d'un groupe voisin de $G \times G$.

Remarque 3.4. — On peut préciser la relation existant entre A et Γ : Γ est produit semi-direct du sous-groupe Γ_0 formé des éléments $(s, \varepsilon, 1)$ et du sous-groupe distingué Γ_1 formé des éléments $(\varepsilon, t, \lambda)$; d'après ([14], chap. 2, propos. 1), tout élément x de $C^*(\Gamma)$ peut être considéré comme une application $a \to x_a$ de Γ_0 dans $C^*(\Gamma_1) = \mathcal{C}(\hat{\Gamma}_1)$; d'autre part, $\hat{\Gamma}_1 = X \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; on peut alors montrer que A est isomorphe à l'idéal autoadjoint fermé de $C^*(\Gamma)$ formé des x tels que pour tout a, x_a soit nulle sur $X \times \{0\}$. Ceci permet d'appliquer les résultats de ([14], chap. 2), mais ne donne rien d'autre que la proposition 3.1.

3.5. Description des représentations de A considérée comme produit croisé. — Toute représentation de A étant somme de représentations avec vecteurs totalisateurs, et toute représentation avec vecteur totalisateur opérant dans un espace hilbertien séparable, nous nous contenterons d'étudier les représentations de A dans des *espaces hilbertiens séparables.*

Soit donc π une représentation de A dans un espace hilbertien séparable H; il lui correspond une représentation ρ de $\mathcal{C}(X)$ dans H et une représentation unitaire σ de G dans H vérifiant

$$(1) \qquad \rho(sg) = \sigma(s)\,\rho(g)\,\sigma(s) \qquad \text{pour tout} \quad s \in G, \quad g \in \mathcal{C}(X);$$

il existe une mesure positive μ sur X et un champ μ-mesurable $\chi \to H_\chi$ d'espaces hilbertiens tels que $H = \int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$ et que $\rho(g)$ soit, pour toute $g \in \mathcal{C}(X)$, l'opérateur de multiplication par g; la condition (1) entraîne que μ est quasi invariante par G et que pour tout $s \in G$ il existe un champ μ-mesurable d'isomorphismes $\Psi_{s,\chi} : H_{s\chi} \to H_\chi$ tel que

$$(2) \qquad (\sigma(s).\eta)(\chi) = r_s(\chi)\,\Psi_{s,\chi}(\eta(s\chi)) \qquad \text{pour tout } \eta \in H,$$

où l'on a posé $r_s(\chi) = \left(\frac{d\mu(s\chi)}{d\mu(\chi)}\right)^{\frac{1}{2}}$ (on trouvera une démonstration de ce fait par exemple dans [13], § 4, propos. 1); en écrivant $\sigma(st) = \sigma(s)\sigma(t)$ on obtient la condition

$$(3) \qquad \Psi_{st,\chi} = \Psi_{s,\chi} \circ \Psi_{t,s\chi};$$

de plus, on a évidemment

$$(4) \qquad \Psi_{\varepsilon,\chi} = I.$$

Réciproquement, soient μ une mesure positive sur X, quasi invariante par G; $\chi \to H_\chi$ un champ μ-mesurable d'espaces hilbertiens; H son intégrale hilbertienne; pour tout $s \in G$, $\chi \to \Psi_{s,\chi}$ un champ mesurable d'isomorphismes vérifiant (3) et (4); pour $g \in \mathcal{C}(X)$ notons $\rho(g)$ l'opérateur de multiplication par g dans H; pour $s \in G$ soit $\sigma(s)$ l'opérateur unitaire dans H défini par (2); alors les représentations ρ et σ vérifient (1), donc définissent une représentation π de $C^*(G, \mathcal{C}(X))$ dans H. En résumé :

Proposition 3.5. — *La donnée d'une représentation* π *de* A *dans un espace hilbertien séparable équivaut à la donnée :*

(i) *d'une mesure positive* μ *sur* X, *quasi invariante par* G (ou plutôt de la classe de μ);

(ii) *d'un champ mesurable d'espaces hilbertiens* $\chi \to H_\chi$;

(iii) *pour tout* $s \in G$, *d'un champ mesurable d'isomorphismes* $\Psi_{s,\chi} : H_{s,\chi} \to H_\chi$ *vérifiant* (3) *et* (4);

alors $\pi(p_i)$ *est l'opérateur de multiplication par la fonction* $\chi \to 1 - \chi_i$ *et* $\pi(u_i)$ *est donné par*

$$(\pi(u_i).\eta)(\chi) = \left(\frac{d\mu(\gamma_i\chi)}{d\mu(\chi)}\right)^{\frac{1}{2}} \Psi_{\gamma_i,\chi}(\eta(\gamma_i\chi))$$

pour tout $\eta \in \int^{\oplus} H_\chi \, d\mu(\chi)$.

On a aussi

$$(\pi(a_i).\eta)(\chi) = \left(\frac{d\mu(\gamma_i\chi)}{d\mu(\chi)}\right)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\chi_1+\ldots+\chi_{i-1}} \Psi_{\gamma_i,\chi}(\eta(\gamma_i\chi))$$

et l'on retrouve ainsi le résultat principal de [8].

Remarque 3.5. — Pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots, \aleph_0$ soit X^n le sous-ensemble mesurable de X formé des χ tels que $\dim H_\chi = n$; sur chaque X^n on peut remplacer le champ $\chi \to H_\chi$ par un champ constant correspondant à un certain espace hilbertien K_n de dimension n (*cf.* [5], chap. II, § 1, propos. 3); soit Γ_n l'ensemble des classes d'applications mesurables de X^n dans l'ensemble des opérateurs unitaires de K_n, applications qu'on notera $V : \chi \to V_\chi$; Γ_n est un groupe d'une façon évidente; soit $\Gamma = \prod \Gamma_n$; chaque X^n étant stable par G, G opère dans chaque Γ_n par $(sV)_\chi = V_{s\chi}$, et, par suite, dans Γ; un champ d'isomorphismes $\Psi_{s,\chi}$ peut être considéré comme une application $s \to \Psi_s$ de G dans Γ et les conditions (3) et (4), devenant

$$\Psi_{\varepsilon} = \Psi_s . s\Psi_t; \tag{3'}$$

$$\Psi_{st} = \text{élément neutre de } \Gamma \tag{4'}$$

expriment que Ψ est un *cocycle normalisé*.

Condition d'équivalence de deux telles représentations. — Soient π, ρ, σ les représentations de A, $\mathcal{C}(X)$, G correspondant à des objets μ, H_χ, $\Psi_{s,\chi}$; définissons de même π', ρ', σ', μ', H'_χ, $\Psi'_{s,\chi}$.

Proposition 3.6 (*cf.* [8]). — *Pour que* π *et* π' *soient équivalentes il faut et il suffit que* μ *et* μ' *soient équivalentes et qu'il existe un champ mesurable d'isomorphismes* $U : H_\chi \to H'_\chi$ *vérifiant*

$$U_\chi \circ \Psi_{s,\chi} = \Psi'_{s,\chi} \circ U_{s\chi} \quad \textit{presque partout.} \tag{5}$$

Si π et π' sont équivalentes il existe un isomorphisme U de $\int^{\oplus} H_\chi \, d\mu(\chi)$ sur $\int^{\oplus} H'_\chi \, d\mu'(\chi)$ tel que

$$U \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ U \quad \text{pour toute } g \in \mathcal{C}(X); \tag{6}$$

$$U \circ \sigma(s) = \sigma'(s) \circ U \quad \text{pour tout } s \in G; \tag{7}$$

en vertu de ([5], chap. II, § 6, th. 3), (6) entraîne que μ et μ' sont équivalentes (on peut alors supposer $\mu = \mu'$) et qu'il existe un champ mesurable d'isomorphismes $U_\chi : H_\chi \to H'_\chi$ tel que

$$(8) \qquad (U\eta)(\chi) = U_\chi(\eta(\chi))$$

pour tout $\eta \in \int^{\oplus} H_\chi \, d\mu(\chi)$ et presque tout χ; alors (2) et (7) impliquent (5).

La réciproque résulte immédiatement du fait que (6) et (7) impliquent

$$U \circ \pi(x) = \pi'(x) \circ U \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Remarque 3.6. — Avec les notations de la remarque 3.5, la condition (5) devient $U\Psi_s = \Psi'_s . sU$ et exprime que les cocycles Ψ et Ψ' sont *équivalents*; autrement dit, étant donnés une mesure positive quasi invariante μ et un champ μ-mesurable $\chi \to H_\chi$, il y a correspondance bijective entre $H^1(G, \Gamma)$ (ensemble de cohomologie non abélienne !) et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de A qu'on peut construire à partir de μ et des H_χ.

Remarque 3.7. — Si μ est portée par une trajectoire, il est facile de voir que toutes ces représentations sont équivalentes, ou, en d'autres termes, que $H^1(G, \Gamma)$ est *trivial*.

Cas particuliers. — Il st facile de voir que si π est factorielle, μ est ergodique; et que si μ est ergodique, $\dim H_\chi$ est presque partout égale à une constante; pour que $\dim H_\chi = 1$ presque partout il est nécessaire et suffisant que $\rho = \pi | C$ admette un vecteur totalisateur. Si μ est ergodique et si $\dim H_\chi = 1$ presque partout, il est facile de voir que π est *irréductible*; mais la réciproque est *fausse* : il existe des représentations irréductibles pour lesquelles $\dim H_\chi$ est une constante finie arbitraire (ceci est affirmé dans [8]) et d'autres pour lesquelles $\dim H_\chi$ est infinie (ceci est démontré dans [11]).

Examinons de plus près le cas où $\dim H_\chi = 1$; on peut alors écrire $H = L^2(X, \mu)$ et, pour tout $s \in G$, le champ d'isomorphismes $\chi \to \Psi_{s,\chi}$ est une fonction mesurable de module 1 que nous noterons $\chi \to \psi_s(\chi)$; on a

$$(9) \qquad (\sigma(s).\eta)(\chi) = r_s(\chi)\,\psi_s(\chi)\,\eta(s\chi) \qquad \text{pour} \quad \eta \in L^2(X, \mu).$$

Le groupe Γ considéré à la remarque 3.5 est ici le groupe (commutatif) des fonctions mesurables de module 1 et l'ensemble $H^1(G, \Gamma)$ est ici le premier groupe de cohomologie (abélienne) de G a coefficients dans Γ. Parmi les cocycles ψ il y a les ψ tels que ψ_s ne dépende pas de χ; pour ceux-ci (3′) s'écrit $\psi_{st} = \psi_s \psi_t$; autrement dit, les cocycles en question sont les *caractères* de G, ou encore les points de X (*cf.* début du § 3.4);

ainsi à tout point χ_0 de X correspond la représentation π_{χ_0} de A caractérisée par

$$(\sigma_{\chi_0}(s).\eta)(\chi) = r_s(\chi).\langle \chi_0, s\rangle.\eta(s\chi);$$

il est facile de voir que si χ_0 et χ'_0 sont sur une même trajectoire de G dans X, π_{χ_0} et $\pi_{\chi'_0}$ sont équivalentes; on peut démontrer, en utilisant le paragraphe suivant, que la réciproque est vraie lorsque μ est la mesure de Haar de X.

3.6. Description des représentations de A considérée comme produit tensoriel. — On va étudier dans les nos 1 à 4 les représentations qui sont des produits tensoriels, puis au no 5, une représentation irréductible qui n'est pas un produit tensoriel.

1. *Cas général.* — Soient, pour tout i, π_i une représentation de A_i dans un espace hilbertien séparable H_i, ξ_i un vecteur normé de H_i; on peut écrire

$$H_i = K_{i,0} \overset{h}{\otimes} K_{i,1}, \qquad \text{où} \quad K_{i,0} = \mathbf{C}^2,$$
$$\pi_i(x_i) = \pi_{i,0}(x_i) \otimes I,$$

où $\pi_{i,0}$ est la représentation de $A_i = M(2, \mathbf{C})$ associée à la base canonique $(e_{i,0}, e_{i,1})$ de $\mathbf{C}^2$. Soit $H = \overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi} H_i$; la représentation $\pi = \overset{*}{\bigotimes}{}^{\xi} \pi_i$ est toujours factorielle (puisque les π_i le sont), et irréductible si et seulement si chaque π_i est irréductible, i. e. si $H_i = K_{i,0}$ et $\pi_i = \pi_{i,0}$.

On peut aussi écrire

$$H_i = H_{i,0} \oplus H_{i,1},$$

où $H_{i,j} = e_{i,j} \otimes K_{i,1}$; notons $U_{i,0}$ l'isomorphisme $H_{i,0} \to H_{i,1}$ défini par

$$U_{i,0}(e_{i,0} \otimes \eta) = e_{i,1} \otimes \eta \quad \text{pour tout } \eta \in K_{i,1}$$

et $U_{i,1}$ l'isomorphisme réciproque. L'opérateur $\pi_i\left(\begin{pmatrix} x_{i,0} & 0 \\ 0 & x_{i,1} \end{pmatrix}\right)$ agit par multiplication par $x_{i,j}$ dans $H_{i,j}$; $\pi_i(e'_i)$ transforme tout élément $\eta_{i,j}$ de $H_{i,j}$ en $U_{i,j}(\eta_{i,j})$. Posons

$$\xi_i = \xi_{i,0} + \xi_{i,1}, \qquad \text{où} \quad \xi_{i,j} \in H_{i,j};$$

en modifiant éventuellement ξ_i suffisamment peu pour que la classe d'équivalence de π ne soit pas changée (*cf.* propos. 2.7), on peut supposer $\xi_{i,j} \neq 0$ pour tout i et tout j.

Soit μ_i la mesure sur X_i ayant les masses $\|\xi_{i,0}\|^2$ et $\|\xi_{i,1}\|^2$ en 0 et 1; on a un isomorphisme

$$\Lambda_i: \quad H_i = H_{i,0} \oplus H_{i,1} \to \int^{\oplus} H_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i)$$

transformant tout vecteur $\eta_i = \eta_{i,0} + \eta_{i,1}$ en le champ $\chi_i \to \frac{\eta_{i,\chi_i}}{\|\xi_{i,\chi_i}\|}$; posons $\xi'_i = \Lambda_i(\xi_i)$; il en résulte un isomorphisme

$$\Lambda: \quad H \to \overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} \int^{\oplus} H_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i)$$

transformant tout élément $\otimes \eta_i$ (où $\eta_i = \xi_i$ pour presque tout i) en $\otimes \Lambda_i(\eta_i)$. Posons

$$\mu = \otimes \mu_i \qquad \text{et} \qquad H_\chi = \overset{h}{\bigotimes}{}^{(\xi'_i,\chi_i)} H_{i,\chi_i} \quad \text{pour tout } \chi \in X;$$

la proposition 1.5 fournit un isomorphisme

$$\Pi: \quad \overset{h}{\bigotimes}{}^{\xi'} \int^{\oplus} H_{i,\chi_i}\, d\mu_i(\chi_i) \to \int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$$

transformant tout élément $\otimes \zeta_i$ (où $\zeta_i = \xi'_i$ pour presque tout i) en le champ $\chi \to \otimes \zeta_{i,\chi_i}$; l'isomorphisme

$$\Pi \circ \Lambda: \quad H \to \int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$$

transforme alors tout élément $\otimes \eta_i$ (où $\eta_i = \xi_i$ pour presque tout i) en le champ $\chi \to \otimes \frac{\eta_{i,\chi_i}}{\|\xi_{i,\chi_i}\|}$.

Notons ρ et σ les représentations correspondantes de $\mathcal{C}(X)$ et G dans $\int^{\oplus} H_\chi\, d\mu(\chi)$; il est facile de voir que, pour $g \in \mathcal{C}(X)$, $\rho(g)$ est l'opérateur de multiplication par g; et que $\sigma(\gamma_j)$ transforme tout champ $\chi \to \otimes \zeta_{i,\chi_i}$ en le champ $\chi \to \otimes \zeta'_{i,\chi_i}$, où

$$\zeta'_{i,\chi_i} = \zeta_{i,\chi_i} \qquad \text{si} \quad i \neq j$$

et

$$\zeta'_{j,\chi_j} = \frac{\|\xi_{j,1-\chi_j}\|}{\|\xi_{j,\chi_j}\|}\, U_{j,1-\chi_j}(\zeta_{j,1-\chi_j});$$

on voit que, en reprenant les notations r_s et $\Psi_{s,\chi}$ du paragraphe précédent :

$$r_{\gamma_j}(\chi) = \frac{\|\xi_{j,1-\chi_j}\|}{\|\xi_{j,\chi_j}\|}$$

et

$$\Psi_{\gamma_j,\chi} = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes U_{j,1-\chi_j} \otimes 1 \otimes \ldots$$

2. *Cas où ξ_i est décomposable.* — Pour que ξ_i soit décomposable, i. e. de la forme $\xi_i^0 \otimes \xi_i^1$, avec $\xi_i^j \in K_{i,j}$, il faut et il suffit que $U_{i,j}(\xi_{i,j})$ soit proportionnel à $\xi_{i,1-j}$; on peut alors supposer $\|\xi_i^j\| = 1$. On a ensuite (propriété d'associativité)

$$H = \overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(\xi_i^0 \otimes \xi_i^1)} \Big(\bigotimes_j K_{i,j}\Big) \sim \overset{h}{\bigotimes_{i,j}}{}^{(\xi_i^j)} K_{i,j} \sim \Big(\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(\xi_i^0)} K_{i,0}\Big) \overset{h}{\otimes} \Big(\overset{h}{\bigotimes_i}{}^{(\xi_i^1)} K_{i,1}\Big)$$

et l'on en déduit facilement que π est équivalente à la représentation

$$x \to \left(\overset{*}{\bigotimes}{}^{(\xi_i^0)} \pi_{i,0}(x)\right) \otimes \mathrm{I};$$

on voit ainsi que π *est de type* I_∞; ce résultat subsiste si l'on remplace (ξ_i) par une famille équivalente au sens $\sim$ (*cf.* propos. 2.7); la réciproque est vraie si $\mathrm{K}_{i,1} = \mathbf{C}^2$ d'après [4], propos. 5.3.

3. *Cas des représentations irréductibles.* — C'est le cas où $\mathrm{H}_i = \mathrm{K}_{i,0}$; alors $\mathrm{H}_{i,0}$ et $\mathrm{H}_{i,1}$ sont de dimension 1 et les $\xi_{i,j}$ sont des nombres complexes; définissons les isomorphismes

$$\Lambda_i : \quad \mathrm{H}_i = \mathrm{H}_{i,0} \oplus \mathrm{H}_{i,1} \to \mathrm{L}^2(\mathrm{X}_i, \mu_i)$$

d'une façon un peu différente de celle indiquée au n° 1 : $\Lambda_i(\eta_i)$ sera ici la fonction $\chi_i \to \frac{\eta_{i,\chi_i}}{\xi_{i,\chi_i}}$; alors $\Lambda_i(\xi_i)$ est la fonction 1 ; l'isomorphisme $\Pi \circ \Lambda : \mathrm{H} \to \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$ transforme tout élément $\bigotimes \eta_i$ (où $\eta_i = \xi_i$ pour presque tout i) en la fonction $\chi \to \prod \frac{\eta_{i,\chi_i}}{\xi_{i,\chi_i}}$; le cocycle ψ est caractérisé par

$$\psi_{\gamma_j}(\chi) = \frac{\dfrac{\xi_{j,1-\chi_j}}{|\xi_{j,1-\chi_j}|}}{\dfrac{\xi_{j,\chi_j}}{|\xi_{j,\chi_j}|}}.$$

On ignore si l'on obtient par ce procédé toutes les représentations de A dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$ du type indiqué au paragraphe précédent.

4. *Construction de représentations factorielles de type* II *et* III. — On suppose ici $\mathrm{K}_{i,1}$ isomorphe à $\mathbf{C}^2$, i. e. $\mathrm{H}_{i,j}$ isomorphe à $\mathbf{C}^2$, et $\mathrm{U}_{i,j}(\xi_{i,j})$ orthogonal à $\xi_{i,1-j}$. Il existe une base orthonormale $(f_{i,0}, f_{i,1})$ de $\mathrm{K}_{i,1}$ telle que

$$\xi_{i,j} = \lambda_{i,j} e_{i,j} \otimes f_{i,j},$$

avec $\lambda_{i,j} \neq 0$ et $|\lambda_{i,0}|^2 + |\lambda_{i,1}|^2 = 1$. Soit $\mathrm{L}_{i,j}$ un espace hilbertien de dimension 2 ayant une base orthonormale $(g_{i,j,0}, g_{i,j,1})$; soit u_i l'isomorphisme de H_i sur $\mathrm{L}_{i,0} \otimes \mathrm{L}_{i,1}$ transformant le vecteur $e_{i,j} \otimes f_{i,k}$ en $g_{i,0,j} \otimes g_{i,1,j+k}$ (où $j+k$ désigne la somme modulo 2); transportés par u_i, les opérateurs

$$\pi_i\left(\begin{pmatrix} x_{i,0} & 0 \\ 0 & x_{i,1} \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \pi_i(e'_i)$$

deviennent respectivement

$$\begin{pmatrix} x_{i,0} & 0 \\ 0 & x_{i,1} \end{pmatrix} \otimes 1 \qquad \text{et} \qquad e'_i \otimes e'_i;$$

enfin

$$u_i(\xi_i) = (\lambda_{i,0} g_{i,0,0} + \lambda_{i,1} g_{i,0,1}) \otimes g_{i,1,0}.$$

Soit μ_i la mesure sur X_i ayant les masses $|\lambda_{i,0}|^2$ et $|\lambda_{i,1}|^2$ en o et 1; soit $\varphi_{i,0}$ l'isomorphisme $L_{i,0} \to L^2(X_i, \mu_i)$ transformant tout élément $\eta_{i,0} g_{i,0,0} + \eta_{i,1} g_{i,0,1}$ en la fonction $\chi_i \to \frac{\eta_{i,\chi_i}}{\lambda_{i,\chi_i}}$ soit $\varphi_{i,1}$ l'isomorphisme $L_{i,1} \to l^2(G_i)$ transformant $g_{i,1,0}$ en δ_i, fonction de Dirac en ε_i, et $g_{i,1,1}$ en la fonction de Dirac en ε_i' ; soit

$$\varphi_i = \varphi_{i,0} \otimes \varphi_{i,1} : \quad L_{i,0} \otimes L_{i,1} \to L^2(X_i, \mu_i) \otimes l^2(G_i) ;$$

l'isomorphisme

$$\varphi_i \circ u_i : \quad H_i \to L^2(X_i, \mu_i) \otimes l^2(G_i)$$

transforme ξ_i en $1 \otimes \delta_i$; transporté par $\varphi_i \circ u_i$, l'opérateur $\pi_i\left(\begin{pmatrix} x_{i,0} & 0 \\ 0 & x_{i,1} \end{pmatrix}\right)$ devient $T_{x_i} \otimes I$, où T_{x_i} est l'opérateur de multiplication par la fonction $\chi_i \to x_{i,\chi_i}$; $\pi_i(e_i')$ devient $R_i \otimes S_i$, où R_i transforme toute fonction $\chi_i \to \zeta_{i,\chi_i}$ en la fonction $\chi_i \to \frac{\lambda_{i,1-\chi_i}}{\lambda_{i,\chi_i}} \zeta_{i,1-\chi_i}$ et où S_i est l'image de e_i' dans la représentation régulière gauche de G_i.

Ensuite les corollaires 1.2 et 1.3 fournissent un isomorphisme

$$H = \overset{h}{\otimes}{}^{\xi} H_i \to L^2(X, \mu) \overset{h}{\otimes} l^2(G) ;$$

soient ρ et σ les représentations correspondantes de $\mathcal{C}(X)$ et G dans $L^2(X, \mu) \overset{h}{\otimes} l^2(G)$; on voit facilement que pour $g \in \mathcal{C}(X)$, on a $\rho(g) = T_g \otimes I$, où T_g est l'opérateur de multiplication par g dans $L^2(X, \mu)$; et, d'autre part, que $\sigma(\gamma_j) = \overline{R}_j \otimes \overline{S}_j$, où $\overline{R}_j$ est défini par

$$(\overline{R}_j(\varphi))(\chi) = \frac{\lambda_{j,1-\chi_j}}{\lambda_{j,\chi_j}} \varphi(\gamma_j \chi) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in L^2(X, \mu)$$

et où $\overline{S}_j$ est l'image de γ_j dans la représentation régulière gauche de G; autrement dit, on retrouve là le procédé classique de construction de facteurs.

On a alors les résultats suivants concernant le type de π :

— si $|\lambda_{i,0}|$ et $|\lambda_{i,1}|$ sont constants et égaux à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, π est de type II_1 et même hyperfinie [19];

— s'ils sont constants et différents de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, π est de type III [21];

— pour que π soit de type II_1, il faut et il suffit que

$$\sum_i \left(|\lambda_{i,0}|^2 - \frac{1}{2} \right)^2 < +\infty$$

([4], corollaire de la proposition 5.6);

— s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour une infinité de i on ait

$$|\lambda_{i,0}| \quad \text{et} \quad |\lambda_{i,1}| \geq \varepsilon,$$
$$\frac{|\lambda_{i,0}|}{|\lambda_{i,1}|} \quad \text{ou} \quad \frac{|\lambda_{i,1}|}{|\lambda_{i,0}|} \geq 1 + \varepsilon,$$

alors π est de type III ([4], propos. 5.5); pour un résultat plus précis, *cf.* [18″], th. 2.

On trouvera d'autres exemples de représentations factorielles dans [12]

5. *Exemple de représentation irréductible de* A *qui n'est pas un produit tensoriel.* — La proposition 2.12 affirme l'existence d'une telle représentation; mais on va en examiner une en détails. Soit Tr_i la trace normalisée sur A_i; A_i est une algèbre hilbertienne complète pour le produit scalaire

$$(x_i \mid y_i) = \mathrm{Tr}_i(y_i^\star x_i);$$

considérons les représentations π_i' et π_i'' de A_i dans l'espace hilbertien $H_i = A_i$ définies par

$$\begin{aligned} \pi_i'(x_i) &= U_{x_i}, \quad \text{i. e.} \quad \pi_i'(x_i).y_i = x_i y_i \quad \text{pour tout } y_i \in A_i; \\ \pi_i''(x_i) &= V_{{}^t x_i}, \quad \text{i. e.} \quad \pi_i''(x_i).y_i = y_i.{}^t x_i \quad \text{»} \quad y_i \in A_i. \end{aligned}$$

Posons $\mathrm{Tr} = \overset{\star}{\bigotimes} \mathrm{Tr}_i$; A est une algèbre hilbertienne pour le produit scalaire

$$(x \mid y) = \mathrm{Tr}(y^\star x);$$

d'autre part, A admet un antiautomorphisme, que nous noterons $x \to {}^t x$, défini par ${}^t(\bigotimes x_i) = \bigotimes {}^t x_i$; considérons les représentations π' et π'' de A dans l'espace hilbertien complété H définies par

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= U_x, \quad \text{i. e.} \quad \pi'(x).y = xy \quad \text{pour tout } y \in A; \\ \pi''(x) &= V_{{}^t x}, \quad \text{i. e.} \quad \pi''(x).y = y.{}^t x \quad \text{»} \quad y \in A; \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\,\pi'$ et $\mathrm{Im}\,\pi''$ engendrent respectivement les algèbres de von Neumann $\mathcal{U}(A)$ et $\mathcal{V}(A)$ qui sont des facteurs hyperfinis continus; d'autre part, on a d'après le paragraphe 1.6 :

$$H = \overset{h}{\bigotimes}{}^{(e_i)} A_i, \qquad \pi' = \overset{\star}{\bigotimes}{}^{(e_i)} \pi_i' \qquad \text{et} \qquad \pi'' = \overset{\star}{\bigotimes}{}^{(e_i)} \pi_i''.$$

Notons I_1 (resp. I_2)l'ensemble des entiers positifs impairs (resp. pairs)

$$A_{\mathrm{I}} = \overset{\star}{\bigotimes_{i \in I_1}} A_i, \qquad A_{\mathrm{II}} = \overset{\star}{\bigotimes_{i \in I_2}} A_i;$$

on peut écrire

$$A = A_{\mathrm{I}} \overset{\star}{\bigotimes} A_{\mathrm{II}} = A_{\mathrm{I}} \check{\bigotimes} A_{\mathrm{II}}$$

parce que A_I et A_{II} sont limites inductives de C*-algèbres postliminaires (*cf.* [26], théor. 5); considérons les représentations π' et π'' respectivement de A_I et A_{II} dans l'espace hilbertien $H = \overset{h}{\bigotimes}{}^{(e_i)} A_i$ définies par

$$\pi'(x_1 \otimes x_3 \otimes x_5 \otimes \ldots).(y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \otimes \ldots) = x_1 y_1 \otimes x_3 y_2 \otimes x_5 y_3 \otimes \ldots;$$
$$\pi''(x_2 \otimes x_4 \otimes x_6 \otimes \ldots).(y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \otimes \ldots) = y_1 {}^t x_2 \otimes y_2 {}^t x_4 \otimes y_3 {}^t x_6 \otimes \ldots;$$

en vertu de l'alinéa précédent elles engendrent deux facteurs hyperfinis continus commutants l'un de l'autre; soit π la représentation de A dans H telle que

$$\pi(x_I \otimes x_{II}) = \pi'(x_I).\pi''(x_{II})$$

quels que soient $x_I \in A_I$ et $x_{II} \in A_{II}$, ou encore

$$\pi\Big(\bigotimes_i x_i\Big).\bigotimes_i y_i = \bigotimes_i x_{2i-1}.y_i.{}^t x_{2i}$$

pour toute famille (x_i) et toute famille (y_i) vérifiant $x_i = y_i = e_i$ pour presque tout i; π est *irréductible* mais n'est pas équivalente au produit tensoriel de deux représentations de A_I et A_{II}, puisque ses restrictions à ces algèbres ne sont pas de type I; elle n'est donc *pas équivalente à un produit tensoriel de représentations des* A_i.

Il est facile d'en déduire un *état pur de* A *non équivalent à un état produit :* à savoir l'état associé à la représentation π et au vecteur $\bigotimes e_i$; il est défini par

$$f\Big(\bigotimes_i x_i\Big) = \prod_i \operatorname{Tr}_i(x_{2i-1}.{}^t x_{2i}).$$

Démontrons maintenant que $\pi(C)$ admet un vecteur totalisateur, à savoir $\bigotimes y_i$, où

$$y_i = (i^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i^2 & 1 \\ 1 & i^2 \end{pmatrix};$$

d'abord $\bigotimes y_i$ a bien un sens (*cf.* propos. 1.1), car $(y_i | y_i) = 1$ et, d'autre part

$$\sum_i (1 - (y_i | e_i)) = \sum_i \Big((i^4+1)^{\frac{1}{2}} - i^2\Big)(i^4+1)^{-\frac{1}{2}} < +\infty;$$

ensuite il est immédiat que pour tout i, y_i est totalisateur dans H_i pour l'algèbre engendrée par les opérateurs $\pi'_{2i-1}(x_{2i-1}).\pi''_{2i}(x_{2i})$, où x_{2i-1} et x_{2i} sont des matrices diagonales; donc pour toute partie finie J de I et toute famille $(u_i)_{i \in J}$ l'élément $\Big(\bigotimes_J u_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{I-J} y_i\Big)$ appartient à $\pi(C).\bigotimes y_i$; enfin il est facile de voir que les éléments de cette forme forment un ensemble total dans H.

Il en résulte que, en adoptant le point de vue du paragraphe 3.5, π *opère dans un espace* $L^2(X, \mu)$, où μ est une mesure quasi invariante ergodique;

on va maintenant calculer μ et montrer qu'elle *n'est pas équivalente à une mesure produit.* Soit $g = \bigotimes g_i \in \mathcal{C}(X)$, avec $g_i = 1$ pour presque tout i; il lui correspond un élément

$$x = \bigotimes x_i \text{ de C}, \qquad \text{où} \quad x_i = \begin{pmatrix} g_i(0) & 0 \\ 0 & g_i(1) \end{pmatrix};$$

on a

$$\mu(g) = (\pi(x) . \bigotimes y_i \mid \bigotimes y_i) = \prod_i (x_{2i-1} . y_i . x_{2i} \mid y_i)$$

$$= \prod_i (2(i^4+1))^{-1} [i^4 . g_{2i-1}(0) . g_{2i}(0) + i^4 . g_{2i-1}(1) . g_{2i}(1) + g_{2i-1}(0) . g_{2i}(1) + g_{2i-1}(1) . g_{2i}(0)].$$

Supposons μ équivalente à une mesure produit $\nu = \bigotimes \nu_i$, ν_i ayant des masses p_i en 0 et $1 - p_i$ en 1; soient $E_i^1, \ldots, E_i^4$ les sous-ensembles de X définis respectivement par

$$\chi_{2i-1} = \chi_{2i} = 0, \qquad \chi_{2i-1} = 1 - \chi_{2i} = 0,$$
$$1 - \chi_{2i-1} = \chi_{2i} = 0, \qquad \chi_{2i-1} = \chi_{2i} = 1;$$

on voit que

$$\mu(E_i^2) = \mu(E_i^3) = (2(i^4+1))^{-1}$$

tend vers zéro quand $i \to +\infty$; tandis que

$$\mu(E_i^1) = \mu(E_i^4) = i^4 (2(i^4+1))^{-1}$$

ne tend vers zéro suivant aucune sous-suite de I; il en résulte que

$$\nu(E_i^2) = p_{2i-1}(1 - p_{2i}) \qquad \text{et} \qquad \nu(E_i^3) = (1 - p_{2i-1}) p_{2i}$$

tendent vers zéro, tandis que

$$\nu(E_i^1) = p_{2i-1} p_{2i} \qquad \text{et} \qquad \nu(E_i^4) = (1 - p_{2i-1})(1 - p_{2i})$$

ne tendent vers zéro suivant aucune sous-suite de I; mais

$$\nu(E_i^2) . \nu(E_i^3) = \nu(E_i^1) . \nu(E_i^4)$$

doit tendre vers zéro, ce qui entraîne que $\nu(E_i^1)$ ou $\nu(E_i^4)$ tend vers zéro suivant une sous-suite, d'où contradiction.

Remarque. — De tels types de représentations irréductibles ont été obtenus indépendamment par A. Cordesse et G. Rideau (travail non publié).

3.7. Quatrième définition de A. — Soit H un espace hilbertien réel de dimension infinie; on définit en Algèbre l'algèbre de Clifford $C_0(H)$ possédant les propriétés suivantes (*cf.* [3], [22], [24]) :

(i) $C_0(H)$ est une algèbre complexe, admettant un élément unité que nous noterons 1, contenant H en tant que sous-espace vectoriel réel et engendrée par H en tant qu'algèbre complexe;

(ii) pour tout x et tout $y \in \mathrm{H}$, on a $xy + yx = 2(x|y).1$;

(iii) il existe sur $\mathrm{C}_0(\mathrm{H})$ une involution unique $x \to x^\star$ induisant l'identité sur H;

(iv) toute application linéaire (sur $\mathbf{R}$) u de H dans une algèbre B complexe admettant un élément unité ε vérifiant $u(x)^2 = \| x \|^2 . \varepsilon$ se prolonge d'une façon unique en un morphisme d'algèbres complexes unitaires $\overline{u} : \mathrm{C}_0(\mathrm{H}) \to \mathrm{B}$; si B est involutive et si $u(x)$ est hermitien pour tout $x \in \mathrm{H}$, u est un morphisme d'algèbres involutives.

Soient maintenant B une $\mathrm{C}^\star$-algèbre unitaire et φ un morphisme d'algèbres involutives unitaires $\mathrm{C}_0(\mathrm{H}) \to \mathrm{B}$; pour tout x dans H, $\varphi(x)$ est hermitien et l'on a

$$\| \varphi(x) \|^2 = \| \varphi(x)^2 \| = \| x \|^2;$$

par conséquent, pour tout élément $y = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} . y_{i_1} \ldots y_{i_n}$ de $\mathrm{C}_0(\mathrm{H})$ avec $y_{i_1}, \ldots, y_{i_n} \in \mathrm{H}$, on aura

$$\begin{aligned} \| \varphi(y) \| &= \left\| \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} . \varphi(y_{i_1}) \ldots \varphi(y_{i_n}) \right\| \\ &\leq \sum_{i_1, \ldots, i_n} | \lambda_{i_1, \ldots, i_n} | . \| y_{i_1} \| \ldots \| y_{i_n} \|; \end{aligned}$$

si l'on note $\| y \|$ la borne supérieure des $\| \varphi(y) \|$ pour toutes les $\mathrm{C}^\star$-algèbres B et tous les morphismes φ, on voit que $\| y \|$ est finie; il est clair que $\| \quad \|$ est une semi-norme; c'est en fait une norme parce que $\mathrm{C}_0(\mathrm{H})$ est simple ([22], lemme 1); la complétée est une $\mathrm{C}^\star$-algèbre que nous noterons C(H); elle possède la propriété universelle suivante : toute application linéaire (sur $\mathbf{R}$) u de H dans l'ensemble des éléments hermitiens d'une $\mathrm{C}^\star$-algèbre B admettant un élément unité ε vérifiant $u(x)^2 = \| x \|^2 . \varepsilon$ se prolonge de façon unique en un morphisme $\mathrm{C}(\mathrm{H}) \to \mathrm{B}$. (Signalons que C(H) se trouve définie dans [22].)

Proposition 3.7. — *Posons*

$$\mathrm{P}_j = a_j + a_j^\star \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}_j = -i(a_j - a_j^\star) \in \mathrm{A};$$

soit H *un espace hilbertien réel de dimension* $\aleph_0$ *dont une base orthonormale sera notée* $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega'_1, \omega'_2, \ldots)$; *il existe un isomorphisme unique* T *de* C(H) *sur* A *transformant chaque* ω_j *en* P_j *et chaque* ω'_j *en* Q_j; *la restriction de* T *à* H *est isométrique pour la norme hilbertienne sur* H.

Le fait que les a_i vérifient les r. a. c. entraîne immédiatement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_i \mathrm{P}_j + \mathrm{P}_j \mathrm{P}_i &= 2\,\delta_{i,j} . e, \\ \mathrm{Q}_i \mathrm{Q}_j + \mathrm{Q}_j \mathrm{Q}_i &= 2\,\delta_{i,j} . e, \\ \mathrm{P}_i \mathrm{Q}_j + \mathrm{Q}_j \mathrm{P}_i &= 0; \end{aligned}$$

soit H_0 le sous-espace de H engendré algébriquement par les ω_i et les ω'_i ; soit T l'application linéaire de H_0 dans A transformant chaque ω_i en P_i et chaque ω'_i en Q_i; pour tout

$$x = \sum x_i \omega_i + \sum x'_i \omega'_i \in H_0$$

on a

$$T(x)^2 = \left(\sum x_i P_i + \sum x'_i Q_i\right)^2 = \| x \|^2 . e;$$

et comme $T(x)$ est hermitien

$$\| T(x) \|^2 = \| T(x)^2 \| = \| x \|^2;$$

T étant isométrique se prolonge en une application linéaire isométrique de H dans l'ensemble des éléments hermitiens de A vérifiant encore encore $T(x)^2 = \| x \|^2 . e$; il en résulte un morphisme T de C(H) dans A transformant ω_i en P_i et ω'_i en Q_i.

D'autre part, les relations

$$\omega_j \omega_k + \omega_k \omega_j = \omega'_j \omega'_k + \omega'_k \omega'_j = 2\,\delta_{j,k} . 1,$$
$$\omega_j \omega'_k + \omega'_k \omega_j = 0$$

entraînent immédiatement que les éléments $\frac{1}{2}(\omega_j + i\omega'_j)$ de C(H) vérifient les r. a. c.; d'après la proposition 3.3, il existe donc un morphisme S de A dans C(H) transformant a_j en $\frac{1}{2}(\omega_j + i\omega'_j)$; S transforme alors P_j en ω_j et Q_j en ω'_j; $S \circ T$ est l'identité parce que les ω_j et ω'_j engendrent la C^*-algèbre C(H); enfin $T \circ S$ est l'identité parce que les P_j et les Q_j engendrent A : en effet, les a_j engendrent A (*cf.* démonstration de la proposition 3.3).

C. Q. F. D.

Ce résultat permet de construire des automorphismes de A :

PROPOSITION 3.8. — *Tout opérateur orthogonal* U *dans l'espace hilbertien réel* T(H) *se prolonge d'une façon unique en un automorphisme* U′ *de* A; *l'application* U → U′ *est un morphisme continu du groupe orthogonal de* T(H) *dans le groupe des automorphismes de* A, *ces deux groupes étant munis de la topologie de la convergence simple* (*cf.* [24]).

Soit V un opérateur orthogonal dans H; l'application $x \to Vx$ de H dans C(H) se prolonge en un endomorphisme V′ de C(H); si V_1 est un autre opérateur orthogonal, on a

$$(VV_1)'(x) = V'(V'_1(x)) \quad \text{pour tout } x \in H,$$

donc $(VV_1)' = V'V'_1$; il en résulte que V' est un automorphisme et que l'application $V \to V'$ est un morphisme du groupe orthogonal de H dans le groupe des automorphismes de C(H); si une famille (V_α) converge simplement vers une limite V, on a

$$\lim V_\alpha x = Vx \quad \text{pour tout } x \in H;$$

par suite, pour $x_1, \ldots, x_n \in H$, on aura

$$\lim V'_\alpha (x_1 \ldots x_n) = \lim (V_\alpha x_1 \ldots V_\alpha x_n) = Vx_1 \ldots Vx_n$$
$$= V'(x_1 \ldots x_n);$$

enfin, $\lim V'_\alpha y = V'y$ pour tout $y \in C(H)$ par linéarité et équicontinuité. La proposition résulte de là en transportant le tout par T.

Remarque 3.8. — Ce qui précède permet naturellement d'associer à tout opérateur unitaire dans un espace hilbertien complexe de dimension $\aleph_0$ un automorphisme de A : car un tel opérateur est un opérateur orthogonal pour l'espace hilbertien réel sous-jacent, et il suffit de choisir un isomorphisme dudit espace réel sur H.

Remarque 3.9. — Le point de vue des algèbres de Clifford a été utilisé par I. E. Segal pour étudier les représentations des r. a. c., notamment l'équivalence de ces représentations (*cf.*, par exemple, [23]).

ADDENDUM

La fin du paragraphe 3.6.4, concernant le type de la représentation factorielle π, peut être remplacée par le résultat plus précis suivant :

La représentation factorielle π est de type II_1 si l'on a

$$\sum_i \left(|\lambda_{i,0}|^2 - \frac{1}{2} \right)^2 < +\infty \tag{1}$$

et de type III dans le cas contraire.

Démonstration. — D'après S. Kakutani (*On equivalence of infinite product measures*, *Ann. Math.*, t. 49, 1948), la relation (1) est nécessaire et suffisante pour que la mesure $\mu = \bigotimes \mu_i$ soit équivalente à la mesure de Haar de X; si la relation (1) est vérifiée, π est de type II_1 d'après J. von Neumann (*On rings of operators*, III, *Ann. Math.*, t. 41, 1940, th. IX); si elle ne l'est pas, μ n'est équivalente à aucune mesure invariante par G, puisque la seule mesure invariante est celle de Haar; alors π est de type III (même référence).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. II.
[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. III, 1re édition.
[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. IX.
[4] D. J. C. Bures, *Certain Factors Constructed as Infinite Tensor Products* (*Comp. Math.*, t. 15, 1963, p. 169-191).
[4′] A. Cordesse, *Sur des représentations des relations d'anticommutation* (*Thèse*, Paris, 1966)
[4″] A. Cordesse et G. Rideau, *On some representations of the anticommutation relations* (à paraître dans *Nuovo Cimento*).
[5] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
[6] J. Dixmier, *Les* C*-*algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
[7] J. Dixmier, *Utilisation des facteurs hyperfinis dans la théorie des* C*-*algèbres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 4184-4187).
[8] L. Gårding et A. Wightman, *Representation of the anticommutation relations* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 40, 1954, p. 617-621).
[9] J. Glimm, *On a certain class of operator algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 95, 1960, p. 318-340).
[10] J. Glimm, *Type* I C*-*algebras* (*Ann. Math.*, t. 73, 1961, p. 572-612).
[11] V. Ia. Golodets, *Sur les représentations irréductibles des relations de commutation et d'anticommutation* (en russe) [*Usp. Mat. Nauk*, t. 20, (2), 1965, p. 175-182].
[12] V. Ia. Golodets, *Sur les représentations factorielles de type* II *des relations de commutation et d'anticommutation* (en russe) [*Usp. Mat. Nauk.* t. 20, (6), 1965, p. 68-72].
[13] A. Guichardet, *Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 89, 1961, p. 77-101).
[14] A. Guichardet, *Caractères des algèbres de Banach involutives* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 13, 1963, p. 1-81).
[15] A. Guichardet, *Caractères et représentations des produits tensoriels de* C*-*algèbres* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 81, 1964, p. 189-206).
[16] A. Guichardet, *Sur les produits tensoriels de* C*-*algèbres* (en russe) (*Dokl. Akad. Nauk*, t. 160, 1965, p. 986-989).
[17] A. Guichardet, *Sur la catégorie des algèbres de von Neumann* (à paraître dans *Bull. Sc. Math.*).
[17′] D. Kastler, *Covariance algebras in field theory and statistical mechanics* (à paraître).
[18] G. W. Mackey, *Unitary representations of group extensions* (*Acta Math.*, t. 99, 1958, p. 265-311).
[18′] C. C. Moore, *Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups* (*Ann. Math.*, t. 82, 1965, p. 146-182).
[18″] C. C. Moore, *Invariant measures on product spaces* (à paraître).
[19] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).
[20] J. von Neumann, *On infinite direct products* (*Comp. Math.*, t. 6, 1938, p. 1-77).
[21] L. Pukanszky, *Some examples of factors* (*Publ. Math.*, t. 4, 1956, p. 135-156).
[22] I. E. Segal, *Tensor algebras over Hilbert spaces* II (*Ann. Math.*, t. 63, 1956, p. 160-175).
[23] I. E. Segal, *Distributions in Hilbert spaces and canonical systems of operators* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 88, 1958, p. 12-41).
[24] D. Shale et W. F. Stinespring, *States of the Clifford algebra* (*Ann. Math.*, t. 80, 1964, p. 365-381).
[25] Z. Takeda, *Inductive limit and infinite direct product of operator algebras* (*Tôhoku Math. J.*, t. 7, 1955, p. 67-86).

[26] M. Takesaki, *On the cross-norm of the direct product of* C*-*algebras* (*Tôhoku Math. J.*, t. 16, 1964, p. 111-122).
[27] T. Turumaru, *On the direct product of operator algebras* (*Tôhoku Math. J.*, t. 4, 1952, p. 242-251).
[28] T. Turumaru, *Crossed product of operator algebras* (*Tôhoku Math. J.*, t. 10, 1958, p. 355-365).
[29] A. S. Wightman et S. S. Schweber, *Configuration space methods in relativistic quantum field theory* (*Phys. Rev.*, t. 98, 1955, p. 812-837).
[30] A. Wulfsohn, *Produit tensoriel de* C*-*algèbres* (*Bull. Sc. Math.*, t. 87, 1963, p. 13-27).
[31] A. Wulfsohn, *Le produit tensoriel de certaines* C*-*algèbres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 6052-6054).