ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SIEGFRIED GÄHLER
WERNER GÄHLER

Espaces 2-métriques et localement 2-métriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 82, nº 2 (1965), p. 387-395
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_387_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 82, 1965, p. 387 à 395.

ESPACES 2-MÉTRIQUES ET LOCALEMENT 2-MÉTRIQUES

PAR MM. SIEGFRIED ET WERNER GÄHLER.

Ce travail traite des espaces, sur les triples de points desquels est définie, globalement resp. localement, une fonction numérique avec certaines propriétés (valables pour l'aire d'un triangle) et qui sont appelés espaces 2-métriques resp. localement 2-métriques. La première partie est consacrée à des études topologiques. La deuxième partie donne, en partant d'une certaine relation quelques résultats concernant la géométrie de tels espaces.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDES TOPOLOGIQUES.

Soit R l'espace numérique de dimension $n = 2, 3, \ldots,$ c'est-à-dire le produit topologique de n droites numériques. Pour des triples quelconques des points $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de R, soit

$$\tau(abc) = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{i<j} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j & 1 \\ \beta_i & \beta_j & 1 \\ \gamma_i & \gamma_j & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$\tau(abc)$ est l'aire euclidienne usuelle du triangle (éventuellement dégénéré) avec a, b, c comme sommets. La fonction τ sera désignée comme 2-*métrique euclidienne*, et l'espace R muni de τ comme *espace* 2-*métrique euclidien* (à n dimension). τ a les propriétés suivantes :

M$_1$. Quels que soient $a, b \in \mathrm{R}$, $a \neq b$, il existe un $c \in \mathrm{R}$ avec $\tau(abc) \neq 0$.

M$'_1$. On a $\tau(abc) = 0$, si au moins deux des points a, b, c sont égaux.

M$_2$. $\tau(abc) = \tau(acb) = \tau(bca)$.

M$_3$. $\tau(abc) \leqq \tau(abd) + \tau(adc) + \tau(dbc)$.

Au moyen de τ, la topologie de R est facile à caractériser. C'est celle qui a pour base l'ensemble de toutes les intersections $\bigcap_i U_{\varepsilon_i}(a_i, b_i)$ à nombre fini d'ensembles $U_{\varepsilon_i}(a_i, b_i) = \{c;\ \tau(a_i b_i c) < \varepsilon_i\}$ avec a_i, $b_i \in R$ et $\varepsilon_i \in (0, +\infty)$. Soient b_1, b_2, b_3 trois points quelconques de R avec $\tau(b_1 b_2 b_3) \neq 0$. Pour chaque point $a \in R$, l'ensemble de toutes les intersections $V_\varepsilon(a) = \bigcap_{i=1}^{3} U_\varepsilon(a, b_i)$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$, est déjà un système fondamental de voisinages de a, et la fermeture $\overline{A}$ d'un ensemble A de R est donnée sous la forme $\overline{A} = \bigcap_\varepsilon V_\varepsilon(A)$, où $V_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} V_\varepsilon(a)$. Comme fonction de toutes les trois variables, τ est continue.

La notion d'espace 2-métrique euclidien peut être fortement généralisée. Elle peut être considérée comme une certaine généralisation, la notion d'espace 2-normé (de la dimension n), notion introduite et étudiée dans [2]. Une généralisation plus forte est donnée par la notion générale de l'espace 2-métrique. Par *espace 2-métrique* [1], nous comprenons un ensemble R, sur les triples de points duquel est définie une fonction numérique τ, la 2-métrique, satisfaisant aux conditions M_1, M'_1, M_2 et M_3, mentionnées plus haut. L'ensemble de toutes les intersections $\bigcap_i U_{\varepsilon_i}(a_i, b_i)$ à nombre fini d'ensembles $U_{\varepsilon_i}(a_i, b_i)$ définis comme ci-devant, constitue la base d'une topologie de R qui sera appelée *topologie déduite de la 2-métrique*, et de qui R sera toujours munie. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles finis non vides de $R \times (0, +\infty)$. Il peut être démontré que pour chaque point $a \in R$, l'ensemble de toutes les intersections $W_\Sigma(a) = \bigcap_{i=1}^{n} U_{\varepsilon_i}(a, b_i)$ avec $\Sigma = \{(b_1, \varepsilon_1), \ldots, (b_n, \varepsilon_n)\}$ quelconque de $\mathfrak{S}$ constitue un système fondamental de voisinages de a. De ce résultat, qui peut encore être amélioré pour des espaces spéciaux, comme par exemple l'espace 2-métrique euclidien, il résulte que dans chaque point de R, il existe une base d'une puissance, qui est plus inférieure ou égale à la puissance de R. Il peut être démontré par des exemples qu'un espace 2-métrique R ne doit pas posséder (comme c'est le cas pour des espaces métriques) une base dénombrable de chacun de ses points. La fermeture $\overline{A}$ d'un ensemble A de R peut être représentée sous la forme $\overline{A} = \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{S}} W_\Sigma(A)$, $W_\Sigma(A) = \bigcup_{a \in A} W_\Sigma(a)$. Tout espace 2-métrique est un espace séparé uniformisable. Tandis que les espaces 2-métriques ne doivent pas toujours être métrisables, il peut, cependant être démontré que tout espace topologique métrisable R à nombre de points $\neq 2$ peut être muni d'une 2-métrique déduisant la topologie de R. τ n'est continue, en général, que comme fonction d'une variable.

Parfois il est nécessaire de mettre, au lieu de la notion d'espace 2-métrique, la notion un peu plus généralisée de l'*espace localement 2-métrique*. Par un tel espace, nous comprenons un ensemble R, muni d'un recouvrement $\ddot{U}(R)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

L_1. Sur chaque ensemble $U \in \ddot{U}(R)$ est définie une 2-métrique τ_U.

L_2. Pour chaque couple $U, U' \in \ddot{U}(R)$ et chaque triple $a, b, c \in U \cap U'$, on a $\tau_U(abc) = \tau_{U'}(abc)$.

L_3. Pour tout $U, U' \in \ddot{U}(R)$, l'intersection $U \cap U'$ est ouverte relativement à la topologie $\mathfrak{T}_U$ déduite de τ_U dans U, et à la topologie $\mathfrak{T}_{U'}$ déduite de $\tau_{U'}$ dans U'.

En vertu de la propriété L_2, il existe une fonction τ, univoquement déterminée sur tous les triples de points a, b, c d'ensembles quelconques $U \in \ddot{U}(R)$, qui est égale à τ_U sur $U \times U \times U$. Nous la désignons comme *2-métrique locale*. Dans un espace R localement 2-métrique, nous introduisons une topologie $\mathfrak{T}$, en admettant qu'un ensemble $G \subseteq R$ sera ouvert si et seulement si pour chaque point $x \in G$ et chaque (respectivement un) ensemble $U \in \ddot{U}(R)$ contenant le point x, il existe un voisinage V de x relatif à la topologie $\mathfrak{T}_U$ avec $V \subseteq G$. Pour chaque ensemble $U \in \ddot{U}(R)$, $\mathfrak{T}_U$ est la topologie induite par $\mathfrak{T}$ dans U; en outre, $U \in \ddot{U}(R)$ est toujours un sous-ensemble ouvert relatif à $\mathfrak{T}$ et, par conséquent, $\ddot{U}(R)$ est un recouvrement ouvert de R.

Dans ce qui suit, nous citons un important exemple d'espace localement 2-métrique. Soit R une variété C^1 à deux dimensions, c'est-à-dire une variété topologique à deux dimensions munie d'une structure C^1 $\mathfrak{A}$ (atlas C^1 maximal). Pour chaque carte $f \in \mathfrak{A}$, soit φ_f une fonction réelle définie sur le domaine U_f de f, telle qu'on ait :

I_1. Pour chaque $x \in U_f$ est $\varphi_f(x) > 0$.

I_2. φ_f est continue.

I_3. Pour $f, g \in \mathfrak{A}$ quelconque et pour chaque point $x \in f(U_f \cap U_g)$, on a $\varphi_f(f^{-1}(x)) = \varphi_g(f^{-1}(x))\, J(x)$, $J(x)$ désignant la valeur absolue de la déterminante $\partial(gf^{-1})/\partial(x)$.

Soit donnée, en outre, une famille $\mathfrak{J}$ d'arcs de Jordan dans R et un recouvrement ouvert C(R) de R, satisfaisant aux conditions suivantes :

J_1. Pour des points quelconques a, $b(\neq a)$ d'un ensemble $V \in C(R)$, il existe un et seulement un arc de Jordan $B_{ab} \in \mathfrak{J}$ avec a et b comme extrémités.

J_2. Pour chaque point x d'un ensemble $V \in C(R)$ et pour chaque voisinage U de x, il y a un voisinage $W \subseteq V$ de x, tel que pour tout a, $b \in W$ est $B_{ab} \subseteq U$ (1).

J_3. Pour des points quelconques a, b d'un ensemble $V \in C(R)$ et pour un ensemble ouvert $G \supseteq B_{ab}$, il y a un voisinage $W \subseteq V$ de a, tel que pour tout $c \in W$ est $B_{cb} \subseteq G$.

J_4. Quels que soient les points a, b, c d'un ensemble $V \in C(R)$, $B_{ab} \cup B_{bc}$ est égal à B_{ab}, B_{bc} ou un arc de Jordan avec a et c comme extrémités.

J_5. a, b, c, $d \in V \in C(R)$, $b \neq c$, $b \in B_{ac}$, $c \in B_{bd}$ entraîne toujours $B_{ad} = B_{ac} \cup B_{bd}$.

J_6. Pour tout $B \in \mathfrak{J}$ et $f \in \mathfrak{A}$, $f(B \cap U_f)$ a la mesure de Lebesgue o.

Pour des points quelconques a, b, c d'un ensemble $V \in C(R)$, nous désignons par B_{abc} l'ensemble $B_{ab} \cup B_{bc} \cup B_{ca}$. En vertu de J_4, chacun de ces ensembles se compose d'un seul point, d'un arc de Jordan ou d'une courbe de Jordan fermée. En vertu des propriétés J_1 et J_2, nous trouvons un recouvrement ouvert $\ddot{U}(R)$ de R, tel que pour $U \in \ddot{U}(R)$ quelconque, la fermeture $\overline{U}$ est compacte et est contenue dans au moins un ensemble $V \in C(R)$ et tel que, en outre, il existe une carte $f_U \in \mathfrak{A}$, de sorte que pour des points quelconques a, b de $\overline{U}$, B_{ab} est toujours contenu dans le domaine de f_U. Nous introduisons une fonction réelle τ_U sur les triples de points de chaque ensemble $U \in \ddot{U}(R)$, en définissant $\tau_U(abc)$ pour des points quelconques a, b, $c \in U$ comme suit : Si B_{abc} est une courbe de Jordan fermée, $\tau_U(abc)$ est égal à l'intégrale de Lebesgue $\int \varphi_{f_U}(f_U^{-1}(x))\,dx$ sur le domaine de Jordan avec $f_U(B_{abc})$ comme frontière, sinon, il est égal à o. Nous affirmons que les τ_U constituent une 2-métrique locale τ sur R et que la topologie de R, déduite de la 2-métrique locale, est égale à la topologie donnée.

Pour démonstration de l'affirmation, soit donné un ensemble $U \in \ddot{U}(R)$. I_2 implique que $\tau_U(abc)$ est fini pour chaque a, b, $c \in U$. Pour a, b $(\neq a)$ quelconque de U, soit donné un point $d \in B_{ab} \cap U - \{a, b\}$. En vertu de J_2, il existe un voisinage $W \subseteq U$ de d, tel que pour tout $e \in W$, ni a ni b ne sont contenus dans B_{ed}. Soit c un point quelconque de $W - B_{ab}$. En tenant compte de J_4, il résulte que B_{abc} est une courbe de Jordan fermée. En vertu de I_1 et de I_2, on a, par conséquent, $\tau_U(abc) > o$, c'est-à-dire : τ_U a la propriété M_1 d'une 2-métrique. Que les propriétés M'_1 et M_2 soient satisfaites, est immédiatement évident. M_3 résulte de J_6. τ_U est donc une

(1) Pour un point quelconque $a \in R$, soit $B_{aa} = \{a\}$.

2-métrique, c'est-à-dire : la condition L_1 est vérifiée. La condition L_2 résulte immédiatement de I_3. Nous allons démontrer que la condition L_3 est valable. Soient donnés $a_1, a_2, \ldots$ et a, b, c de U avec $\tau_U(abc) > 0$. Nous supposons d'abord $a_i \to a$. Pour i quelconque, soit M_i^b le domaine de Jordan avec $f_U(B_{a_iab})$ comme frontière ou l'ensemble $f_U(B_{a_iab})$ même, selon que B_{a_iab} est une courbe de Jordan ou non. Définissons M_i^c de façon analogue. Selon J_3, M_i^b converge uniformément vers $f_U(B_{ab})$ et M_i^c uniformément vers $f_U(B_{ac})$. En tenant compte de J_6, il résulte, par conséquent, que les mesures de Lebesgue de M_i^b et de M_i^c tendent vers zéro. En vertu de I_2, il vient donc $\tau_U(a_iab) \to 0$, et $\tau_U(a_iac) \to 0$. Dans ce qui suit, nous supposons qu'on a $\tau_U(a_iab) \to 0$ et $\tau_U(a_iac) \to 0$, mais que a_i ne converge pas vers a. Comme $\overline{U}$ est compacte, nous pouvons supposer que a_i tend vers un point $\bar{a} \in \overline{U} - \{a\}$. On a donc $\tau_U(a_i\bar{a}a) \to 0$, $\tau_U(a_i\bar{a}b) \to 0$, d'où, en commun avec $\tau_U(a_iab) \to 0$, et en vertu de M_3, il résulte la relation $\tau_U(a\bar{a}b) = 0$. De façon analogue, on a $\tau_U(a\bar{a}c) = 0$. $B_{a\bar{a}b}$ et $B_{a\bar{a}c}$ sont donc des arcs de Jordan ou des ensembles composés d'un seul point. Comme B_{abc} est une courbe de Jordan fermée, il s'ensuit une contradiction par rapport à J_4 et J_5. Selon le théorème 18 de [1], il résulte que la topologie déduite de τ_U est égale à la topologie induite par R dans U. La condition L_3 est donc vérifiée, ce qu'il fallait encore démontrer.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES.

Soit R une space 2-métrique euclidien de la dimension $n = 2, 3, \ldots$, et τ la 2-métrique de R. Au moyen de τ, la relation « entre » déterminée dans R par la structure linéaire, peut être caractérisée comme suit : Pour trois points a, b et c de R, il existe un nombre $\alpha \in [0, 1]$ avec $b = \alpha a + (1 - \alpha) c$, si et seulement si pour chaque point $d \in R$, on a $\tau(abd) + \tau(bcd) = \tau(acd)$. Nous désignons cette relation par Z et écrivons, si b est situé entre a et c, Zabc ou, en plus bref, abc. Z possède les propriétés suivantes :

Z_1. On a aab et abb.

Z_2. $aba \Rightarrow a = b$.

Z_3. $abd,\ bcd \Leftrightarrow abc,\ acd$.

Par Z, on peut déterminer, dans R, les segments, les droites, les triangles, les plans, etc. De façon analogue, il est également possible de déterminer les segments, les droites et les notions analogues de dimension supérieure dans des espaces 2-normés quelconques de la dimension $\neq 1$ ([2]). Il s'avère utile d'employer la caractérisation précitée de la relation « entre » dans un espace 2-métrique euclidien pour définir une relation « entre » dans un espace 2-métrique quelconque, ce dont il sera question dans ce qui suit.

Nous désignons par R un espace 2-métrique quelconque. Soient a et c des points quelconques de R. Nous disons qu'un point *b est situé entre a et c* et écrivons $Zabc$ respectivement, en plus bref, abc, si et seulement si pour chaque point $d \in R$, on a $\tau(abd) + \tau(bcd) = \tau(acd)$. La relation Z ainsi définie possède les propriétés précitées Z_1, Z_2 et Z_3. abc implique toujours cba. Soit $\langle a, b \rangle = \{c;\ acb\}$ et $\langle a, b, c \rangle = \bigcup_{d \in \langle a, b \rangle} \langle d, c \rangle$. Nous citons maintenant quelques propriétés [2] que les espaces 2-métriques, en général, ne possèdent pas, mais qui sont utilisées plus loin dans des résultats.

E_1. $\tau(abc) = 0$ implique abc ou bca ou cab.

E_2. Quels que soient les points a, b, c de R, il existe un sous-espace 2-métrique R′ de R, tel qu'on ait :

1. $\langle a, b, c \rangle \subseteq R'$.
2. La topologie de l'espace 2-métrique R′ est identique à celle induite sur R′ par la topologie de R.
3. $\tau(a'b'c') > 0, \lim_{i \to \infty} \tau(a'b'a_i) = 0, \lim_{i \to \infty} \tau(a'c'a_i) = 0\ (a', b', c', a_i \in R')$, pour tous les $a^\star \in R'$, donnent $\lim_{i \to \infty} \tau(a'a^\star a_i) = 0$.

E_3. Pour des points quelconques a, b de R, $\langle a, b \rangle$ est $\aleph_0$-compact.

E_4. Quels que soient a, b de R avec $a \neq b$, il existe au moins un point $c \neq a, b$ de R avec acb.

E_5. Quels que soient a, b de R avec $a \neq b$, il existe au moins un point $c \neq b$ de R avec abc.

Si R a les propriétés E_1 et E_2, de abc, abd et $a \neq b$ résulte, comme il peut être démontré, ou bien bcd ou bien bdc. Si R jouit des propriétés E_1 et E_4, de $t, t' \in \langle a, b \rangle$ résulte $\langle t, t' \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. De plus, abc et adc impliquent alors adb ou bdc.

---

(2) Dans [3], les propriétés E_1 à E_4 avaient été appelées propriété G, propriété K′, « Streckenkompaktheit » de R respectivement convexité de R par rapport à Z.

Si R possède les propriétés E_1, E_2 et E_4, *abc*, *bcd* et $b \neq c$ entraîne toujours *abd* et *acd*. Si R jouit des propriétés E_1 à E_4, l'ensemble $\langle a, b \rangle$ est, quels que soient les points a et b avec $a \neq b$, un arc de Jordan avec a et b comme extrémités. Tout espace 2-normé d'une dimension $\neq 1$ a les propriétés E_1 à E_5.

Dans ce qui suit, soit R un espace localement 2-métrique. Pour chaque ensemble U du recouvrement $\ddot{U}(R)$ est défini par la 2-métrique τ_U, de la manière précitée, une relation « entre » Z_U. Nous disons que R possède la propriété E'_i $(i = 1, \ldots, 5)$, si chacun des espaces 2-métriques $U \in \ddot{U}(R)$ a la propriété E_i (par rapport à Z_U). Nous appelons les relations Z_U, $U \in \ddot{U}(R)$, *compatibles*, si pour n'importe quels U, $U' \in \ddot{U}(R)$ et pour n'importe quels points a, b, $c \in U \cap U'$ de $Z_U abc$ résulte toujours $Z_{U'} abc$ et *vice versa*. Pour la compatibilité des relations Z_U, $U \in \ddot{U}(R)$, il suffit que R possède les propriétés E'_1 et E'_2 et que dans chaque intersection $U \cap U'$ $(U, U' \in \ddot{U}(R))$, à laquelle appartiennent au moins deux points, puissent toujours être trouvés trois points a, b, c avec $\tau(abc) > 0$. Dans ce qui suit, nous supposons que les relations Z_U, $U \in \ddot{U}(R)$, sont compatibles. Nous désignons par *courbe en* R *avec* respectivement *sans extrémités*, chaque classe d'équivalence C d'applications continues $p \mid I$ d'intervalles fermés respectivement ouverts I de nombres réels dans l'espace R, l'équivalence de ces applications étant définie comme suit : deux applications continues $p \mid I$ et $p' \mid I'$ d'intervalles fermés respectivement ouverts I et I' de nombres réels dans l'espace R sont appelées équivalentes, s'il existe une application, en général multivoque, f de I sur I' avec $p = p'f$, qui est une similitude au sens large, c'est-à-dire pour laquelle de $t < t'$ $(t, t' \in I)$ et $s \in f\{t\}$, $s' \in f\{t'\}$ résulte toujours $s \leqq s'$. Toute application appartenant à une telle classe d'équivalence C est désignée comme *représentation de* C. Pour toute représentation $p \mid I$ d'une courbe C, $p(I)$ est un ensemble correspondant univoquement à C. Il est appelé *support de* C. Si C est une courbe en R, et $p \mid I$ une représentation de C, nous appelons *sous-courbe de* C toute courbe en R, possédant comme représentation la restriction de $p \mid I$ sur un sous-intervalle fermé ou ouvert de I.

Une courbe C avec extrémités, qui possède une application biunivoque $p \mid [\alpha, \beta]$ comme représentation et pour laquelle $p([\alpha, \beta])$ est contenu dans un ensemble $U \in \ddot{U}(R)$ et est égale à $\langle a, b \rangle_U = \{c ;\ Z_U acb\}$ $(a = p(\alpha)$, $b = p(\beta))$, nous l'appelons *segment* et la désignons par C_{ab}. Cette notion est indépendante de l'ensemble spécial $U \in \ddot{U}(R)$. Quels que soient les deux points a et $b \neq a$ d'un ensemble $U \in \ddot{U}(R)$, il existe au plus un — et si R jouit des propriétés E'_1 à E'_4 — un et seulement un segment C_{ab}. Si R possède la propriété E'_1, chaque sous-courbe avec extrémités d'un segment est aussi un segment. De plus, l'intersection des supports de deux segments est alors ou vide, se compose d'un seul point ou est le support d'un segment. Si R a les propriétés E'_1 et E'_2 et si C_{ac} et C_{ad} sont deux segments qui, sans égard pour a, ont en commun encore un autre point b, le support d'une de ces deux courbes contient le support de l'autre.

Une courbe C en R sans extrémités nous l'appelons une *géodésique*, si elle possède une représentation $p|I$ avec les propriétés suivantes :

G_1. Quel que soit $\gamma \in I$, il existe un $\varepsilon > 0$ avec $[\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon] \subseteq I$, tel que la restriction de p sur $[\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon]$ soit biunivoque et est la représentation d'un segment.

G_2. Il n'y a pas d'application continue d'un intervalle ouvert de nombres réels dans l'espace R possédant la propriété G_1 et qui ait $p|I$ comme vraie restriction.

Si R possède les propriétés E'_1 à E'_3, il existe pour chaque segment C en R une géodésique qui a C comme sous-courbe. *Démonstration* (*voir* [5], p. 167) : Soit Φ l'ensemble de toutes les applications continues $p|I$ d'intervalles ouverts de nombres réels dans l'espace R, qui ont la propriété G_1 et pour lesquelles la restriction sur un certain sous-intervalle de I est une représentation de C. En vertu de E'_3, Φ n'est pas vide. Dans Φ, nous introduisons un ordre partiel $\prec$, en admettant que $p|I \prec p'|I'$, si l'on a $I \subseteq I'$ et si p est la restriction de p' sur I. Pour chaque sous-ensemble totalement ordonné de Φ, on peut construire immédiatement une majorante. Selon le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $p^+|I^+$ dans Φ. Celui-ci est évidemment la représentation d'une géodésique, ayant C comme sous-courbe.

Dans ce qui suit, nous revenons à l'exemple d'un espace localement 2-métrique dont nous avons traité à la fin de la première partie. Comme il peut être démontré, cet espace possède les propriétés E'_1, E'_2, E'_4 et E'_5, mais ne possède pas, en général, la propriété E'_3. Dans cet exemple, on peut choisir le recouvrement ouvert $\ddot{U}(R)$ tel que chaque $U \in \ddot{U}(R)$ ait les deux propriétés suivantes :

1. $\overline{U}$ est compact et contenu dans un ensemble $V \in C(R)$ et dans le domaine d'une carte de $\mathfrak{A}$.

2. Il y a trois points $e, e', e'' \in \overline{U}$ avec $\overline{U} - U = B_{ee'e''}$.

Alors, pour chaque couple a, $b(\neq a)$ d'un ensemble $U \in \ddot{U}(R)$, on a toujours $B_{ab} = \langle a, b \rangle_U \subseteq U$. Par conséquent, alors R possède aussi la propriété E'_3.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. GÄHLER, *2-metrische Räume und ihre topologische Struktur* (*Math. Nachr.*, Bd. 26, 1963, p. 115-148).

[2] S. GÄHLER, *Lineare 2-normierte Räume* (*Math. Nachr.*, Bd. 28, 1964, p. 1-43).

[3] S. GÄHLER, *Ueber die Uniformisierbarkeit 2-metrischer Räume* (*Math. Nachr.*, Bd. 28, 1965, p. 235-244).

[4] S. und W. GÄHLER, *Ueber eine Zwischenrelation in 2-metrischen Räumen* (*Math. Nachr.*, Bd. 29, 1965, p. 301-331).

[5] W. RINOW, *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.