

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

EDWIN J. AKUTOWICZ

## Sur l'approximation spectrale

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 82, n° 2 (1965), p. 297-325

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1965\\_3\\_82\\_2\\_297\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_297_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR L'APPROXIMATION SPECTRALE

PAR M. EDWIN J. AKUTOWICZ.

Ce travail est divisé en deux chapitres. Le premier est consacré à l'étude de l'approximation spectrale sur le tore à une dimension dans la topologie d'un espace hilbertien à poids. On utilise là une méthode de Beurling. Dans le second chapitre on considère la question sur la droite par une nouvelle méthode.

## CHAPITRE I.

INTRODUCTION. — Parmi les plus intéressantes questions de l'analyse harmonique se trouve celle de l'approximation, ou synthèse, spectrale. Pour traiter cette question, il convient d'employer le langage et certaines notions de la théorie des distributions. Voici de quoi il s'agit. Soit  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$  une suite fixe de nombres positifs,  $\lambda_{-n} = \lambda_n$ , et considérons l'ensemble de toutes les suites numériques  $c = \{c_n\}_{-\infty < n < \infty}$  telles que

$$(0.1) \quad \sum \lambda_n |c_n|^2 < \infty.$$

On définit un produit scalaire  $(c, d)_\Lambda$  d'après la formule

$$(c, d)_\Lambda = \sum \lambda_n c_n \bar{d}_n,$$

pour obtenir une structure d'espace hilbertien, la norme  $\|c\|_\Lambda$  étant la racine carrée de  $(c, c)_\Lambda$ . Appelons  $\mathcal{H}_\Lambda$  cet espace de suites. On regarde alors chaque vecteur  $c \in \mathcal{H}_\Lambda$  comme la suite des coefficients de Fourier d'un objet dual, voire une distribution  $\gamma$  portée par le tore  $\mathbb{K}$  à une dimension, autrement dit,  $\mathcal{F}\gamma = c$ . Si l'on transpose la structure d'espace hilbertien à l'ensemble des  $\gamma$  en posant

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\mathcal{F}\gamma_1, \mathcal{F}\gamma_2)_\Lambda, \quad \|\gamma\| = \|\mathcal{F}\gamma\|_\Lambda,$$

on obtient un espace hilbertien  $\mathcal{G}_\Lambda$  de distributions,  $\mathcal{F}\mathcal{G}_\Lambda = \mathcal{H}_\Lambda$ .

Soit  $E$  un sous-ensemble fermé du tore  $K$ . Quelles sont alors les suites de poids  $\Lambda$  telles que toute distribution de  $\mathcal{G}_\Lambda$  portée par  $E$  soit fortement adhérente à l'ensemble des mesures portées par  $E$ ? Bien entendu, il est nécessaire que l'ensemble  $E$  soit tel qu'il existe des éléments non nuls de  $\mathcal{G}_\Lambda$  portés par  $E$ . Ceci équivaut à la positivité de la  $\Lambda$ -capacité de  $E$ . Cependant, cette condition est loin d'être suffisante pour l'approximation spectrale (<sup>1</sup>).

1. UNE CLASSE DE NOYAUX ET LES POTENTIELS ASSOCIÉS. — On va étudier une classe, notée  $\mathfrak{S}$ , de noyaux et les potentiels associés à ces noyaux. Soient  $P, Q$  deux points variables dans le plan; désignons par  $r_{PQ}$  la distance euclidienne entre  $P$  et  $Q$ . Les noyaux en question sont les fonctions  $\Lambda(P, Q) = \Lambda(r_{PQ})$  de  $r_{PQ}$  qui satisfont aux conditions suivantes :

$$(1.1) \quad -\infty < \Lambda(P, Q) \leq +\infty;$$

(1.2) La fonction  $\Lambda(P, Q)$  est semi-continue inférieurement en chaque variable lorsque l'autre est fixée;

(1.3)  $\Lambda(P, Q)$  est sous-harmonique pour  $P \neq Q$ ;

(1.4) En ce qui concerne la restriction  $\Lambda(\theta) = \Lambda(1, e^{i\theta})$ ,  $\theta$  réel, on suppose

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Lambda(\theta)| d\theta < \infty,$$

et encore, à la série de Fourier de  $\Lambda(\theta)$ ,

$$\sum_0^{\infty} \lambda_n \cos n\theta,$$

on impose la condition

$$\lambda_n > 0, \quad n\lambda_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

D'après (1.1) et (1.2),  $\Lambda(P, Q) = +\infty$  seulement si  $P = Q$ .

Remarquons que la sous-harmonicité exigée dans (1.3) serait impossible pour des coefficients de Fourier  $\lambda_n$  trop rapidement décroissants; néanmoins, elle est compatible avec (1.4).

Par exemple, si  $0 < \alpha < 1$ , alors le noyau  $\Lambda(P, Q) = r_{PQ}^{-\alpha}$  appartient à la classe  $\mathfrak{S}$ . En effet, le laplacien de  $r^{-\alpha}$  est

$$\Delta r^{-\alpha} = \alpha^2 r^{-\alpha-1} > 0,$$

et il est facile de vérifier que

$$n\lambda_n \geq \Lambda n^\alpha \quad \text{pour une constante } \Lambda > 0.$$

---

(<sup>1</sup>) Une condition analogue est utilisée par Beurling [5] d'une manière entièrement différente.

On désigne également par  $\mathfrak{N}$  la classe des suites de coefficients de Fourier  $\{\lambda_n\}$  engendrées par les noyaux  $\Lambda \in \mathfrak{N}$ .

Étant donné un noyau  $\Lambda \in \mathfrak{N}$ , on cherche à associer à chaque mesure complexe  $\mu$  dans le plan une intégrale d'énergie

$$\|\mu\|^2 = \iint \Lambda(P, Q) d\mu(P) \overline{d\mu(Q)}.$$

Dans le cas où la mesure  $\mu$  est portée par le tore  $K$ , l'énergie de  $\mu$  peut être exprimée en fonction des coefficients de Fourier de  $\mu$  :

$$\|\mu\|^2 = \iint \Lambda(\theta - \theta') d\mu(\theta) \overline{d\mu(\theta')} = \sum_n \lambda_n \left| \int e^{in\theta} d\mu(\theta) \right|^2, \quad \lambda_n = \lambda_{-n}.$$

Si la mesure  $\mu$  est non négative, alors le  $\Lambda$ -potentiel

$$U^\mu(P) = \int \Lambda(P, Q) d\mu(Q)$$

est continu et sous-harmonique en dehors du support de  $\mu$ . Évidemment,

$$\|\mu\|^2 = \int U^\mu(P) d\mu(P).$$

Dans le cas général, pour n'importe quelle distribution  $\nu$  de  $\mathcal{G}_\Lambda$  qui est portée par  $K$ , on définit le  $\Lambda$ -potentiel  $U^\nu$  comme la fonction sur  $K$  ayant la suite  $\{\lambda_n \nu_n\}$  comme coefficients de Fourier,  $\{\nu_n\}$  étant la suite des coefficients de Fourier de  $\nu$ . Vu la condition (1.4),  $U^\nu$  est nécessairement une fonction de  $L^2(K)$  :

$$\sum_n |\lambda_n \nu_n|^2 < \infty.$$

Donc le  $\Lambda$ -potentiel d'un élément de  $\mathcal{G}_\Lambda$  porté par  $K$  est, au moins, une fonction de  $L^2$  sur  $K$ , tandis que le  $\Lambda$ -potentiel d'une mesure non négative peut être prolongé en fonction sous-harmonique dans le plan.

Un ensemble  $E$  est de  $\Lambda$ -capacité positive si et seulement s'il existe une mesure non négative portée par  $E$  dont le  $\Lambda$ -potentiel reste borné, ou, ce qui est équivalent, si et seulement s'il existe une telle mesure de  $\Lambda$ -énergie finie.

2. ÉNONCÉ D'UN THÉORÈME. — Notons  $\mathcal{G}_{\Lambda E}$  l'ensemble des distributions de  $\mathcal{G}_\Lambda$  portées par  $E$ . Nous allons construire pour chaque poids  $\Lambda \in \mathfrak{N}$ , en suivant une méthode de Beurling [5], une suite  $M = \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$  de mesures positives portées par  $E$  qui est totale dans  $\mathcal{G}_{\Lambda E}$ ; c'est-à-dire, toute distribution de  $\Lambda$ -énergie finie portée par  $E$  est une limite forte dans  $\mathcal{G}_\Lambda$  des combinaisons linéaires des  $\tau_k$ . Puisque les mesures  $\tau_k$  sont déterminées par une propriété extrême semblable à la propriété des

polynômes classiques de Tchebichef (de s'écarter le moins de zéro parmi tous les polynômes  $x^n + \dots$  de degré  $n$ ), nous appelons les  $\tau_k$  mesures de Tchebichef appartenant à  $\Lambda$ ,  $E$ .

**THÉORÈME 1.** — *Si le noyau  $\Lambda$  appartient à la classe  $\mathfrak{A}$  et si l'ensemble fermé  $E$  sur  $K$  est de  $\Lambda$ -capacité positive, alors la suite  $M$  des mesures de Tchebichef appartenant à  $\Lambda$ ,  $E$  est totale dans  $\mathcal{G}_{\Lambda E}$ .*

Signalons que Deny [7] avait remarqué la possibilité de l'approximation spectrale pour les noyaux satisfaisant au principe fort du maximum de H. Cartan. Mais il est douteux que la classe  $\mathfrak{A}$  entre dans le cadre de Cartan et Deny. La possibilité de l'approximation spectrale avait été aussi établie dans un ouvrage de Beurling et Deny [6] et de Deny [15] pour les espaces de Dirichlet. L'approximation d'une distribution  $T$  dans la norme que nous étudions,

$$\sum |\mathcal{F} T(n)|^2 \lambda_n,$$

équivalent à l'approximation du potentiel  $U^T$  de  $T$ , dont les coefficients de Fourier sont  $\lambda_n \mathcal{F} T(n)$ , dans la norme conjuguée,

$$\sum \frac{|\mathcal{F} U^T(n)|^2}{\lambda_n}.$$

Les espaces de Dirichlet sont voisins aux derniers espaces conjugués.

### 3. DISTRIBUTIONS COMME LIMITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES. —

Il est souvent utile d'étudier les distributions portées par une courbe  $C$  dans le plan, qui est régulière et sans intersections, comme sommes des limites de fonctions localement holomorphes en dehors de  $C$ . Si la courbe  $C$  est fermée, alors il y a dualité entre la limite inductive des espaces de Banach constitués par les fonctions holomorphes sur  $C$  et la limite projective des espaces de Banach formés par les fonctions localement holomorphes en dehors de  $C$  et s'annulant à l'infini. Dans cette théorie une notion fondamentale est celle de l'indicatrice de Fantappiè. Étant donné une distribution  $\gamma$  portée par le tore  $K$ , l'indicatrice de  $\gamma$  est, par définition,

$$(3.1) \quad \gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \gamma, \frac{t}{t-z} \right\rangle \quad (z \notin S_\gamma) \quad (2).$$

C'est une fonction localement holomorphe en dehors du support de  $\gamma$ , s'annulant à l'infini. L'application  $\gamma \rightarrow \gamma(z)$  est biunivoque (3).

(2)  $S_\gamma$  désigne le support de  $\gamma$ .

(3) L'application inverse est

$$\gamma(z) \rightarrow \lim_{r \rightarrow 1-} \gamma(r e^{i\theta}) - \lim_{r \rightarrow 1-} \gamma\left(\frac{1}{r} e^{i\theta}\right).$$

Cf. (3.3) inf.

Il s'ensuit qu'une suite  $\{\gamma_n\}$ , la distribution  $\gamma$  dont la transformée de Fourier est  $\{\gamma_n\}$  et l'indicatrice  $\gamma(z)$  ne sont que diverses représentations, parfaitement équivalentes, d'une distribution portée par  $K$ . Le spectre de la suite  $\{\gamma_n\}$  n'est autre chose que l'ensemble des singularités de l'indicatrice associée. Donc, vu le fait que l'indicatrice s'annule à l'infini, on vérifie le

LEMME D'UNICITÉ. — *Si le spectre d'une suite  $\{\gamma_n\}$  est vide, alors  $\gamma_n \equiv 0$ .*

Nous devons faire appel à la notion d'une limite généralisée dans la section 5; il convient de régler la question ici. Soit  $B = B(M_0, M_1, \dots)$  un ensemble borné de fonctions indéfiniment dérivables, de période  $2\pi$ , dans le sens que

$$\sup_{\varphi \in B} \max_t \left| \frac{d^k \varphi}{dt^k} \right| \leq M_k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Désignons par  $P_r \varphi(t)$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ , l'intégrale de Poisson de la fonction  $\varphi$ . Après intégration partielle, on obtient

$$(3.2) \quad P_r B \subset B \quad (0 \leq r < 1).$$

Pour une distribution  $\gamma$  portée par  $K$  posons

$$h(r, t) = h_\gamma(r, t) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \gamma, \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(t-\cdot)} \right\rangle.$$

D'après (3.2), il s'ensuit alors que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \langle h(r, t), \varphi \rangle = \left\langle \gamma, \lim_{r \rightarrow 1} P_r \varphi(t) \right\rangle = \langle \gamma, \varphi \rangle$$

uniformément par rapport à  $\varphi \in B$ . Autrement dit,

$$(3.3) \quad \gamma = \lim_{r \rightarrow 1} h(r, t)$$

dans la topologie des distributions. En particulier,  $\lim_{r \rightarrow 1} h(r, t) = 0$  hors du support de  $\gamma$ .

4. LES MESURES NON NÉGATIVES. — H. Cartan avait déjà en 1941 [12] remarqué et exploité le fait que l'ensemble  $\mathcal{M}_E^+$  des mesures non négatives portées par un compact  $E$  est fermé dans certains espaces hilbertiens où la norme est donnée par une intégrale d'énergie. Nous allons démontrer un résultat de cette sorte, étant donné que le présent contexte diffère sensiblement de celui de Cartan.

LEMME 1. — *L'ensemble  $\mathcal{M}_E^+ \cap \mathcal{G}_\Lambda$  est convexe et fermé dans  $\mathcal{G}_\Lambda$ .*

*Preuve.* — Soit  $\mu^{(n)}$  une suite de mesures située dans  $\mathcal{M}_E^+ \cap \mathcal{G}_\Lambda$  formant une suite de Cauchy. Considérons la suite  $\{\mu_k^{(n)}\} - \infty < k < \infty$  de coefficients

de Fourier de  $\mu^{(n)}$ . Alors il existe un vecteur  $\{\mu_k\}_{-\infty < k < \infty}$  dans  $\mathcal{H}_\Lambda$  vers lequel les vecteurs  $\{\mu_k^{(n)}\}_{-\infty < k < \infty}$  convergent fortement lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Donc, à plus forte raison,

$$\mu_k^{(n)} = \langle \mu^{(n)}, e^{ik\theta} \rangle = \int e^{ik\theta} d\mu^{(n)}(\theta) \rightarrow \mu_k \quad (n \rightarrow \infty).$$

Il s'ensuit que  $\langle \mu^{(n)}, g \rangle$  converge pour tous les polynômes trigonométriques  $g$ . D'où l'on déduit, en utilisant la non-négativité des  $\mu^{(n)}$ , que  $\mu^{(n)}$  converge faiblement vers une mesure  $\mu$  qui est, elle aussi, portée par  $E$  et non négative <sup>(4)</sup>. Vu la continuité du produit scalaire, la quantité,

$$\int U^{\mu^{(n)}}(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta = \sum_k \lambda_k \mu_k^{(n)} \overline{g_k},$$

converge lorsque  $n \rightarrow \infty$  pour chaque fonction  $g$  de  $L^2(K)$ . Donc les potentiels des  $\mu^{(n)}$  convergent fortement <sup>(5)</sup> dans  $L^2(K)$  vers une fonction  $u$  de  $L^2(K)$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int U^{\mu^{(n)}}(\theta) h(\theta) d\theta = \int u(\theta) h(\theta) d\theta$$

pour toute fonction continue  $h(\theta)$ . Par réciprocity,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int U^\nu(\theta) d\mu^{(n)}(\theta) = \int u(\theta) d\nu(\theta), \quad d\nu = h d\theta.$$

Si le potentiel  $U^\nu$  est continu, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int U^\nu(\theta) d\mu^{(n)}(\theta) = \int U^\nu(\theta) d\mu(\theta) = \int U^\mu(\theta) d\nu(\theta),$$

d'où il vient

$$(4.1) \quad \int u(\theta) h(\theta) d\theta = \int U^\mu(\theta) h(\theta) d\theta$$

pour toute fonction  $h(\theta)$  ayant une dérivée continue. Car, dans ce cas, les coefficients de Fourier de  $h(\theta)$  sont  $\mathcal{O}(n^{-1})$  et alors  $U^{h d\theta} = U^\nu$  est continu. De (4.1) il résulte  $u = U^\mu$ ; c'est-à-dire, le potentiel  $U^\mu$  est la limite forte dans  $L^2(K)$  des potentiels  $U^{\mu^{(n)}}$  :

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \lambda_k^2 |m_k - \mu_k^{(n)}|^2 = 0,$$

<sup>(4)</sup> Une distribution non négative est nécessairement une mesure.

<sup>(5)</sup> Puisque  $\lim \sum \lambda_k |\mu_k^{(n)}|^2 = \sum \lambda_k |\mu_k|^2$ , on a également convergence des normes- $L^2$ ,  $\lim \sum |\lambda_k \mu_k^{(n)}|^2 = \sum |\lambda_k \mu_k|^2$ ; donc la convergence faible entraîne la convergence forte.

où  $m_k$  désigne le  $k^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier de la mesure  $\mu$ . Donc  $m_k = \mu_k$  pour tout  $k$  et la preuve est ainsi achevée.

5. UNE SUITE DE PROBLÈMES EXTRÉMAUX <sup>(6)</sup>. — Soit  $E$  l'ensemble fermé de  $\Lambda$ -capacité positive du théorème 1. En analogie avec la définition des polynômes de Tchebichef, nous allons étudier une suite de conditions extrémales,

$$(P_n) \quad \inf \|\mu\|_{\Lambda} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

où  $\mu$  est variable dans l'ensemble de toutes les mesures non négatives portées par  $E$  telles que

$$(5.1) \quad \langle \mu, \operatorname{Re} \varphi_n \rangle = \int \operatorname{Re} \varphi_n(t) d\mu(t) = 1,$$

où  $\varphi_n$  désigne un polynôme trigonométrique,

$$\varphi_n(t) = \sum_{-n}^n a_k t^k \quad (t = e^{i\theta}).$$

Nous allons étudier également une seconde suite de conditions extrémales enlargies, notées  $(P_n^*)$ , qui diffèrent de  $(P_n)$  en ce que toutes les distributions de  $\Lambda$ -énergie finie portées par  $E$  joueront dans la concurrence. Une fois démontré que les solutions des deux problèmes  $(P_n)$  et  $(P_n^*)$  coïncident, le même raisonnement qu'utilise Beurling entraîne la validité de l'approximation spectrale.

D'après le lemme 1 et la convexité uniforme des espaces hilbertiens, il existe une solution unique pour chaque problème extrémal  $(P_n)$ ,  $(P_n^*)$ ; nous les désignerons par  $\mu$ ,  $\mu^*$ , respectivement, sans indice. Alors  $\mu$  est une mesure positive, tandis que  $\mu^*$  est une distribution de  $\Lambda$ -énergie finie. Posons

$$\rho = \|\mu\|_{\Lambda}^2 \quad \text{et} \quad q = \rho \operatorname{Re} \varphi_n.$$

LEMME 2. — On a l'égalité  $U^\mu = q$  en chaque point de l'ensemble  $E$  à l'exception d'un sous-ensemble de  $\Lambda$ -capacité zéro où l'on a  $U^\mu < q$ .

Preuve. — Soit  $\nu$  une mesure positive entrant dans le problème  $(P_n)$ . Alors pour  $0 \leq t \leq 1$  nous avons, d'après la propriété extrémale de  $\mu$ ,

$$\begin{aligned} \|t\nu + (1-t)\mu\|_{\Lambda}^2 &= \|\mu + t(\nu - \mu)\|^2 \\ &= \|\mu\|^2 + 2t(\mu, \nu - \mu) + t^2\|\nu - \mu\|^2 \\ &\geq \|\mu\|^2; \end{aligned}$$

<sup>(6)</sup> Les idées et les résultats de cette section appartiennent à Beurling; voir [5] et [17].



d'où l'on obtient  $(\mu, \nu - \mu) \geq 0$ ,  $(\mu, \nu) - \rho \geq 0$ . Vu l'égalité,

$$(\mu, \nu) = \int U^\mu(\theta) d\nu(\theta),$$

ceci entraîne

$$\int [U^\mu(\theta) - q(\theta)] d\nu(\theta) \geq 0$$

pour toute mesure  $\nu$  entrant dans  $(P_n)$ . Donc

$$(5.2) \quad U^\mu - q \geq 0 \quad \text{sur } E$$

à l'exception d'un sous-ensemble de  $E$  de  $\Lambda$ -capacité zéro.

Nous allons démontrer maintenant l'inégalité dans le sens opposé à (5.2). Supposons non vide l'ensemble  $W$  de tous les points du plan où

$$(5.3) \quad U^\mu - q > 0.$$

Puisque  $U^\mu - q$  est semi-continue inférieurement,  $W$  est ouvert. L'inégalité (5.3) est impossible en un point du support  $S_\mu$  de  $\mu$ . Car sinon on aurait  $U^\mu - q > 0$  sur un ensemble ouvert  $V$  tel que  $\mu(V) > 0$ , donc

$$\int [U^\mu(\theta) - q(\theta)] d\mu(\theta) > 0,$$

puisque la fonction entre crochets est  $\leq 0$  sur un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle au plus. Ici nous faisons appel au fait qu'un ensemble de  $\Lambda$ -capacité nulle est nécessairement de  $\mu$ -mesure nulle pour toute mesure  $\mu$  de  $\Lambda$ -énergie finie, un fait qui découle de la sommabilité (1.3) du noyau  $\Lambda$ . Cependant, d'après la propriété extrême de la mesure  $\mu$ , on a

$$\int [U^\mu(\theta) - q(\theta)] d\mu(\theta) = \|\mu\|^2 - \rho = 0.$$

Donc  $W \cap S_\mu$  est bien vide, et alors  $U^\mu - q$  est sous-harmonique dans  $W$ . Mais puisque  $U^\mu - q \leq 0$  au bord de  $W$ , le principe du maximum entraîne  $U^\mu - q \leq 0$  dans  $W$ , ce qui serait absurde si  $W$  n'était pas vide. On a donc  $U^\mu - q \leq 0$  partout dans le plan, ce qui permet de conclure que  $U^\mu = q$  sur  $E$  avec un ensemble exceptionnel comme dit.

LEMME 3. —  $(\mu^*, \mu) = \rho$  et  $\mu = \mu^*$ .

*Preuve.* — Formellement, la première égalité est une conséquence immédiate du lemme 3 et de la condition (5.1) écrite pour  $\mu^*$ . En effet,

$$(\mu^*, \mu) = \langle \mu^*, U^\mu \rangle = \langle \mu^*, q \rangle = \rho \langle \mu^*, \text{Re } \varphi_n \rangle = \rho.$$

La démonstration précise est plutôt délicate. Posons

$$H(r, t) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \mu^*, \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(t-\theta)} \right\rangle.$$

Pour  $\nu \in \mathcal{G}_\Lambda$  on a

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \langle H(r, t), \nu \rangle &= \langle H(r, t), U^\nu \rangle \\ &= \sum_n r^{2n} |\lambda_n \bar{\nu}_n| \mu_n^* \\ &\rightarrow (\mu^*, \nu) \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Un ensemble de  $\Lambda$ -capacité nulle est nécessairement de mesure de Lebesgue nulle (7). Ceci entraîne que  $U^\mu = q$  pour les besoins de l'intégration au sens de Lebesgue.

De (3.3) on obtient

$$(5.4) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int \operatorname{Re} \varphi_n(\theta) H(r, \theta) d\theta = \langle \mu^*, \operatorname{Re} \varphi_n \rangle = 1.$$

Vu la décomposition,

$$\int U^\mu(\theta) H(r, \theta) d\theta = \rho \int \operatorname{Re} \varphi_n(\theta) H(r, \theta) d\theta + \int [U^\mu(\theta) - q(\theta)] H(r, \theta) d\theta,$$

et (5.3), (5.4), le lemme 3 est une conséquence de

$$(5.5) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\mathbb{C}^E} [U^\mu(\theta) - q(\theta)] H(r, \theta) d\theta = 0.$$

Soit  $(\alpha, \beta)$  un intervalle contigu de  $E$  et soit  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la condition  $n\lambda_n \rightarrow \infty$  on obtient l'évaluation

$$(5.6) \quad \begin{aligned} |H(r, \theta)| &= \left| \sum r^{2n} |\mu_n^*| e^{in\theta} \right| \\ &\leq \sqrt{\sum \frac{r^{2n}}{\lambda_n}} \sqrt{\sum \lambda_n |\mu_n^*|^2} \\ &< \frac{\varepsilon}{1-r} \quad \text{pour } r_0 \leq r < 1, \end{aligned}$$

$\theta = \alpha$  ou  $\theta = \beta$ ,  $r_0$  étant choisi suffisamment voisin à 1. Désignons par  $B$  la région rectangulaire dont le bord consiste en l'arc  $(\alpha, \beta)$ , un arc concentrique de rayon  $r_0$  et deux segments joignant les bouts de ces deux arcs. Désignons par  $\omega(z)$  la mesure harmonique par rapport à  $B$  de la partie du bord de  $B$  complémentaire de  $(\alpha, \beta)$  évaluée en  $z \in B$ . Alors, puisque le support de  $\mu^*$  est contenu dans  $E$ , nous avons

$$\lim_{r \rightarrow 1} H(r, \theta) = 0 \quad \text{pour } \alpha < \theta < \beta.$$

---

(7) Si la mesure de Lebesgue d'un ensemble  $A$  est positive, alors la mesure définie par la restriction de la mesure de Lebesgue à  $A$  est de  $\Lambda$ -énergie finie.

Ceci entraîne, d'après (5.6), l'inégalité

$$|H(r, \theta)| \leq \varepsilon \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\alpha)} + \varepsilon \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\beta)} + M\omega(re^{i\theta}),$$

pour  $re^{i\theta}$  sur le bord de B. Ici  $M = M_\varepsilon$  est une constante indépendante de  $re^{i\theta}$ . Donc cette inégalité reste valable partout dans B, et après intégration on obtient

$$(5.7) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_\alpha^\beta |H(r, \theta)| d\theta \leq \pi\varepsilon,$$

puisque la mesure harmonique  $\omega(re^{i\theta})$  tend, en restant bornée, vers zéro lorsque  $r \rightarrow 1$ . Dans la preuve du lemme 2 nous avons établi que  $U^\mu \leq q$  partout; vu l'hypothèse (1.2) de semi-continuité inférieure,  $U^\mu$  est borné par-dessous, donc borné tout court. Puisque  $\varepsilon$  est arbitraire dans (5.7), nous avons ainsi démontré (5.5) dans le cas où  $\bigcup E$  est une réunion finie d'intervalles. Dans ce cas, d'après la propriété extrême de  $\mu^*$ , on a aussi

$$\|\mu - \mu^*\|^2 = (\mu, \mu - \mu^*) = \rho - (\mu, \mu^*) = 0,$$

c'est-à-dire,  $\mu = \mu^*$ .

Dans le cas général, E est limite d'une suite décroissante  $E_N$ ,  $E_N$  étant une réunion finie d'intervalles. Soit  $\mu_N = \mu_N^*$  la solution des problèmes extrémaux associés à  $E_N$ ,  $\rho_N = \|\mu_N\|^2$ , etc. Pour  $N < M$ , on a

$$2\|\mu_N\|^2 + 2\|\mu_M\|^2 - \|\mu_N - \mu_M\|^2 = \|\mu_N + \mu_M\|^2 \geq 4\rho_N,$$

d'où il vient

$$\|\mu_N - \mu_M\|^2 \leq 2(\rho_M - \rho_N).$$

La convergence de  $\rho_N$  entraîne donc l'existence d'un élément  $\mu \in \mathcal{G}_\Lambda$  tel que

$$(5.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\mu_N - \mu\| = 0.$$

D'après le lemme 1,  $\mu$  est une mesure positive portée par  $E = \bigcap E_N$ . De (5.8) il s'ensuit que

$$\rho_N = \|\mu_N\|^2 \rightarrow \|\mu\|^2 = \rho.$$

Pour le problème extrémal plus large associé avec E, on a  $\rho^* \geq \rho_N^*$ , donc

$$\rho^* \geq \lim \rho_N^* = \lim \rho_N = \|\mu\|^2 \geq \rho^*,$$

puisque  $\rho_N^* = \rho_N$  d'après le résultat déjà établi. Donc  $\rho = \rho^*$  et  $\mu = \mu^*$  dans le cas général. Ainsi la preuve du lemme 3 est achevée.

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Désignons par  $\mu_1, \mu_2, \dots$  la suite des mesures de Tchebichef, solutions des problèmes  $(P_1), (P_2), \dots$ ,

respectivement. Pour tout indice  $n$ , la mesure  $\mu_n$  est orthogonale dans  $\mathcal{G}_\Lambda$  à chaque élément  $m \in \mathcal{G}_\Lambda$  porté par  $E$  pour lequel la forme linéaire  $L_n(m) = \langle m, \operatorname{Re} \varphi_n \rangle$  s'évanouit. En effet, considérons  $\mu_n + z.m$ , où  $z$  est un paramètre complexe. Alors

$$\begin{aligned} \|\mu_n + z.m\|^2 &= (\mu_n, \mu_n) + z(\mu_n, m) + \overline{z}(\mu_n, m) + |z|^2(m, m) \\ &\geq (\mu_n, \mu_n). \end{aligned}$$

C'est à ce point qu'on utilise l'identité des solutions de  $(P_n)$  et  $(P'_n)$ . Prenant  $z$  réel on trouve  $\operatorname{Re}(\mu_n, m) = 0$ , tandis que pour  $z$  imaginaire pure il résulte  $\operatorname{Im}(\mu_n, m) = 0$ , donc  $(\mu_n, m) = 0$ .

Considérons maintenant

$$m - L_n(m)\mu_n.$$

Puisque  $L_n(\mu_n) = \langle \mu_n, \operatorname{Re} \varphi_n \rangle = 1$ , on a, d'après ce qu'on vient de démontrer,

$$(3.9) \quad (m, \mu_n) = L_n(m) \|\mu_n\|^2.$$

Désignons par  $\nu_n$  la mesure de Tchebichef pour le problème défini par la condition  $\langle \nu_n, \operatorname{Im} \varphi_n \rangle = 1$  au lieu de  $\langle \mu_n, \operatorname{Re} \varphi_n \rangle = 1$ . Posons  $M_n(m) = \langle m, \operatorname{Im} \varphi_n \rangle$ . Il s'ensuit de (5.9) et l'égalité analogue pour  $\nu_n$  que

$$L_n(m) + iM_n(m) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

pour chaque élément  $m$  porté par  $E$  qui est orthogonal à toutes les mesures de Tchebichef  $\mu_n, \nu_n (n = 0, 1, \dots)$ . Autrement dit,

$$\langle m, \varphi_n \rangle = 0 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

pour un tel élément. Ceci entraîne que tous les coefficients de Fourier de  $m$  sont nuls, donc  $m = 0$ .

C. Q. F. D.

Remarquons que le raisonnement de cette section 6 ne dépend que des propriétés générales des espaces hilbertiens.

**DÉFINITION.** — *Un noyau  $\Lambda$  satisfait au principe du majorant harmonique si pour toute fonction harmonique  $h$  et pour toute mesure  $\mu$  positive de  $\Lambda$ -énergie finie on a  $U^\mu \leq h$  partout dès qu'on a  $U^\mu \leq h$  sur le support de  $\mu$ .*

Dans la démonstration du théorème 1 on a utilisé la condition (1.3) de sous-harmonicité seulement du fait que les noyaux dépendant de la distance de l'origine et sous-harmoniques en dehors de l'origine satisfont au principe du majorant harmonique. Donc on peut énoncer le corollaire :

**COROLLAIRE.** — *La suite des mesures de Tchebichef appartenant à  $\Lambda$ ,  $E$  est totale dans l'espace de distribution  $\mathcal{G}_{\Lambda E}$  pour tout compact  $E$  sur  $K$*

de  $\Lambda$ -capacité positive et pour tout noyau  $\Lambda$  satisfaisant aux conditions (1.1), (1.2), (1.4) et, en outre, au principe du majorant harmonique.

7. SPECTRES PORTÉS PAR UN DISQUE FERMÉ. — Le but de cette section est d'étudier le cas où les spectres se trouvent dans le disque  $U : |z| \leq 1$ . Nous nous restreignons à ce cas bien qu'on pourrait, par un changement de variables, obtenir des résultats semblables pour un domaine simplement connexe, borné par une courbe analytique.

On considère une classe de noyaux  $\Lambda(r_{PQ})$  satisfaisant aux conditions (1.1), (1.2), (1.4), en outre assujettis aux restrictions suivantes :

(7.1) La fonction  $\Lambda(P) = \Lambda(r_{OP})$  est sous-harmonique avec une représentation de F. Riesz dans  $|P| < R$  pour un  $R > 2$ ,

$$\Lambda(P) = m \star L(P) + H(P),$$

où la mesure  $m$  charge l'origine,  $L = \log \frac{1}{r}$ ,  $H =$  fonction harmonique dans  $|P| < R$ .

(7.2) La transformée de Fourier,  $\Omega = \mathcal{F}\Lambda$ , est strictement positive. Nommons  $\mathcal{N}$  cette classe de noyaux. Pour un noyau  $\Lambda \in \mathcal{N}$  on a l'intégrale d'énergie

$$\|\mu\|_{\Lambda}^2 = \iint \Lambda(|z - z'|) d\mu(z) \overline{d\mu(z')} = \iint |\mathcal{F}\mu|^2 \Omega,$$

finie pour certaines mesures complexes  $\mu$ . On introduit l'espace hilbertien  $\mathcal{G}_{\Lambda}$  formé par les distributions  $T$  dans le plan telles que la transformée de Fourier  $\mathcal{F}T$  soit une fonction mesurable telle que

$$(7.3) \quad \|T\|_{\Lambda}^2 = \iint |\mathcal{F}T|^2 \Omega < \infty,$$

avec le produit scalaire habituel. Nous allons montrer que toute distribution de  $\mathcal{G}_{\Lambda U}$  (portée par  $U$  avec  $\|T\|_{\Lambda} < \infty$ ) appartient à l'enveloppe fermée dans la norme (7.3), engendrée par les mesures appartenant à  $\mathcal{G}_{\Lambda U}$ , et même plus.

Pour une suite de fonctions  $\varphi_n (n = 1, \dots)$  harmoniques dans un voisinage de  $U$  nous posons les conditions extrémales

$$(P_n) \quad \inf \|\mu\|_{\Lambda},$$

le infimum étant relatif aux mesures positives  $\mu \in \mathcal{G}_{\Lambda U}$  telles que  $\operatorname{Re}\langle \mu, \varphi_n \rangle = 1$

$$(P_n^*) \quad \inf \|T\|_{\Lambda},$$

le infimum étant cette fois relatif aux distributions  $T \in \mathcal{G}_{\Lambda U}$  telles que  $\operatorname{Re}\langle T, \varphi_n \rangle = 1$ . Nous allons montrer que les éléments extrémisants

pour  $(P_n)$  et  $(P_n^*)$  coïncident; un tel élément, qui est une mesure positive, est appelé encore une mesure de Tchebichef.

THÉORÈME 2. — *Pour tout noyau  $\Lambda \in \mathcal{N}$  il existe une suite de mesures de Tchebichef qui est totale dans  $\mathcal{G}_{\Lambda U}$  et telle que chaque mesure est portée par le bord de U.*

Il est loisible de supposer les distributions réelles.

Le pas essentiel vers ce résultat est le suivant :

LEMME. — *Il existe des éléments uniques  $\mu_n, T_n$  réalisant les conditions extrémales  $(P_n), (P_n^*)$ , respectivement. Les supports de  $\mu_n$  et de  $T_n$  sont situés sur le bord de U.*

*Preuve.* — L'existence et l'unicité des éléments extrémisants  $\mu_n, T_n$  pour  $(P_n), (P_n^*)$  découlent du fait que les ensembles concurrents sont convexes et fermés, et de la convexité uniforme des espaces hilbertiens. Il reste donc à localiser les supports de  $\mu_n$  et de  $T_n$  sur  $|z| = 1$ .

Il existe une solution  $s_n \in \mathcal{G}_{\Lambda}$  de l'équation

$$\varphi_n = \Lambda \star s_n.$$

En effet, les valeurs de la fonction  $\varphi_n$  en dehors d'un voisinage de U ne jouent aucun rôle dans notre problème; on peut les modifier, le cas échéant, de manière que

$$\iint \frac{|\mathcal{F}\varphi_n|^2}{\Omega} < \infty.$$

La transformation de Fourier donne alors

$$\Omega \cdot \mathcal{F}s_n = \mathcal{F}\varphi_n,$$

donc

$$\iint |\mathcal{F}s_n|^2 \Omega < \infty,$$

c'est-à-dire,  $s_n \in \mathcal{G}_{\Lambda}$ .

Vu le fait que  $\text{Re}\langle T_n, \varphi_n \rangle = 1$ , on a

$$\|T_n - s_n\|^2 = \|T_n\|^2 + \|s_n\|^2 - 2.$$

On voit donc que  $T_n$  est l'élément appartenant à l'ensemble convexe et fermé des distributions de  $\mathcal{G}_{\Lambda}$  portées par U telles que  $\text{Re}\langle T, \varphi_n \rangle = 1$ , qui est le plus proche à  $s_n$ .

Désignons par  $t_n$  la projection de  $s_n$  dans le sous-espace  $\mathcal{G}_{\Lambda U}$ . Alors  $t_n$  satisfait à

$$(7.5) \quad (s_n, S)_\Lambda = (t_n, S)_\Lambda \quad (S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}),$$

Puisque

$$(s_n, S)_\Lambda = \overline{\langle S, \Lambda \star s_n \rangle} = \overline{\langle S, \varphi_n \rangle},$$

(7.5) peut s'écrire

$$(7.6) \quad (t_n, S)_\Lambda = \overline{\langle S, \varphi_n \rangle} \quad (S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}).$$

D'autre part, d'après la propriété extrémale de  $T_n$ , on a pour tout élément  $T$  de  $\mathcal{G}_{\Lambda U}$  tel que  $\operatorname{Re}\langle T, \varphi_n \rangle = 1$  et pour tout  $h$  réel,

$$(7.7) \quad \|(1-h)T_n + hT\|_\Lambda \geq \|T_n\|_\Lambda.$$

De (7.7) il vient

$$\operatorname{Re}(T_n, T)_\Lambda = \|T_n\|_\Lambda^2, \quad \text{pourvu que } \operatorname{Re}\langle T, \varphi_n \rangle = 1, \quad T \in \mathcal{G}_{\Lambda U}.$$

Autrement dit,

$$(7.8) \quad \operatorname{Re}(T_n, S)_\Lambda = \|T_n\|_\Lambda^2 \operatorname{Re}\langle S, \varphi_n \rangle,$$

d'abord pour  $S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}$ ,  $\operatorname{Re}\langle S, \varphi_n \rangle \neq 0$ , et après une limite pour tout  $S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}$ . En remplaçant  $S$  par  $iS$ , on obtient

$$(7.9) \quad \operatorname{Im}(T_n, S)_\Lambda = -\|T_n\|_\Lambda^2 \operatorname{Im}\langle S, \varphi_n \rangle \quad (S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}).$$

La somme de (7.8) et (7.9) s'écrit

$$\begin{aligned} (T_n, S)_\Lambda &= \|T_n\|_\Lambda^2 \overline{\langle S, \varphi_n \rangle} \\ &= \|T_n\|_\Lambda^2 (t_n, S) \quad (S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}). \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$(7.10) \quad T_n = \|T_n\|_\Lambda^2 t_n,$$

puisque  $T_n - \|T_n\|_\Lambda^2 t_n \in \mathcal{G}_{\Lambda U}$ .

En utilisant (7.10) et (7.5) on obtient

$$\left(s_n - \frac{T_n}{\|T_n\|^2}, S\right)_\Lambda = 0 \quad (S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}),$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} \langle S, \varphi_n \rangle &= \frac{1}{\|T_n\|^2} \overline{(T_n, S)_\Lambda} \\ &= \frac{1}{\|T_n\|^2} \langle S, \Lambda \star T_n \rangle \quad (S \in \mathcal{G}_{\Lambda U}). \end{aligned}$$

Puisque  $S$  est arbitraire dans  $\mathcal{G}_{\Lambda U}$ , on en déduit que

$$(7.11) \quad \Lambda \star T_n = \text{Cte} \cdot \varphi_n$$

à l'intérieur  $U^0$  de  $U$ .

Le support de  $T_n$  étant situé dans  $U$ , donc compact, on a d'après (7.1),

$$\Lambda \star T_n = (m \star T_n) \star L + H \star T_n.$$

Comme  $H \star T_n$  est encore harmonique dans un voisinage de  $U$ , on déduit de (7.11) que  $m \star T_n \star L$  est harmonique dans  $U^0$ , ce qui est possible seulement si (formule de Poisson)

$$(7.12) \quad \text{support de } m \star T_n \subset \bigcup U^0.$$

Il résulte de (7.12) et de l'hypothèse que  $m$  charge l'origine, d'après le théorème de Titchmarsh concernant le produit de composition, que

$$\text{support de } T_n \subset \bigcup U^0.$$

Alors le fait que le support de  $T_n \subset U$  permet de conclure que

$$\text{support de } T_n \subset \text{bord de } U.$$

De la même manière, on trouve

$$\text{support de } \mu_n \subset \text{bord de } U.$$

C. Q. F. D.

Le lemme que nous venons de démontrer nous permet d'ajouter aux conditions définissant  $(P_n)$ ,  $(P_n^*)$  les restrictions

$$\text{support } \mu \subset \text{bord } U, \quad \text{support } T \subset \text{bord } U,$$

respectivement. On sait alors, d'après la preuve du théorème 1, que  $T_n$  coïncide avec  $\mu_n$ . On peut choisir les  $\varphi_n$  comme auparavant pour conclure.

Remarquons que les noyaux  $r^{-\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ , de Marcel Riesz [14] ne satisfont point aux conditions imposées dans cette section; or, M. Deny avait indiqué que la conclusion du lemme concernant le support des mesures extrémales est fautive pour de tels noyaux.



## CHAPITRE II.

1. ÉNONCÉ D'UN THÉORÈME. — Soit  $\Omega(x) > 0$  sur  $-\infty < x < \infty$ ,  $\int \Omega < \infty$ . Désignons par  $\mathcal{G}$  l'espace hilbertien des distributions T portées par la droite telles que la transformée de Fourier  $\mathcal{F}T$  soit une fonction telle que

$$(1.1) \quad \|T\|^2 = \int |\mathcal{F}T|^2 \Omega < \infty.$$

Soit E un compact sur la droite tel que l'approximation spectrale dans  $\mathcal{G}$  soit, en général, impossible. La question qui nous intéresse est d'évaluer en quelque sorte la grandeur de l'enveloppe fortement fermée dans  $\mathcal{G}$  de l'ensemble  $\mathcal{M}_E$  des mesures portées par E. Évidemment, cette enveloppe ne dépend que de la structure de l'ensemble E et du comportement du poids  $\Omega$  à l'infini.

Pour  $\gamma$  réel, désignons par  $\mathcal{G}_\gamma$  l'ensemble des distributions T telles que

$$\int |\mathcal{F}T|^2 (1+|x|)^\gamma \Omega(x) dx < \infty,$$

et par  $\overline{\mathcal{G}_\gamma}$  l'enveloppe fermée de  $\mathcal{G}_\gamma$  dans  $\mathcal{G}$ .

THÉORÈME 3. — *Supposons que le poids  $\Omega(x)$  et l'ensemble E satisfassent aux conditions suivantes :*

(1.1) *Pour un  $b > 0$ , pour  $\alpha, \beta$  tels que  $2 \geq \beta > \alpha > 1$ , on a*

$$\int_{nb-\frac{b}{2}}^{nb+\frac{b}{2}} \Omega(x) dx \geq \mathcal{O}(|n|^{-\alpha-\beta}), |n| \rightarrow \infty;$$

$$(1.2) \quad \int |x|^\beta \Omega(x) dx < \infty;$$

(1.3) *En désignant par  $l_k$  la longueur des intervalles complémentaires de E (excluant les deux demi-droites), on a*

$$\sum l_k^{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \infty;$$

(1.4) *La mesure de Lebesgue de E est nulle et le diamètre de E est au plus égal à  $2\pi/b$  (\*).*

---

(\*) Il n'est pas évident que les distributions de  $\mathcal{G}$  soient localisables dans  $\mathcal{G}$ . Si l'on pouvait démontrer cette localisabilité, l'hypothèse concernant le diamètre de E serait superflue.

Alors si  $\gamma \geq \beta$ , toute distribution de  $\overline{\mathcal{G}}_\gamma$  portée par E est adhérente dans  $\mathcal{G}$  à l'ensemble  $\mathcal{M}_E$  des mesures portées par E <sup>(9)</sup>.

Remarquons qu'un poids qui est assez petit à l'infini pour vérifier la condition (1.2) est empêché d'être très petit à l'infini par la condition (1.1). Peut-être qu'une restriction de cette sorte reflète la nature des choses. Or, on ne peut pas prendre  $\gamma = 0$  et supprimer (1.1). Car choisissons  $E = \{0\}$ ,  $T = \delta' =$  dérivée de la mesure de Dirac en 0,  $\beta = 2$ . Alors  $\mathcal{F}\delta'$  appartient à l'espace  $L^2(\Omega dx)$ , mais  $\mathcal{F}\delta'$  n'est pas limite dans  $L^2(\Omega dx)$  des transformées de Fourier des mesures portées par E puisque la meilleure approximation de  $\delta'$  par de telles mesures n'est autre que

$$\inf_c \int |x - c|^2 \Omega(x) dx > 0.$$

2. L'ESPACE FONDAMENTAL  $\mathcal{L}$ . — On va utiliser un espace, noté  $\mathcal{L}$ , qui consiste en toutes les fonctions  $\lambda(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , telles que l'application

$$(2.1) \quad T \rightarrow \int \overline{\mathcal{F}T(x)} \mathcal{F}\lambda(x) dx$$

soit une forme linéaire continue sur  $\mathcal{G}$ . La condition nécessaire et suffisante pour cela est

$$\int \frac{|\mathcal{F}\lambda(x)|^2}{\Omega(x)} dx < \infty,$$

c'est-à-dire,  $\mathcal{L}$  est l'espace qui est maximal par rapport à la propriété que la transformation de Fourier applique  $\mathcal{L}$  dans  $L^2\left(\frac{dx}{\Omega}\right)$ . On a donc

$$\left( \int |\mathcal{F}\lambda(x)| dx \right)^2 \leq \int \frac{|\mathcal{F}\lambda|^2}{\Omega} \int \Omega,$$

de sorte que toute fonction  $\lambda \in \mathcal{L}$  est continue et nulle à l'infini. Pour  $T \in \mathcal{G}$ ,  $\lambda \in \mathcal{L}$ , on écrit (2.1) sous la forme

$$(2.2) \quad 2\pi \langle T, \lambda \rangle = \int \overline{\mathcal{F}T} \mathcal{F}\lambda.$$

Rappelons que le produit de composition d'une distribution T avec une fonction  $\psi$  peut être considéré comme l'opération adjointe au produit de composition avec  $\psi$  dans l'espace fondamental; par abus, on écrit

$$(2.3) \quad \langle \psi \star T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \star \varphi \rangle.$$

---

<sup>(9)</sup> Ce résultat était incorrectement formulé dans la Note [4]; l'énoncé de la page 5268 doit être remplacé par le théorème 3 du présent travail.

Bien entendu, il faut que l'espace fondamental soit invariant par rapport à l'opération  $\psi \star$  <sup>(10)</sup>.

3. TRANSLATION PAR L'UNITÉ IMAGINAIRE. — La norme d'un élément  $T \in \mathcal{G}$  est évidemment la racine carrée de

$$(3.1) \quad \int |\mathcal{F} T(x) \operatorname{ch} x|^2 \frac{\Omega(x)}{\operatorname{ch}^2 x} dx,$$

où  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . On va opérer avec les fonctions  $\mathcal{F} T \cdot \operatorname{ch}$ ,  $\Omega/\operatorname{ch}^2$  au lieu de  $\mathcal{F} T$ ,  $\Omega$ , respectivement. En désignant par  $T_i$ ,  $T_{-i}$  les translatées verticales de  $T$  de  $i$ ,  $-i$ , on définit la transformée de Fourier de

$$(3.2) \quad T' = \frac{T_i + T_{-i}}{2} \quad (T \in \mathcal{G}),$$

par la formule

$$(3.3) \quad \mathcal{F} T' = \mathcal{F} T \cdot \operatorname{ch}.$$

Dans le cas où  $T$  est une fonction sommable sur la droite, pour obtenir  $\mathcal{F} T'$  en accord avec (3.3), on intègre le produit  $T'(\nu) e^{i\nu}$  sur les deux horizontales  $\operatorname{Im} \nu = \pm 1$ , toutes les deux orientées vers la droite.

Notons  $\mathcal{G}'$  l'ensemble des distributions  $T'$  de la forme (3.2). Les éléments de  $\mathcal{G}'$  opèrent dans un espace fondamental  $\mathcal{L}'$  lié à l'espace  $\mathcal{L}$  de la manière suivante. Les éléments de  $\mathcal{L}'$  sont les fonctions  $\lambda'$  définies par leurs transformées de Fourier d'après la relation duale à (3.3)

$$(3.4) \quad \mathcal{F} \lambda' \cdot \operatorname{ch} = \mathcal{F} \lambda \quad \text{pour un } \lambda \in \mathcal{L}.$$

Une telle fonction  $\lambda'$  est nécessairement holomorphe dans la bande  $|y| < 1$  du plan de la variable  $x + iy$ , et continue dans  $|y| \leq 1$ .

<sup>(10)</sup> C'est le cas si le poids est borné,  $\Omega \leq \text{Cte}$ . Nous ne faisons pas cette hypothèse. Supposons seulement  $\omega \star \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{F} \omega = \Omega$ . Alors chaque  $\lambda \in \mathcal{L}$  est de la forme  $\lambda = \omega \star Q$  pour un  $Q \in \mathcal{G}$ ; réciproquement, chaque élément  $\omega \star Q$ , avec  $Q \in \mathcal{G}$  est une fonction appartenant à l'espace  $\mathcal{L}$ . En effet, soit  $Q \in \mathcal{G}$ . Puisque  $\mathcal{F}(\omega \star Q) = \Omega \mathcal{F} Q$ , on a

$$\int \frac{|\mathcal{F}(\omega \star Q)|^2}{\Omega} = \|Q\|^2 < \infty.$$

D'autre part, pour  $\lambda \in \mathcal{L}$ , il existe  $Q \in \mathcal{G}$  tel que

$$\langle T, \lambda \rangle = (T, Q)_{\mathcal{G}} = \int \overline{\mathcal{F} T} \mathcal{F} Q \Omega,$$

$T$  étant arbitraire dans  $\mathcal{G}$ . Prenons alors  $T = \delta_{\xi}$ ,  $-\infty < \xi < \infty$ , de sorte que

$$\lambda(\xi) = \int e^{-i\xi x} \mathcal{F} Q(x) \Omega(x) dx = \int e^{-i\xi x} \mathcal{F}(\omega \star Q)(x) dx$$

ce qui permet de conclure.

De (3.4), on déduit

$$(3.5) \quad \frac{1}{2} (\lambda'(x+i) + \lambda'(x-i)) = \lambda(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{ch } x \mathcal{F} \lambda'(x) &= \frac{1}{2} \int e^{ix(t-i)} \lambda'(t) dt + \frac{1}{2} \int e^{ix(t+i)} \lambda'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{Im } s = -1} e^{ixs} \lambda'(s+i) ds + \frac{1}{2} \int_{\text{Im } s = 1} e^{ixs} \lambda'(s-i) ds. \end{aligned}$$

En repoussant à l'axe réel les lignes  $\text{Im } s = \pm 1$  sur lesquelles sont prises les deux dernières intégrales, il vient

$$\text{ch } x \mathcal{F} \lambda'(x) = \int e^{ixt} \frac{\lambda'(t+i) + \lambda'(t-i)}{2} dt,$$

ce qui entraîne (3.5), vu (3.4). Il reste à justifier l'emploi du théorème de Cauchy que nous venons de faire. Il suffit de démontrer pour chaque  $x$  réel que

$$(3.6) \quad J_N \equiv \int_{\substack{0 \leq \text{Im } s \leq 1 \\ \text{Re } s = N}} e^{ixs} \lambda'(s) ds = o(1), \quad |N| \rightarrow \infty.$$

Fixons alors  $x$  et insérons dans l'intégrale

$$(3.7) \quad J_N = i \int_0^1 e^{ix(N+iy)} \lambda'(N+iy) dy$$

l'expression

$$\lambda'(N+iy) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(N+iy)u} \mathcal{F} \lambda'(u) du,$$

de sorte que (3.7) s'écrit

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{i}{2\pi} \int \mathcal{F} \lambda'(u) e^{iN(x-u)} du \int_0^1 e^{(u-x)y} dy \\ &= \frac{i e^{iNx}}{2\pi} \int \mathcal{F} \lambda(u) e^{-iNu} \left\{ \frac{e^{(u-x)} - 1}{(u-x) \text{ch } u} \right\} du. \end{aligned}$$

La fonction entre crochets étant bornée en  $u$ ,  $-\infty < u < \infty$ , il s'ensuit du lemme de Riemann-Lebesgue que  $J_N$  tend bien vers zéro lorsque  $|N| \rightarrow \infty$ , puisque  $\mathcal{F} \lambda \in L(-\infty, \infty)$ .

LEMME 1. — Quelles que soient  $T \in \mathcal{G}$  et  $\lambda \in \mathcal{L}$ , on a

$$2\pi \langle T, \lambda \rangle = 2\pi \langle T', \lambda' \rangle = \langle \mathcal{F} T', \mathcal{F} \lambda' \rangle.$$

Preuve. — En vu de la formule (3.5) on a

$$\begin{aligned} \langle T, \lambda \rangle &= \left\langle T, \frac{1}{2} (\lambda'_i + \lambda'_{-i}) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (T_i + T_{-i}), \lambda' \right\rangle \\ &= \langle T', \lambda' \rangle. \end{aligned}$$

La seconde égalité du lemme résulte du fait que

$$\begin{aligned} 2\pi \langle T, \lambda \rangle &= \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}\lambda \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}T \cdot \text{ch}, \mathcal{F}\lambda \cdot \text{ch}^{-1} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}T', \mathcal{F}\lambda' \rangle. \end{aligned}$$

Le lemme suivant nous sera utile.

LEMME 2. — Si pour un  $T' \in \mathcal{G}'$ , on a

$$\langle T', \lambda' \rangle = 0$$

pour tout  $\lambda' \in \mathcal{L}'$ , alors  $T' = 0$ .

*Preuve.* — L'hypothèse équivaut à  $\langle T, \lambda \rangle = 0$  pour tout  $\lambda \in \mathcal{L}$ , ou encore à

$$\langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}\lambda \rangle = \int \overline{\mathcal{F}T(x)} \mathcal{F}\lambda(x) dx = 0$$

pour tout  $\lambda \in \mathcal{L}$  (lemme 1). Il est loisible de choisir  $\mathcal{F}\lambda(x) = \Omega(x) e^{itx}$ , donc

$$\int \overline{\mathcal{F}T(x)} \Omega(x) e^{itx} dx = 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

d'où  $\overline{\mathcal{F}T(x)} \Omega(x) = 0$  presque partout. La fonction  $\Omega$  étant positive, il vient  $\mathcal{F}T = 0$ ,  $T = 0$ ,  $T' = 0$ .

4. ÉVALUATION D'UN PRODUIT DE COMPOSITION. — Posons

$$\begin{aligned} \Xi(x + iy) &= \mathcal{F}^{-1}(\Omega \cdot \text{ch}^{-2})(x + iy) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(x+iy)t} \frac{\Omega(t)}{\text{ch}^2 t} dt. \end{aligned}$$

La fonction  $\Xi$  est holomorphe dans la bande  $|y| < 2$  et continue dans  $|y| \leq 2$ . On va étudier le produit de composition  $\Xi \star T'$  [voir (2.3)] d'un élément  $T' \in \mathcal{G}'$  avec  $\Xi$ . L'égalité

$$\Xi \star \lambda'(x) = \int \lambda'(x - \xi) \Xi(\xi) d\xi \quad (-\infty < x < \infty; \lambda' \in \mathcal{L}')$$

entraîne immédiatement

$$\frac{1}{2} [(\Xi \star \lambda')_{i+} + (\Xi \star \lambda')_{-i}] = \Xi \star \frac{1}{2} (\lambda'_i + \lambda'_{-i}).$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned} \langle \Xi \star T', \lambda' \rangle &= \langle T', \Xi \star \lambda' \rangle \\ &= \left\langle T, \frac{1}{2} [(\Xi \star \lambda')_{i+} + (\Xi \star \lambda')_{-i}] \right\rangle \\ &= \left\langle T, \Xi \star \frac{1}{2} (\lambda'_i + \lambda'_{-i}) \right\rangle \\ &= \left\langle \Xi \star T, \frac{1}{2} (\lambda'_i + \lambda'_{-i}) \right\rangle \\ &= \langle (\Xi \star T)', \lambda' \rangle \end{aligned}$$

pour tout  $\lambda' \in \mathcal{L}'$ . D'après le lemme 2, ceci permet de conclure

$$(4.1) \quad \Xi \star T' = (\Xi \star T)';$$

soulignons que les glyphs ' dans (4.1) sont tous les deux au sens de  $\mathcal{G}'$ . Il s'ensuit de notre définition (3.3) de  $\mathcal{F}$  que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Xi \star T') &= \mathcal{F}(\Xi \star T)' \\ &= \mathcal{F}(\Xi \star T) \cdot \text{ch} \\ &= \frac{\mathcal{F}T \Omega}{\text{ch}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité implique que  $\Xi \star T'$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}'$ , car

$$\int \frac{|\mathcal{F}T \Omega|^2}{\Omega} = \|T\|^2 < \infty.$$

En tenant compte du lemme 1, on obtient

$$(4.2) \quad \begin{aligned} 2\pi \langle T', \Xi \star T' \rangle &= \langle \mathcal{F}T', \mathcal{F}(\Xi \star T') \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}T \cdot \text{ch}, \frac{\mathcal{F}T \Omega}{\text{ch}} \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}T \Omega \rangle \\ &= \|T\|^2 = \|T'\|^2. \end{aligned}$$

LEMME 3. — Pour tout  $T' \in \mathcal{G}'$  ( $T \in \mathcal{G}$ ), on a  $\Xi \star T' \in \text{Lip} \frac{\beta}{2}$  sur la frontière  $|y| = 1$  de la bande  $|y| \leq 1$  ( $\omega \star T \in \text{Lip} \frac{\beta}{2}$  sur l'axe réel,  $\mathcal{F}\omega = \Omega$ ).

*Preuve.* — Rappelons que  $\omega \star T(x) = \langle T, \omega_x \rangle$ ,  $\omega_x$  étant le translatée de  $\omega$  :  $\omega_x(t) = \omega(t - x)$ . On obtient sans peine les évaluations

$$\begin{aligned} \frac{|\omega \star T(x) - \omega \star T(y)|^2}{|x - y|^\beta} &= \left| \left\langle T, \frac{\omega_x - \omega_y}{|x - y|^{\frac{\beta}{2}}} \right\rangle \right|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \int \frac{1}{\Omega} \frac{|\mathcal{F}\omega_x - \mathcal{F}\omega_y|^2}{|x - y|^\beta} \\ &\leq \|T\|^2 \int \sup \frac{|e^{ixt} - e^{iyt}|^2}{|x - y|^\beta} \Omega(t) dt \\ &\leq \text{Cte} \int |t|^\beta \Omega(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui nous donne la constante de Lipschitz cherchée. Remarquons que ce raisonnement tombe en défaut si  $\beta$  est supérieur à 2. Il reste à déduire

la régularité énoncée de la fonction  $\Xi \star T'$ . Pour  $t$  réel, on a

$$\begin{aligned} \Xi \star T'(t+i) &= (\Xi \star T)'(t+i) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(t+i)x} \mathfrak{F}(\Xi \star T) \cdot \text{ch } dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(t+i)x} \frac{\Omega \mathfrak{F} T}{\text{ch}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \mathfrak{F} T_0 \Omega dx, \quad T_0 \in \mathcal{G} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \mathfrak{F}(\omega \star T_0) dx \\ &= \omega \star T_0(t). \end{aligned}$$

Moyennant le résultat déjà acquis, le lemme se trouve ainsi démontré.

Le produit scalaire

$$(4.3) \quad (S', T')_{\mathcal{G}'} = \langle S', \Xi \star T' \rangle \quad (S', T' \in \mathcal{G}'),$$

définit une structure d'espace hilbertien dans  $\mathcal{G}'$ . On trouve alors [voir (4.2)]

$$(4.4) \quad 2\pi (S', T')_{\mathcal{G}'} = (S, T)_{\mathcal{G}},$$

de sorte que la correspondance  $T \rightarrow T'$  conserve l'orthogonalité.

5. CHANGEMENT DE COORDONNÉES PAR TRANSFORMATION CONFORME. — Étant donnée une distribution  $\nu$  portée par la bande  $|y| \leq 1$ , opérant dans un espace fondamental  $\Phi$ , on associe  $\nu$  à une autre distribution  $\mu = \mu_\nu$  en choisissant une représentation conforme  $f$  du disque unité  $|\varpi| \leq 1$  sur la bande  $|y| \leq 1$  et en posant

$$(5.1) \quad \langle \mu, \varphi \circ f \cdot \Gamma \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle \quad (\varphi \in \Phi),$$

où  $\Gamma$  désigne le déterminant jacobien de  $f$ .

L'indicatrice d'une distribution  $\nu$  est, par définition, la fonction de  $z$ ,

$$h(z) = h_\nu(z) = \left\langle \nu_\zeta, \frac{1}{\zeta - z} \right\rangle,$$

holomorphe en dehors du support de  $\nu$ .

Une propriété capitale de l'indicatrice de  $\nu$  est sa mode de croissance au voisinage du support de  $\nu$ . Supposons que  $\nu$  soit à support compact. Alors de (5.1) on tire facilement la conclusion que la croissance de l'indicatrice  $h_\nu$  au voisinage du support de  $\nu$  est la même que celle de  $h_\mu$  au

voisinage du support de  $\mu$ , pour n'importe quel choix de la représentation conforme  $f$ . En effet, d'après (5.1), on a

$$(5.2) \quad \left\langle \nu_\zeta, \frac{1}{\zeta - z} \right\rangle = \left\langle \mu_s, \frac{\Gamma(s)}{f(s) - f(w)} \right\rangle \quad [\zeta = f(s), z = f(w)] \\ = \left\langle \mu_s, \frac{1}{s - w} \right\rangle + \langle \mu_s, \theta(s; w) \rangle,$$

où

$$\theta(s; w) = \frac{\Gamma(s)}{f(s) - f(w)} - \frac{1}{s - w}.$$

En particulier, pour un voisinage fixe  $V$  du support de  $\mu$  et pour chaque point  $w \in V$ , la fonction  $\theta(s; w)$  est holomorphe en  $s$ ,  $s \in V$ . Ceci entraîne pour tout polynôme  $P(D_s)$  de dérivation par rapport à  $s$

$$\sup_{s, w \in V \times V} |P(D_s) \theta(s; w)| \leq C_{V, P},$$

$C_{V, P}$  étant une borne ne dépendant que de  $V$  et  $P$ . Autrement dit, les fonctions de  $s$ ,  $\theta(s; w)$  ( $w \in V$ ), forment un ensemble borné dans l'espace  $\mathcal{E}$  de Schwartz.  $\mu$  étant à support compact, donc  $\mu \in \mathcal{E}'$ , on a

$$|\langle \mu_s, \theta(s; w) \rangle| \leq Cte,$$

où la constante ne dépend pas de  $w \in V$ . Donc, vu (5.2),  $h_\nu(z)$ , lorsque  $z$  tend vers le support de  $\nu$ , diffère de  $h_\mu(w)$  par une quantité bornée.

En général, la distribution  $\mu$  dépend du choix de la représentation conforme  $f$ , mais si  $\nu = 0$ , on a  $\mu = 0$  pour toute  $f$ .

6. LA CROISSANCE DE L'INDICATRICE D'UNE DISTRIBUTION DE  $\mathcal{G}$ . — Le fait qu'une distribution  $T$  appartient à l'espace  $\mathcal{G}$  entraîne une restriction de la croissance de son indicatrice au voisinage du support de  $T$ . On va déterminer cette croissance en utilisant l'invariance de la croissance établie dans le paragraphe précédent.

Considérons l'application

$$(6.1) \quad z \rightarrow e^{ibz},$$

de la demi-bande  $\left\{ -\frac{\pi}{b} < x \leq \frac{\pi}{b}, y \geq 0 \right\}$  sur le disque unité découpé suivant l'axe négatif. Vu l'hypothèse (1.4) concernant le support de  $T$ , nous pouvons désormais supposer le support de  $T$  contenu dans l'intérieur de  $\left( -\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b} \right)$ . A cause de (5.1), en posant  $\nu = T$ ,  $\mu = S$ ,  $f = (6.1)$ , il vient

$$\langle S, \zeta^{-m} \rangle = ib \langle T, e^{-i(m-1)bx} \rangle \quad (\zeta = e^{ibx}).$$



Par conséquent, en développant l'indicatrice de  $S$  suivant la série de Taylor,

$$\begin{aligned} h_S(w) &= \left\langle S, \frac{1}{\zeta - w} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S, \zeta^{-n} \rangle w^{n-1} \\ &= ib \sum_{n=1}^{\infty} \langle T, e^{ibnx} \rangle w^n. \end{aligned}$$

Puisque la distribution  $T$  est à support compact, la transformée de Fourier de  $T$  est alors une fonction entière. D'après le théorème de structure ([13], t. I, chap. 3), il existe une fonction continue  $\varphi$  à support contenu dans un voisinage arbitraire du support de  $T$  telle que  $T = D^k \varphi$ . On a

$$(6.3) \quad \mathcal{F} T(x) = (-ix)^k \mathcal{F} \varphi(x).$$

Supposons que  $T$  appartienne au sous-ensemble  $\mathcal{G}_\gamma$  de  $\mathcal{G}$ . Alors

$$\begin{aligned} \infty &> \int |\mathcal{F} T(x)|^2 (1 + |x|)^\gamma \Omega(x) dx \\ &\geq C_1 \sum_n |n|^\gamma \int_{(n-\frac{1}{2})^b}^{(n+\frac{1}{2})^b} x^{2k} |\mathcal{F} \varphi(x)|^2 \Omega(x) dx \quad (C_1 > 0). \end{aligned}$$

En tenant compte des deux cas  $|\mathcal{F} T(nb)| \geq 1$  et  $|\mathcal{F} T(nb)| \leq 1$ , et en utilisant le fait que la dérivée de  $\mathcal{F} \varphi$  reste bornée sur l'axe réel (S. Bernstein), on obtient

$$\infty > C_2 \sum_n |n|^\gamma \min\{|\mathcal{F} T(nb)|^2, |\mathcal{F} T(nb)|^4\} \Omega_n \quad (C_2 > 0),$$

où

$$\Omega_n = \int_{(n-\frac{1}{2})^b}^{(n+\frac{1}{2})^b} \Omega(x) dx.$$

Donc

$$|n|^\gamma \min\{|\mathcal{F} T(nb)|^2, |\mathcal{F} T(nb)|^4\} \Omega_n = o(1) \quad (|n| \rightarrow \infty).$$

En vu de l'hypothèse  $\Omega_n \geq \mathcal{O}(|n|^{-\alpha-\beta})$ , on obtient dans le cas  $|\mathcal{F} T(nb)| \geq 1$

$$(6.4) \quad |\mathcal{F} T(nb)| = o\left(|n|^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (|n| \rightarrow \infty).$$

Puisque  $\alpha > 0$ , on a (6.4) sans exception.

De (6.2) et (6.4) on tire l'évaluation suivante de l'indicatrice de  $S$  :

$$(6.5) \quad |h_S(w)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} o\left(|n|^{\frac{\alpha}{2}}\right) |w|^n = \mathcal{O}\left((1 - |w|)^{-1 - \frac{\alpha}{2}}\right).$$

si  $|\varpi| < 1$ . Une déduction semblable nous donne (6.5) pour  $|\varpi| > 1$ . Le principe du maximum entraîne alors

$$(6.6) \quad h_S(\varpi) = \mathcal{O}\left(d(E_0, \varpi)^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

où  $E_0$  désigne le support de  $S$  et  $d(E_0, \varpi)$  la distance de  $\varpi$  à  $E_0$ . L'indicatrice harmonique d'une distribution  $S$  portée par le cercle unité est, par définition, la fonction harmonique

$$(6.7) \quad H(r, \theta) = \left\langle S, \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\cdot)} \right\rangle.$$

Pour  $e^{i\theta}$  en dehors du support de  $S$ , on a

$$(6.8) \quad \lim_{r \rightarrow 1} H(r, \theta) = 0.$$

Vu l'identité,

$$\frac{\zeta}{\zeta-\varpi} - \frac{\zeta}{\zeta-\varpi^*} = \frac{1-|\varpi|^2}{1+|\varpi|^2-2|\varpi|\cos(\arg\zeta-\arg\varpi)},$$

$\varpi^* = \frac{1}{\bar{\varpi}}$ ,  $\zeta = e^{i\arg\zeta}$ , il résulte de (6.6) que

$$(6.9) \quad H(r, \theta) = \mathcal{O}\left(d(E_0, r e^{i\theta})^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. — Il suffit de démontrer le théorème 3 pour les distributions réelles. Ensuite, on peut supposer le poids  $\Omega$  pair; sinon, on opérerait avec le poids

$$\Omega_p(x) = \Omega(x) + \Omega(-x),$$

pour lequel

$$\|T\|_{\Omega_p} = \sqrt{2} \|T\|_{\Omega},$$

puisque  $T$  est réelle. Remarquons que

$$\int_{(n-\frac{1}{2})b}^{(n+\frac{1}{2})b} \Omega_p(x) dx = \Omega_n + \Omega_{-n},$$

de sorte que la condition (1.1) reste valable pour  $\Omega_p$ .

L'équivalence entre eux des cinq propriétés suivantes est une trivialité :

- (7.1)  $T$  est une distribution réelle de l'espace  $\mathcal{G}$ ;
- (7.2) La transformée de Fourier de  $T$  est hermitienne <sup>(11)</sup>;
- (7.3) La transformée de Fourier de  $T'$  est hermitienne;
- (7.4)  $T'$  est une distribution réelle de  $\mathcal{G}'$ ;
- (7.5) La fonction  $\Xi \star T'$  est réelle sur l'axe réel.

---

(11) C'est-à-dire,  $\mathcal{F} T(-x) = \overline{\mathcal{F} T(x)}$ .

Par exemple, l'équivalence de (7.4) et (7.5) découle du fait établi dans la section 4 que  $\mathcal{F}(\Xi \star T') = \mathcal{F}T' \cdot \Omega / \text{ch}$ , puisque le facteur  $\Omega / \text{ch}$  est réel et pair.

Supposons maintenant qu'une distribution réelle  $T$  à support contenu dans l'ensemble donné  $E$  soit orthogonale à toute mesure portée par  $E$ . En particulier, parce que l'orthogonalité est conservée en passant de  $\mathcal{G}$  à  $\mathcal{G}'$ , l'élément  $T' \in \mathcal{G}'$  qui correspond à  $T$  est orthogonal dans  $\mathcal{G}'$  à chaque mesure

$$\delta'_x = \frac{1}{2} (\delta_{x+i} + \delta_{x-i}) \quad (x \in E).$$

C'est-à-dire, en rappelant (4.3),

$$(7.6) \quad (\delta'_x, T') = \langle \delta'_x, \Xi \star T' \rangle = \Xi \star T'(x+i) + \Xi \star T'(x-i) = 0,$$

pour tout  $x \in E$ . Notre but est de montrer que  $T$  est nulle.

Soit  $\chi$  une représentation conforme de la bande  $|y| \leq 1$  sur le disque unité  $|\varpi| \leq 1$  telle que l'axe réel corresponde au diamètre réel et les ensembles  $E+i$ ,  $E-i$  correspondent aux ensembles notés  $E_1$ ,  $\bar{E}_1$  sur  $|\varpi| = 1$ , réflexions l'un de l'autre dans l'axe réel. La fonction  $\Xi \star T'$  correspond alors à une fonction  $F(\varpi)$  holomorphe dans  $|\varpi| < 1$  et satisfaisant à la condition

$$(7.7) \quad F(e^{i\theta}) + F(e^{-i\theta}) = 0 \quad (e^{i\theta} \in E_0 = E_1 \cup \bar{E}_1),$$

qui correspond à (7.6).

Il s'ensuit du lemme 3 que  $F$  appartient à la classe  $\text{Lip} \frac{\beta}{2}$  sur des arcs de  $|\varpi| = 1$  contenant  $E_0$ .

Le fait que  $T$  est réelle implique, d'après (7.5), que la fonction  $\Xi \star T'$  est réelle sur l'axe réel, donc que

$$F(e^{i\theta}) = \overline{F(e^{-i\theta})} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

Donc (7.7) entraîne

$$(7.8) \quad \text{Re} F(e^{i\theta}) = 0 \quad (e^{i\theta} \in E_0).$$

Soit  $\Gamma_r F_r (r < 1)$  l'approximation concentrique à  $\Gamma F$  :

$$\Gamma_r(\varpi) F_r(\varpi) = \Gamma(r\varpi) F(r\varpi).$$

Ici on désigne par  $\Gamma$  la dérivée de la fonction  $\chi^{-1}$ . On a alors

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \|T\|^2 &= \|T'\|^2 = 2\pi \langle T', \Xi \star T' \rangle \\ &= 2\pi \langle S, F\Gamma \rangle \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} 2\pi \langle S, F_r \Gamma_r \rangle. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que la dernière limite est nulle. D'abord, remarquons qu'on peut supposer la fonction  $F\Gamma$  continue partout sur  $|\varpi| = 1$ . Car sinon, on pourrait modifier la représentation conforme (de manière à conserver toute propriété utilisée auparavant, bien entendu). Par exemple, on pourrait choisir une représentation conforme de la bande  $|y| \leq 1$  sur un domaine  $R$  contenant le disque unité telle que la frontière de  $R$  contienne des arcs de  $|\varpi| = 1$  qui, eux, contiennent le spectre  $E_0$ . Ceci admis, on introduit la représentation

$$(7.10) \quad i\zeta\Gamma_{\sqrt{r}}(\zeta) F_r(\zeta) = \int_{|\varpi|=\frac{1}{\sqrt{r}}} i\varpi\Gamma_{\sqrt{r}}(\varpi) F_r(\varpi) P(\zeta, \varpi) d(\arg \varpi),$$

$\zeta = e^{i \arg \zeta}$ , où  $P(\zeta, \varpi)$  désigne le noyau de Poisson :

$$P(\zeta, \varpi) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\varpi|^2 - 1}{|\varpi|^2 + 1 - 2|\varpi| \cos(\arg \zeta - \arg \varpi)}.$$

Insérant (7.10) dans (7.9) on obtient, en vue de la formule (6.7) pour l'indicatrice harmonique,

$$\begin{aligned} \langle S, \Gamma_{\sqrt{r}} F_r \rangle &= \langle S, \int_{|\varpi|=\frac{1}{\sqrt{r}}} i\varpi\Gamma_{\sqrt{r}}(\varpi) F_r(\varpi) P(\zeta, \varpi) d(\arg \varpi) \rangle \\ &= \int_{|\varpi|=\frac{1}{\sqrt{r}}} \langle S, P(\zeta, \varpi) \rangle F_r(\varpi) \Gamma_{\sqrt{r}}(\varpi) d\varpi \\ &= \int_{|\varpi|=\frac{1}{\sqrt{r}}} H(\sqrt{r}, \arg \varpi) F_r(\varpi) \Gamma_{\sqrt{r}}(\varpi) d\varpi. \end{aligned}$$

Dans un voisinage de  $E_0$  sur  $|\varpi| = 1$  la mesure  $\Gamma(\varpi) d\varpi$  est réelle, donc en prenant la partie réelle dans (7.9), il vient

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|\varpi|=\frac{1}{\sqrt{r}}} H(\sqrt{r}, \arg \varpi) \operatorname{Re}(F(r\varpi)) \Gamma_{\sqrt{r}}(\varpi) d\varpi \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|\varpi|=\frac{1}{\sqrt{r}}} H(\sqrt{r}, \arg \varpi) \operatorname{Re} F(r\varpi) \Gamma_{\sqrt{r}}(\varpi) d\varpi. \end{aligned}$$

Si l'on intègre par rapport à la variable angulaire [ $d\varpi = i\varpi d(\arg \varpi)$ ], la dernière intégrale s'écrit

$$\sum_n \int_{M_n} H(\sqrt{r}, \arg \varpi) \operatorname{Re} F(r e^{i \arg \varpi}) \Gamma(e^{i \arg \varpi}) i\varpi d(\arg \varpi),$$

$\{M_n\}$  étant la suite des intervalles complémentaires à  $E_0$ . Une inégalité géométrique, qui n'exprime autre chose que  $r < 1$ , avec les évaluations

essentielles du lemme 3 et de (6.9), nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} \left| \int_{M_n} \right| &\leq \text{Cte} \int_0^{\frac{m_n}{2}} \frac{d\theta}{\theta^{1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}} \\ &\leq \text{Cte} m_n^{\frac{\beta-\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

où  $m_n$  signifie la longueur de  $M_n$ . Vu l'équiconvergence de

$$\sum m_n^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \sum l_n^{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

et l'hypothèse (1.3), il vient

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_n \int_{M_n} = \sum_n \int_{M_n} \lim_{r \rightarrow 1}$$

Puisque  $\text{mes} E = \text{mes} E_0 = 0$ , d'après l'hypothèse (1.4), on a

$$\lim_{r \rightarrow 1} H(\sqrt{r}, \arg w) = 0$$

presque partout, donc

$$\|T\|^2 = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_n \int_{M_n} = 0, \quad \text{donc} \quad T = 0.$$

Il est facile de terminer la démonstration du théorème 3.  $\mathcal{M}$  étant l'enveloppe fermée dans  $\mathcal{G}$  de l'ensemble des mesures portées par  $E$ , le résultat que nous venons d'établir est simplement que

$$\mathcal{G}_\gamma \cap \mathcal{M}_\perp = \{0\},$$

donc pour l'enveloppe fermée  $\overline{\mathcal{G}_\gamma}$  de  $\mathcal{G}_\gamma$  dans  $\mathcal{G}$  on a également

$$\overline{\mathcal{G}_\gamma} \cap \mathcal{M}_\perp = \overline{\mathcal{G}_\gamma \cap \mathcal{M}_\perp} = \{0\}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{G}_\gamma} &= \overline{\mathcal{G}_\gamma} \cap \mathcal{G} \\ &= \mathcal{G}_\gamma \cap (\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_\perp) \\ &= (\overline{\mathcal{G}_\gamma} \cap \mathcal{M}) \oplus (\overline{\mathcal{G}_\gamma} \cap \mathcal{M}_\perp) \\ &= \overline{\mathcal{G}_\gamma} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{M}. \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J.-P. KAHANE, *Sur la synthèse harmonique dans  $l^\infty$*  (*Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol. 32, n° 2, 1960, p. 179-189).
- [2] J.-P. KAHANE et R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.
- [3] P. MALLIAVIN, *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sc., n° 2, Paris, 1959, p. 61-68.
- [4] E. J. AKUTOWICZ, *L'approximation spectrale dans certains espaces hilbertiens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 5268-5270).
- [5] A. BEURLING, *Sur les spectres des fonctions*, Colloque International sur l'Analyse harmonique, Nancy, 1947; Publ. C. N. R. S., Paris, 1949, p. 9-29.
- [6] A. BEURLING et J. DENY, *Dirichlet Spaces* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, vol. 45, 1959, p. 208-215).
- [7] J. DENY, *Les potentiels d'énergie finie* (*Acta Math.*, vol. 82, 1950, p. 107-183).
- [8] K. V. TEMKO, *Sur les potentiels d'équilibre, capacités convexes et l'unicité des séries trigonométriques* (en russe) (*Mat. Sbornik*, t. 49, 1959, p. 109-132).
- [9] G. KOETHE, *Die Randverteilungen analytischer Funktionen* (*Math. Z.*, vol. 57, 1952, p. 13-33).
- [10] G. KOETHE, *Dualität in der Funktionentheorie* (*J. Reine Angew. Math.*, vol. 191, 1953).
- [11] C. ROUMIEU, *Sur quelques extensions de la notion de distribution* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 77, 1960, p. 41-121).
- [12] H. CARTAN, *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 69, 1941, p. 71-96).
- [13] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Paris, 1950, 1951.
- [14] M. RIESZ, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* (*Acta litt. ac scient. reg. univ. Hungaricæ Francisco-Josephinæ*, Szeged, t. 9, 1938-1940, p. 1-42).
- [15] J. DENY, *Synthèse spectrale dans les espaces de Dirichlet*, Public. du Séminaire de Mathématiques d'Orsay, 1<sup>re</sup> année, 1961-1962, Secrétariat Mathématique d'Orsay (1963).
- [16] J.-P. KAHANE, *Espaces de suites, invariants par translation*, Ibid.
- [17] A. BEURLING, *Analyse spectrale de pseudomesures* (six Notes parues aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964).