

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. PEPIN

Nombre des classes de formes quadratiques pour un déterminant donné

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 3 (1874), p. 165-208

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__165_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRE

DES

CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES

POUR UN DÉTERMINANT DONNÉ,

PAR LE P. PÉPIN.

Cette question a été résolue par Dirichlet dans ses *Recherches sur les applications de l'Analyse à la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. XIX, p. 324, et t. XXI, p. 1 et 134).

M. Hermite a proposé dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXV, p. 684) une simplification qui abrège notablement la solution de Dirichlet; mais si l'on veut développer les raisonnements nécessaires pour rendre la démonstration complète, on ne laisse pas que de rencontrer quelques difficultés. Par exemple, au n° V, si l'on veut démontrer que la limite du rapport

$$\sum_1^n \left(\frac{\mathbb{Q}}{i}\right) \left[\frac{n \varphi(m)}{i m} + 2^{i-1} \varepsilon_i \right] : n \quad \text{est} \quad \sum \left(\frac{\mathbb{Q}}{i}\right) \frac{1}{i} \frac{\varphi(m)}{m},$$

il faudra démontrer que la limite de l'expression

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \left(\frac{\mathbb{Q}}{i}\right) \varepsilon_i \quad \text{est} \quad 0.$$

Or, comme ε_i est positif ou négatif, il n'est pas évident qu'il n'aura pas ordinairement le même signe que $\left(\frac{\mathbb{Q}}{i}\right)$. Supposons, par exemple, $\varepsilon_i = \left(\frac{\mathbb{Q}}{i}\right) \alpha_i^2$; l'expression précédente devient $\frac{1}{n} \sum_1^n \alpha_i^2$, et elle a pour

limite α^2 , α^2 désignant une valeur moyenne entre les diverses valeurs de α_i^2 . Cette difficulté ne peut être levée sans recourir à des considérations assez délicates, qui font perdre à cette simplification une partie de ses avantages.

La solution, dont on trouvera ici le développement complet, n'emprunte à l'Analyse supérieure que les notions les plus élémentaires sur la quadrature des surfaces planes. Nous obtenons par là un théorème général, d'où nous déduisons sans peine, soit les formules données par Gauss dans deux Mémoires présentés à la Société royale de Göttingue (1824 et 1837) pour exprimer le nombre des systèmes de valeurs de x et de y , qui donnent à la forme

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le déterminant est un nombre négatif, des valeurs qui ne surpassent pas une limite donnée; soit les formules analogues données par Dirichlet pour les déterminants positifs. Nous déduisons de ces formules le rapport entre les nombres de classes proprement primitives pour deux déterminants dont le rapport est un carré, ainsi que le rapport entre les nombres de classes comprises dans les deux ordres primitifs, pour un même déterminant. Le problème se trouve ainsi ramené à celui de trouver le nombre de classes proprement primitives pour un déterminant qui n'est divisible par aucun carré. Cette condition remplie par le déterminant permet de généraliser la formule employée par Dirichlet pour exprimer le nombre des représentations de n par le système des formes quadratiques diverses qui représentent l'ordre proprement primitif pour ce déterminant. Cela nous conduit à une simplification analogue à celle de M. Hermite, mais qui en diffère en ce que la fonction $\Phi(x)$ s'y trouve remplacée par la fonction plus simple $E(x)$. Grâce aux propriétés de cette fonction, nous arriverons aux formules cherchées, sans emprunter aucune notion préalable à la théorie des suites.

I.

1. Soient A l'aire comprise dans un contour donné sur un plan; u et v les coordonnées d'un point de ce plan. On aura

$$A = \iint dudv.$$

On obtiendra une valeur approchée de cette aire, si, donnant à u et à v des accroissements très-petits $du = dv = \lambda$, on fait la somme d'autant de carrés λ^2 qu'il y a de systèmes de valeurs de u et de v , qui, étant prises dans les deux progressions arithmétiques $u = x\lambda$, $v = y\lambda$, correspondent à des points situés dans l'aire A . On pourra exprimer cette condition au moyen de certaines inégalités

$$(a) \quad \varphi(x, y) < 0, \quad \varphi_1(x, y) < 0, \dots,$$

que devront vérifier les nombres entiers x, y .

Soit m le nombre des systèmes de valeurs de x et de y , qui vérifient les conditions (a). Le produit $m\lambda^2$ représentera l'aire A avec une approximation d'autant plus grande que l'accroissement λ sera plus petit, de telle sorte qu'en représentant par ε une quantité qui s'annule avec λ on obtiendra pour l'aire A la formule

$$A + \varepsilon = m\lambda^2;$$

ou bien, en faisant $\frac{1}{\lambda^2} = M$,

$$(b) \quad AM + M\varepsilon = m.$$

2. Transportons l'origine en un point infiniment voisin $\gamma\lambda, \delta\lambda$, puis désignons par u_1, v_1 les nouvelles coordonnées du point (u, v) , et par $\alpha\lambda, \beta\lambda$ les accroissements infiniment petits du_1, dv_1 . Les valeurs de u_1, v_1 seront comprises dans les deux progressions arithmétiques $\alpha\lambda x_1, \beta\lambda y_1$, et l'on aura

$$A = \iint du_1 dv_1 = \alpha\beta \iint \lambda^2 = \alpha\beta m_1 \lambda^2 + \varepsilon,$$

m_1 désignant le nombre des systèmes de valeurs entières de x_1 et y_1 telles, que les valeurs correspondantes de u_1, v_1 soient les coordonnées de points situés à l'intérieur de l'aire A . Or, si, dans les formules de transformation $u = u_1 + \gamma\lambda$, $v = v_1 + \delta\lambda$, nous remplaçons u, v, u_1, v_1 par leurs valeurs $x\lambda, y\lambda, \alpha x_1 \lambda, \beta y_1 \lambda$, nous obtiendrons, en divisant par λ ,

$$(c) \quad x = \alpha x_1 + \gamma, \quad y = \beta y_1 + \delta.$$

Dans la dernière équation, qui peut s'écrire

$$AM + M\varepsilon = m, \alpha\beta \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty),$$

m_1 représentera le nombre des systèmes de valeurs de x et de y , qui, étant prises dans les progressions (c) , satisfont aux conditions (a) .

Ajoutons aux formules (c) $K - 1$ autres couples de progressions arithmétiques, de mêmes raisons α, β , mais tels que chacun d'eux diffère de tous les autres par la valeur de l'un des résidus γ ou δ . En combinant par addition K équations semblables à la dernière, nous aurons l'équation

$$(I) \quad \frac{KAM}{\alpha\beta} + M\eta = \sum m_1 = m, \quad (\lim \eta = 0 \text{ pour } m = \infty),$$

dans laquelle m exprime le nombre des systèmes de valeurs de x et de y qui, étant prises dans les K formules semblables à (c) , vérifient les conditions (a) .

3. Supposons que l'aire A soit celle de l'ellipse représentée par l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

dans laquelle $b^2 - ac = D = -D_1 < 0$. On aura

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{D_1}},$$

et les conditions que les nombres entiers x et y devront vérifier pour que les valeurs correspondantes de $u = x\lambda$ et $v = y\lambda$ soient les coordonnées de points intérieurs à l'ellipse se réduiront à une seule

$$(A) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{ou} \quad M;$$

en même temps l'équation (I) deviendra

$$(II) \quad \frac{K\pi M}{\alpha\beta\sqrt{D_1}} + M\varepsilon = m \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty).$$

Si dans cette formule nous faisons $K = 1, \alpha = \beta = 1$, nous obtenons le premier théorème de Gauss : « *Le nombre m de tous les systèmes de*

valeurs entières des indéterminées x et y pour lesquelles les valeurs d'une forme (a, b, c) de déterminant négatif $-D_1$, ne dépassent pas une limite M est donné par la formule $\frac{\pi M}{\sqrt{D_1}}$, avec une approximation qui croît indéfiniment avec M , c'est-à-dire que, si l'on fait croître indéfiniment le nombre M , le rapport $\frac{m}{M}$ a pour limite $\frac{\pi}{\sqrt{D_1}}$. » (GAUSS, *Werke*, t. II, p. 172.)

En faisant $\alpha = \beta = 2D_1$ dans la même équation (II), et choisissant les K couples de progressions de telle sorte que la forme (a, b, c) ne prenne que des valeurs premières avec $2D_1$, et qu'elle prenne toutes celles des valeurs premières avec $2D_1$ qu'elle peut prendre, on obtiendra un second théorème de Gauss (*Werke*, t. II, p. 280) qui permet d'évaluer approximativement le nombre des systèmes de valeurs entières de x et de y qui donnent à la forme (a, b, c) des valeurs inférieures à une limite donnée et premières avec D . Ce second théorème est celui dont Dirichlet fait usage dans le Mémoire cité, et dont il donne le correspondant pour les formes de déterminant positif.

4. Supposons que la forme (a, b, c) soit proprement primitive. Nous pourrions assujettir les indéterminées x et y à ne lui donner que des valeurs impaires. Si les deux éléments extrêmes a et c sont impairs, x et y devront être pris dans les deux systèmes

$$(c') \quad \begin{cases} x = 2x_1, \\ y = 2y_1 + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2x_1 + 1, \\ y = 2y_1; \end{cases}$$

si au contraire a et c sont de parité différente, nous prendrons pour premier élément (a) celui qui est impair, et nous excluons les valeurs paires de la forme (a, b, c) , et celles-là seules, en prenant x et y dans les deux systèmes

$$(c'') \quad \begin{cases} x = 2x_1 + 1, \\ y = 2y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2x_1, \\ y = 2y_1 + 1. \end{cases}$$

Dans les deux cas nous aurons

$$K = 2, \quad \alpha = \beta = 2,$$

et par suite

$$(III) \quad \frac{M\pi}{2\sqrt{D_1}} + M\varepsilon = m \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty),$$

m désignant le nombre des systèmes de valeurs entières de x et de y , qui donnent à la forme (a, b, c) des valeurs impaires et inférieures à la limite M .

5. On obtiendra des théorèmes analogues pour les déterminants positifs, en remplaçant l'aire de l'ellipse par celle d'un secteur hyperbolique compris entre l'axe des x , la droite $y = \frac{aU}{T - bU} x$, et l'hyperbole représentée par l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

dans laquelle $b^2 - ac = D > 0$, $a > 0$ et $c < 0$; en supposant de plus que T et U désignent les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$T^2 - DU^2 = e^2,$$

où nous représentons par e le plus grand diviseur commun des trois nombres a , $2b$, c . Comme nous n'aurons à considérer que des formes primitives, nous aurons toujours $c = 1$ ou 2 . Pour évaluer l'aire A du secteur hyperbolique considéré, nous prendrons l'équation de l'hyperbole en coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{1}{a \cos^2 \varphi + 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi (a + 2b \tan \varphi + c \tan^2 \varphi)}.$$

L'aire A sera exprimée par l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{d \tan \varphi}{a + 2b \tan \varphi + c \tan^2 \varphi} = \frac{1}{8\sqrt{D}} \int \frac{c \tan \varphi - \sqrt{D} + b}{\sqrt{D} + b + c \tan \varphi} d \tan \varphi,$$

prise entre les limites $\varphi = 0$, et $\varphi = \arctan \frac{aU}{T - bU}$. On a donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8\sqrt{D}} \left[\int \frac{c \tan \varphi - \sqrt{D} + b}{\sqrt{D} + b + c \tan \varphi} d \tan \varphi - \int \frac{c \tan \varphi - \sqrt{D} + b}{\sqrt{D} + b + c \tan \varphi} d \tan \varphi \right] \\ &= \frac{1}{8\sqrt{D}} \int \frac{c \tan \varphi - \sqrt{D} + b}{\sqrt{D} + b + c \tan \varphi} d \tan \varphi. \end{aligned}$$

On a donc, en ayant égard à l'équation $T^2 - DU^2 = e^2$,

$$A = \frac{1}{2\sqrt{D}} l \left(\frac{T}{e} + \frac{U}{e} \sqrt{D} \right),$$

de telle sorte que l'équation (I) devient

$$(IV) \quad \frac{KM}{2\alpha\beta\sqrt{D}} l \left(\frac{T}{e} + \frac{U}{e} \sqrt{D} \right) + M\varepsilon = m \quad (\lim \varepsilon = 0 \text{ pour } M = \infty.)$$

6. Supposons que la forme (a, b, c) soit proprement primitive. On verra, comme dans le cas où D est négatif, que les valeurs de x et de y qui donnent à cette forme des valeurs impaires sont toutes comprises dans deux couples de progressions (c) ou (c') . Faisant donc $K=2$, $\alpha=\beta=2$, et remarquant que $e=1$, on a

$$(V) \quad \frac{M}{4\sqrt{D}} l(T + U\sqrt{D}) + M\varepsilon = m,$$

m désignant le nombre des systèmes de valeurs des indéterminées x et y qui, satisfaisant à la double inégalité

$$(A') \quad 0 \leq y \leq \frac{aU}{T - bU} x,$$

donnent à la forme (a, b, c) des valeurs impaires et inférieures à M . Nous pouvons ajouter que toutes ces valeurs seront positives; car de l'inégalité (A')

$$ax > (T - bU) \frac{y}{U}, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

on déduit

$$a(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (ax + by)^2 - Dy^2 > \frac{(T^2 - DU^2)y^2}{U^2},$$

$$a(ax^2 + 2bxy + cy^2) > \frac{y^2}{U^2}.$$

Comme nous supposons $a > 0$, nous avons

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0.$$

II.

7. Désignons par Ω l'ensemble des formes quadratiques

$$(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), \dots,$$

propres à représenter toutes les classes du même ordre primitif de déterminant D ; par h le nombre de ces classes, par m', m'', \dots les nombres qui, pour les formes $(a', b', c'), (a'', b'', c''), \dots$, ont la même signification que le nombre m pour la forme (a, b, c) . De plus, si le déterminant est positif, nous supposerons les premiers éléments a, a', a'', \dots positifs. Enfin, quand le déterminant est négatif, nous ne considérons que les formes positives.

Si les K systèmes de progressions (c) ont été choisis de manière que les valeurs (a, b, c) soient tous les nombres premiers, relativement à un nombre donné Δ , et qui peuvent être représentés par cette forme, le nombre m dans les formules (II) et (IV) sera le nombre des représentations par la forme (a, b, c) des entiers premiers avec Δ , inférieurs à la limite M , et qui, si le déterminant est positif, satisfont en outre aux inégalités (A').

Supposons que, pour donner aux diverses formes Ω toutes les valeurs premières avec Δ dont elles sont susceptibles, il faille prendre les valeurs des indéterminées x et y dans K systèmes de progressions tels que (c) , et que ce nombre K , ainsi que les raisons α, β des progressions, soit le même pour toutes ces h formes Ω ; les équations (II) et (IV) subsisteront pour chacune de ces formes, et l'on en déduira par addition les deux suivantes :

$$(1) \frac{Kh\pi M}{\alpha\beta\sqrt{D_1}} + M\varepsilon = \sum m, \quad (2) \frac{Kh}{2\alpha\beta\sqrt{D}} l\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right) + M\varepsilon = \sum m,$$

dans lesquelles $\sum m$ exprimera le nombre de toutes les représentations des nombres entiers premiers avec Δ et inférieurs à la limite M , qui de plus, si le déterminant est positif, satisfont à la double inégalité (A'), pour la forme (a, b, c) , et à des inégalités semblables pour chacune des autres formes.

8. Soient e^2, e'^2, e''^2, \dots tous les diviseurs carrés, autres que 1, d'un nombre impair n , et désignons par $\varpi(n)$ le nombre de toutes les solutions des diverses congruences G

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv D \pmod{n}, & x^2 &\equiv D \pmod{\frac{n}{e'^2}}, \\ x^2 &\equiv D \pmod{\frac{n}{e^2}}, & x^2 &\equiv D \pmod{\frac{n}{e''^2}}, \dots \end{aligned}$$

Si D est négatif et différent de -1 , le nombre des représentations de n par l'ensemble des formes Ω , qui représentent l'ordre proprement primitif de déterminant D , sera $2\varpi(n)$; il sera $4\varpi(n)$, si $D = -1$. Si D est négatif et différent de -3 , et que les formes Ω représentent l'ordre improprement primitif de déterminant D , le nombre des représentations de $2n$ par l'ensemble des formes Ω sera $2\varpi(n)$; il sera $6\varpi(n)$ si $D = -3$.

Ces théorèmes sont une conséquence immédiate des principes établis par Gauss, relativement à la représentation des nombres par les formes (*Disq.*, n° 180 et 181).

9. Si D est positif, le nombre des représentations de n ou de $2n$, suivant que l'ordre Ω est proprement ou improprement primitif, est égal à $\varpi(n)$, pourvu que chaque représentation soit assujettie à vérifier l'inégalité (A'), (6).

Soit N l'un quelconque des quotients $\frac{n}{1} \frac{n}{e^2} \frac{n}{e'^2} \dots$, et désignons par ω le nombre 1 ou le nombre 2, suivant que l'ordre Ω est proprement ou improprement primitif. Si le nombre des représentations propres de ωN par l'ensemble des formes Ω est égal au nombre des valeurs diverses de l'expression $\sqrt{D} \pmod{N}$, et qu'on ait égard au n° 181 des *Disquisitiones*, on conclura immédiatement que le nombre de toutes les représentations, tant propres qu'impropres, du nombre ωn par les mêmes formes Ω est égal à $\varpi(n)$. Or c'est ce qui a lieu quand toutes ces représentations sont assujetties à vérifier les inégalités (A'). En effet :

Toutes les représentations propres de ωN qui appartiennent à une même valeur, l'expression $\sqrt{D} \pmod{N}$, sont données par une seule

forme (α, b, c) du système Ω , et se déduisent de l'une d'entre elles (α, β) , au moyen des formules

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \omega x_n = \alpha t_n - (b\alpha + c\beta) u_n, \\ \omega y_n = \beta t_n + (a\alpha + b\beta) u_n, \\ t_n = \frac{\omega}{2} \left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega} \sqrt{D} \right)^n + \frac{\omega}{2} \left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega} \sqrt{D} \right)^n, \\ u_n = \frac{\omega}{2\sqrt{D}} \left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega} \sqrt{D} \right)^n - \frac{\omega}{2\sqrt{D}} \left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega} \sqrt{D} \right)^n, \end{cases}$$

dans lesquelles nous supposerons α positif, ce qui est permis, puisque nous ne cherchons que les représentations dans lesquelles x et y sont des nombres positifs. Or, parmi les représentations déterminées par ces formules, il y en a toujours une et une seule qui vérifie la condition

$$(A') \quad 0 \leq y \leq \frac{T - bU}{aU} x.$$

En effet, on déduit des équations (α) , entre deux représentations consécutives x_n, y_n , et x_{n-1}, y_{n-1} , les relations

$$\omega x_n = Tx_{n-1} - (bx_{n-1} + cy_{n-1})U, \quad \omega y_n = Ty_{n-1} + (ax_{n-1} + by_{n-1})U,$$

qui résolues par rapport à y_{n-1} donnent

$$(\beta) \quad \omega y_{n-1} = y_n(T - bU) - aUx_n.$$

Si x_n et y_n vérifient la double inégalité (A') , l'équation (β) donne $y_{n-1} \leq 0$; et réciproquement, si l'équation (β) donne pour y_{n-1} une valeur négative ou nulle, tandis que y_n ne sera pas négatif, x_n et y_n vérifieront les conditions (A') . Or il y a toujours une valeur de n , et une seule, qui fait succéder dans la série des valeurs de y_n une valeur positive à une valeur négative ou nulle. Pour le démontrer, nous mettrons l'équation

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = N$$

sous les deux formes

$$(a\alpha + b\beta)^2 - D\beta^2 = aN, \quad (c\beta + b\alpha)^2 - D\alpha^2 = cN,$$

d'où, à cause des inégalités $a > 0$, $c < 0$, $N > 0$, $\alpha > 0$, on conclut

$$\sqrt{\left(\frac{b\alpha + c\beta}{\alpha}\right)^2} < \sqrt{D} < \sqrt{\left(\frac{a\alpha + b\beta}{\beta}\right)^2};$$

la valeur numérique du rapport $\frac{a\alpha + b\beta}{\beta}$ est donc supérieure à \sqrt{D} , tandis que $\frac{t_n}{u_n}$, ou

$$\sqrt{D} \frac{\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega} \sqrt{D}\right)^{2n} + 1}{\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega} \sqrt{D}\right)^{2n} - 1},$$

peut prendre une valeur numérique aussi rapprochée qu'on le veut de \sqrt{D} , qui est sa limite pour $n = \pm \infty$: donc, pour deux valeurs de n , numériquement très-grandes, mais de signes contraires, le produit

$$(\gamma) \quad \beta U_n \left(\frac{t_n}{u_n} + \frac{a\alpha + b\beta}{\beta} \right) = \gamma_n$$

prendra deux valeurs de signes contraires; car le dernier facteur aura le signe de son second terme, tandis que u_n change de signe avec n . Nous pouvons donc supposer que la valeur particulière β de γ_n soit positive; dès lors, quand n variera de $-\infty$ à $+\infty$, γ_n d'abord négatif finira par devenir positif; car de l'équation

$$\frac{a\alpha + b\beta}{\beta} + \frac{(b\alpha + c\beta)}{\alpha} = \frac{N}{\alpha\beta}$$

on conclut, quand β est positif, que $\frac{a\alpha + b\beta}{\beta}$, le plus grand des deux termes du premier membre, est positif : les valeurs de γ_n , qui correspondent à des valeurs positives de n , seront donc elles-mêmes positives. Nous pouvons donc supposer que β est la première de ces valeurs positives, de telle sorte qu'on ait $\gamma_{-1} \leq 0$; l'équation (β)

$$\omega \gamma_{-1} = \beta(T - bU) - aU\alpha$$

donnera

$$\beta \leq \frac{aU}{T - bU} \alpha.$$

Il existe donc une représentation (α, β) de N , qui, appartenant à la valeur considérée de l'expression $\sqrt{D} \pmod{N}$, vérifie les conditions (A'), et il n'y en a pas d'autres, car pour toutes les valeurs positives de n γ_n reste positif: il n'y a donc plus pour γ_n de passage du positif au négatif, ce qu'il fallait démontrer.

10. Les résultats obtenus dans les deux numéros précédents peuvent se résumer dans ces deux théorèmes, où nous désignerons indéfiniment par n tous les nombres impairs compris entre zéro et $\frac{M}{\omega}$ et par $\varpi(n)$ le nombre de toutes les solutions des congruences G.

1° La valeur de $\sum m$ dans l'équation (1) est égale à $2 \sum \varpi(n)$, excepté quand $D = 1$, si l'ordre Ω est proprement primitif, et quand $D = 3$, si l'ordre Ω est improprement primitif. Dans le premier cas $\sum m = 4 \sum \varpi(n)$, tandis que dans le second $\sum m = 6 \sum \varpi(n)$.

2° La valeur de $\sum m$ dans l'équation (2) est toujours égale à $\sum \varpi(n)$.

III.

11. Quand les formes Ω représentent l'ordre proprement primitif, nous avons vu que, pour leur donner toutes les valeurs impaires dont elles sont susceptibles, il faut prendre x et y dans deux couples de progressions (c) ou (c') . Chacune des formes Ω donne lieu à une équation semblable à l'équation (III) ou à l'équation (V). L'addition de ces équations nous donnera l'une des deux formules

$$(3) \quad \frac{h\pi M}{2\sqrt{D}} + M\eta = \sum m, \quad (4) \quad \frac{hM}{4\sqrt{D}} l(T + U\sqrt{D}) + M\eta = \sum m,$$

dans lesquelles η est une variable qui s'évanouit avec $\frac{1}{M}$ et la somme $\sum m$ a la valeur déterminée dans le n° 10.

Désignons par h' le nombre des classes improprement primitives de

déterminant D , et par T' , U' les plus petits nombres entiers qui vérifient l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4.$$

Pour établir les formules qui correspondent dans ce cas aux équations (3) et (4), nous allons d'abord résoudre ce problème :

« Trouver le nombre K des systèmes de progressions $x = 2u + \gamma$, $y = 2v + \delta$, dans lesquels on doit prendre x et y pour que la forme improprement primitive (a, b, c) reçoive toutes les valeurs impairement paires qu'elle peut représenter. »

Comme toute forme improprement primitive peut représenter une infinité de nombres impairement pairs, et que toute classe peut être représentée par une forme dont le premier élément soit l'un quelconque des nombres représentés par cette classe, nous pouvons supposer que dans les formes Ω les nombres a, a', a'', \dots soient impairement pairs.

Si le déterminant $b^2 - ac = D$ est de la forme $\pm 8l + 1$, ac est divisible par 8; et comme a est simplement pair, $\frac{1}{2}a$ sera impair, et $\frac{1}{2}c$ pair. Pour que le nombre $n = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$ soit impair, il faut que les indéterminées x, y soient prises dans le système unique $x = 2u + 1, y = 2v$: on a donc $K = 1$.

Si, au contraire, D est de la forme $\pm 8l + 5$, ac sera de la forme $8m + h$, et par conséquent les deux nombres $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c$ seront impairs. Le nombre n sera donc impair si les indéterminées x et y sont prises dans l'un des trois systèmes

$$\begin{cases} x = 2u + 1, \\ y = 2v + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2u + 1 \\ y = 2v; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2u, \\ y = 2v + 1. \end{cases}$$

On a donc dans ce cas $K = 3$.

12. La valeur de K étant la même pour les h' formes Ω , nous pouvons appliquer les formules (1) et (2) du n° 7, en y faisant $\alpha = \beta = \omega = 2$, et remplaçant h, T, U par h', T', U' . De plus, pour que la limite par rapport au nombre impair n soit la même dans les deux ordres primitifs, nous remplacerons la limite M de $2n$ par une valeur double $2M$. Nous avons ainsi

$$(5) \frac{Kh'\pi M}{2\sqrt{D_1}} + 2M\eta = \sum m, \quad (6) \frac{h'KM}{4\sqrt{D}} l \left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D} \right) + 2M\eta = \sum m.$$

Puisque dans ces formules $\sum m$ a la même valeur respectivement que dans les formules (3) et (4) (voir n° 10), en exceptant le cas où $D = -3$, nous pouvons égaler les premiers membres, puis passer à la limite après avoir tout divisé par M . Nous obtenons ainsi les deux équations

$$h = Kh', \quad \text{si } D \text{ est négatif et différent de } -3;$$

$$h = Kh' \frac{l \left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2} \sqrt{D} \right)}{l(T + U\sqrt{D})}, \quad \text{si } D \text{ est } > 0.$$

Pour $D = -3$, on a (10)

$$\sum_{m=2} \varpi(n)$$

dans la formule (3), tandis que dans la formule (5)

$$\sum_{m=6} \varpi(n);$$

on aura dans ce cas

$$3h = Kh'.$$

Or nous avons trouvé (11) que K est égal à 1 ou à 3 suivant que D est de la forme $\pm 8l + 1$, ou de la forme $\pm 8l + 5$. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Le nombre des classes pour un déterminant négatif est le même dans les deux ordres primitifs, si le déterminant changé de signe est de la forme $8l + 7$; si, au contraire, il est de la forme $8l + 8$, l'ordre proprement primitif contient trois fois plus de classes que l'ordre improprement primitif.

Le déterminant $D = -3$ fait exception; les deux ordres primitifs de déterminant -3 renferment chacun une seule classe.

13. Si D est positif et de la forme $8l + 1$, l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4$$

n'admet pas de solutions en nombres impairs; on a donc

$$T' = 2T, \quad U' = 2U;$$

et comme dans ce cas $K = 1$, la formule précédente donne $h = h'$.
Donc

« Pour un déterminant positif $8l + 1$, les deux ordres primitifs renferment le même nombre de classes. »

Si $D = 8l + 5$, $K = 3$; mais il faut distinguer deux cas, suivant que l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4$$

est possible, oui ou non, en nombres impairs. Dans le premier cas, on aura la relation

$$T + U\sqrt{D} = \left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D}\right)^3,$$

d'où

$$\frac{l\left(\frac{T'}{2} + \frac{U'}{2}\sqrt{D}\right)}{l(T + U\sqrt{D})} = \frac{1}{3}, \quad h = \frac{Kh'}{3} = h'.$$

Dans le second cas on aura

$$T' = 2T, \quad U' = 2U,$$

et par conséquent $h = 3h'$. Donc

Pour un déterminant positif $8l + 5$ le nombre des classes proprement primitives est ou égal à celui des classes improprement primitives, ou triple de ce dernier nombre, suivant que l'équation

$$T'^2 - DU'^2 = 4$$

n'admet pas de solutions en nombre impair, ou qu'elle en admet.

Gauss fait remarquer que, sur 75 nombres de la forme $8l + 5$ et inférieurs à 600, il y en a 16 pour lesquels l'ordre proprement primitif renferme trois fois plus de classes que l'ordre improprement primitif, et 59 pour lesquels les deux ordres primitifs admettent le même nombre de classes.

IV.

14. Les équations (1) et (2) déterminent aussi le rapport des nombres de classes pour deux déterminants dont le rapport est un carré. Pour l'obtenir, nous devons d'abord résoudre le problème suivant :

« Déterminer le nombre K des systèmes de progressions $x = 2pu + \gamma$, $y = 2pv + \delta$, dans lesquels il faut prendre les indéterminées x, y , pour donner à la forme proprement primitive (a, b, c) toutes les valeurs premières avec $2p$ dont elle est susceptible. Nous désignons par p un nombre premier impair. »

Comme les résidus γ et δ doivent être pris dans la suite $0, 1, 2, 3, 4, \dots, 2p - 1$, le nombre de tous les systèmes possibles est $4p^2$; mais, pour obtenir le nombre K , il faut retrancher de $4p^2$ le nombre de tous ceux de ces systèmes qui rendent (a, b, c) divisible par 2 ou par p . Or on a

$$a(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (ax + by)^2 - Dy^2 = an.$$

Comme le nombre a est impair, on ne peut rendre n impair qu'en prenant γ et δ dans l'un des deux systèmes

$$\gamma = 2\xi + 1, \quad \delta = 2\eta; \quad \text{ou} \quad \gamma = 2\xi + \alpha, \quad \delta = 2\eta + 1.$$

Dans le second système α est égal à 1 ou à zéro, suivant que c est pair ou impair; mais il faut exclure de ces deux systèmes toutes les valeurs de ξ et η qui vérifient respectivement les deux congruences

$$[a(2\xi + 1) + 2b\eta]^2 - 4D\eta^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

$$[a(2\xi + \alpha) + b(2\eta + 1)]^2 - D(2\eta + 1)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

1° $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$. Chacune de ces congruences n'admet qu'une seule solution, savoir la première

$$\eta = 0, \quad 2\xi + 1 = p,$$

et la seconde

$$2\eta + 1 = p, \quad 2\xi + \alpha = p \text{ ou } 0, \quad \text{suivant que } \alpha = 1 \text{ ou } 0;$$

donc

$$K = 2p^2 - 2 = 2(p^2 - 1).$$

2° $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$. Pour chaque valeur de η comprise entre 1 et $p - 1$, inclusivement, la première congruence fait correspondre deux solutions,

tandis qu'il n'y en a qu'une seule quand $\eta = 0$, savoir

$$\xi = \frac{p-1}{2}.$$

De même la seconde congruence donne une seule solution quand $\eta = \frac{p-1}{2}$, et deux pour toutes les autres valeurs. Le nombre des solutions de chaque congruence est donc

$$2(p-1)+1 = 2p-1;$$

donc

$$K = 2p^2 - 4p + 2 = 2(p-1)^2.$$

3° $D \equiv 0 \pmod{p}$. Les deux congruences considérées se réduisent aux suivantes :

$$a(2\xi+1) + 2b\eta \equiv 0, \quad a(2\xi+\alpha) + b(2\eta+1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour chaque valeur de η , chacune de ces formules détermine pour ξ une valeur unique; ce qui fait en tout $2p$ solutions. Donc

$$K = 2p^2 - 2p = 2p(p-1).$$

15. Cette valeur de K étant indépendante des coefficients de la forme (a, b, c) , nous pouvons appliquer ici les formules (1) et (2) en y faisant $\alpha = \beta = 2p$.

Prenons d'abord deux déterminants négatifs D et Dp^2 . Désignons par h le nombre des classes proprement primitives pour le dernier déterminant, et par K' le nombre des systèmes de progressions $2pu + \gamma$, $2pv + \delta$, dans lesquels il faut prendre les valeurs des indéterminées pour obtenir tous les nombres entiers premiers avec $2p$, qui peuvent être représentés par les formes proprement primitives de déterminant Dp^2 . Enfin désignons par $\varpi_1(n)$ le nombre de toutes les solutions des congruences

$$(G') \quad x^2 \equiv Dp^2 \pmod{n}, \quad x^2 \equiv Dp^2 \pmod{\frac{n}{e^2}}, \quad x^2 \equiv Dp^2 \pmod{\frac{n}{e'^2}}, \dots,$$

qui correspondent aux congruences (G) du n° 7. Comme le module n est premier avec p , toutes ces congruences admettent les mêmes nom-

bres de solutions que les congruences (G) auxquelles elles correspondent respectivement. On a donc $\varpi_1(n) = \varpi(n)$, et par suite $\sum m$ conserve dans l'équation (1) la même valeur, quel que soit celui des deux déterminants D et Dp^2 auquel on l'applique. On aura donc

$$\frac{Kh\pi}{4p^2\sqrt{D_1}} = \frac{K'h'\pi}{4p^3\sqrt{D_1}} + \varepsilon' - \varepsilon, \quad \lim \varepsilon' = \lim \varepsilon = 0,$$

d'où

$$h' = ph \frac{K}{K'}$$

Or, d'après le numéro précédent, $K' = 2p(p-1)$ (3°), tandis que K a l'une des valeurs $2(p^2-1)$, $2(p-1)^2$ ou $2p(p-1)$, suivant que l'on a $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, ou $D \equiv 0 \pmod{p}$. On a donc respectivement dans ces trois cas

$$h' = (p+1)h, \quad h' = (p-1)h, \quad h' = ph.$$

On peut réunir ces trois formules en une seule

$$(7) \quad h' = p \left[1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p} \right] h,$$

pourvu que l'on convienne de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{D}{p}\right)$ quand D est divisible par p.

16. De même, quand D est positif et qu'on applique l'équation (2) aux déterminants D et Dp^2 , on reconnaît que $\sum m$ a la même valeur dans les deux cas; car les raisonnements précédents pour établir l'égalité $\varpi_1(n) = \varpi(n)$ sont indépendants du signe de D. Nous avons donc

$$\frac{KlM}{8p^2\sqrt{D}} l(T + U\sqrt{D}) + M\varepsilon = \frac{K'h'M}{8p^3\sqrt{D}} l(T' + U'p\sqrt{D}) + M\varepsilon';$$

d'où

$$(8) \quad h' = hp \left[1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p} \right] \frac{l(T + U\sqrt{D})}{l(T' + U'p\sqrt{D})},$$

T' et U' désignant les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$T'^2 - p^2 DU'^2 = 1.$$

17. Le rapport des nombres de classes proprement primitives pour deux déterminants D et 4D se déduit immédiatement des formules (III) et (V), en remarquant que, les deux congruences

$$x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e^2} \right) \quad \text{et} \quad x^2 \equiv 4D \left(\text{mod. } \frac{n}{e^2} \right)$$

ayant le même nombre de solutions, $\sum m$ conserve la même valeur quand on passe du déterminant D au déterminant 4D. On a donc

$$\frac{h\pi}{2\sqrt{D_1}} = \frac{h'\pi}{4\sqrt{D_1}} + \varepsilon' - \varepsilon, \quad \frac{h}{4\sqrt{D}} l(T + U\sqrt{D}) \pm \frac{h'}{8\sqrt{D}} l(T' + 2U'\sqrt{D}) + \varepsilon' - \varepsilon,$$

d'où, en passant à la limite,

$$(9) \quad h' = 2h, \quad \text{si } D = -D_1 < 0; \quad h' = 2h \frac{l(T + U\sqrt{D})}{l(T' + 2U'\sqrt{D})}, \quad \text{si } D > 0.$$

T' et U' sont les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$T'^2 - 4DU'^2 = 1.$$

18. Les formules précédentes conduisent sans peine au rapport des nombres de classes pour deux déterminants D et DS². Soient h et h' ces deux nombres, et

$$S = 2^\nu p^\alpha p'^{\alpha'} \dots q^\beta q'^{\beta'} \dots$$

p, p', ... désignant des nombres premiers diviseurs de D, q, q', ... des nombres premiers non diviseurs de D. On passera du déterminant D au déterminant DS², en multipliant successivement par les carrés des facteurs premiers de S, et à chaque multiplication les formules (7), (8) ou (9) feront connaître comment varie le nombre des classes.

Supposons D < 0. On passe du déterminant D au déterminant 2^{2ν}D, en multipliant ν fois par 4. Chaque multiplication double le nombre des classes. Le nombre h₁ pour le déterminant 2^{2ν}D sera donc 2^νh.

On passera du déterminant $2^{2\nu} D$ au déterminant $2^{2\nu} p^{2\alpha} D$, en multipliant α fois par p^2 . Comme à chaque multiplication le nombre des classes est multiplié par p , il devient $2^\nu p^\alpha h$. Il en est de même pour les autres facteurs p', p'', \dots . Posons $2^{2\nu} 2^{2\alpha} p^{2\alpha'} \dots D = D_1$; le nombre des classes de déterminant D_1 sera donc $2^\nu p^\alpha p'^{\alpha'} \dots h$.

Or on passe du déterminant D_1 au déterminant $D_1 q^{2\beta}$ en multipliant β fois par q^2 . À la première multiplication le nombre des classes est multiplié par $q \left[1 - \left(\frac{D}{q} \right) \frac{1}{q} \right]$, et à chacune des multiplications suivantes il est multiplié par q . Il deviendra donc

$$2^\nu p^\alpha p'^{\alpha'} \dots q^\beta \left[1 - \left(\frac{D}{q} \right) \frac{1}{q} \right] h.$$

De même, lorsqu'on multiplie le déterminant par $q'^{2\beta'}$, $q''^{2\beta''}$, \dots , le nombre des classes est lui-même multiplié respectivement par $q'^{\beta'} \left[1 - \left(\frac{D}{q'} \right) \frac{1}{q'} \right]$, $q''^{\beta''} \left[1 - \left(\frac{D}{q''} \right) \frac{1}{q''} \right]$, \dots . On a donc l'équation

$$(10) \quad h' = h S \Pi \left[1 - \left(\frac{D}{q} \right) \frac{1}{q} \right],$$

où Π indique le produit de toutes les valeurs que prend le binôme $1 - \left(\frac{D}{q} \right) \frac{1}{q}$, lorsqu'on égale q aux diviseurs premiers inégaux de S , qui ne sont pas en même temps diviseurs de D .

19. Pour un déterminant positif D , nous poserons

$$S = m m' m'' \dots m_i,$$

en désignant par m, m', m'', \dots tous les facteurs premiers tant égaux qu'inégaux, du nombre S ; et nous représenterons par $T, U; \tau, \nu; \tau', \nu'; \tau'', \nu''; \dots T', U'$ les plus petits nombres entiers et positifs, qui vérifient respectivement les équations

$$\begin{aligned} T^2 - DU^2 = 1, \quad \tau^2 - D m^2 \nu^2 = 1, \quad \tau'^2 - D m^2 m'^2 \nu'^2 = 1, \\ \tau''^2 - D m^2 m'^2 m''^2 \nu''^2 = 1, \dots \quad T'^2 - DS^2 U'^2 = 1. \end{aligned}$$

Lorsqu'on passera du déterminant D aux déterminants $D m^2, D m^2 m'^2,$

$Dm^2 m'^2 m''^2, \dots DS^2$, le nombre des classes h sera multiplié successivement (16) par les facteurs

$$\begin{aligned} m & \left[1 - \left(\frac{D}{m} \right) \frac{1}{m} \right] \frac{l(T + U\sqrt{D})}{l(\tau + \upsilon m\sqrt{D})}, \\ m' & \left[1 - \left(\frac{Dm^2}{m'} \right) \frac{1}{m'} \right] \frac{l(\tau + \upsilon m\sqrt{D})}{l(\tau' + \upsilon' m m' \sqrt{D})}, \\ m'' & \left[1 - \left(\frac{Dm^2 m^3}{m''} \right) \frac{1}{m''} \right] \frac{l(\tau' + \upsilon' m m' \sqrt{D})}{l(\tau'' + \upsilon'' m m' m'' \sqrt{D})}, \\ & \dots \dots \dots \\ m_i & \left[1 - \left(\frac{\frac{1}{m_i} {}_2 DS^2}{n_i} \right) \frac{1}{m_i} \right] \frac{l(\tau_{i-1} + \upsilon_{i-1} \frac{S}{m^i} \sqrt{D})}{l(T' + U'S\sqrt{D})}. \end{aligned}$$

On aura donc, en supprimant les facteurs communs, et réduisant à zéro le symbole $\left(\frac{M}{p}\right)$ quand M est divisible par p ,

$$(11) \quad h' = h S \Pi \left[1 - \left(\frac{D}{q} \right) \frac{1}{q} \right] \frac{l(T + U\sqrt{D})}{l(T' + U'S\sqrt{D})}.$$

Les formules (10) et (11), jointes aux résultats obtenus dans les nos 12 et 13, ramènent la recherche du nombre des classes de formes quadratiques de même déterminant et de même ordre au cas où le déterminant n'est divisible par aucun carré, et où l'ordre considéré est proprement primitif. Elles font aussi connaître le rapport des nombres de classes pour deux déterminants dont le rapport est le carré d'un nombre rationnel quelconque.

V.

20. Posons $D = S^2 \omega$, S^2 désignant le plus grand carré qui divise D , et continuons à exprimer par $\varpi(n)$ le nombre des solutions de toutes les congruences G (n° 8). Les recherches suivantes ont pour point de départ la formule

$$\varpi(n) = \sum \left(\frac{\omega}{i} \right),$$

dans laquelle le signe \sum s'étend à tous les diviseurs de n , désignés indéfiniment par i . Quand le nombre n est premier à $2D$, elle revient aux deux théorèmes démontrés par Dirichlet au paragraphe VII du Mémoire cité (CRELLE, t. XXI, p. 1). Mais nous avons besoin de l'étendre à des valeurs impaires quelconques de n , dans le cas où $S = 1$.

Nous allons d'abord la démontrer pour une valeur quelconque S , mais en supposant n premier à $2D$. Nous reproduisons cette démonstration de Dirichlet pour ne pas obliger le lecteur à recourir à un recueil étranger.

Supposons d'abord que tous les facteurs premiers de n soient diviseurs de la formule $x^2 - \mathfrak{D}$; et posons

$$n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} \dots$$

Chacune des congruences $x^2 - \mathfrak{D} \equiv 0 \pmod{\frac{n}{e^2}}$ admet un nombre de solutions égal à 2^μ , en désignant par μ le nombre des facteurs premiers inégaux du quotient $\frac{n}{e^2}$. Tout se réduit donc à faire la somme des diverses puissances 2^μ , qui correspondent à toutes les valeurs différentes de $\frac{n}{e^2}$. Pour cela, considérons le polynôme

$$F_1 = 2f_1^{\lambda_1} + 2f_1^{\lambda_1-2} + 2f_1^{\lambda_1-3} + \dots$$

qui doit être continué tant que les exposants ne sont pas négatifs, et dans lequel le coefficient du dernier terme est supposé égal à 2 ou à 1, suivant que l'exposant de ce terme est 1 ou 0. Le produit développé de ce polynôme et des polynômes analogues relatifs à f_2, f_3, \dots étant évidemment composé de tous les termes de la forme $2^\mu - \frac{n}{e^2}$, on obtiendra la somme des puissances 2^μ en remplaçant les nombres f_1, f_2, f_3, \dots par l'unité. Mais par ce changement les nombres F_1, F_2, \dots deviennent $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots$. Donc la somme cherchée est égale à $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1)\dots$, c'est-à-dire au nombre des diviseurs de n . Comme ce dernier nombre est égal à $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)$, le théorème est démontré dans ce premier cas.

Supposons maintenant

$$n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \dots,$$

en désignant par g les diviseurs premiers de n dont \mathbb{O} n'est pas résidu. Parmi les congruences G , dont la forme générale est

$$x^2 \equiv D \pmod{\frac{n}{e^2}},$$

il n'y aura de possibles que celles dans lesquelles le quotient $\frac{n}{e^2}$ ne renferme que des facteurs du premier genre f . Pour que cette condition soit remplie, il faut que e^2 soit multiple de $g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \dots$, ce qui exige que tous les exposants ν_1, ν_2, \dots soient pairs; et dans ce cas

$$\varpi(n) = (\lambda_1 + 1) (\lambda_2 + 1) (\lambda_3 + 1) \dots;$$

si au contraire l'un des exposants ν_1, ν_2, \dots est impair, aucune des congruences G n'est possible; de sorte que $\varpi(n) = 0$. Nous devons donc prouver que la somme $\sum \left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right)$ se réduit à $(\lambda_1 + 1) (\lambda_2 + 1) (\lambda_3 + 1) \dots$ dans le premier cas et à 0 dans le second. Pour cela faisons le produit des polynômes

$$1 + f_1 + f_1^2 + \dots + f_1^{\lambda_1}, \quad 1 + f_2 + f_2^2 + \dots + f_2^{\lambda_2}, \dots \quad 1 + g_1 + g_1^2 + \dots + g_1^{\nu_1}, \dots,$$

dont les termes sont les diviseurs de n . L'un quelconque de ces diviseurs étant désigné par K , on a $\left(\frac{\mathbb{O}}{K}\right) = 1$ ou $\left(\frac{\mathbb{O}}{K}\right) = -1$, suivant que le nombre des facteurs g contenus dans K est pair ou impair. La somme $\sum \left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right)$ est donc égale à la valeur que prend le produit

$$(1 + f_1 + f_1^2 + \dots + f_1^{\lambda_1}) (1 + f_2 + f_2^2 + \dots + f_2^{\lambda_2}) \dots (1 + g_1 + g_1^2 + \dots + g_1^{\nu_1}) \dots$$

lorsqu'on y remplace f_1, f_2, \dots par 1, g_1, g_2, \dots par -1 ; donc

$$\sum \left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) = (\lambda_1 + 1) (\lambda_2 + 1) (\lambda_3 + 1) \dots \frac{(-1)^{\nu_1} + 1}{2} \frac{(-1)^{\nu_2} + 1}{2} \dots$$

Or il est évident que cette expression se réduit à $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \dots$ quand tous les exposants ν_1, ν_2, \dots sont pairs, et à 0 quand l'un de ces exposants est impair. Donc :

THÉORÈME. — Si $D = \mathfrak{O}S^2$, S^2 désignant le plus grand carré que divise D , et que $\varpi(n)$ représente le nombre de toutes les solutions des congruences

$$(G) \quad x^2 \equiv D \pmod{n}, \quad x^2 \equiv D \pmod{\frac{n}{e^2}}, \quad x^2 \equiv D \pmod{\frac{n}{e'^2}}, \dots,$$

dans lesquelles n est un nombre premier avec $2D$, dont tous les diviseurs carrés, autres que 1, sont e^2, e'^2, \dots , le nombre $\varpi(n)$ est exprimé par la formule

$$(12) \quad \varpi(n) = \sum \left(\frac{\mathfrak{O}}{i} \right),$$

où la somme \sum doit être étendue à tous les diviseurs i de n .

Ce théorème, combiné avec celui du n° 10, donne les deux théorèmes de Dirichlet.

21. Soit $S = 1$, et par conséquent $D = \mathfrak{O}$. La formule (12) subsiste dans le cas même où n n'est pas premier avec \mathfrak{O} , pourvu que l'on convienne de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{\mathfrak{O}}{i} \right)$, lorsque i n'est pas premier avec \mathfrak{O} . En effet, posons

$$n = n' K l^2,$$

n' désignant un nombre impair premier avec \mathfrak{O} , K et l ne renfermant que des facteurs premiers diviseurs de \mathfrak{O} , et K n'étant divisible par aucun carré. La congruence

$$x^2 \equiv \mathfrak{O} \pmod{\frac{n}{e^2}}$$

est évidemment impossible, si le quotient $\frac{n}{e^2}$ renferme le carré d'un facteur premier de \mathfrak{O} ; elle n'est donc possible qu'autant que $e = \mu l$. Les seules congruences possibles parmi les congruences (G), sont donc celles

qui se rapportent aux modules $n'K, \frac{n'K}{\mu^2}, \frac{n'K}{\mu'^2}, \dots$. Donc

$$\varpi(n) = \varpi(n'K).$$

D'ailleurs le nombre des solutions de la congruence

$$x^2 \equiv \mathfrak{D} \pmod{\frac{n'K}{\mu^2}}$$

est le même que celui de la congruence

$$Kx_1^2 \equiv \frac{\mathfrak{D}}{K} \pmod{\frac{n'}{\mu^2}};$$

car dans la première congruence x doit être divisible par K . Or les deux congruences

$$Kx_1^2 \equiv \frac{\mathfrak{D}}{K} \pmod{\frac{n'}{\mu^2}}, \quad \text{et} \quad x^2 \equiv \mathfrak{D} \pmod{\frac{n'}{\mu^2}}$$

admettent le même nombre de solutions. Comme en outre les diviseurs carrés μ^2, μ'^2, \dots de $n'K$ sont les diviseurs de n' , le nombre $\varpi(n'K)$ de toutes les solutions des congruences

$$x^2 \equiv \mathfrak{D} \pmod{n'K}, \quad \pmod{\frac{n'K}{\mu^2}}, \quad \pmod{\frac{n'K}{\mu'^2}}, \dots$$

est le même que le nombre de toutes les solutions des congruences

$$x^2 \equiv \mathfrak{D} \pmod{n'}, \quad \pmod{\frac{n'}{\mu^2}}, \quad \pmod{\frac{n'}{\mu'^2}}, \dots$$

On a donc

$$\varpi(n) = \varpi(n').$$

Or la formule (12) est applicable au nombre n' . D'un autre côté, la convention qui réduit à zéro le symbole $\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)$, quand les nombres \mathfrak{D} et i ne sont pas premiers entre eux, réduit la somme $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)$, étendue à tous les diviseurs i de n , aux seuls termes qui se rapportent aux diviseurs de n' . On a donc toujours

$$\varpi(n) = \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right).$$

22. PROBLÈME. — *Trouver la limite du rapport $\frac{\sum \varpi(n)}{\mu}$, quand μ croît indéfiniment, et que la somme indiquée au numérateur s'étend à toutes les valeurs impaires de n , qui ne surpassent pas la limite μ .*

En remplaçant $\varpi(n)$ par la valeur que nous venons de trouver, on obtient

$$\sum \varpi(n) = \sum \sum \left(\frac{\mathcal{O}}{i} \right).$$

La première somme se rapporte au nombre impair n , que l'on fait varier de 1 à μ , et, pour chaque valeur de n , la seconde somme s'étend à tous les diviseurs i de n . Or le nombre de fois que le même terme $\left(\frac{\mathcal{O}}{i} \right)$ entrera dans cette double somme est égal au nombre des termes divisible par i dans la suite des nombres impairs 1, 3, 5, ... qui ne surpassent pas la limite μ . Or, en supposant μ impair, ce nombre est $E\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)$, $E(x)$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans x . En effet, posons

$$\mu = 2iK + 2r - 1.$$

La suite des nombres impairs 1, 3, 5, ..., μ pourra se partager en groupes de i termes chacun, à l'exception du dernier groupe qui n'aura que r termes :

$$\begin{aligned} & 1, 3, 5, \dots, i, \dots, 2i-1, \\ & 2i+1, 2i+3, \dots, 3i, \dots, 4i-1, \\ & (2K-2)i+1, (2K-2)i+3, \dots, (2K-1)i, \dots, 2Ki-1, \\ & 2Ki+1, 2Ki+3, \dots, 2Ki+2r-1. \end{aligned}$$

Chaque groupe de i termes contient un multiple de i , et un seul, tandis que le dernier groupe n'en contient aucun si $r < \frac{i+1}{2}$, et un seul si $r \geq \frac{i+1}{2}$. Le nombre des multiples impairs de i compris entre 1 et μ est donc K dans le premier cas, et $K+1$ dans le second cas; or c'est aussi la valeur de la formule $E\left(\frac{\mu+i}{2i}\right)$; car on a

$$E\left(\frac{\mu+i}{2i}\right) = E\left(\frac{2Ki+2r-i+i}{2i}\right) = K + E\left(\frac{r + \frac{i-1}{2}}{i}\right).$$

Nous pouvons donc poser

$$\sum_{\omega} \varpi(n) = \sum_i^{\mu} \left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) E\left(\frac{\mu+i}{2i}\right).$$

Soit $\mu = 8\mathbb{O}n^2 - 1$, et partageons la somme précédente en deux parties, l'une comprenant toutes les valeurs impaires de i , comprises de 1 à $8\mathbb{O}n - 1$, et l'autre s'étendant de $8\mathbb{O}n + 1$ à $8\mathbb{O}n^2 - 1$. Celle-ci pourra se partager en sommes partielles dont chacune s'étendra aux valeurs de i comprises entre deux multiples consécutifs de $8\mathbb{O}$; elle sera ainsi exprimée par la double somme

$$(A) \quad \sum_{K=n}^{n^2-1} \sum_1^{8\mathbb{O}-1} \left(\frac{\mathbb{O}}{l}\right) E\left(\frac{8K\mathbb{O} + \mu + l}{16K\mathbb{O} + 2l}\right),$$

dans laquelle nous écrivons $\left(\frac{\mathbb{O}}{l}\right)$ au lieu de $\left(\frac{\mathbb{O}}{8K\mathbb{O} + l}\right)$, à cause de l'égalité de ces deux expressions.

Si, pour une valeur de K , le second facteur $E\left(\frac{\mu + 8K\mathbb{O} + l}{16K\mathbb{O} + 2l}\right)$ ne change pas de valeur quand on fait varier l de 1 à $8\mathbb{O} - 1$, la somme partielle correspondante est nulle; car on a

$$(B) \quad \sum_1^{8\mathbb{O}-1} \left(\frac{\mathbb{O}}{l}\right) = 0.$$

D'ailleurs ce facteur ne peut changer qu'une fois de valeur dans l'une quelconque des sommes partielles qui, dans la formule (A), correspondent aux diverses valeurs de K . Supposons en effet que, pour une valeur de K , il y ait deux changements de valeurs; désignons par m la première valeur, et posons, pour abrégé, $8K\mathbb{O} + 1 = p$; on aurait les deux inégalités

$$m+1 > \frac{\mu+p}{2p} > m, \quad m-1 > \frac{\mu+p+8\mathbb{O}-2}{2p+16\mathbb{O}-4} > m-2;$$

d'où

$$\frac{\mu+p}{2p} - \frac{\mu+p+8\mathbb{O}-2}{2p+16\mathbb{O}-4} > m - (m-1),$$

$$\mu(8\mathbb{O}^2 - 2) > p(2p + 16\mathbb{O} - 4),$$

et *a fortiori*

$$8n^2\mathbb{O} \cdot 8\mathbb{O} > 2p^2 > 28^2\mathbb{O}^2n^2,$$

puisque $K \geq n$. Cette inégalité étant impossible, le second facteur dans la formule (A) ne peut changer qu'une seule fois de valeur dans l'une quelconque des sommes partielles qu'elle renferme. Soit f la valeur de l pour laquelle s'opère un changement de valeur. On aura, en se rappelant la formule (B),

$$\begin{aligned} \sum_i^{8\mathfrak{D}-1} \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \mathbf{E} \left(\frac{\mu + 8K\mathfrak{D} + l}{16K\mathfrak{D} + 2l} \right) &= m \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) - \sum_f^{8\mathfrak{D}-1} \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \\ &= - \sum_f^{8\mathfrak{D}-1} \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) = \sum_i^f \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right). \end{aligned}$$

La valeur numérique de cette somme partielle est donc inférieure à $2\mathfrak{D}$, et, par conséquent, on pourra l'exprimer par la formule $2\varepsilon\mathfrak{D}$, ε désignant un nombre compris entre -1 et $+1$.

Or pour $K = n$ on a

$$\mathbf{E} \left(\frac{\mu + 8n\mathfrak{D} + l}{16n\mathfrak{D} + 2l} \right) < \frac{1}{2} n + 1,$$

et pour $K = n^2 - 1$,

$$l = 8\mathfrak{D} - 1, \quad \mathbf{E} \left(\frac{\mu + 8K\mathfrak{D} + l}{16K\mathfrak{D} + 2l} \right) = 1;$$

donc, dans l'étendue de la somme (A), ce facteur ne peut pas changer de valeur pour un nombre de sommes partielles supérieur à $\frac{1}{2}n$. Chacune de ces sommes partielles ayant une valeur numérique inférieure à $2\mathfrak{D}$, et toutes les autres se réduisant à zéro, on aura

$$\sum_{8n\mathfrak{D}+1}^{\mu} \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \mathbf{E} \left(\frac{\mu + i}{2i} \right) = n\mathfrak{D}\varepsilon,$$

ε étant compris entre -1 et $+1$. D'un autre côté,

$$\sum_i^{8n\mathfrak{D}-1} \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \mathbf{E} \left(\frac{\mu + i}{2i} \right) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{\mu}{i} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \varepsilon_i, \quad -1 < \varepsilon_i < 1,$$

chaque produit $\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right)$ étant inférieur à l'unité, tantôt positif et tantôt négatif, il est évident que la somme $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \varepsilon_i$ est inférieure numéri-

quement au nombre de ses termes $4n\omega$. On a donc

$$\sum \left(\frac{\omega}{i}\right) E\left(\frac{\mu+i}{2i}\right) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{\mu}{i} + 4n\omega\varepsilon_1 + n\omega\varepsilon,$$

ε et ε_1 , étant compris entre -1 et $+1$. Si l'on divise par $\mu = 8n^2\omega - 1$, et qu'on fasse croître n indéfiniment, on trouve

$$(13) \quad \lim \frac{1}{\mu} \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) E\left(\frac{\mu+i}{2i}\right) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{1}{i} = \lim \frac{\sum \varpi(n)}{\mu}.$$

23. Nous avons vu (10) que, pour l'ordre proprement primitif du déterminant négatif ω , le nombre $\sum m$ dans l'équation (1) est égal à $2 \sum \varpi(n)$ ou à $4 \sum \varpi(n)$, suivant que l'on a $-\omega > 1$, ou $-\omega = 1$. De plus, pour nous mettre dans l'hypothèse de la formule (13) où n reçoit toutes les valeurs impaires inférieures à μ , il faut (n° 4) poser $\alpha = \beta = K = 2$. L'équation (1) deviendra donc

$$\frac{h\pi M}{2\sqrt{-\omega}} + M\eta = 2 \sum \varpi(n) = \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{\mu}{i} + n\omega(4\varepsilon_2 + \varepsilon).$$

En divisant par $\mu = 8n^2\omega - 1$, et faisant tendre n vers ∞ , on obtient

$$h = \frac{2\sqrt{-\omega}}{\pi} \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{1}{i}.$$

Cette équation, jointe à l'équation (10), donne, pour exprimer le nombre h des classes proprement primitives du déterminant négatif ωS^2 , la formule

$$(14) \quad h = \frac{2S\sqrt{-\omega}}{\pi} \Pi \left[1 - \left(\frac{\omega}{q}\right) \frac{1}{q} \right] \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{1}{i}.$$

Si $\omega = -1$, il faut doubler le second membre de cette équation.

24. De même, si ω est positif, l'équation (2), dans laquelle on fera $\alpha = \beta = K = 2$, afin que le nombre n puisse recevoir toutes les valeurs impaires inférieures à la limite M , pourra se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{hM}{4\sqrt{\omega}} l(T + U\sqrt{\omega}) + M\eta = \sum \varpi(n) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{\mu}{i} + n\omega(4\varepsilon_1 + \varepsilon);$$

car $\sum m = \sum \varpi(n)$ (n° 10). Or en divisant par μ , comme précédemment, et passant à la limite, on en déduit la formule

$$h = \frac{2\sqrt{\mathfrak{D}}}{l(\mathbf{T} + \mathbf{U}\sqrt{\mathfrak{D}})} \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i},$$

qui, combinée avec l'équation (11), donne, pour exprimer le nombre des classes proprement primitives du déterminant $\mathfrak{D}S^2$, l'équation

$$(15) \quad h = \frac{2S\sqrt{\mathfrak{D}}}{l(\mathbf{T}' + \mathbf{U}'S\sqrt{\mathfrak{D}})} \Pi \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{q}\right) \frac{1}{q} \right] \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}.$$

Dans cette formule, comme dans la précédente, q désigne indéfiniment tous les facteurs premiers inégaux de S , pour lesquels \mathfrak{D} n'est pas divisible.

La convergence de la série $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}$ est démontrée par la manière même dont nous l'obtenons; mais, comme les modules de cette série forment une série divergente, la limite vers laquelle tend $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}$ dépend de la loi suivant laquelle on s'avance parmi les termes positifs et les termes négatifs. Dans les formules précédentes, cette série doit être réduite à sa limite principale, celle vers laquelle elle tend quand on prend les valeurs de i dans l'ordre croissant de grandeur; car, dans la formule

$$\sum_i^{\mu} \varpi(n) = \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \mathbf{E} \left(\frac{\mu + i}{2i}\right),$$

on ne peut prendre aucune valeur de i supérieure à la limite de μ , et l'on ne prend aucune valeur de i sans prendre toutes celles qui lui sont inférieures.

25. Comme le nombre des classes proprement primitives h peut se déterminer directement, les formules précédentes donnent les limites principales des séries que l'on déduit de la série harmonique en affectant du signe -1 une partie de ses termes, suivant certaines lois déterminées. Nous en donnerons ici quelques exemples. Prenons d'abord la

formule (14) en y joignant $S = 1$, ce qui réduit à l'unité le produit $\Pi \left[1 - \left(\frac{\mathcal{O}}{q} \right) \frac{1}{q} \right]$, nous aurons

$$\sum \left(\frac{\mathcal{O}}{i} \right) \frac{1}{i} = \frac{\pi h}{2\sqrt{-\mathcal{O}}} \quad \text{et} \quad \sum \left(\frac{-1}{i} \right) \frac{1}{i} = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{1}{i} = \frac{\pi}{4}.$$

La seconde formule nous donne la série de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots,$$

soit $\mathcal{O} = -2$. Or $\left(\frac{-2}{i} \right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{8} + \frac{i-1}{2}} = 1$ ou -1 , suivant que i est de l'une des formes $8n+1, 3$, ou de l'une des formes $8n+5, 7$. On a donc, comme $h = 1$,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Pour $\mathcal{O} = -3$, on trouve

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \dots$$

Dans les deux premières séries, les termes $\frac{1}{8n+1}$ et $\frac{1}{8n+7}$ ont les mêmes signes, tandis que les autres termes ont des signes contraires. On aura donc, en les ajoutant,

$$\frac{(1+\sqrt{2})\pi}{8} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{38} - \dots$$

De même, en faisant $S = 1$ dans l'équation (15), on en déduit

$$\sum \left(\frac{\mathcal{O}}{i} \right) \frac{1}{i} = \frac{hl(T + U\sqrt{\mathcal{O}})}{2\sqrt{\mathcal{O}}}.$$

Soit $\mathcal{O} = 2$, on a

$$\left(\frac{2}{i} \right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{2}},$$

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \dots = \frac{l(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}};$$

25.

soit $\omega = 3$,

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \dots = \frac{l(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Ces exemples suffisent pour indiquer les applications que l'on peut faire des formules précédentes dans la théorie des suites.

VI.

26. Quand le déterminant ω est négatif, la transformation de la série $\sum \left(\frac{\omega}{i}\right) \frac{1}{i}$, que nous désignerons par V, met en évidence une relation remarquable entre le nombre des classes proprement primitives du déterminant $-n$ et l'exposant μ , qui permet de résoudre, au moyen de certaines fonctions θ , l'équation

$$4p^x = x^2 + ny^2,$$

dans laquelle p désigne un nombre premier de la forme $n\omega + 1$. Nous trouverons, pour exprimer le nombre des classes h , les mêmes fonctions numériques au moyen desquelles Cauchy a exprimé la valeur de l'exposant μ (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XVII). Nous commencerons par rappeler que la suite

$$(1) \quad \sin \varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \frac{\sin 7\varphi}{7} + \dots$$

est égale à $\frac{\pi}{4}$ lorsque φ est compris entre $2m\pi$ et $(2m+1)\pi$, et à $-\frac{\pi}{4}$ quand φ est compris entre $(2m+1)\pi$ et $(2m+2)\pi$, m désignant un entier quelconque.

Si dans la série (1) nous remplaçons φ par $\frac{\pi}{2} + \varphi'$, elle devient

$$(2) \quad \cos \varphi' - \frac{\cos 3\varphi'}{3} + \frac{\cos 5\varphi'}{5} - \frac{\cos 7\varphi'}{7} + \dots$$

Cette seconde série est donc égale à $\frac{\pi}{4}$ ou à $-\frac{\pi}{4}$, suivant que l'arc $\frac{\pi}{2} + \varphi'$ est compris entre $2m\pi$ et $(2m+1)\pi$, ou entre $(2m+1)\pi$ et $(2m+2)\pi$.

27. Posons dans la série (1) $\varphi = \frac{\pi}{4} \pm \varphi'$ et transformons le résultat au moyen de la formule

$$\begin{aligned} \sin p \left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi' \right) &= \sin p \frac{\pi}{4} \cos \varphi' \pm \cos p \frac{\pi}{4} \sin \varphi' \\ &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \frac{p-1}{2}} \frac{\cos p \varphi'}{\sqrt{2}} \pm (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \frac{\sin p \varphi'}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nous obtiendrons les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \frac{p-1}{2}} \frac{\cos p \varphi'}{p} + \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \frac{\sin p \varphi'}{p} &= (-1)^f \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \\ \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \frac{p-1}{2}} \frac{\cos p \varphi'}{p} - \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \frac{\sin p \varphi'}{p} &= (-1)^g \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

dans lesquelles f et g sont deux nombres entiers qui vérifient respectivement les deux équations

$$\frac{\pi}{4} + \varphi' = f\pi + \varphi'', \quad \frac{\pi}{4} - \varphi' = g\pi + \varphi''',$$

où φ'' et φ''' désignent deux arcs compris entre 0 et π . En combinant ces formules par addition et par soustraction, on obtient

$$(3) \quad \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \frac{p-1}{2}} \frac{\cos p \varphi'}{p} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} [(-1)^f + (-1)^g],$$

$$(4) \quad \sum (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \frac{\sin p \varphi'}{p} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} [(-1)^f - (-1)^g].$$

Dans ces formules les sommations indiquées s'étendent à toutes les valeurs impaires de p .

Nous emploierons aussi la formule suivante :

$$(5) \quad \sum \left(\frac{l}{n}\right) e^{l \frac{2m}{n} \pi \sqrt{-1}} = \left(\frac{m}{n}\right) \sqrt{-1}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n},$$

dans laquelle n est un nombre positif impair; $\left(\frac{p}{n}\right)$ est le symbole de Legendre généralisé par Jacobi, avec cette condition qu'on le réduise à zéro quand p et n ne sont pas premiers entre eux. La somme \sum s'étend à toutes les valeurs entières de l comprises entre 0 et n . On trouvera la démonstration de cette formule, soit dans le Mémoire de Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. XXI), soit dans les Notes X et XI du Mémoire de Cauchy indiqué plus haut (n° 26).

28. Soit d'abord $\mathbb{O} = -n$. Le nombre n étant impair, on a la relation

$$\left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) = \left(\frac{-1}{i}\right) \left(\frac{n}{i}\right) = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{i}{n}\right) (-1)^{\frac{i-1}{2} \frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{i-1}{2} \frac{n+1}{2}} \left(\frac{i}{n}\right);$$

donc

$$\left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) = \left(\frac{i}{n}\right), \text{ si } n = 4x + 3, \text{ et } \left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{i}{n}\right), \text{ si } n = 4x + 1.$$

Or la formule (6) devient

$$\sum \left(\frac{l}{n}\right) \sin \left(l \frac{2i\pi}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right) \sqrt{n} \text{ dans le premier cas, si } n = 4x + 3,$$

et

$$\sum \left(\frac{l}{n}\right) \cos \left(l \frac{2i\pi}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right) \sqrt{n} \text{ dans le second.}$$

On trouve donc

$$V = \sum \left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) \frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \frac{1}{i} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sin \left(i \frac{2l\pi}{n}\right), \text{ si } n = 4x + 3,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \frac{1}{i} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \cos \left(i \frac{2l\pi}{n}\right), \text{ si } n = 4x + 1.$$

Comme la seconde intégration relative à l ne s'étend qu'à un nombre limité de termes, on peut renverser l'ordre des intégrations : on a ainsi

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n} \right) \sum \frac{\sin \left(i \frac{2l\pi}{n} \right)}{i}, \quad \text{si } n = 4x + 3,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n} \right) \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{\cos \left(i \frac{2l\pi}{n} \right)}{i}, \quad \text{si } n = 4x + 1.$$

Si dans la série (1) nous faisons $\varphi = \frac{2l\pi}{n}$, φ sera compris entre 0 et π quand l sera l'un des nombres m' compris entre 0 et $\frac{1}{2}n$; φ sera compris entre π et 2π quand l sera l'un des nombres entiers m'' compris entre

$\frac{1}{2}n$ et n . Or la somme $\sum \frac{\sin \left(i \frac{2l\pi}{n} \right)}{i}$ est égale à $\frac{\pi}{4}$ dans le premier cas, à $-\frac{\pi}{4}$ dans le second : on a donc, si $n = 4x + 3$,

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \left[\sum \left(\frac{m'}{n} \right) - \sum \left(\frac{m''}{n} \right) \right], \quad 0 < m' < \frac{1}{2}n < m'' < n.$$

Or la relation

$$\sum \left(\frac{m'}{n} \right) + \sum \left(\frac{m''}{n} \right) = 0$$

donne

$$-\sum \left(\frac{m''}{n} \right) = \sum \left(\frac{m'}{n} \right).$$

On a donc

$$(6) \quad V = \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sum \left(\frac{m'}{n} \right), \quad n = 4x + 3, \quad 0 < m' < \frac{1}{2}n.$$

De même $\sum (-1)^{\frac{i+1}{2}} \frac{\cos \left(i \frac{2l\pi}{n} \right)}{i}$ est égal à $\frac{\pi}{4}$ quand l est compris entre 0 et $\frac{n}{4}$ ou entre $\frac{3n}{4}$ et n , et à $-\frac{\pi}{4}$ quand l est compris entre $\frac{n}{4}$ et $\frac{3n}{4}$. Si

donc nous désignons par μ , μ' , μ'' les nombres entiers compris respectivement dans ces trois intervalles, nous aurons

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \left[\sum \left(\frac{\mu}{n} \right) - \sum \left(\frac{\mu'}{n} \right) + \sum \left(\frac{\mu''}{n} \right) \right], \quad n = 4x + 1.$$

Or les valeurs de μ et μ'' se correspondent une à une par la formule $\mu'' = n - \mu$; d'ailleurs on a

$$\left(\frac{n - \mu}{n} \right) = \frac{\mu}{n},$$

donc

$$\sum \left(\frac{\mu''}{n} \right) = \sum \left(\frac{\mu}{n} \right).$$

D'un autre côté, la formule

$$\sum \left(\frac{\mu}{n} \right) + \sum \left(\frac{\mu'}{n} \right) + \left(\frac{\mu''}{n} \right) = 0$$

donne

$$-\sum \left(\frac{\mu''}{n} \right) = \sum \left(\frac{\mu}{n} \right) + \sum \left(\frac{\mu'}{n} \right) = 2 \sum \left(\frac{\mu}{n} \right).$$

On a donc

$$(7) \quad V = \frac{\pi}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{\mu}{n} \right), \quad n = 4x + 1, \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}n.$$

29. Soit $\mathfrak{D} = -2n$: on aura

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i} \right) = \left(\frac{-2}{i} \right) \left(\frac{n}{i} \right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{2} + \frac{i-1}{8}} \left(\frac{i}{n} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{i-1}{2}}.$$

1° Si $n = 4x + 1$,

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i} \right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{8} + \frac{i-1}{2}} \left(\frac{i}{n} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{i}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n} \right) \cos \left(i \frac{2l\pi}{n} \right).$$

2° Si $n = 4x + 3$,

$$\left(\frac{\mathbb{O}}{i}\right) = (-1)^{\frac{i^2-1}{8}} \left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sin\left(i \frac{2l\pi}{n}\right).$$

En substituant ces valeurs dans la série V, et intervertissant l'ordre des intégrations, on obtient

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sum \frac{(-1)^{\frac{i^2-1}{8} + \frac{i-1}{2}} \cos\left(i \frac{2l\pi}{n}\right)}{i}, \quad \text{si } n = 4x + 1,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) \sum \frac{(-1)^{\frac{i^2-1}{8}} \sin\left(i \frac{2l\pi}{n}\right)}{i}, \quad \text{si } n = 4x + 3.$$

La transformation de ces formules, au moyen des équations (3) et (4), donnera

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{2n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) [(-1)^f + (-1)^g],$$

ou

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{2n}} \sum \left(\frac{l}{n}\right) [(-1)^f + (-1)^g],$$

suivant que le nombre n sera de la forme $4x + 1$ ou de la forme $4x + 3$.

Dans ces formules, les intégrations s'étendent à toutes les valeurs de l premières avec n et inférieures à n ; les nombres entiers sont déterminés respectivement par les deux équations

$$\frac{2l}{n} + \frac{1}{4} = f + \varepsilon, \quad -\frac{2l}{n} + \frac{1}{4} = g + \varepsilon',$$

dans lesquelles ε et ε' doivent être compris entre 0 et 1. Or, quand le nombre l varie de 0 à $\frac{n}{8}$,

$$f = 0, \quad g = 0;$$

quand le nombre l varie de $\frac{n}{8}$ à $\frac{3n}{8}$,

$$f = 0, \quad g = -1;$$

quand le nombre l varie de $\frac{3n}{8}$ à $\frac{5n}{8}$,

$$f = 1, \quad g = -1;$$

quand le nombre l varie de $\frac{5n}{8}$ à $\frac{7n}{8}$,

$$f = 1, \quad g = -2;$$

quand le nombre l varie de $\frac{7n}{8}$ à n ,

$$f = 2, \quad g = -2.$$

Si nous désignons indéfiniment par l, l', l'', l''', l^{iv} les nombres entiers compris respectivement dans ces cinq intervalles, nous trouvons

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2n}} \left[\sum \left(\frac{l}{n} \right) - \sum \left(\frac{l''}{n} \right) + \sum \left(\frac{l^{iv}}{n} \right) \right], \quad \text{si } n = 4x + 1,$$

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2n}} \left[\sum \left(\frac{l'}{n} \right) - \sum \left(\frac{l'''}{n} \right) \right], \quad \text{si } n = 4x + 3.$$

Les nombres l^{iv} et l se correspondent deux à deux par la formule $l^{iv} = n - l$: donc

$$\sum \left(\frac{l^{iv}}{n} \right) = \sum \left(\frac{l}{n} \right).$$

De même, les nombres l'' peuvent se partager en deux groupes, les uns compris entre $\frac{3n}{8}$ et $\frac{n}{2}$, que nous désignerons par l_1 , et les autres compris entre $\frac{n}{2}$ et $\frac{5n}{8}$, qui seront donnés par la formule $n - l_1$. On a donc

$$\sum \left(\frac{l''}{n} \right) = 2 \sum \left(\frac{l_1}{n} \right),$$

et la première des deux formules obtenues devient

$$(8) \quad V = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \left[\sum \binom{l}{n} - \sum \binom{l_1}{n} \right], \quad n = 4x + 1, \quad 0 < l < \frac{n}{8}, \quad \frac{3n}{8} < l_1 < \frac{n}{2}.$$

Les nombres l' et l'' se correspondent deux à deux par la formule $l'' = n - l'$; d'ailleurs, le nombre n étant de la forme $4x + 3$, on a

$$\binom{n-l'}{n} = -\binom{l'}{n}, \quad \text{d'où} \quad \sum \binom{l''}{n} = -\sum \binom{l'}{n};$$

donc

$$(9) \quad V = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \sum \binom{l'}{n}, \quad n = 4x + 3, \quad \frac{n}{8} < l' < \frac{3n}{8}.$$

30. En substituant, dans la formule

$$h = \frac{2\sqrt{-\mathfrak{D}}}{\pi} \sum \binom{\mathfrak{D}}{i} \frac{1}{i} = \frac{2\sqrt{-\mathfrak{D}}}{\pi} V,$$

les valeurs de V que nous venons de trouver, nous obtiendrons, pour exprimer le nombre des classes proprement primitives pour un déterminant négatif \mathfrak{D} , les quatre formules suivantes :

$$\text{I.} \quad \mathfrak{D} = -n, \quad n = 4x + 3,$$

$$h = \sum \binom{m'}{n} = i - j, \quad 0 < m' < \frac{1}{2}n;$$

i désigne le nombre des termes de la suite $1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$, qui vérifient la condition $\binom{m'}{n} = 1$, et j le nombre de ceux qui vérifient la condition $\binom{m'}{n} = -1$.

$$\text{II.} \quad \mathfrak{D} = -n, \quad n = 4x + 1,$$

$$h = 2 \sum \binom{\mu}{n} = 2(\alpha - \beta), \quad 0 < \mu < \frac{n}{4}.$$

α désigne le nombre des termes de la suite $1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{4}$, qui vérifient la condition $\left(\frac{\mu}{n}\right) = 1$, et β le nombre de ceux qui vérifient la relation $\left(\frac{\mu}{n}\right) = -1$.

Quand le nombre n est premier, α est le nombre des résidus, et β celui des non-résidus compris entre 0 et $\frac{1}{4}n$.

$$\text{III.} \quad \textcircled{\text{D}} = -2n, \quad n = 4x + 1 > 1,$$

$$h = 2 \left[\sum \left(\frac{l}{n}\right) - \sum \left(\frac{l_1}{n}\right) \right], \quad 0 < l < \frac{n}{8}, \quad \frac{3n}{8} < l_1 < \frac{n}{2}.$$

Si l'on désigne par A et A' les nombres des valeurs l et l_1 , qui satisfont à la relation $\left(\frac{l}{n}\right) = 1$, par B et B' les nombres de celles qui vérifient la relation opposée $\left(\frac{l}{n}\right) = -1$, la formule précédente peut se mettre sous la forme suivante :

$$h = 2(A - B - A' + B'),$$

$$\text{IV.} \quad \textcircled{\text{D}} = -2n, \quad n = 4x + 3,$$

$$h = 2 \sum \left(\frac{l'}{n}\right), \quad \frac{n}{8} < l' < \frac{3n}{8}.$$

Lorsqu'on désigne par A le nombre des valeurs de l' qui vérifient la condition $\left(\frac{l'}{n}\right) = 1$, et par B le nombre de celles qui satisfont à la relation opposée, la formule obtenue prend la forme suivante :

$$h = 2(A - B).$$

31. Cauchy, dans la note XII du Mémoire cité, donne diverses transformations de la fonction numérique $i - j$, qui fournissent autant d'expressions diverses du nombre h . On a (p. 696)

$$i - j = \left[2 - \left(\frac{2}{n}\right) \frac{-\Delta_1}{n} \right] = \left[2 - \left(\frac{2}{n}\right) \right] \frac{-\Delta_2}{n^2}, \dots,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots$ désignant respectivement les sommes $\sum \binom{l}{n} l, \sum \binom{l}{n} l^2, \dots$ étendues à toutes les valeurs de l premières avec n et inférieures à n . En désignant ces valeurs par a ou par b , suivant qu'elles vérifient la relation $\binom{l}{n} = 1$, ou la relation opposée $\binom{l}{n} = -1$, on aura

$$h = i - j = \left[2 - \binom{2}{n} \right] \frac{\sum b - \sum a}{n} = \left[2 - \binom{2}{n} \right] \frac{\sum b^2 - \sum a^2}{n^2} = \dots$$

La première de ces transformations se trouve aussi parmi les formules de Dirichlet, qui donnent en outre une transformation analogue pour chacun des trois autres cas.

Quand n désigne un nombre premier $4x + 3$, la formule

$$h = \left[2 - \binom{2}{n} \right] \frac{\sum b - \sum a}{n}$$

est équivalente à celle que Jacobi a publiée dans le *Journal de Crelle*, (1832) et qu'il avait trouvée par induction.

Dans le même cas, où n est un nombre premier $4x + 3$, Cauchy donne une règle fort curieuse pour déterminer la différence $i - j$, et par suite le nombre des classes h : « Soit B_i le nombre de Bernoulli qui correspond à l'indice i , et n un nombre premier $4x + 3$; la différence $i - j$, définie plus haut (I), est déterminée par la congruence

$$i - j \equiv 2 B_{\frac{n+1}{4}}, \quad \text{si } n = 8l + 7,$$

et par la congruence

$$i - j \equiv -6 B_{\frac{n+1}{4}}, \quad \text{si } n = 8l + 3. »$$

Enfin, dans le même cas, on peut déterminer le nombre h au moyen d'un nombre limité d'opérations effectuées sur le déterminant, en introduisant la seule fonction numérique $E(x)$, que nous désignerons, pour abrégé, par $(x) =$ le plus grand entier contenu dans x . On a

$$h = \left[2 - \binom{2}{n} \right] \left[\frac{(2l+1)(4l+1)}{3} - 2 \sum_{i=1}^l i(\sqrt{in}) \right], \quad l = \frac{n-3}{4}.$$

VII.

32. Quand le déterminant \mathfrak{D} est positif, la transformation de la série $\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i}$ peut s'effectuer au moyen de la formule

$$(10) \quad \frac{1}{2} l \cot \frac{\varphi}{2} = \cos \varphi + \frac{\cos 3 \varphi}{3} + \frac{\cos 5 \varphi}{5} + \dots, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

que nous avons démontrée au n° 26. Nous nous bornerons à un seul cas, celui où

$$\mathfrak{D} = n = 4x + 1.$$

La formule (5) devient alors

$$\sum \left(\frac{m}{n}\right) \cos \left(m \frac{2i\pi}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right) \sqrt{n};$$

d'ailleurs

$$\left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) = \left(\frac{n}{i}\right) = \left(\frac{i}{n}\right);$$

donc

$$\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \frac{1}{i} \sum \left(\frac{m}{n}\right) \cos \left(m \frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{m}{n}\right) \sum \frac{\cos \left(i \frac{2m\pi}{n}\right)}{i}.$$

Or, d'après la formule (10), on a

$$\sum \cos \left(i \frac{2m\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} l \cot \frac{m\pi}{n},$$

si m est compris entre 0 et $\frac{n}{2}$. En y posant $\varphi = 2\pi - \varphi'$, on trouve

$$\sum \frac{\cos(i\varphi')}{i} = \frac{1}{2} l \cot \left(\pi - \frac{\varphi'}{2}\right); \quad \pi < \varphi' < 2\pi.$$

On a donc

$$\sum \frac{\cos \left(i \frac{2m\pi}{n}\right)}{i} = \frac{1}{2} l \cot \left(\frac{n-m}{n} \pi\right), \quad \frac{n}{2} < m < n,$$

et par conséquent

$$\sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left[\sum \left(\frac{m}{n}\right) l \cot \frac{m\pi}{n} + \sum \left(\frac{m'}{n}\right) l \cot \left(\frac{n-m'}{n}\pi\right) \right],$$

$$0 < m < \frac{n}{2} < m' < n.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{n-m'}{n}\right);$$

la seconde somme peut donc s'écrire

$$\sum \left(\frac{n-m'}{n}\right) l \cot \left(\frac{n-m'}{n}\pi\right) = \sum \left(\frac{m}{n}\right) l \cot \frac{m\pi}{n},$$

car chacune des valeurs de $n - m'$ est égale à l'une des valeurs de m .
En substituant dans la formule

$$h = \frac{2\sqrt{\mathfrak{D}}}{l(\mathbf{T} + \mathbf{U}\sqrt{\mathfrak{D}})} \sum \left(\frac{\mathfrak{D}}{i}\right) \frac{1}{i},$$

on obtient l'équation

$$(11) \quad h = \frac{2}{l(\mathbf{T} + \mathbf{U}\sqrt{n})} l \frac{\prod \cot \frac{a\pi}{n}}{\prod \cot \frac{b\pi}{n}},$$

dans laquelle nous désignons les nombres entiers premiers à n et compris entre 0 et $\frac{1}{2}n$ par a ou par b , suivant qu'ils vérifient la relation $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ ou la relation opposée $\left(\frac{b}{n}\right) = -1$.

Dirichlet, effectuant sa transformation par une autre méthode, trouve, dans le même cas,

$$h = \frac{2 - \left(\frac{2}{n}\right)}{l(\mathbf{T} + \mathbf{U}\sqrt{n})} l \frac{\prod \sin b \frac{\pi}{n}}{\prod \sin a \frac{\pi}{n}}.$$

Dans cette formule a et b ont la signification que nous venons d'indiquer; seulement les produits indiqués par Π s'étendent à toutes les valeurs de a et de b comprises entre 0 et n .

33. Pour obtenir les formules analogues à la formule (11) dans les autres cas, il faut transformer la formule (10) en y remplaçant φ par $\frac{\pi}{2} + \varphi'$, ou par $\frac{\pi}{4} \pm \varphi'$, comme nous avons fait aux nos 26 et 27 pour la série (1). Ces formules, combinées avec l'équation (5), conduiront aux formules cherchées par une méthode toute semblable à celle que nous venons de suivre dans le cas où $n = 4x + 1$. Nous n'insisterons pas davantage sur ces transformations, qui offrent moins d'intérêt que celles qui concernent les déterminants négatifs.