

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

ZENON MOSZNER

Sur deux « raréfactions » numériques définies par Émile Borel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 82, n° 2 (1965), p. 181-203

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_181_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX « RARÉFACTIONS » NUMÉRIQUES DÉFINIES PAR ÉMILE BOREL

PAR M. MAURICE FRÉCHET ET M. ZENON MOSZNER

INTRODUCTION. — Si Émile Borel a montré souvent qu'il pouvait s'égaliser aux plus habiles analystes, c'est par ses innovations qu'il faut surtout l'admirer.

Telle est, par exemple, son introduction de la notion de « raréfaction », qui lui permet d'établir une classification des ensembles de mesure nulle.

Nous sommes d'accord avec lui quand il écrit ⁽¹⁾ : « La théorie de la raréfaction, qui complète celle de la mesure est un sujet d'étude assez vaste; je souhaiterais qu'il tentât de jeunes chercheurs ».

Ce souhait ne semble pas avoir été exaucé. Peut-être nos Mémoires sur le sujet pourront-ils aider à y attirer l'attention. Si l'on y trouve plusieurs critiques, on devra se souvenir que pour nous toute définition due à Émile Borel mérite une étude, même si l'on ne peut la retenir exactement sous sa forme primitive.

LES QUATRE DÉFINITIONS. — Après avoir donné une première définition (qualitative, non numérique) de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle, Borel a donné deux autres définitions (celles-là numériques) de la raréfaction.

Dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽²⁾, l'un de nous a étudié la première définition, qui est très intéressante et à

⁽¹⁾ Voir p. 191 des *Éléments de la théorie des ensembles*, chez Albin Michel, 1949. L'étude de la raréfaction y est traitée au chapitre VI et dans la Note V.

⁽²⁾ M. FRÉCHET, *Une généralisation de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1245-1250).

laquelle Borel a été amené par ses travaux sur les « fonctions monogènes » et sur les probabilités nulles. Le même auteur a ensuite développé cette Note dans un Mémoire qui sera publié ailleurs ⁽³⁾. Mais il a dû modifier légèrement cette définition de la raréfaction et, d'autre part, constater que, dans ses démonstrations, Borel substitue implicitement une définition intuitive, non explicitée, de la raréfaction à celle qu'il avait d'abord donné explicitement.

En adoptant nos modifications, M. Zenon Moszner a obtenu de nouveaux résultats ⁽⁴⁾.

Les difficultés sont encore plus grandes quand on passe aux deux autres définitions de la raréfaction données par Borel ⁽⁵⁾. Celui-ci pose en effet, ses définitions sans dire quels sont les motifs qui l'ont amené à ces définitions.

**Raréfaction relative minimum
d'un ensemble de mesure nulle.**

Le présent Mémoire va être consacré à l'étude successive de ces deux définitions et surtout à celle qui va suivre.

CATÉGORIE Γ . — Borel a donné une définition de la « raréfaction relative minimum » d'un ensemble E , qui ne concerne que la catégorie Γ des ensembles de mesure nulle situés sur le segment $S(0 \leq x \leq 1)$, comprenant les points 0 et 1 et *non denses* sur S .

Autrement dit, dans tout sous-segment J de I , il y a au moins un intervalle ne comprenant aucun point de E .

Appelons intervalle d'exclusion pour E ou intervalle contigu à E , un intervalle ⁽⁶⁾ situé sur S , ne comprenant aucun point de E et qui ne peut être prolongé ni à droite, ni à gauche sans comprendre au moins un point de E .

Un point isolé de E sera alors le point séparant deux intervalles d'exclusion de E placés de part et d'autre de ce point.

Si E comprend un nombre fini de points (parmi lesquels figurent 0 et 1), E appartient à la catégorie Γ , et il a un nombre fini d'intervalles d'exclusion

⁽³⁾ M. FRÉCHET, *Les probabilités nulles et la raréfaction* (Ann. Inst. H. Poincaré).

⁽⁴⁾ Z. MOSZNER, *Remarques sur une notion de raréfaction d'un ensemble de mesure nulle* (C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 3556).

⁽⁵⁾ Voir dans l'Ouvrage de Borel cité en ⁽¹⁾, la page 306.

⁽⁶⁾ Dans ce mémoire nous appellerons intervalle, l'ensemble $(\alpha < x < \beta)$ des points intérieurs à un segment $(\alpha \leq x \leq \beta)$. Dans la catégorie Γ , chaque ensemble est l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun intervalle d'exclusion.

qui sont ceux qui ont pour extrémités deux points de E qui se suivent sur le segment S.

Il est clair que pour chaque ensemble E de la catégorie Γ , deux intervalles d'exclusion sont disjoints; mais ils peuvent avoir une extrémité commune appartenant à E. Si E a $p + 2$ points, il a $p + 1$ intervalles d'exclusion. Dans le cas où E a un nombre infini de points, il y aura nécessairement un nombre infini mais un ensemble dénombrable d'intervalles d'exclusion de E qui sont distincts.

On pourra les ranger par ordre de grandeur non croissante, A_1, A_2, \dots de longueurs

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots$$

Si E a $p + 2$ points, cette suite s'arrêtera à A_{p+1} et la suite des segments correspondants S_1, S_2, \dots, S_{p+1} devra couvrir $(0, 1)$, de sorte qu'on aura

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p+1} = 1.$$

Que E ait ou non un nombre fini d'intervalles d'exclusion, soit A_n l'un d'eux, soit B_n le plus petit des segments qui restent sur S, quand on en enlève A_1, \dots, A_n et soit b_n la longueur de B_n .

DÉFINITION DE LA RARÉFACTION R. — Borel pose

$$(1) \quad r_n = \frac{b_n}{a_n + b_n} \quad (\text{d'où } R_n \leq 1)$$

et il appelle « raréfaction relative minimum » de E (Voir p. 301, des *Éléments...* [cités en (1)] de Borel) « le plus grand nombre inférieur à tous les r_n ».

Mais quand E n'a qu'un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de r_n et il n'existe aucun nombre qui soit le plus grand de ceux qui sont inférieurs à un nombre fini de nombres. Nous croyons donc que, dans la pensée de Borel, il s'agissait de la *borne inférieure* des r_n .

Il faudrait donc désigner par r , la *borne inférieure* de tous les r_n , borne que nous appellerons plus précisément avec Borel, la « raréfaction relative minimum » de l'ensemble E.

Mais quand E est réduit aux deux points 0 et 1 et a, ainsi, intuitivement, la raréfaction maximum, on a

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \text{d'où} \quad r = r_1 = 0.$$

Il est donc plus naturel, puisque $0 \leq r_n \leq 1$, de remplacer dans ce cas r_1 par $1 - r_1$. Plus généralement, on verra qu'il est plus naturel de remplacer r_n par $R_n = 1 - r_n = \frac{a_n}{a_n + b_n}$ et la borne inférieure de r_n par la borne supérieure R_1 , de R_n . Nous appellerons R : la raréfaction relative *maximum* de E (ou plus brièvement la raréfaction R de E).

Quand l'ensemble E n'a qu'un nombre fini $p + 2$, de points (dont 0 et 1), on aura

$$b_{p+1} = 0, \quad \text{d'où} \quad R_{2p+1} = 1$$

et comme $R_n \leq 1$, la raréfaction R de E sera encore égale à 1.

D'ailleurs R peut être encore égal à 1 quand E est infini. C'est, par exemple, ce qui a lieu quand les intervalles A_n se succèdent, bout à bout, depuis 0, avec les longueurs $a_n = \frac{n}{(n+1)!} \left(= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$.

Nous allons maintenant donner quelques exemples.

EXEMPLE DE L'ENSEMBLE DE CANTOR. — On appelle ensemble ternaire de Cantor, l'ensemble C des points du segment (0, 1) qui restent quand on enlève d'abord le tiers du segment en conservant le même milieu, puis le tiers de chacun des deux segments restants en conservant dans chaque cas le même milieu, etc.... C'est un ensemble appartenant à la catégorie Γ . Chaque intervalle enlevé est un intervalle d'exclusion de E, soit, successivement, de longueur

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{9}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad \dots, \quad a_{2^s-3} = \frac{1}{3^{s-1}}, \quad \dots, \quad a_{2^s-1} = \frac{1}{3^s}, \dots$$

Soit $\frac{1}{3^s}$ la longueur de a_n . Celle de b_n sera aussi $\frac{1}{3^s}$, de sorte que

$$R_n = \frac{\frac{1}{3^s}}{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s}} = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1}{2},$$

EXEMPLES D'ENSEMBLES DÉNOMBRABLES. — Comparons maintenant deux ensembles E, F, dont les suites des longueurs

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2^2}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad \dots$$

des intervalles d'exclusion sont les mêmes. Mais les intervalles d'exclusion A_1, A_2, \dots pour E sont rangés sur (0, 1), à partir de 0 successivement, chacun accolé au précédent. Ceux de F viennent se placer alternativement à gauche et à droite de A_1 .

Pour E, on a évidemment

$$b_n = 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n = 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} = a_n;$$

d'où

$$R_n = \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad R = \frac{1}{2}.$$

Pour F; b_n est le plus petit des deux intervalles qui restent l'un à gauche, l'autre à droite de A_1, \dots, A_n .

Pour $n = 2p$, ces deux intervalles ont pour longueur b'_{2p} , b''_{2p} , avec

$$\begin{aligned} a_2 + \dots + a_{2p} + b'_{2p} &= a_2 + \dots + a_{2p} + a_{2p+2} + \dots, \\ a_3 + \dots + a_{2p-1} + b''_{2p} &= a_3 + \dots + a_{2p-1} + a_{2p+1} + \dots; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b'_{2p} &= \frac{1}{2^{2p+2}} + \frac{1}{2^{2p+4}} + \dots = \frac{1}{3 \cdot 2^{2p}}, \\ b''_{2p} &= \frac{1}{2^{2p+1}} + \frac{1}{2^{2p+3}} + \dots = 2b'_{2p}. \end{aligned}$$

Donc

$$b_{2p} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2p}} (= b'_{2p} < b''_{2p}),$$

d'où

$$R_{2p} = \frac{a_{2p}}{a_{2p} + b_{2p}} = \frac{\frac{1}{2^{2p}}}{\frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{2p}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Pour $n = 2p + 1$, b_{2p+1} est le plus petit des intervalles b'_{2p+1} , b''_{2p+1} , avec

$$a_2 + \dots + a_{2p} + b'_{2p+1} = a_2 + \dots + a_{2p} + a_{2p+2} + \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} b'_{2p+1} &= b'_{2p} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2p}}, \\ a_3 + \dots + a_{2p+1} + b''_{2p+1} &= a_3 + \dots + a_{2p+1} + a_{2p+3} + \dots, \\ b''_{2p+1} &= \frac{1}{2^{2p+3}} + \frac{1}{2^{2p+5}} + \dots = \frac{1}{2} b'_{2p} = \frac{1}{2} b'_{2p+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$b_{2p+1} = \frac{1}{2} b'_{2p+1} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2p+1}},$$

d'où

$$R_{2p+1} = \frac{\frac{1}{2^{2p+1}}}{\frac{1}{2^{2p+1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{2p+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$R_n = \frac{3}{4}$$

et par suite, pour F,

$$R = \frac{3}{4}.$$

Ainsi on voit qu'on peut citer deux ensembles E, F (formés chacun d'une infinité de points dont les deux suites de longueurs de leurs intervalles

d'exclusion sont *les mêmes* et qui ont pourtant *deux raréfactions R différentes*, à savoir, ici, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

Remarquons d'ailleurs que Borel a aussi défini une « raréfaction logarithmique » et que la valeur de celle-ci ne dépend que des longueurs des intervalles d'exclusion et non de leurs positions respectives.

Remarque. — Considérons le cas où les intervalles contigus à l'ensemble sont placés comme pour E. Alors, si r_n est le reste $a_n + a_{n+1} + \dots$ de la série $\sum a_i = 1$, on aura $b_n = r_{n+1}$,

$$R_n = \frac{a_n}{a_n + r_{n+1}} = \frac{a_n}{r_n}.$$

AUTRE EXEMPLE DÉNOMBRABLE. — Considérons l'ensemble G pour lequel $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Il appartient à la catégorie Γ et l'on a $r_n = \frac{1}{n}$ si l'on place les intervalles contigus à G comme, pour E. D'où

$$R_n = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+n}, \quad \text{d'où, pour la borne supérieure de } R_n \quad R = \frac{1}{2}.$$

Raréfaction logarithmique d'un ensemble de mesure nulle.

DÉFINITION. — Émile Borel a défini de la manière suivante la raréfaction logarithmique.

Il considère les ensembles appartenant à ce que nous appellerons la catégorie Λ ; chacun d'eux, E, situé sur le segment $S(0 \leq x \leq 1)$, est de mesure nulle et s'obtient en enlevant de S une infinité dénombrable d'intervalles disjoints dit contigus à E. Et l'on suppose que ces intervalles, n'ont pour extrémité, ni 0, ni 1. Il revient au même de définir la catégorie Λ comme une sous-famille des ensembles de la catégorie Γ restreinte aux ensembles de la catégorie Γ qui sont fermés et pour lesquels les points 0 et 1 ne sont pas des points isolés. Borel fait, en outre, une certaine hypothèse restrictive H dont nous parlerons plus loin (p. 190) et que nous laisserons de côté jusque-là. On peut ranger les intervalles contigus à E : A_1, A_2, \dots de longueurs a_1, a_2, \dots par ordre de grandeur non croissante :

$$(3) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots$$

Et comme E est de mesure nulle :

$$(4) \quad a_1 + a_2 + \dots = 1.$$

Soit alors $N(x) - 1$, le nombre nécessairement fini de ces intervalles A_i contigus à E_i , dont la longueur a_i est $\geq x > 0$. Puisque aucun n'a pour extrémité 0 ou 1, si on les enlève, il restera $N(x)$ segments. Soit $L(x)$ la somme des longueurs de ces segments restants et

$$u(x) = \frac{L(x)}{N(x)}$$

leur longueur moyenne.

Borel pose

$$(5) \quad \rho(x) = \frac{\log N(x)}{\log N(x) - \log L(x)} = \frac{\log N(x)}{-\log u(x)}$$

et il appelle « raréfaction logarithmique » de E , la plus grande des limites, ρ , de $\rho(x)$, quand $x \rightarrow 0$.

En posant pour simplifier l'écriture $n = N(x)$, on a ainsi (pour $x \leq a_1$) :

$$(6) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq x > a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \quad (7)$$

et

$$(7) \quad L(x) = 1 - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n + a_{n+1} + \dots,$$

d'où

$$(8) \quad \rho(x) = \frac{\log n}{\log n - \log(a_n + a_{n+1} + \dots)}.$$

On voit qu'on peut abrégér la définition de Borel en posant directement

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log n - \log(a_n + a_{n+1} + \dots)}.$$

Remarquons que les ensembles de la catégorie Λ contiennent chacun un nombre infini de points. Sans quoi, les intervalles contigus seraient les intervalles séparant deux points successifs de E et il y en aurait deux ayant pour extrémité l'un 0, l'autre 1, contrairement à l'hypothèse de Borel.

On voit alors que

$$-\log(a_n + a_{n+1} + \dots) > 0, \quad \text{donc} \quad \rho(x) < 1$$

et par suite :

$$0 \leq \rho(x) < 1, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

EXEMPLES. — Donnons maintenant quelques exemples :

I. Prenons $a_n = \frac{1}{2^n}$, d'où

$$a_n + a_{n+1} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\rho(x) = \frac{1}{1 + \frac{n-1}{\log n} \log 2}.$$

(7) On voit qu'on peut définir directement $N(x)$ comme le rang du premier des a_i qui sont inférieurs à x .

Dès lors, quand $x \left(\frac{1}{2^n} \right)$ tend vers zéro, $n \rightarrow \infty$ et $\rho(x) \rightarrow 0$. Ainsi, dans ce cas : $\rho = 0$.

II. Supposons maintenant $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on aura

$$a_n + a_{n+1} + \dots = \frac{1}{n},$$

d'où

$$\rho(x) = \frac{\log n}{\log n - \log \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Donc dans ce cas :

$$\rho = \frac{1}{2}.$$

III. Plus généralement, prenons

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \quad \text{où } 0 < \alpha < 1.$$

Comme pour les exemples précédents, on a

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \quad \text{et} \quad a_1 + a_2 + \dots = 1.$$

Ici

$$a_n + a_{n+1} + \dots = \frac{1}{n^\alpha},$$

d'où

$$\rho(x) = \frac{\log n}{\log n + \frac{1-\alpha}{\alpha} \log n} = \alpha, \quad \text{d'où } \rho = \alpha.$$

Ainsi, quel que soit le nombre α entre 0 et 1, il y a au moins un ensemble E appartenant à la catégorie Λ dont la raréfaction logarithmique est égale à α .

IV. On verra, plus loin, p. 199 que M. Moszner a donné un exemple d'un ensemble pour lequel $\rho = 1$.

Comparons maintenant les raréfactions logarithmiques ρ et ρ' d'un ensemble E de la catégorie Λ et de l'ensemble F obtenu en adjoignant un point P (distinct de 0 et 1) à E.

On suppose naturellement que P n'appartient pas à E. Comme nous voulons que l'ensemble obtenu après l'adjonction de P appartienne aussi à la catégorie Λ nous devons supposer que P appartient à l'un des intervalles contigus à E, soit à A_p .

On aura pour E, quand $x \leq a_1$:

$$a_1 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq x > a_n \geq a_{n+1} \dots$$

En prenant $x \leq a_p$, on aura $p < n$.

Pour F, les intervalles d'exclusion seront tous les A_i sauf A_p qui sera remplacé par deux intervalles A'_p, A''_p . De sorte qu'en rangeant par ordre de grandeur non croissante les intervalles d'exclusion pour F et les appelant A'_1, A'_2, \dots , de longueurs a'_1, a'_2, \dots , on aura d'abord

$$A'_1 \equiv A_1, \dots, A'_{p-1} \equiv A_{p-i}.$$

Désignons par U''_p , un des deux intervalles A'_p, A''_p qui n'est pas plus grand que l'autre, U'_p , et soient a', a'' leurs longueurs ($a' \geq a''$). On aura

$$a_{p-1} \geq a_p > a' \geq a''$$

de sorte que A'_p, A'_{p+1}, \dots seront les intervalles $U'_p, U''_p, A_{p+1}, A_{p+2}, \dots$, à ranger par ordre de grandeur. Soit $U''_q = A'_q$ ($q \geq p+1$). Les intervalles $A'_{q+1}, A'_{q+2}, \dots$ seront les intervalles A_i rangés par ordre de grandeur à partir de A_q . De sorte que, pour $x \leq a'_q$, on aura

$$A'_n \equiv A_{n-1}, \quad A'_{n+1} \equiv A_n, \quad \dots;$$

d'où pour $x \leq a'_q$:

$$N'(x) = N' \varphi(x) + 1, \quad L'(x) = L(x)$$

et

$$\rho'(x) = \frac{\log N'(x)}{\log N'(x) - \log L'(x)} = \frac{\log [N(x) + 1]}{\log [N(x) + 1] - \log L(x)},$$

$\rho'(x)$ étant ce que devient $\rho(x)$ quand on remplace E par F.

D'ailleurs

$$\log [N(x) + 1] = [\log N(x)] + \varepsilon(x),$$

avec

$$\varepsilon(x) = \log \left[1 + \frac{1}{N(x)} \right], \quad \text{qui tend vers zéro avec } x.$$

D'où

$$\rho'(x) = \frac{[\log N(x)] + \varepsilon(x)}{\log N(x) - \log L(x) + \varepsilon(x)} = \frac{\log N(x) + \varepsilon(x)}{\frac{\log N(x)}{\rho(x)} + \varepsilon(x)} = \rho(x) \left[\frac{1 + \omega(x)}{1 + \rho(x)\omega(x)} \right],$$

où $0 \leq \rho(x) < 1$ et

$$\omega(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\log N(x)}, \quad \text{qui tend aussi vers zéro avec } x.$$

Toutes les limites de $\rho(x)$ sont inférieures ou égales à la plus grande, ρ , des limites de $\rho(x)$. Donc toutes les limites de $\rho'(x)$ sont inférieures ou égales à ρ . L'une des limites de $\rho(x)$ est égale à ρ . Donc l'une des limites de $\rho'(x)$ est ρ .

Dès lors, la plus grande des limites, ρ' , de $\rho'(x)$ quand $n \rightarrow 0$ est égale à ρ ,

$$\rho' = \rho.$$

Ainsi quand on *adjoit un point* P du segment S à un ensemble E de la catégorie Λ , de sorte que P n'appartienne pas à E et que l'ensemble obtenu soit de la catégorie Λ , on obtient un ensemble F dont la raréfaction logarithmique est la même que celle de E.

Il en résulte immédiatement que cette propriété persiste quand on obtient F en adjoignant à E un nombre fini de points de l'intervalle $0 < x < 1$.

Il reste à savoir comment varie ρ quand on adjoint à E une infinité de points de cet intervalle (de façon que l'ensemble obtenu F reste dans la catégorie Λ).

Il serait conforme au sens intuitif du mot raréfaction (fut-elle logarithmique) de s'attendre à ce que si E_1 appartient à E_2 et si E_1 et E_2 appartiennent à la catégorie Λ , la raréfaction logarithmique de E_1 soit au moins égale à celle de E_2 . Nous nous contentons de poser la question.

Discontinuité modérée.

Pour parvenir à ses intéressants résultats reliant la raréfaction logarithmique à la « somme vectorielle » de deux ensembles, Borel a été amené à imposer aux ensembles de la catégorie Λ , la condition H suivante :

CONDITION H. — Les fonctions $N(x)$, $L(x)$ doivent être « modérément discontinues ». Il donne la définition suivante : « Une fonction positive $\varphi(x)$ croissant lorsque x varie dans l'intervalle ouvert $0 \rightarrow 1$ est dite modérément discontinue s'il existe un nombre Λ tel que, lorsqu'on donne une valeur quelconque x entre 0 et 1, on peut trouver un nombre positif h tel qu'on ait

$$(9) \quad \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} < \Lambda, \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x-h)} < \Lambda.$$

« La définition est analogue si la fonction $\varphi(x)$ au lieu d'être croissante est constamment décroissante ».

Nous comprenons que dans ce second cas, on a les mêmes inégalités (9) mais en prenant pour h un nombre *négligé* (sans quoi la condition serait toujours satisfaite et l'on pourrait prendre $\Lambda = 1$).

D'autre part, il importe, pour la suite, d'étendre la définition aux fonctions non décroissantes ou non croissantes.

CAS DES EXEMPLES PRÉCÉDENTS (p. 184). — On verra plus loin (p. 193) que dans ces exemples la condition H est vérifiée.

Notons que pour la définition de la raréfaction logarithmique, comme $\rho = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \rho(x)$, l'expression de $\rho(x)$ n'importe qu'à partir de petites valeurs de x . Il suffit donc de vérifier la condition (9) pour x assez petit, en particulier pour $x \leq a_1$. Alors on pourra toujours trouver un entier n et un seul tel que

$$a_{n-1} \geq x > a_n,$$

même s'il y a plusieurs a_k égaux à a_n . C'est ce nombre qui sera égal à $N(x)$, par définition. Et l'on aura

$$L(x) = a_n + a_{n+1} + \dots$$

On voit alors que quand x diminue, n ne peut décroître de sorte que $N(x)$ est une fonction non croissante et $L(x)$ une fonction non décroissante. De plus, pour x tel que

$$(10) \quad a_{n-1} > x > a_n$$

n est constant et par suite $N(x)$ et $L(x)$ sont constants (*). Alors, en prenant $|h|$ assez petit, $x \pm h$ seront aussi compris dans l'intervalle (10) et par suite, on aura,

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{N(x+h)}{N(x)} = \frac{N(x)}{N(x-h)} = 1 & \text{pour } h < 0; \\ \frac{L(x+h)}{L(x)} = \frac{L(x)}{L(x-h)} = 1 & \text{pour } h > 0. \end{cases}$$

Donc pour x dans cet intervalle, il suffira de prendre $A > 1$. Supposons maintenant, que x soit égal à l'un des nombres a_i . Il pourra être égal à plusieurs de ces nombres; soit a_{n-1} le dernier; le premier de ces nombres a_i égaux à x sera de la forme a_{n-p_n} où $p_n \geq 1$. On aura donc

$$a_1 \geq \dots \geq a_{n-p_{n-1}} > x = a_{n-p_n} = \dots = a_{n-1} > a_n$$

et par suite :

$$a_1 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq x > a_n.$$

Par définition (p. 187), $N(x) = n$.

Dès lors, quand $x = a_{n-1}$, on aura pour $|h|$ assez petit et $\neq 0$:

$$a_1 \geq \dots \geq a_{n-p_{n-1}} > x + |h| \geq x = a_{n-p_n} = \dots = a_{n-1} > a_n.$$

Donc

$$N(x + |h|) = n - p_n, \quad L(x + |h|) = a_{n-p_n} + \dots + a_n + \dots,$$

$$\frac{N(x)}{N(x-h)} = \frac{n}{n-p_n} \quad \text{pour } h < 0$$

$$(12) \quad \frac{L(x+h)}{L(x)} = \frac{a_{n-p_n} + \dots + a_{n-1}}{L(x)} + 1 \quad \text{pour } h > 0,$$

(*) On comprend bien, alors, que, dans la définition de Borel citée ci-dessus, il faut supposer $\varphi(x)$ non croissante ou non décroissante.

avec dans les deux cas :

$$(12 \text{ bis}) \quad a_{n-p_n-1} > a_{n-p_n} = \dots = a_{n-1} > a_n.$$

Pour $h < 0$ et $|h|$ assez petit, on aura

$$a_{n-p_n} = \dots = a_{n-1} = x > x + h > a_n,$$

d'où

$$N(x+h) - 1 = n - 1, \quad \text{d'où} \quad N(x+h) = n = N(x).$$

Pour $h > 0$ et $|h|$ assez petit :

$$a_{n-1} = x > x - h > a_n, \quad \text{d'où} \quad L(x-h) = a_n + a_{n+1} + \dots = L(x)$$

Ainsi pour $h < 0$ et $|h|$ assez petit :

$$\frac{N(x+h)}{N(x)} = 1 < \frac{n}{n-p_n} = \frac{N(x)}{N(x-h)}$$

et ces quantités seront $< A$ si l'on a encore $A > 1$ et

$$(13) \quad \frac{n}{n-p_n} < A.$$

De même, pour $h > 0$ et $|h|$ assez petit, si l'on pose $r_n = a_n + a_{n+1} + \dots$

$$\frac{L(x+h)}{L(x)} = \frac{r_{n-p_n}}{r_n}, \quad \frac{L(x)}{L(x-h)} = 1 < \frac{r_{n-p_n}}{r_n} = \frac{L(x+h)}{L(x)}$$

et ces quantités seront $< A$ si l'on a encore $A > 1$ et

$$(14) \quad \frac{r_{n-p_n}}{r_n} < A.$$

UN CAS SIMPLE. — Dans le cas le plus simple, celui où les a_1, a_2, \dots vont en décroissant, on a $p_n = 1$.

L'inégalité (13) devient

$$\frac{n}{n-1} < A$$

qui est vérifiée quel que soit $A > 1$, pour n assez grand.

Ainsi dans ce cas simple, $N(x)$ est modérément discontinu.

On verrait qu'il en est de même dans le cas encore plus général où p_n est seulement borné quand n varie. Car alors (13) peut s'écrire

$$\frac{1}{1 - \frac{p_n}{n}} < A,$$

où le premier membre tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

EXEMPLES PRÉCÉDENTS (p. 184). — Dans ces trois exemples a_n est une fonction décroissante de n , donc $N(x)$ est modérément discontinue.

Passons à $L(x)$. On a vu que pour $h > 0$:

$$\frac{L(x)}{L(x-h)} = 1.$$

Comme dans le cas actuel $p_1 = 1$, la formule (12) devient pour ces trois exemples :

$$\frac{L(x+h)}{L(x)} = \frac{a_{n-1}}{(Lx)} + 1 \quad \text{pour } h > 0, \text{ assez petit et } x = a_{n-1}.$$

Le second membre peut s'écrire $\frac{r_{n-1}}{r_n}$, en posant

$$r_n = a_n + a_{n+1} + \dots$$

Or pour $a_n = \frac{1}{2^n}$, $r_n = \frac{1}{2^{n+1}}$,

$$\frac{L(x+h)}{L(x)} = 2.$$

Pour

$$a_n = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}, \quad \beta \geq 0, \quad r_n = \frac{1}{n^\beta};$$

donc pour $x = a_n$, $h > 0$ et $|h|$ très petit :

$$\frac{L(x+h)}{L(x)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^\beta$$

qui tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$. Donc en prenant par exemple $A = 2$, on a

$$\frac{L(x+h)}{L(x)} < A \quad \text{pour } x \text{ assez petit.}$$

Pour $\beta = 1$, on a l'exemple II, pour $\beta > 0$ l'exemple III. On voit que dans les trois exemples $L(x)$ est aussi modérément discontinu.

En résumé, pour les trois exemples de la page 184, la condition H de la page 190, formulée par Borel, est vérifiée.

Remarque. — M. Moszner nous a communiqué deux exemples particuliers qu'on trouvera plus loin (p. 199 et 200) où, dans l'un, $L(x)$ et dans l'autre $N(x)$ ne sont pas modérément discontinus.

Nous avons ensuite traité le cas général, où p_n n'est pas supposé borné, comme ci-après.

CAS GÉNÉRAL ⁽⁹⁾. — Examinons maintenant le cas général où p_n n'est pas supposé borné. La suite des a_i sera de la forme

$$(15) \quad a_1 = \dots = a_{q_1-1} > a_{q_1} = \dots = a_{q_2-1} > a_{q_2} = \dots = a_{q_p-1} > a_{q_p} = \dots$$

⁽⁹⁾ Note de M. Fréchet. Nous avons rédigé cette fin de Mémoire après que M. Moszner nous eût communiqué deux exemples de fonction $L(x)$, $N(x)$ non modérément discontinues et reproduits plus loin, p. 199 et 200.

avec

$$q_1 < q_2 < \dots < q_p < \dots$$

ÉTUDE DE $N(x)$. — Pour chaque n tel que $a_{n-1} > a_n$, il y aura un p tel que

$$n = q_p, \quad n - p_n = q_{p-1}.$$

La condition (13) devient

$$\frac{q_p}{q_{p-1}} < A.$$

Supposons que ceci ait lieu à partir de $p = s$. En prenant $A > 1$, on aura alors successivement :

$$\begin{aligned} q_{s-1} < q_s < A q_{s-1}, \\ q_s < q_{s+1} < A q_s, \\ \dots, \\ q_{p-1} < q_p < A q_{p-1}, \\ \dots \end{aligned}$$

Une telle détermination des q_p , associée avec la condition $\sum a_i = 1$, soit :

$$\sum (q_p - q_{p-1}) a_{q_{p-1}} = 1,$$

fournira la fonction $N(x)$ modérément discontinue la plus générale.

On aura, au contraire, une fonction $N(x)$ qui n'est pas modérément discontinue si le quotient

$$(16) \quad \frac{q_p}{q_{p-1}}$$

n'est pas borné supérieurement quand $p \rightarrow \infty$. Par exemple, prenons

$$q_p = p!$$

alors le quotient (16) est égal à p et ne sera pas borné supérieurement.

Mais il ne faut pas oublier qu'on suppose

$$\sum a_p = 1 \quad \text{ou} \quad (q_1 - 1) a_1 + (q_2 - q_1) a_{q_1} + \dots + (q_p - q_{p-1}) a_{q_{p-1}} + \dots = 1.$$

On pourra toujours satisfaire à cette relation quand on a choisi les q_i , en prenant les a assez petits pour que

$$(17) \quad a_{q_{p-1}} = \frac{u_p}{q_p - q_{p-1}},$$

où les u_p sont supposés tels que

$$\sum u_p = 1, \quad \text{avec} \quad u_p > 0$$

et où les $a_{q_{p-1}}$ vont en décroissant, c'est-à-dire que

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \frac{q_{p+1} - q_p}{q_p - q_{p-1}}.$$

Par exemple, dans le cas de $q_p = p!$, il faudrait que

$$(18) \quad \frac{u_{p+1}}{u_p} < \frac{(p+1)! - p!}{p! - (p-1)!} = \frac{p! p}{(p-1)! (p-1)} = \frac{p^2}{p-1}.$$

D'où

$$u_p < u_2 (p-1)! (p-1).$$

Ainsi, dans le cas où l'on prend les u_p décroissants, on aura

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < 1 < \frac{p^2}{p-1}$$

et la condition (18) sera satisfaite.

Dès lors, on aura un exemple *très général* de fonction $N(x)$ qui n'est pas modérément discontinue en prenant les a vérifiant la condition (17) avec $q_p = p!$, c'est-à-dire

$$(19) \quad a_{q_{p-1}} = \frac{u_p}{q_p - q_{p-1}} = \frac{u_p}{(p-1)! (p-1)},$$

où les u_p sont > 0 , vont en décroissant, avec

$$\sum u_p = 1$$

et où ces u_p vérifient la condition (18).

UN EXEMPLE. — Pour présenter un exemple déterminé, prenons $u_p = \frac{1}{2^p}$.

On a bien $\sum u_p = 1$ et la condition (18) qui devient

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2}{p-1}$$

est satisfaite pour $p = 1, 2, \dots$. Avec $q_p = p!$, la condition (19) devient alors

$$(20) \quad a_{p!} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1}{p! p}.$$

La suite (15) devient

$$a_1 > a_2 = a_3 = \dots = a_5 > a_6 \dots a_{p!-1} > a_{p!} = \dots,$$

où les $a_{p!}$ ont la forme (20).

ÉTUDE DE $L(x)$. — De même, si l'on appelle r_n le reste $a_n + a_{n+1} + \dots$ de la série $\sum a_n = 1$, pour pouvoir prendre $\varphi(x) = L(x)$ dans les formules (9), pour $A > 0$, il faut et il suffit qu'on ait (p. 193)

$$\frac{r_{n-p_n}}{r_n} < A \quad \text{quel que soit } n$$

ou, avec les notations précédentes :

$$\frac{r_{q_{p-1}}}{r_{q_p}} < A.$$

En posant $\lambda_p = r_{q_p}$ pour simplifier l'écriture, il faudra donc que $\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}$ soit borné quand p croît. En même temps, puisque les restes de la série convergente $\sum a_i$ tendent vers zéro, il faudra que λ_p tende vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

On suppose que les a_i vont sans croître, donc

$$r_n - r_{n-1} \leq r_{n-1} - r_{n-2}$$

et d'après (15) :

$$(21) \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{q_2 - q_1} > \dots > \frac{\lambda_{p-1} - \lambda_p}{q_p - q_{p-1}} > \dots,$$

où, bien entendu :

$$(22) \quad \lambda_{p-1} > \lambda_p \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = 0.$$

On pourra en outre réaliser la condition $\sum a_i = 1$, c'est-à-dire

$$(q_2 - q_1) a_{q_1} + \dots + (q_p - q_{p-1}) a_{q_{p-1}} + \dots = 1.$$

Car en appelant $\sum u_i$ une série convergente à termes positifs et de somme égale à 1, on pourra toujours prendre $a_{q_{p-1}}$ tel que

$$(23) \quad \lambda_p - \lambda_{p+1} = r_{q_p} - r_{q_{p+1}} = (q_{p+1} - q_p) a_{q_p} = u_p.$$

Pour que les a_{q_p} aillent en décroissant, il faudra qu'on ait, en général

$$(24) \quad \frac{u_p}{q_{p+1} - q_p} > \frac{u_{p+1}}{q_{p+2} - q_{p+1}}.$$

On a ainsi un procédé très général pour obtenir des fonctions $L(x)$ qui sont ou non modérément discontinues.

UN EXEMPLE. — Pour donner un exemple où ces diverses conditions sont réalisées, prenons $q_p = p^2$. Il faudra, d'après (24) que

$$(25) \quad \frac{u_p}{2p+1} > \frac{u_{p+1}}{2p+3}.$$

Si l'on prend $u_p = \frac{1}{2^p}$, u_p sera positif, décroissant et tendant vers zéro avec $\sum u_p = 1$ et (25) deviendra

$$2(2p+3) > 2p+1$$

qui est évidemment réalisé. Il faudra alors prendre les λ , d'après (21) de sorte que

$$(26) \quad \frac{\lambda_{p-1} - \lambda_p}{2p-1} > \frac{\lambda_p - \lambda_{p+1}}{2p+1}, \quad \lambda_p - \lambda_{p+1} = u_p,$$

avec (25) et la condition que $\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}$ soit borné.

On aura, d'après (23)

$$\lambda_p - \lambda_{p+1} = \frac{1}{2^p}, \quad \lambda_{p-1} - \lambda_p = \frac{1}{2^{p-1}}, \quad \dots, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\lambda_1 - \lambda_p = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{p-1}} \quad \text{et} \quad \lambda_p = \lambda_1 - 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$$

et puisque $\lambda_p \rightarrow 0$ avec $\frac{1}{p}$, on doit avoir $\lambda_1 = 1$, d'où

$$\lambda_p = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Les conditions (25) seront bien vérifiées. Puisque

$$\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} = 2,$$

le premier membre est bien borné. Enfin (26) devient

$$\frac{\frac{1}{2^{p-1}}}{2p-1} > \frac{\frac{1}{2^p}}{2p+1} \quad \text{ou} \quad 2(2p+1) > 2p-1$$

qui est évidemment vérifié.

On aura alors d'après (17)

$$(2p+1) a_{p^2} = \frac{1}{2^{p+1}},$$

d'où finalement

$$(27) \quad a_{p^2} = \frac{1}{(2p+1) 2^{p+1}}.$$

En portant cette expression et celle : p^2 de q_p dans la suite (15) des a_i , on aura un exemple précis où q_p (donc p_n) croît indéfiniment et pour lequel $L(x)$ est modérément discontinu.

On a, d'après (23)

$$\lambda_{p-1} - \lambda_p = u_{p-1}, \quad \dots, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = u_1, \quad \text{d'où} \quad \lambda_1 - \lambda_p = u_1 + \dots + u_{p-1};$$

quand $p \rightarrow \infty$, on a à la limite :

$$\lambda_1 = 1, \quad \text{d'où} \quad \lambda_p = 1 - (u_1 + \dots + u_{p-1}) = u_p + u_{p+1} + \dots$$

Ainsi λ_p est décroissant, positif et tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$, $L(x)$ sera non modérément discontinu si $\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}$ n'est pas borné. Prenons $u_p = \frac{k}{e^{ep}}$, avec $k > 0$, tel que

$$(27 \text{ bis}) \quad 1 = \sum u_p = k \sum \frac{1}{e^{ep}}.$$

Cette dernière série est bien convergente puisque $\frac{1}{e^{ep}} < \frac{1}{e^p}$ terme d'une progression géométrique convergente. On aura alors

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} &= \frac{u_{p-1} + u_p + \dots}{u_p + u_{p+1} + \dots} = \frac{e^{-ep-1} + e^{-ep} + \dots}{e^{-ep} + \dots}, \\ \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} &= \frac{u_{p-1}}{u_p + u_{p+1} + \dots} + 1 = 1 + \mu_p, \\ \mu_p &= \frac{e^{-ep-1}}{e^{-ep} + e^{-ep+1} + \dots} = \frac{e^{ep-cp-1}}{1 + \nu_p}. \end{aligned}$$

Si l'on démontre que $1 + \nu_p$ est borné $< B$ ⁽¹⁰⁾, on aura

$$\mu_p > \frac{1}{B} e^{ep-1(e-1)}$$

et le dernier facteur tendant vers l'infini avec p , il en sera de même de μ_p et par suite de $\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}$.

Il faudra encore que d'après (21) :

$$(28) \quad \frac{1}{e^{ep}(q_{p+1} - q_p)} > \frac{1}{e^{ep+1}(q_{p+2} - q_{p+1})} \quad \text{ou} \quad e^{ep(e-1)}(q_{p+2} - q_{p+1}) > q_{p+1} - q_p.$$

Pour réaliser (28), il suffira de prendre successivement des entiers q_p , tels que

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = 1, \quad q_2 - q_1 = 1, \quad q_3 - q_2 = \frac{q_2 - q_1}{e^{e(e-1)}}, \quad \dots, \\ q_{p+2} - q_{p+1} = \frac{q_{p+1} - q_p}{e^{ep}(e-1)}, \quad \dots, \end{array} \right.$$

On aura alors finalement d'après (23) :

$$a_{q_p} = \frac{k}{(q_{p+1} - q_p) e^{ep}},$$

où $q_{p+1} - q_p$ est donné par (29) et k par (27 bis).

(10) En effet, $1 + \nu_p = e^{ep} [e^{-ep} + e^{-ep e} + \dots + e^{-ep e^k} + \dots]$, d'où

$$\nu_p \leq e^{ep} [e^{-ep} + \dots + e^{-ep k} + \dots] = e^{ep} \left[\frac{e^{-ep}}{1 - e^{-ep}} \right] = \frac{1}{1 - e^{-ep}} \leq \frac{1}{1 - e^{-e}};$$

on peut donc prendre $B = 1 + \frac{1}{1 - e^{-e}}$.

COMMENTAIRE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT

PAR M. ZENON MOSZNER

(Cracovie).

I. (*Voir* p. 188, IV.) — Il me semble qu'il serait indiqué de donner un exemple d'un ensemble qui a la raréfaction $\rho = 1$.

Posons

$$a_n = \exp e \left[\exp \left\{ - \frac{\log n + e}{\log(\log n + e)} \right\} - \exp \left\{ - \frac{\log(n+1) + e}{\log\{\log(n+1) + e\}} \right\} \right],$$

où $\exp x = e^x$.

Puisque la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{\log x + e}{\log(\log x + e)}$$

est positive pour $x > 1$, alors $a_n > 0$.

De plus

$$\sum_{v=n}^{\infty} a_v = \exp e \exp \left\{ - \frac{\log n + e}{\log(\log n + e)} \right\},$$

d'où

$$\rho(n) = \frac{\log n}{\log n - e + \frac{\log n + e}{\log(\log n + e)}} \rightarrow 1 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

alors $\rho = 1$.

II. (*Voir* la note en bas de la page 193.) — Il me semble qu'il serait indiqué de donner un exemple d'un ensemble pour lequel la fonction $L(x)$ n'est pas modérément discontinue.

Posons dans ce but :

$$a_n = \frac{1}{n^n} - \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Nous avons

$$a_n + a_{n+1} + \dots = \frac{1}{n^n}.$$

Puisque

$$\frac{\log n}{\log n - \log \frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

alors $\rho = 0$.

D'après la définition de la fonction $L(x)$ on a pour $x = a_{n-1}$ et pour chaque $h > 0$, l'inégalité

$$\frac{L(x+h)}{L(x)} \geq \frac{a_{n-1} + a_n + \dots}{a_n + a_{n+1} + \dots} = \frac{\frac{1}{(n-1)^{n-1}}}{\frac{1}{n^n}} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty,$$

et de là résulte que la fonction $L(x)$ n'est pas modérément discontinue.

III. (Voir la note en bas de la page 193.) — La fonction $N(x)$ peut ne pas être modérément discontinue.

En effet, posons

$$a_1 = \frac{1}{2},$$

et pour $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$a_\nu = \frac{1}{(n+1)^{n+1} - n^n} \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{pour } \nu = n^n + 1, \quad n^n + 2, \quad \dots, \quad (n+1)^{n+1}.$$

On a

$$a_k \geq a_{k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

De plus

$$a_{(n+1)^{n+1}} < a_{n^n}.$$

Pour $x = a_{(n+1)^{n+1}}$, nous avons

$$N(x) = (n+1)^{n+1}$$

et pour chaque $h < 0$:

$$N(x-h) \leq n^n.$$

De là

$$\frac{N(x)}{N(x-h)} \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty;$$

alors $N(x)$ n'est pas modérément discontinue.

REMARQUES COMPLÉMENTAIRES. — I. Omettons dans la définition de la catégorie Λ seulement la condition que tout ensemble de cette catégorie doit posséder une mesure nulle, et désignons par Λ^* cette catégorie modifiée.

Remarquons qu'il existe des ensembles de la catégorie Λ^* qui ont une mesure positive. Tel est, par exemple, l'ensemble Z qu'on obtient en éliminant de l'intervalle fermé $[0, 1]$, l'un après l'autre, des intervalles ouverts $\delta_1, \delta_2, \dots$ formés comme dans le cas de l'ensemble de Cantor, mais pas de longueur $\frac{1}{3^n}$, seulement de longueur $\frac{1}{4^n}$. On voit facilement

que l'ensemble Z est de catégorie Λ^* et qu'il possède la mesure positive $\left(= \frac{1}{2} \right)$.

Chaque ensemble de la catégorie Λ^* qui ne possède pas la mesure zéro (c'est-à-dire un ensemble de mesure positive ou un ensemble non mesurable), a la raréfaction logarithmique $\rho = 1$.

En effet, dans ce cas : $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = a < 1$ et

$$\frac{\log n}{\log n - \log[1 - (a_1 + \dots + a_{n-1})]} = \frac{1}{1 - \frac{\log[1 - (a_1 + \dots + a_{n-1})]}{\log n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On a alors pour l'ensemble Z , défini ci-dessus, $\rho = 1$.

De plus, la raréfaction relative minimum $r = \frac{3}{5}$ pour l'ensemble Z .

II. É. Borel dans son livre *Éléments de la théorie des ensembles* à la page 198 a posé la question « de savoir s'il existe des ensembles non dénombrables qui sont plus raréfiés que tout ensemble non dénombrable donné ? ».

Il est évident que le terme « plus raréfiés » dans cette question doit être remplacé par « au moins aussi raréfiés », car aucun ensemble ne peut pas être plus raréfié que lui-même.

La réponse à cette question est dans le cas de la raréfaction relative minimum r (pour les ensembles de catégorie Γ) négative et pour le cas de la raréfaction ρ (pour les ensembles de catégorie Λ) positive.

En effet, il n'existe pas d'ensembles de catégorie Γ pour lesquels $r = 1$.

De plus, pour chaque nombre α , tel que $0 < \alpha < 1$, il existe un ensemble de catégorie Γ , non dénombrable, pour lequel $r = \alpha$.

Désignons, pour démontrer cela, par E , l'ensemble qu'on obtient en éliminant de l'intervalle fermé $[0, 1]$, l'un après l'autre, des intervalles ouverts $\delta_1, \delta_2, \dots$ formés comme dans le cas de l'ensemble de Cantor, mais pas de longueur $\frac{1}{3^n}$, seulement de longueur $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{n-1}$.

On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha}; & a_2 &= a_3 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{\alpha}{1+\alpha}; \\ a_4 &= a_5 = a_6 = a_7 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2, \dots, \\ a_{2^s} &= a_{2^s+1} = \dots = a_{2^{s+1}-1} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^s, \end{aligned}$$

pour $s = 0, 1, 2, \dots$

Il en résulte que $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = 1$, et, par suite, l'ensemble E a une mesure égale à zéro.

On voit aussi facilement que l'ensemble E est non dense dans $[0, 1]$ et que $0 \in E$ et $1 \in E$. L'ensemble E est donc un ensemble appartenant à la catégorie Γ . De plus, comme ensemble du type de Cantor, il est non dénombrable.

Soit

$$a_n = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^n.$$

Dans ce cas :

$$b_n = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{n+1},$$

et de là :

$$R_n = \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{1}{1 + \frac{b_n}{a_n}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}} = 1 - \alpha, \quad \text{d'où} \quad R = 1 - \alpha$$

et

$$r_n = 1 - R_n = \alpha, \quad \text{d'où} \quad r = \alpha.$$

Passons à présent à la raréfaction ρ . Remarquons d'abord qu'il existe pour chaque série :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

de nombres positifs a_n , pour laquelle $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = 1$, un ensemble de catégorie Λ , non dénombrable, dont les intervalles d'exclusion ont convenablement des longueurs a_1, a_2, \dots

En effet, prenons en considération l'ensemble A , construit comme suit. Posons

$$s_{11} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} + \dots,$$

$$s_{12} = a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + \dots$$

et éliminons de l'intervalle fermé $[0, 1]$ l'intervalle ouvert $\delta_1 = (s_{11}, 1 - s_{12})$ qui a la longueur a_1 . Il reste deux segments de longueur s_{11} et s_{12} .

Posons dans la suite :

$$s_{21} = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots,$$

$$s_{22} = a_6 + a_{10} + a_{14} + \dots$$

et éliminons de l'intervalle fermé $[0, s_{11}]$ l'intervalle ouvert

$$\delta_2 = (s_{21}, s_{11} - s_{22})$$

qui est de longueur a_2 . Il reste dans l'intervalle $[0, s_{11}]$ deux segments de longueurs s_{21} et s_{22} .

Posant

$$s_{23} = a_5 + a_9 + a_{13} + \dots,$$

$$s_{24} = a_7 + a_{11} + a_{15} + \dots,$$

éliminons de l'intervalle $[1 - s_{12}, 1]$ l'intervalle ouvert

$$\delta_3 = (1 - s_{12} + s_{23}, 1 - s_{24})$$

qui a la longueur a_3 . Il reste dans $[1 - s_{12}, 1]$ deux segments de longueurs s_{23} et s_{24} .

En procédant dans la suite par analogie, nous définissons les intervalles ouverts $\delta_4, \delta_5, \delta_6 \dots$ de longueurs $a_4, a_5, a_6 \dots$.

Posons

$$A = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n.$$

Puisque aucun des deux intervalles ouverts $\delta_1, \delta_2, \dots$ n'ont d'extrémité commune, l'ensemble A est parfait; il est donc non dénombrable. Les intervalles d'exclusion de A ont des longueurs a_1, a_2, \dots . D'après $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = 1$,

la mesure de A est donc zéro. L'ensemble A est ainsi de catégorie Λ .

Posons à présent :

$$a_n = \exp e \left[\exp \left\{ - \frac{\log n + e}{\log(\log n + e)} \right\} - \exp \left\{ - \frac{\log(n+1) + e}{\log\{\log(n+1) + e\}} \right\} \right].$$

et prenons en considération l'ensemble A construit comme plus haut.

L'ensemble A est de catégorie Λ et non dénombrable. Il est de raréfaction $\rho = 1$ (voir l'exemple I, p. 199), il est donc au moins aussi raréfié que tout ensemble non dénombrable donné.

