

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. BILLARD

**Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues,
uniformément convergentes**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 82, n° 2 (1965), p. 131-179

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_131_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SÉRIES DE FOURIER ALÉATOIREMENT BORNÉES, CONTINUES, UNIFORMÉMENT CONVERGENTES

PAR M. P. BILLARD.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR QUELQUES SÉRIES ALÉATOIRES.

INTRODUCTION. RAPPEL DE PROPRIÉTÉS. NOTATIONS.

Dans (1) nous nous sommes intéressés aux fonctions périodiques réelles aléatoires $F(x)$ définies par leurs séries de Fourier

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x + \Phi_n)$$

[ou par leurs séries de Fourier permutées

$$(1') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \cos(m_n x + \Phi_{m_n})$$

(m_n) étant une permutation de la suite des entiers, arbitraire mais fixée]

où la suite (a_n) est réelle fixée, les déphasages aléatoires réels Φ_n étant équirépartis modulo 2π et indépendants.

Parallèlement, nous nous sommes également intéressés au cas où les fonctions $F(x)$ étaient définies par les séries

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos n x$$

[ou à leurs permutées

$$(2') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_{m_n} \cos m_n x$$

]
 (m_n) étant une permutation de la suite des entiers, arbitraire mais fixée]
 la suite (a_n) étant encore réelle fixée et les signes \pm étant mis au hasard, indépendamment les uns des autres avec probabilités égales.

Nous avons étudié les propriétés suivantes :

- P_1 : Appartenance de $F(x)$ à L^∞ ;
- P_2 : Continuité de $F(x)$;
- P_3 : Convergence uniforme de la série de Fourier de $F(x)$;
- P_4 : Convergence uniforme de la série de Fourier permutée de $F(x)$.

Les équivalences : P_j presque sûre $\Leftrightarrow P_{j'}$ presque sûre ($j \neq j'$, $j, j' = 1, 2, 3, 4$) ont été obtenues pour (1).

Pour (2), seule l'équivalence : P_1 presque sûre $\Leftrightarrow P_2$ presque sûre, soulevait des difficultés. Néanmoins, nous avons observé que cette équivalence valait si valait la proposition suivante :

$$P_1 \text{ presque sûre pour (2)} \Rightarrow P_1 \text{ presque sûre pour (3)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \sin nx.$$

L'objet du paragraphe 1 est de résoudre cette question par l'affirmative ainsi que d'autres qui s'y rattachent, selon la méthode qui a été indiquée dans (II).

Au paragraphe 2 nous introduirons les propriétés suivantes :

- P_5 : Convergence en chaque point x de la série de Fourier de $F(x)$;
- P_6 : Convergence en chaque point x de la série de Fourier permutée de $F(x)$,

et nous montrerons les équivalences : P_j presque sûre $\Leftrightarrow P_{j'}$ presque sûre ($j \neq j'$, $j, j' = 1, \dots, 6$) pour les séries (2).

Au paragraphe 3 nous montrerons comment nous pouvons passer du cas fondamental des séries (2) à des cas très généraux.

Enfin au paragraphe 4 nous donnerons quelques indications sur les difficultés qu'il y a d'exprimer au moyen des $|a_n|$ ($n = 1, 2, \dots$) une condition nécessaire et suffisante pour que (2) satisfasse presque sûrement P_j ($j = 1, \dots, 6$).

Nous utiliserons les résultats suivants établis en détails dans (I).

PROPOSITION 1. — Si P_1 (ou P_2) est presque sûre pour (2), pour chaque suite réelle (λ_n) avec $0 \leq \lambda_n \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) P_1 (ou P_2) est presque sûre pour

$$(2'') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm \lambda_n a_n \cos nx$$

(Ici le fait d'utiliser une série de purs cosinus ou de purs sinus est sans importance).

PROPOSITION 2. — Si P_1 est presque sûre pour (2) et ses conjuguées (3), alors P_2 est presque sûre pour (2) et (3).

PROPOSITION 3. — Nous avons les équivalences

$$P_2 \text{ presque sûre pour (2)} \iff P_3 \text{ presque sûre pour (2)} \iff P_4 \text{ presque sûre pour (2')}$$

(Ici encore le fait d'utiliser une série de purs cosinus ou de purs sinus est sans importance.)

PROPOSITION 4. — Si P_1 est presque sûre pour (2) et ses conjuguées (3), alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (nx + \Phi_n)$$

du type (1) obtenue avec la suite (a_n) des coefficients de (2) a presque sûrement [au sens du champs de probabilités $[\Phi]$ des suites $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots)$ de déphasages] la propriété P_1 .

1. Faisons l'hypothèse (H) que (2) est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée.

Pour éviter des confusions dans les notations, nous écrirons également (2) sous la forme

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (nx + \omega_n),$$

où $\omega_n = 0$ ou π , $\omega_n \in \Omega_n$, $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, Ω étant le champ de probabilités.

T désignera le cercle trigonométrique avec sa mesure ordinaire de Lebesgue.

Pour chaque $\varphi \in T$ fixé, changeant x en $x + \varphi$ dans (2), nous obtenons les séries

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos (n\varphi) \cos (nx + \omega_n) - a_n \sin n\varphi \sin (nx + \omega_n)]$$

ou si l'on préfère

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(\pm) a_n \cos(n\varphi) \cos(nx) - (\pm) a_n \sin(n\varphi) \sin(nx)]$$

qui sont presque sûrement des séries de Fourier de fonctions bornées et, par changement de x en $-x$, il en est de même des séries

$$(4') \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(\pm) a_n \cos(n\varphi) \cos(nx) + (\pm) a_n \sin(n\varphi) \sin(nx)].$$

Ainsi en retranchant (4) de (4') nous obtenons que les séries

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\varphi) \sin(nx + \omega_n)$$

sont presque sûrement des séries de Fourier de fonctions bornées et, par application de la proposition 1 à la série (2), il en est de même pour les séries

$$(5') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\varphi) \cos(nx + \omega_n).$$

Les séries (5) étant les conjuguées des séries (5'), la proposition 2 montre que (5) et (5') sont presque sûrement des séries de Fourier de fonctions continues et par suite, d'après la proposition 1, les séries

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2(n\varphi) \cos(nx + \omega_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2(n\varphi) \sin(nx + \omega_n)$$

sont presque sûrement des séries de Fourier de fonctions continues, donc sont presque sûrement uniformément convergentes (proposition 3).

Ainsi, pour chaque $\varphi \in \mathbf{T}$ fixé, la première série (6) est presque sûrement uniformément convergente (au sens du champ Ω).

D'après le théorème de Fubini, il s'ensuit que la première série (6) est presque sûrement uniformément convergente au sens du champ produit $\mathbf{T} \times \Omega$. Ainsi, toujours d'après le théorème de Fubini, pour presque chaque suite $(\omega_n^0) \in \Omega$ fixée, la série

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2(n\varphi) \cos(nx + \omega_n^0)$$

est uniformément convergente pour presque chaque $\varphi \in \mathbf{T}$.

Fixons une telle suite (ω_n^0) et posons

$$(8) \quad G_N(\varphi) = \sup_{n > N} |s_{N,n}(x)|, \quad \text{où } s_{N,n}(x) = \sum_{p=N+1}^n a_p \sin^2 p\varphi \cos(px + \omega_p^0).$$

Pour presque chaque $\varphi \in T$ nous avons $G_N(\varphi) \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0$. Appliquant alors le théorème d'Egoroff et compte tenu de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, nous voyons que si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement fixé, il existe N_ε et un ensemble mesurable $E \subset T$ tels que

$$(9) \quad |E| \geq \frac{1}{2}, \quad \left[\sum_{p=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_p^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon, \quad \varphi \in E \Rightarrow G_{N_\varepsilon}(\varphi) \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions fixons arbitrairement $x = x_0$, $N' > N_\varepsilon$ et $\lambda = \pm 1$. Nous avons

$$\varphi \in E \Rightarrow \lambda \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \sin^2(p\varphi) \cos(px_0 + \omega_p^0) \leq \varepsilon,$$

soit

$$\varphi \in E \Rightarrow \lambda \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2p\varphi \right) \cos(px_0 + \omega_p^0) \leq \varepsilon,$$

d'où en intégrant sur E

$$\frac{\lambda}{2} |E| \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \cos(px_0 + \omega_p^0) - \frac{\lambda}{2} \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \left(\int_E \cos 2p\varphi d\varphi \right) \cos(px_0 + \omega_p^0) \leq \varepsilon |E|,$$

ce qui conduit à

$$(10) \quad \lambda \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \cos(px_0 + \omega_p^0) \leq 2\varepsilon + \frac{\lambda}{|E|} \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \left(\int_E \cos 2p\varphi d\varphi \right) \cos(px_0 + \omega_p^0).$$

Or

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{|E|} \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \left(\int_E \cos 2p\varphi d\varphi \right) \cos(px_0 + \omega_p^0) \\ & \leq \frac{1}{|E|} \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} |a_p| \cdot \left| \int_E \cos 2p\varphi d\varphi \right| \\ & \leq \frac{1}{|E|} \left[\sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} \left(\int_E \cos 2p\varphi d\varphi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{|E|} \leq 2 \quad \text{et} \quad \left[\sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \text{d'après (9),}$$

$$\left[\sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} \left(\int_E \cos 2p\varphi d\varphi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq [\pi |E|]^{\frac{1}{2}}$$

d'après la formule de Parseval, et puisque $[\pi|E|]^{\frac{1}{2}} \leq [2\pi^2]^{\frac{1}{2}} < 6$, nous avons d'après (10),

$$\lambda \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \cos(px_0 + \omega_p^0) \leq 2\varepsilon + 12\varepsilon = 14\varepsilon$$

de sorte que, λ étant arbitrairement ± 1 , nous sommes conduits à

$$(11) \quad \left| \sum_{p=N_\varepsilon+1}^{N'} a_p \cos(px_0 + \omega_p^0) \right| \leq 14\varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire ainsi que $N' > N_\varepsilon$ et x_0 , (11) montre la convergence uniforme de (2) pour $(\omega_n) = (\omega_n^0)$ et puisque ceci a lieu pour presque chaque $(\omega_n^0) \in \Omega$, la convergence uniforme de (2) est presque sûre (au sens de Ω). Ainsi l'hypothèse (H) entraîne la convergence uniforme presque sûre de (2) ce qui établit l'équivalence :

$$P_1 \text{ presque sûre pour (2)} \Leftrightarrow P_2 \text{ presque sûre pour (2)}.$$

Observons maintenant que si nous étions partis de la convergence uniforme presque sûre (au sens de $T \times \Omega$) de la deuxième série (6), les mêmes calculs aboutissaient à la convergence uniforme presque sûre (au sens de Ω) de

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx + \omega_n).$$

Ainsi (2) et (3) étant, en particulier, presque sûrement des séries de Fourier de fonctions bornées, il en est de même, d'après la proposition 4, des séries

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx + \Phi_n),$$

mais au sens du champ $[\Phi]$ de suites $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots)$ de déphasages.

Inversement, faisons l'hypothèse que les séries (1) sont presque sûrement (au sens de $[\Phi]$) des séries de Fourier de fonctions bornées. Le changement de Φ_n en $\Phi_n - \frac{\pi}{2}$ montre que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx + \Phi_n)$$

sont également presque sûrement séries de Fourier de fonctions bornées.

En écrivant ces séries sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \Phi_n \cos nx - a_n \sin \Phi_n \sin nx],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin \Phi_n \cos nx + a_n \cos \Phi_n \sin nx]$$

et en ajoutant à chacune celle que nous obtenons en changeant x en $-x$, nous voyons que presque sûrement (au sens de $[\Phi]$) les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \Phi_n \cos nx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \Phi_n \cos nx$$

sont des séries de Fourier de fonctions bornées.

De là, pour chaque suite $(\omega_n) \in \Omega$ fixée, il en est de même des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (\Phi_n + \omega_n) \cos nx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (\Phi_n + \omega_n) \cos nx.$$

D'après le théorème de Fubini, ces séries, ou si l'on préfère les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \Phi_n \cos (nx + \omega_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \Phi_n \cos (nx + \omega_n)$$

sont presque sûrement (au sens de $[\Phi] \times \Omega$) des séries de Fourier de fonctions bornées. Toujours d'après le théorème de Fubini, nous pouvons nous fixer une suite (Φ_n^0) telle que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (\Phi_n^0) \cos (nx + \omega_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (\Phi_n^0) \cos (nx + \omega_n)$$

soient presque sûrement (au sens de Ω) des séries de Fourier de fonctions bornées.

Utilisant alors la proposition 1, nous voyons que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 (\Phi_n^0) \cos (nx + \omega_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 (\Phi_n^0) \cos (nx + \omega_n)$$

sont presque sûrement (au sens de Ω), des séries de Fourier de fonctions bornées d'où finalement, en ajoutant, la même propriété pour les séries

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x + \omega_n).$$

Nous aboutissons ainsi à l'équivalence

P_1 presque sûre au sens de $[\Phi]$ pour (1) \Leftrightarrow P_1 presque sûre (au sens de Ω) pour (2),

de sorte que nous obtenons les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Si la série*

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos n x,$$

définie comme dans l'introduction est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée, elle est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue.

Même résultat pour une série de purs sinus.

THÉORÈME 2. — *Pour une suite (a_n) réelle fixée, les séries*

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x + \Phi_n),$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos n x,$$

définies comme dans l'introduction sont en même temps presque sûrement séries de Fourier de fonctions bornées.

Même résultat pour des séries de purs sinus.

L'équivalence P_1 presque sûre pour $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos n x \Leftrightarrow P_1$ presque sûre pour $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \sin n x$ que nous avons rencontrée peut s'exprimer au moyen des séries de puissances par le théorème suivant qui améliore le résultat de (I), page 311 d.

THÉORÈME 3. — *Si la série de puissances*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n z^n$$

où la suite (c_n) est complexe fixée, les signes \pm étant mis au hasard, indépendamment les uns des autres avec probabilités égales, représente presque

sûrement une fonction holomorphe dans le disque ouvert $|z| < 1$ dont la partie réelle est bornée dans ce disque, elle est presque sûrement uniformément convergente dans le disque fermé $|z| \leq 1$.

Comme nous l'avons fait observer dans (II), le théorème 2 permet d'atteindre le résultat suivant qui, précisément dans le cas de la série (2), échappe à l'énoncé général donné dans (III) page 11, théorème 3.

THÉORÈME 4. — Si la série

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx,$$

définie comme dans l'introduction est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée, alors nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$$

en posant

$$A_k = \left[\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Même résultat pour une série de purs sinus.

Démonstration. — En effet, d'après le théorème 2, la série

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (nx + \Phi_n),$$

définie comme dans l'introduction, est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction bornée. Or précisément dans le cas d'une série telle que (1), il résulte de (III), page 11, théorème 3, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty.$$

2. Reprenons le cas de la série

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx,$$

définie en introduction, que nous écrirons aussi sous la forme

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (nx + \omega_n),$$

où $\omega_n = 0$ ou π , $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, Ω étant le champ de probabilités.

Naturellement nous avons

$$P_3 \text{ presque sûre pour (2)} \Rightarrow P_5 \text{ presque sûre pour (2)},$$

Inversement, si nous avons P_5 presque sûre pour (2), il résulte du théorème 1 et de la proposition 3 que nous avons P_3 presque sûre pour (2) si nous avons P_1 presque sûre pour (2).

De là, d'après la loi du 0 ou 1, nous aurons l'équivalence

$$P_3 \text{ presque sûre pour (2)} \Leftrightarrow P_5 \text{ presque sûre pour (2)}$$

si nous montrons que les hypothèses

$$(H') \quad \begin{cases} (12) & P_5 \text{ presque sûre pour (2)}, \\ (13) & \text{non } P_1 \text{ presque sûre pour (2)} \end{cases}$$

aboutissent à une contradiction. Faisons donc les hypothèses (H').

D'après (13) nous sommes presque sûrs que la suite des sommes partielles de (2) n'est pas uniformément bornée, car à chaque fois qu'une série trigonométrique a ses sommes partielles uniformément bornées, elle est la série de Fourier d'une fonction bornée [cf. (IV), p. 136 et 148].

D'une façon générale, étant donnée une série trigonométrique

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos n_k x \quad (n_1 < n_2 < \dots),$$

les séries de la forme

$$(15) \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{k_j} \cos n_{k_j} x \quad (k_1 < k_2 < \dots)$$

seront appelées sous-séries de (14). L'opération consistant à former, à partir de (14) les deux sous-séries

$$(16) \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j} \cos n_{2j} x,$$

$$(17) \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j-1} \cos n_{2j-1} x$$

sera dite la décomposition en deux de (14) et (16), (17) seront dits les morceaux de la décomposition.

Cela étant, si nous décomposons en deux la série (2), un des deux morceaux soit S_1 a nécessairement ses sommes partielles presque sûrement non uniformément bornées.

Ainsi pour presque chaque $\omega \in \Omega$, il existe un plus petit entier $n(\omega)$ tel que la somme $s_{n(\omega)}^{(1)}$ de rang $n(\omega)$ de S_1 vérifie

$$\sup_x |s_{n(\omega)}^{(1)}(x)| > 2,$$

si donc l'entier N_1 est pris assez grand pour que

$$\text{Prob}[n(\omega) \leq N_1] > 1 - \frac{1}{2},$$

le polynôme trigonométrique aléatoire $s_{N_1}^{(1)}$ a, avec probabilité $> 1 - \frac{1}{2}$ des sommes partielles qui, en certains points x , dépassent 2 en valeur absolue.

Considérons alors la série S_1^* définie par $S_1^* = S_1 - s_{N_1}^{(1)}$ que nous décomposons en deux.

Un des deux morceaux, soit S_2 a nécessairement ses sommes partielles presque sûrement non uniformément bornées.

Ainsi nous pouvons choisir un entier $N_2 > N_1$ assez grand pour que, $s_n^{(2)}$ désignant la somme de rang n de S_2 , nous ayons

$$(18) \quad \text{Prob} \left[\sup_{N_1 < n \leq N_2} |s_n^{(2)}(x)| > 2^2 \right] > 1 - \frac{1}{2^2}.$$

Nous pouvons poursuivre indéfiniment cette construction. Dans ces conditions, nous formons la série

$$(19) \quad S^* = s_{N_1}^{(1)} + s_{N_2}^{(2)} + \dots + s_{N_k}^{(k)} + \dots$$

qui est une sous-série de (2) ayant les propriétés suivantes :

(20) S^* a presque sûrement ses sommes partielles non uniformément bornées;

(21) S^* est presque sûrement partout convergente;

(22) Quel que soit l'entier n , il existe un entier $N(n)$ tel que la série

$$S^* - s_{N(n)}^*$$

[où $s_{N(n)}^*$ désigne la somme de rang $N(n)$ de S^*] ait tous ses termes invariants par le changement de x en $x + \frac{2\pi}{2^n}$;

(23) Il existe un couple (ε, η) de nombres positifs ($\varepsilon > 0, \eta > 0$) tel que quel que soit l'entier N , il existe un bloc

$$U_{n,m} = s_m^* - s_n^* \quad (N \leq n < m)$$

de S^* , situé ainsi au-delà de N , tel que

$$\text{Prob} \left[\sup_x |U_{n,m}(x)| > \varepsilon \right] > \eta.$$

(20) résulte en effet de la définition (19) de S^* et des formules

$$\text{Prob} \left[\sup_{N_{k-1} < n \leq N_k} |s_n^{(k)}(x)| > 2^k \right] > 1 - \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

analogues à la formule (18) qui correspond à $k = 2$, car il est presque sûr que les événements entre crochets se réalisent à partir d'un certain rang (dépendant de hasard).

(21) résulte d'un raisonnement classique sur les sous-séries de (2) [cf (IV), p. 220].

(22) résulte immédiatement de la construction de S^* par décompositions en deux successives. Il suffit en effet de prendre pour $N(n)$ le rang le plus élevé des termes de

$$s_{N_1}^{(1)} + s_{N_2}^{(2)} + \dots + s_{N_n}^{(n)}.$$

(23) résulte enfin de ce que, dans le cas contraire, nous pouvons construire une suite croissante d'entiers

$$N_1^* < N_2^* < \dots < N_k^* < \dots$$

telle que

$$\text{Prob} \left[\sup_x |s_{N_k^* N_{k+1}^*} (x)| > \frac{1}{2^k} \right] \leq \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(où $s_{N_k^* N_{k+1}^*} = s_{N_{k+1}^*} - s_{N_k^*}$) d'où le fait que la suite (N_k^*) est une suite d'indices de convergence uniforme presque sûre de S^* , donc que S^* est presque sûrement série de Fourier de fonction continue, donc (proposition 3) que S^* est presque sûrement uniformément convergente, ce qui est une contradiction avec (20).

Utilisant maintenant (20) - (23), nous voyons la possibilité de sélectionner un bloc U_1 de S^*

$$U_1 = s_{n_1 m_1}^*, \quad n_1 < m_1 \quad \text{avec} \quad \text{Prob} \left[\sup_x |U_1(x)| > \varepsilon \right] > \eta.$$

Ce bloc U_1 admet une période de la forme $\frac{2\pi}{2^{\nu_1}}$ (ν_1 entier). En raison de la continuité de U_1 par rapport à x , pour chaque $\omega \in \left[\sup_x |U_1(x)| > \varepsilon \right]$ il existe un plus grand $\delta_1(\omega)$ tel que $0 < \delta_1(\omega) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{2^{\nu_1}} \right)$, pour lequel, dans un intervalle ouvert de longueur $\delta_1(\omega)$, nous avons $|U_1(x)| > \varepsilon$.

Nous en déduisons la possibilité de sélectionner $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \frac{2\pi}{2^{\nu_1}}$ assez petit pour que l'événement

$$A_1 = \left\{ \omega \in \left[\sup_x |U_1(x)| > \varepsilon \right], \quad \delta_1(\omega) \geq \delta_1 \right\}$$

vérifie $\text{Prob}(A_1) > \eta$. Nous énoncerons ainsi :

(E₁) Nous avons un bloc $U_1 = s_{n_1 m_1}^*$ ($n_1 < m_1$) de S^* ayant une période de la forme $\frac{2\pi}{2^{\nu_1}}$ (ν_1 entier), un nombre δ_1 avec $0 < \delta_1 < \frac{2\pi}{2^{\nu_1}}$, et un événement A_1 avec

$$\text{Prob}(A_1) > \eta$$

tel que pour chaque $\omega \in A_1$, il existe une chaîne $\mathcal{C}_1(\omega)$ de 2^{ν_1} intervalles ouverts de mesure commune δ_1 , ces intervalles étant obtenus à partir de l'un d'eux en effectuant les translations multiples de $\frac{2\pi}{2^{\nu_1}}$, de sorte que

$$x \in \mathcal{C}_1(\omega) \Rightarrow |U_1(x)| > \varepsilon.$$

Sélectionnons maintenant un nouveau bloc U_2 de S^* , $U_2 = s_{n_2 m_2}^*$ ($m_1 < n_2 < m_2$) avec

$$\text{Prob} \left[\sup_x |U_2(x)| > \varepsilon \right] > \eta,$$

où n_2 est pris suffisamment grand pour que U_2 admette une période de la forme $\frac{2\pi}{2^{\nu_2}}$ avec $\frac{2\pi}{2^{\nu_2}} < \frac{\delta_1}{4}$. Nous prendrons $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \frac{2\pi}{2^{\nu_2}}$ assez petit pour qu'il existe, avec une probabilité $> \eta$ un intervalle ouvert de longueur δ_2 sur lequel $|U_2(x)| > \varepsilon$. Nous énoncerons ainsi :

(E₂) Nous avons un bloc $U_2 = s_{n_2 m_2}^*$ ($m_1 < n_2 < m_2$) de S^* ayant une période de la forme $\frac{2\pi}{2^{\nu_2}}$ (ν_2 entier) avec $\frac{2\pi}{2^{\nu_2}} < \frac{\delta_1}{4}$, un nombre δ_2 avec $0 < \delta_2 < \frac{2\pi}{2^{\nu_2}}$, et un événement A_2 avec

$$\text{Prob}(A_2) > \eta$$

tel que pour chaque $\omega \in A_2$, il existe une chaîne $\mathcal{C}_2(\omega)$ de 2^{ν_2} intervalles ouverts de mesure commune δ_2 , ces intervalles étant obtenus à partir de l'un d'eux en effectuant les translations multiples de $\frac{2\pi}{2^{\nu_2}}$ de sorte que

$$x \in \mathcal{C}_2(\omega) \Rightarrow |U_2(x)| > \varepsilon.$$

Poursuivons indéfiniment cette construction. Nous formons ainsi une suite de blocs disjoints $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$ de S^* , de nombres entiers $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \dots$, de nombres positifs $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$ et d'événements $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ de sorte que l'énoncé de rang k est l'énoncé :

(E_k) Nous avons un bloc $U_k = s_{n_k m_k}^*$ ($m_{k-1} < n_k < m_k$) de S^* ayant une période de la forme $\frac{2\pi}{2^{\nu_k}}$ (ν_k entier) avec $\frac{2\pi}{2^{\nu_k}} < \frac{\delta_{k-1}}{4}$ un nombre δ_k avec $0 < \delta_k < \frac{2\pi}{2^{\nu_k}}$, et un événement A_k avec

$$\text{Prob}(A_k) > \eta$$

tel que pour chaque $\omega \in A_k$, il existe une chaîne $\mathcal{C}_k(\omega)$ de 2^{ν_k} intervalles ouverts de mesure commune δ_k , ces intervalles étant obtenus à partir de l'un d'eux en effectuant les translations multiples de $\frac{2\pi}{2^{\nu_k}}$, de sorte que

$$x \in \mathcal{C}_k(\omega) \Rightarrow |U_k(x)| > \varepsilon.$$

Observons maintenant que des inégalités $\text{Prob}(A_k) > \eta$ ($k = 1, 2, \dots$) résulte que presque sûrement, une infinité des événements A_k se réalisent.

Or si $\omega \in \Omega$ est tel qu'il existe une suite illimitée k_j ($k_1 < k_2 < \dots < k_j < \dots$) avec

$$\omega \in A_{k_j} \quad (j=1, 2, \dots)$$

nous déduisons aussitôt des conditions $\frac{2\pi}{2^{v_k}} < \frac{\delta_{k-1}}{4}$ ($k=2, 3, \dots$) que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_{k_j}(\omega) \neq \emptyset.$$

Prenant alors $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_{k_j}(\omega)$, nous avons

$$|U_{k_j}(x)| > \varepsilon \quad (j=1, 2, \dots)$$

ce qui montre, vu la disposition des blocs U_k , que S^* est divergente au point x .

Ainsi S^* admet presque sûrement un point de divergence, ce qui contredit (21).

Les hypothèses (H') aboutissant à une contradiction, nous avons, comme il a été observé au début du paragraphe, l'équivalence

$$P_3 \text{ presque sûre pour (2)} \iff P_5 \text{ presque sûre pour (2)}.$$

Si nous voulons établir un résultat analogue pour la série

$$(2') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_{m_n} \cos m_n x,$$

[[(m_n) étant une permutation de la suite des entiers, arbitraire mais fixée], c'est-à-dire, si nous voulons établir l'équivalence

$$P_4 \text{ presque sûre pour (2')} \iff P_6 \text{ presque sûre pour (2')},$$

le raisonnement fait au début du paragraphe s'appuyant sur le théorème 1 et la proposition 3, montre qu'il suffit d'établir que les hypothèses

$$(H'') \quad \begin{cases} (24) & P_6 \text{ presque sûre pour (2')} \\ (25) & \text{non } P_1 \text{ presque sûre pour (2')} \end{cases}$$

aboutissent à une contradiction. Pour ne pas alourdir, disons seulement que pour atteindre ce but, il suffit de reproduire la démonstration précédente, avec cette différence que les décompositions en deux successives sont celles relatives aux séries reprises dans leur ordre naturel.

Nous aboutissons ainsi à une sous-série S'^* de (2') ayant les propriétés (20)-(23), ce qui conduit, comme il a été montré, à une contradiction.

Finalement, avec la proposition 3, résumons avec le

THÉORÈME 5. — *Considérons une série*

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx,$$

définie comme dans l'introduction, ou l'une de ses permutées

$$(2') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_{m_n} \cos m_n x$$

(m_n) étant une permutation de la suite des entiers, arbitraire mais fixée.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

P_1 : (2) est presque sûrement série de Fourier d'une fonction bornée;

P_2 : (2) est presque sûrement série de Fourier d'une fonction continue;

P_3 : (2) est presque sûrement uniformément convergente;

P_4 : (2') est presque sûrement uniformément convergente;

P_5 : (2) est presque sûrement partout convergente;

P_6 : (2') est presque sûrement partout convergente.

Même résultat pour une série de purs sinus.

3. Le théorème 5 s'étend à des cas très généraux. D'une façon précise nous avons le

THÉORÈME 6. — *Le théorème 5 reste valable si les séries (2) et (2') sont remplacées par les séries*

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos (n x + \Phi_n)$$

$$(26') \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_{m_n} \cos (m_n x + \Phi_{m_n}),$$

où (m_n) est une permutation de la suite des entiers, arbitraire mais fixée. Les variables aléatoires X_n sont réelles, les variables aléatoires Φ_n sont à valeurs sur le cercle trigonométrique et nous supposons seulement que :

(α_1) Le système X_n, Φ_m ($n, m = 1, 2, \dots$) est un système de variables aléatoires indépendantes;

(α_2) Les variables aléatoires X_n sont symétriques (ce qui signifie que la loi de X_n est la même que celle de $-X_n$).

Même résultat pour des séries de purs sinus.

Démonstration. — Traitons par exemple l'équivalence

$$P_5 \text{ presque sûre pour (26)} \Leftrightarrow P_3 \text{ presque sûre pour (26)}.$$

Naturellement il suffit de montrer l'implication

$$P_5 \text{ presque sûre pour (26)} \Rightarrow P_3 \text{ presque sûre pour (26)}.$$

Désignons par Ω^* le champ de probabilités des X_n et Φ_n et soit toujours Ω le champ des suites de signes \pm , soit des suites $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots) \in \Omega$,

$$\varepsilon_n = \pm 1, \varepsilon_n \in \Omega_n, \Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Supposons P_3 presque sûre (au sens de Ω^*) pour (26) et considérons la série

$$(26^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n X_n \cos (n x + \Phi_n).$$

En raison des hypothèses (α_1) et (α_2) , pour chaque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ fixée, P_3 est presque sûre (au sens de Ω^*) pour (26*). D'après le théorème de Fubini, il en résulte que P_3 est presque sûre (au sens de $\Omega^* \times \Omega$) pour 26*; toujours d'après le théorème de Fubini, il en résulte aussi que pour presque chaque $\omega^* \in \Omega^*$ fixé, P_3 est presque sûre (au sens de Ω) pour (26*) et par suite, d'après le théorème 5, pour presque chaque $\omega^* \in \Omega^*$ fixé, P_3 est presque sûre (au sens de Ω) pour (26*).

Une nouvelle application du théorème de Fubini montre que P_3 est presque sûre (au sens de $\Omega^* \times \Omega$) pour (26*) et de là, nous pouvons nous fixer

$$\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_n^0, \dots)$$

de sorte que P_3 soit presque sûre (au sens de Ω^*) pour

$$(27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^0 X_n \cos (n x + \Phi_n).$$

Mais en raison des hypothèses (α_1) et (α_2) , P_3 presque sûre pour (27) $\Rightarrow P_3$ presque sûre pour (26) ce qui achève la démonstration.

4. Revenant encore à la série

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos n x$$

définie comme dans l'introduction, rappelons qu'il a été établi dans (III) que si nous supposons que la suite

$$A_k = \left[\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

décroit, alors la condition

$$(28) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$$

assure la convergence uniforme presque sûre de (2).

Ainsi, en raison du théorème 4, si nous supposons que la suite A_k ($k=1, 2, \dots$) décroît, la condition (28) apparaît comme nécessaire et suffisante pour que P_1 soit presque sûre pour (2).

Cependant, sans condition de régularité sur la suite $A_k (k = 1, 2, \dots)$ nous avons la

Remarque 1. — Il n'existe aucune fonction

$$\varphi(\lambda, n) \geq 0$$

définie pour $\lambda \geq 0$ et n entier > 0 , telle que

$$(29) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k, k) < \infty \iff P_1 \text{ presque sûre pour (2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx$$

ou ce qui revient au même

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k, k) < \infty \iff P_1 \text{ presque sûre pour (3)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \sin nx$$

puisque

$$P_1 \text{ presque sûre pour (2)} \iff P_1 \text{ presque sûre pour (3)}.$$

Démonstration. — Supposons qu'il existe $\varphi(\lambda, n) \geq 0$ telle que (29) ait lieu. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta_\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon > 0$ tels que

$$0 \leq \lambda < \eta_\varepsilon, \quad n \text{ entier} > N_\varepsilon \Rightarrow \varphi(\lambda, n) < \varepsilon.$$

En effet, dans le cas contraire, nous avons $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites λ_j, n_j avec

$$(30) \quad 0 \leq \lambda_j < \frac{1}{2^j}, \quad n_j \text{ entier} > 0, \quad n_{j+1} > n_j, \quad \varphi(\lambda_j, n_j) \geq \varepsilon_0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Prenons $a_n = 0$ sauf s'il existe j tel que $n = 2^{n_j}$ auquel cas nous prenons $a_n = \lambda_j$.

Nous avons d'après (30)

$$(31) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

$$(32) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k, k) = \infty,$$

ce qui est contradictoire puisque (31) implique P_1 presque sûre (même sûre) pour (2) alors que (32) implique non P_1 presque sûre pour (2) d'après notre hypothèse sur φ .

Cela étant, considérons par exemple la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{1}{\sqrt{n} \log(n+1)} e^{in_x}$$

pour laquelle non P_1 est presque sûre (théorème 4).

Le raisonnement qui a permis d'établir (23) montre qu'il existe $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et une suite de blocs

$$U_k(x) = \sum_{n=n_{k+1}}^{m_k} \pm \frac{1}{\sqrt{n} \log(n+1)} e^{inx} \quad (n_k < m_k < n_{k+1}, k=1, 2, \dots)$$

avec

$$(33) \quad \text{Prob} \left[\sup_x |U_k(x)| > \varepsilon \right] > \eta.$$

Pour une suite d'indices (n'_k) convenable, les blocs $U_k^* = e^{in'_k x} U_k$ sont tous situés dans les bandes $[2^{j_k} \leq n < 2^{j_{k+1}}]$ ($j_k < j_{k+1}$, $k=1, 2, \dots$) et, d'après (33), pour chaque k , l'une au moins des deux relations suivantes a lieu

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left[\sup_x |\mathcal{R} U_k^*(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right] &> \frac{\eta}{2}, \\ \text{Prob} \left[\sup_x |\mathcal{Y} U_k^*(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right] &> \frac{\eta}{2}, \end{aligned}$$

de sorte que nous avons une série du type (2) [ou sinon du type (3)] de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)$$

V_k étant un bloc ne faisant intervenir que des entiers de la bande $2^{j_k} \leq n < 2^{j_{k+1}}$ ($j_k < j_{k+1}$, $k=1, 2, \dots$) avec

$$(34) \quad \text{Prob} \left[\sup_x |V_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right] > \frac{\eta}{2} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Puisque $j_k \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \infty$, $A_{j_k} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$, ce que nous avons établi sur φ nous montre que $\varphi(A_{j_k}, j_k) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$ de sorte que nous pouvons sélectionner une suite k_l ($k_l < k_{l+1}$, $l=1, 2, \dots$) vérifiant

$$(35) \quad \sum_{l=1}^{\infty} \varphi(A_{j_{k_l}}, j_{k_l}) < \infty.$$

Notre hypothèse sur φ entraîne $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(0, k) < \infty$ ce qui montre, avec (35) que nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k, k) < \infty$$

pour la série $\sum_{l=1}^{\infty} V_{k_l}$ qui a donc presque sûrement la propriété P_1 , donc presque sûrement P_3 (théorème 5) ce qui est contredit par (34). Cette contradiction achève la démonstration.

Nous avons même la

Remarque 2. — Il n'existe aucune fonction

$$\varphi(\lambda, n) \geq 0$$

définie pour $\lambda \geq 0$ et n entier > 0 , telle que

$$(36) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|, n) < \infty \iff P_1 \text{ presque sûre pour } (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx.$$

Démonstration. — Supposons qu'il existe $\varphi(\lambda, n) \geq 0$ telle que (36) ait lieu. Nous en déduisons en particulier

$$(37) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0, n) < \infty.$$

Pour chaque $\lambda \geq 0$ posons

$$\psi(\lambda) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\lambda, n).$$

Montrons que $\liminf_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \lambda > 0}} \left[\frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \right] > 0$.

En effet, dans le cas contraire, nous avons une suite $\lambda_j > 0$ ($\frac{1}{2} > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$), $\lambda_j \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} 0$ telle que

$$\frac{\psi(\lambda_j)}{\lambda_j} < \frac{1}{2^j} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Nous pouvons, successivement pour $j = 1, 2, \dots$ sélectionner une suite finie d'entiers $n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \dots, n_{k_j}^{(j)}$ telle que

$$(38) \quad \frac{n_{p+1}^{(j)}}{n_p^{(j)}} > 2, \quad \frac{n_1^{(j+1)}}{n_{k_j}^{(j)}} > 2 \quad (p = 1, 2, \dots, k_j - 1, j = 1, 2, \dots)$$

avec

$$(39) \quad \varphi(\lambda_j, n_p^{(j)}) < \frac{1}{2^j}, \quad \frac{1}{2} \leq k_j \lambda_j \leq 1 \quad (p = 1, 2, \dots, k_j, j = 1, 2, \dots).$$

Considérons alors la série

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx,$$

où $a_n = 0$ sauf si $n = n_p^{(j)}$ ($1 \leq p \leq k_j$) auquel cas $a_n = \lambda_j$.

Cette série (2) est une série lacunaire d'après (38) et, d'après (39) nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$$

de là, non P_1 est presque sûre (et même sûre) pour cette série [cf. (IV), p. 247]

Par ailleurs, en vertu de (37) et (39), nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|, n) < \infty,$$

ce qui donne P_1 presque sûre pour (2) en raison de notre hypothèse sur φ de sorte que nous aboutissons à une contradiction.

Ainsi il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda_0 > 0$ tels que pour $0 < \lambda \leq \lambda_0$, il existe un entier N_λ avec

$$(40) \quad n \text{ entier} > N_\lambda \Rightarrow \varphi(\lambda, n) \geq \varepsilon \lambda,$$

Cela étant, considérons par exemple la série

$$(2^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm b_n e^{inx}$$

où $b_n = \frac{1}{2^k}$ pour $2^k \leq n < 2^{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) qui est presque sûrement uniformément convergente d'après ce qui a été dit au début de ce paragraphe.

Cette convergence uniforme presque sûre de (2*) avec $\sum_{p=1}^{\infty} b_p = \infty$ nous permet de former une suite de blocs

$$U_k(x) = \sum_{n=n_{k+1}}^{m_k} \pm b_n e^{inx} \quad (n_k < m_k < n_{k+1}, k = 1, 2, \dots)$$

avec

$$(41) \quad \sum_{n=n_{k+1}}^{m_k} b_n \geq 1, \quad \text{Prob} \left[\sup_x |U_k(x)| > \frac{1}{2^k} \right] < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Grâce à (40) et (41) construisons une suite croissante d'indices (n'_k) convenable pour que les blocs

$$U_k^*(x) = e^{in'_k x} U_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

qui sont disjoints correspondent à des bandes d'indices $[n_k + n'_k, m_k + n'_k]$ telles que

$$(42) \quad \sum_{n=n_{k+1}}^{m_k} \varphi(b_n, n + n'_k) \geq \varepsilon \sum_{n=n_{k+1}}^{m_k} b_n \geq \varepsilon,$$

de sorte que si nous considérons la série

$$(43) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} U_k^*$$

(que nous écrivons $\sum_{n=1}^{\infty} \pm b_n^* \cos nx$), nous avons, d'après (41) une série qui est presque sûrement une série de Fourier de fonction continue, tandis que d'après (42) nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|b_n^*|, n) = \infty$$

qui indique, d'après notre hypothèse sur φ , que non P_1 est presque sûre pour (43). Cette contradiction achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

(1^{re} partie.)

- (I) P. BILLARD, *Séries de Fourier aléatoirement bornées* (*Studia Mathematica*, t. 22, 1963, p. 310-330).
 - (II) P. BILLARD, *Séries de Fourier aléatoirement bornées* *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 4153-4155).
 - (III) J.-P. KAHANE, *Propriétés locales des fonctions* (*Studia Mathematica*, t. 19, 1960, p. 1-25).
 - (IV) A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, t. 1, 2^e édition, 1959.
-

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES ARCS PLACÉS AU HASARD SUR LE CERCLE.

INTRODUCTION. — T désignant le tore à une dimension de longueur 1, muni de sa mesure ordinaire de Lebesgue, nous considérons une suite

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$$

d'intervalles ouverts de T dont les mesures

$$|\Delta_n| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sont supposées fixées (la condition

$$(1) \quad 1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots$$

sera la plupart du temps supposée remplie) que nous plaçons au hasard sur T, indépendamment les uns des autres.

D'une façon plus précise, ω_n désignant le centre de Δ_n et Ω_n étant identique à T ($n = 1, 2, \dots$) nous introduisons le champ de probabilité

$$\Omega_{1,\infty} = \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n,$$

produit des Ω_n , ainsi $\omega \in \Omega_{1,\infty}$ est une suite $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$.

Une proposition très connue résultant immédiatement du théorème de Fubini appliqué au champ produit $T \times \Omega_{1,\infty}$ est la suivante :

(α) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$, nous sommes sûrs que l'ensemble $E = E(\omega) \subset T$ des points de T seulement un nombre fini de fois recouverts par les intervalles Δ_n est de mesure 1 sur T.

(β) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| = \infty$, nous sommes presque sûrs que l'ensemble $E = E(\omega) \subset T$ des points de T seulement un nombre fini de fois recouverts par les intervalles Δ_n est de mesure nulle sur T.

La question a été posée pour la première fois dans (V), de savoir si dans le cas (β) nous pouvons remplacer l'expression « est de mesure nulle

sur T » par « est vide » et résolue, dans ce même article, par la négative. Lorsqu'il en est ainsi, le système d'intervalles

$$(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$$

est dit avoir la propriété de couverture.

Par la suite, résultait de (I) que la condition

$$(2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{\nu=1}^n |\Delta_\nu|}{\log n} \right] > 1$$

entraînait la propriété de couverture. En particulier, le système

$$|\Delta_n| = \frac{1 + \varepsilon}{n + n_0} \quad (\varepsilon > 0, n_0 > \varepsilon) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

donne la couverture, mais plus tard, (II) signalait que la propriété cessait d'avoir lieu pour le système

$$|\Delta_n| = \frac{1 - \varepsilon}{n} \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dans le paragraphe 1 nous donnerons une condition suffisante de couverture qui améliore la condition (2).

Dans le paragraphe 2 nous donnerons une condition suffisante de non-couverture.

Des exemples seront traités au moyen de ces deux conditions dont aucune ne permet de conclure pour la série harmonique

$$|\Delta_n| = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Pour tenter d'améliorer la condition suffisante de couverture du paragraphe 1, nous avons introduit dans le paragraphe 3 deux sortes de non-couverture, à savoir, d'après la loi du 0 ou 1 :

1° Nous sommes presque sûrs que l'ensemble $E = E(\omega) \subset T$ des points de T seulement un nombre fini de fois recouverts par les intervalles Δ_n du système $S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$ est non dénombrable.

Nous dirons que S a la propriété de non-couverture non dénombrable.

2° Nous sommes presque sûrs que l'ensemble $E = E(\omega) \subset T$ des points de T seulement un nombre fini de fois recouverts par les intervalles Δ_n du système $S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$ est dénombrable et non vide.

Nous dirons que S a la propriété de non couverture dénombrable.

Nous verrons que si le cas de la série harmonique

$$|\Delta_n| = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

est un cas de non-couverture, c'est un cas de non-couverture dénombrable, alors que les cas

$$|\Delta_n| = \frac{1-\varepsilon}{n} \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sont des cas de non couverture non dénombrable.

Enfin au paragraphe 4, après avoir généralisé ces conditions, nous serons amenés à étudier les rapports entre la presque convergence et la convergence en probabilité des suites de variables aléatoires.

1. UNE CONDITION SUFFISANTE DE COUVERTURE POUR LE SYSTÈME

$$S = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_n \dots) \quad (1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots).$$

Supposons que S soit un cas de non-couverture.

Soit $A \subset \Omega_{1,\infty}$ l'événement pour lequel il existe un $t \in T$ seulement un nombre fini de fois recouvert.

Pour chaque $\omega \in A$, il existe un plus petit entier $n(\omega)$ tel que le système $(\Delta_{n(\omega)+1}, \Delta_{n(\omega)+2}, \dots)$ ne recouvre pas T. Si petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N = N_\varepsilon$ tel que

$$A_N = \{ \omega \in A \mid n(\omega) \leq N \}$$

vérifie

$$\text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A_N) \geq \text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A) - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

De là, désignant par A_N^* l'événement de $\Omega_{N+1,\infty} = \Omega_{N+1} \times \Omega_{N+2} \times \dots$ pour lequel $S_{N+1} = (\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \dots)$ ne recouvre pas T, nous avons

$$\text{Prob}_{\Omega_{N+1,\infty}}(A_N^*) \geq 1 - \varepsilon$$

et, en appliquant le théorème de Fubini au produit

$$\Omega_{N+1, N+n} \times \Omega_{N+n+1, \infty}$$

(où $\Omega_{N+1, N+n} = \Omega_{N+1} \times \Omega_{N+2} \times \dots \times \Omega_{N+n}$) n étant un entier arbitrairement fixé, nous voyons que l'événement $B_{N,n} \subset \Omega_{N+1, N+n}$ pour lequel

$$S_{N+1, N+n} = (\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \dots, \Delta_{N+n})$$

ne recouvre pas T vérifie

$$(1) \quad \text{Prob}_{\Omega_{N+1, N+n}}(B_{N,n}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Désignant par $B_{N,n}^\nu$ l'événement de $\Omega_{N+1, N+n}$ pour lequel l'extrémité $\omega_{N+\nu} + \frac{|\Delta_{N+\nu}|}{2}$ de $\Delta_{N+\nu}$ est non recouverte par $S_{N+1, N+n}$ ($1 \leq \nu \leq n$), nous avons

$$(2) \quad B_{N,n} = \bigcup_{\nu=1}^n B_{N,n}^\nu$$

et, par un calcul immédiat,

$$\begin{aligned} (3) \quad & \text{Prob}_{\Omega_{N+1, N+n}}(B_{N,n}^y) \\ &= (1 - |\Delta_{N+1}|) (1 - |\Delta_{N+2}|) \dots (1 - |\Delta_{N+\nu-1}|) (1 - |\Delta_{N+\nu+1}|) \dots (1 - |\Delta_{N+n}|) \\ &= \frac{1}{(1 - |\Delta_{N+\nu}|)} \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_{N+p}|) \leq \frac{1}{(1 - |\Delta_1|)} \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_{N+p}|), \end{aligned}$$

d'où, avec (1) et (2),

$$1 - \varepsilon \leq \text{Prob}_{\Omega_{N+1, N+n}}(B_{N,n}) \leq \sum_{\nu=1}^n \text{Prob}_{\Omega_{N+1, N+n}}(B_{N,n}^y) \leq \frac{n}{(1 - |\Delta_1|)} \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_{N+p}|).$$

Nous fixant par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous avons ainsi

$$(4) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_{N+p}|) \right] \geq \frac{1 - |\Delta_1|}{2} > 0;$$

mais alors, en écrivant pour $n > N$,

$$\begin{aligned} n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) &= n \left[\prod_{p=1}^N (1 - |\Delta_p|) \right] \left[\prod_{p=N+1}^n (1 - |\Delta_p|) \right] \\ &= \left[\frac{n}{n-N} \prod_{p=1}^N (1 - |\Delta_p|) \right] \left[(n-N) \prod_{j=1}^{n-N} (1 - |\Delta_{N+j}|) \right], \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \right] > 0,$$

d'où le

THÉORÈME 1. — *Si le système d'intervalles*

$$S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots) \quad (1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots)$$

est un cas de non-couverture, nous avons

$$(5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \right] > 0.$$

COROLLAIRE. — *Si le système d'intervalles*

$$S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots) \quad (1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots)$$

vérifie

$$(5') \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \right] = 0,$$

S est un cas de couverture.

Transformation de la condition (5). — Toujours sous l'hypothèse

$$1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots,$$

supposons (5). Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout n

$$n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \geq \eta,$$

donc pour tout n ,

$$\log n + \sum_{p=1}^n \log(1 - |\Delta_p|) \geq \log \eta$$

et, *a fortiori*, d'après les propriétés du logarithme, pour tout n ,

$$\log n - \sum_{p=1}^n |\Delta_p| \geq \log \eta,$$

donc

$$(6) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\log n - \sum_{p=1}^n |\Delta_p| \right] > -\infty.$$

Inversement, si nous avons (6), il existe un nombre réel λ tel que pour tout n ,

$$\sum_{p=1}^n |\Delta_p| \leq \log n + \lambda,$$

d'où, pour tout n

$$|\Delta_n| \leq \frac{\log n + \lambda}{n},$$

ce qui implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|^2 < \infty.$$

Utilisant

$$\log(1-x) = -x + O(x^2) \quad \text{quand } x \rightarrow 0,$$

nous voyons que

$$\log \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \right] = \log n + \sum_{p=1}^n \log(1 - |\Delta_p|)$$

diffère de $\log n - \sum_{p=1}^n |\Delta_p|$ d'une quantité qui tend vers une limite lorsque $n \rightarrow \infty$. De là, avec (6), nous voyons qu'il existe un nombre réel μ tel que pour tout n ,

$$\log \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \right] \geq \mu,$$

donc, pour tout n ,

$$n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \geq e^{\frac{1}{2}},$$

d'où (5). Ainsi :

Moyennant $1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots$, (5) et (6) sont équivalentes.

Exemple de couverture. — [A ce sujet, cf. (I)]. Soit la suite ε_n , $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \infty$. Par exemple $\varepsilon_n = \varepsilon > 0$ quel que soit n , (ou encore $\varepsilon_n = \frac{1}{\log(n+1)}$).

Fixons l'entier n_0 tel que $n_0 > \varepsilon_1$.

Prenant alors $|\Delta_n| = \frac{1 + \varepsilon_n}{n + n_0}$, nous sommes dans un cas de couverture puisque la condition (6) n'est pas satisfaite.

Observons que la propriété de couverture du système (Δ_n) pour $\varepsilon_n = \frac{1}{\log(n+1)}$ n'est pas donnée par la condition (2) signalée en introduction.

2. UNE CONDITION SUFFISANTE DE NON-COVERTURE POUR LE SYSTÈME

$$S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots) \quad (1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots).$$

Faisons les hypothèses suivantes

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta_n| - |\Delta_{n+1}|}{n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)} < \infty$$

$$(2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_n|}{n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)} < \infty,$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| = \infty.$$

D'après (2), il existe une suite croissante d'indices

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

et un nombre $a > 0$ tels que, quel que soit k ,

$$(4) \quad \frac{|\Delta_{n_k}|}{n_k \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)} \leq a.$$

D'après (3), nous avons

$$\prod_{p=1}^{n_k} (1 - |\Delta_p|) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

il s'ensuit d'après (4) que

$$|\Delta_{n_k}| \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

d'où, avec la décroissance de $|\Delta_n|$,

$$|\Delta_n| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

Fixons alors un entier k_0 assez grand pour que

$$|\Delta_{n_{k_0}}| < \frac{1}{2},$$

puis fixons arbitrairement un entier $k > k_0$ et considérons le système

$$S_{n_{k_0} n_k} = (\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots, \Delta_{n_k}).$$

Posons pour $k > k_0$, $m_k = n_k - n_{k_0}$ et pour chaque entier p , $\Delta_p^* = \Delta_{n_{k_0}+p}$. Soit $\varphi_p(t)$ la fonction égale à 1 pour $t \in \Delta_p^*$ et à 0 ailleurs. La mesure de l'ensemble des points de T non recouverts par $S_{n_{k_0} n_k}$ sera désignée par X . X est une variable aléatoire sur $\Omega_{n_{k_0}+1, n_k}$ et $0 \leq X \leq 1$. Nous avons, si $\mathcal{E}(X)$ désigne l'espérance mathématique de X ,

$$\begin{aligned} (5) \quad \mathcal{E}(X) &= \mathcal{E} \left[\int_T [1 - \varphi_1(t)] \dots [1 - \varphi_{m_k}(t)] dt \right] \\ &= \int_T \left[\prod_{p=1}^{m_k} \mathcal{E}[1 - \varphi_p(t)] \right] dt = \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &= \mathcal{E} \left[\int_T [1 - \varphi_1(t)] \dots [1 - \varphi_{m_k}(t)] dt \right]^2 \\ &= \mathcal{E} \left[\int_T \int_{T \times T} [1 - \varphi_1(t)] [1 - \varphi_1(t')] \dots [1 - \varphi_{m_k}(t)] [1 - \varphi_{m_k}(t')] dt dt' \right] \\ &= \int_T \int_{T \times T} \left[\prod_{p=1}^{m_k} \mathcal{E}[1 - \varphi_p(t)] [1 - \varphi_p(t')] \right] dt dt'. \end{aligned}$$

Lorsque $t, t' \in T$, désignons par $|t - t'|$ la mesure du plus petit arc de T d'extrémités t et t' . Dans ces conditions

$$\mathcal{E}[1 - \varphi_p(t)] [1 - \varphi_p(t')] = 1 - |\Delta_p^*| - \chi_p(t, t'),$$

où

$$\chi_p(t, t') = |t - t'| \quad \text{si} \quad |t - t'| < |\Delta_p^*|$$

et

$$\chi_p(t, t') = |\Delta_p^*| \quad \text{si} \quad |t - t'| \geq |\Delta_p^*|.$$

Ainsi

$$\mathcal{E}(X^2) = \int \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} \prod_{p=1}^{m_k} [1 - |\Delta_p^*| - \chi_p(t, t')] dt dt'.$$

Le théorème de Fubini donne ici

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &= 2 \int_0^{|\Delta_{m_k}^*|} \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*| - t) dt \\ &+ 2 \int_{|\Delta_{m_k}^*|}^{|\Delta_1^*|} \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*| - \chi_p^*(t)) dt + (1 - 2|\Delta_1^*|) \prod_{p=1}^{m_k} (1 - 2|\Delta_p^*|), \end{aligned}$$

où

$$\chi_p^*(t) = t \quad \text{si } 0 \leq t < |\Delta_p^*|$$

et

$$\chi_p^*(t) = |\Delta_p^*| \quad \text{si } t \geq |\Delta_p^*|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &\leq 2|\Delta_{m_k}^*| \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|) \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{m_k-1} \left\{ [|\Delta_j^*| - |\Delta_{j+1}^*|] \prod_{p=1}^j (1 - |\Delta_p^*|) \prod_{p=j+1}^{m_k} (1 - 2|\Delta_p^*|) \right\} + \prod_{p=1}^{m_k} (1 - 2|\Delta_p^*|). \end{aligned}$$

Utilisant $1 - 2x \leq (1 - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &\leq 2|\Delta_{m_k}^*| \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|) \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{m_k-1} \left\{ [|\Delta_j^*| - |\Delta_{j+1}^*|] \prod_{p=1}^j (1 - |\Delta_p^*|) \left[\prod_{p=j+1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|) \right]^2 \right\} \\ &+ \left[\prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|) \right]^2, \end{aligned}$$

d'où, avec (5),

$$(6) \quad [\mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X)] \frac{1}{\mathcal{E}^2(X)} \leq \frac{2|\Delta_{m_k}^*|}{\prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|)} + 2 \sum_{j=1}^{m_k-1} \frac{|\Delta_j^*| - |\Delta_{j+1}^*|}{j \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|)},$$

d'où enfin

$$\begin{aligned} (7) \quad \text{Prob}_{\Omega_{n_k+1, n_k}}(X = 0) &\leq [\mathcal{E}[X - \mathcal{E}(X)]^2] \frac{1}{\mathcal{E}^2(X)} = [\mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X)] \\ &\times \frac{1}{\mathcal{E}^2(X)} \leq \frac{2|\Delta_{m_k}^*|}{\prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|)} + 2 \sum_{j=1}^{m_k-1} \frac{|\Delta_j^*| - |\Delta_{j+1}^*|}{j \prod_{p=1}^{m_k} (1 - |\Delta_p^*|)}. \end{aligned}$$

Soit ε ($0 < \varepsilon < 1$) arbitrairement fixé.

D'après (4) et $\prod_{\rho=1}^{n_k} (1 - |\Delta_\rho|) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$, dès que k_0 est assez grand, nous avons, quel que soit $k > k_0$,

$$\frac{2 |\Delta_{m_k}^*|}{\prod_{\rho=1}^{m_k} (1 - |\Delta_\rho^*|)} = \frac{2 |\Delta_{n_k}|}{\prod_{\rho=1}^{n_k} (1 - |\Delta_\rho|)} \prod_{\rho=1}^{n_{k_0}} (1 - |\Delta_\rho|) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après (1), dès que k_0 est assez grand, nous avons, quel que soit $k > k_0$,

$$2 \sum_{j=1}^{m_k-1} \frac{|\Delta_j^*| - |\Delta_{j+1}^*|}{\prod_{\rho=1}^{m_k} (1 - |\Delta_\rho^*|)} = 2 \left[\sum_{\rho=n_{k_0}+1}^{n_k-1} \frac{|\Delta_\rho| - |\Delta_{\rho+1}|}{\prod_{\nu=1}^{\rho} (1 - |\Delta_\nu|)} \right] \prod_{\rho=1}^{n_{k_0}} (1 - |\Delta_\rho|) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, dès que k_0 est assez grand, quel que soit $k > k_0$, le dernier membre de (7) est $\leq \varepsilon$.

Mais

$$\text{Prob}_{\Omega_{n_{k_0}+1, n_k}} (X = 0) = \text{Prob}_{\Omega_{n_{k_0}+1, n_k}} [\text{couverture de T par } (\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots, \Delta_{n_k})].$$

De là, quel que soit $k > k_0$, nous avons

$$(8) \quad \text{Prob}_{\Omega_{n_{k_0}+1, n_k}} [\text{couverture de T par } (\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots, \Delta_{n_k})] \leq \varepsilon.$$

Or si $(\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots)$ était un cas de couverture, l'événement $A \subset \Omega_{n_{k_0}+1, \infty}$, pour lequel $(\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots)$ couvre T vérifie

$$\text{Prob}_{\Omega_{n_{k_0}+1, \infty}} (A) = 1.$$

Vu que T est compact, pour chaque $\omega^* \in A$ correspond un plus petit entier $k = k(\omega^*) > k_0$ tel que $(\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots, \Delta_{n_k(\omega^*)})$ couvre T.

Si ε' ($0 < \varepsilon' < 1$) est donné, il est possible de fixer $k' > k_0$ assez grand pour que l'événement

$$B = \{\omega^* \in A \mid k(\omega^*) \leq k'\}$$

vérifie

$$\text{Prob}_{\Omega_{n_{k_0}+1, \infty}} (B) \geq \text{Prob}_{\Omega_{n_{k_0}+1, \infty}} (A) - \varepsilon'.$$

Ainsi avec une probabilité $\geq 1 - \varepsilon'$ au sens du champ produit

$$\Omega_{n_{k_0}+1, n_{k'}} \times \Omega_{n_{k'}+1, \infty},$$

$(\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots, \Delta_{n_{k'}})$ couvre T. Il s'ensuit, d'après le théorème de Fubini, que $(\Delta_{n_{k_0}+1}, \Delta_{n_{k_0}+2}, \dots, \Delta_{n_{k'}})$ couvre T avec une probabilité $\geq 1 - \varepsilon'$ au sens

du champ $\Omega_{n_{k_0+1}, n_k}$, ce qui est une contradiction avec (8) pour un choix convenable de ε' . Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty \Rightarrow$ non-couverture (de la façon dont il a été signalé en introduction) nous avons le

THÉORÈME 2. — Si le système d'intervalles

$$S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots) \quad (1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots)$$

vérifie les conditions

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta_n| - |\Delta_{n+1}|}{n} < \infty,$$

$$\prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)$$

$$(2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|\Delta_n|}{n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)} \right] < \infty,$$

ce système S est un cas de non-couverture.

Exemples de non-couverture. — Si le système $S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n_k}, \dots)$ ($1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots$) est tel qu'il existe une suite croissante d'indices

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Delta_{n_k}|}{n_{k+1} \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)} < \infty,$$

alors les conditions (1) et (2) sont satisfaites.

En particulier, si $|\Delta_n| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, la convergence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^k |\Delta_{2^k}|}{2^{k+1} \prod_{p=1}^{2^k} (1 - |\Delta_p|)}$$

qui résulte de celle de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \prod_{p=1}^{2^k} (1 - |\Delta_p|)}$$

entraîne la non-couverture.

Ainsi, pour le système d'intervalles $S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$ avec $1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots$, la condition

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \prod_{p=1}^{2^k} (1 - |\Delta_p|)} < \infty$$

entraîne la non-couverture si $|\Delta_n| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Cette remarque donne des exemples simples de non-couverture.

Fixons ε avec $0 < \varepsilon < 1$ et prenons $|\Delta_n| = \frac{1-\varepsilon}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Utilisant

$$\log\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{p}\right) = -\frac{1-\varepsilon}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

quand $p \rightarrow \infty$, nous voyons qu'il existe une constante réelle λ telle que, quel que soit n ,

$$\log \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{p}\right) = \sum_{p=1}^n \log\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{p}\right) > -(1-\varepsilon) \log n + \lambda,$$

d'où

$$\prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{p}\right) \geq e^{\lambda} \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}.$$

Ainsi, quel que soit k ,

$$2^k \prod_{p=1}^{2^k} \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{p}\right) \geq e^{\lambda} \frac{2^k}{(2^k)^{1-\varepsilon}} = e^{\lambda} (2^k)^{\varepsilon} = e^{\lambda} (2^{\varepsilon})^k,$$

ce qui montre la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \prod_{p=1}^{2^k} \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{p}\right)}$, de sorte

que $|\Delta_n| = \frac{1-\varepsilon}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ($n = 1, 2, \dots$) est bien un cas de non-couverture [cf. (II)].

Voici un autre exemple utilisant (9).

Fixons toujours ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ et soit Δ_n tel que $|\Delta_n| = \frac{1 - \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\varepsilon}}{n}$ à partir d'un rang n_0 assez grand pour que

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{\log n_0}\right)^{\varepsilon}}{n_0} < 1.$$

Il existe des constantes réelles μ, μ' telles que

$$\log \prod_{\rho=1}^n (1 - |\Delta_{\rho}|) \geq - \sum_{\rho=1}^n |\Delta_{\rho}| + \mu \geq - \log n + \frac{1}{1-\varepsilon} (\log n)^{1-\varepsilon} + \mu',$$

d'où, quel que soit n ,

$$\prod_{\rho=1}^n (1 - |\Delta_{\rho}|) \geq e^{\mu'} \frac{1}{n} e^{\frac{1}{1-\varepsilon} (\log n)^{1-\varepsilon}}$$

et quels que soient k et ν

$$2^k \prod_{\rho=1}^{2^k} (1 - |\Delta_{\rho}|) \geq e^{\mu'} e^{\frac{1}{1-\varepsilon} [k \log 2]^{1-\varepsilon}} \geq e^{\mu'} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\nu}} [k \log 2]^{(1-\varepsilon)\nu}.$$

Dans ces conditions, se fixant $\nu = \nu(\varepsilon)$ tel que

$$(1-\varepsilon)^{\nu} > 1,$$

nous voyons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \prod_{\rho=1}^{2^k} (1 - |\Delta_{\rho}|)} < \infty,$$

ce qui montre que le cas

$$|\Delta_n| = \frac{1 - \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\varepsilon}}{n}$$

(à partir d'un certain rang, $0 < \varepsilon < 1$) est encore un cas de non-couverture.

Notons ici la comparaison avec la série harmonique et le cas de couverture

$$|\Delta_n| = \frac{1 + \left(\frac{1}{\log n}\right)}{n} \text{ du paragraphe précédent}$$

$$\frac{|\Delta_n|}{\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1.$$

$$\frac{|\Delta_n|}{\left(\frac{1 + \frac{1}{\log n}}{n}\right)} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1.$$

3. UNE CONDITION NÉCESSAIRE DE NON-COUVERTURE NON DÉNOMBRABLE.

LEMME 1. — Soit $E \subset T$ un sous-ensemble infini de T et soit a tel que $0 < a < 1$.

Pour chaque entier naturel m , soit δ_m défini par

$$0 < \delta_m < 1, \quad (1 - \delta_m)^m = a.$$

et soit P_m la probabilité pour que, dans le placement au hasard sur T de m intervalles de mesure commune δ_m il existe au moins un point de E non recouvert. Nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = 1.$$

Démonstration. — Fixons arbitrairement un entier naturel K , E étant infini par hypothèse choisissons K points deux à deux distincts de E , soit M_1, M_2, \dots, M_K .

Affectons chaque M_j ($j = 1, 2, \dots$) de la « masse » 1, et, les m intervalles $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_m^*$ de mesure commune δ_m étant placés au hasard sur T , désignons par X_j la variable aléatoire = 1, si M_j est non recouvert et = 0 dans le cas contraire ($j = 1, 2, \dots, K$).

Ainsi $X = \sum_{j=1}^K X_j$ est la « masse totale » des points M_j ($j = 1, 2, \dots, K$) non recouverts. Puisque

$$\mathcal{E}(X_j) = (1 - \delta_m)^m,$$

nous avons

$$\mathcal{E}(X) = K(1 - \delta_m)^m = Ka.$$

Soit $m_0 = m_0(M_1, M_2, \dots, M_K)$ un entier tel que si $m \geq m_0$, nous avons $\delta_m < \frac{1}{2}$ et $\delta_m < a$ au plus petit arc limité par deux points M_j ($j = 1, 2, \dots, K$).

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^2) &= \sum_{j=1}^K \mathcal{E}(X_j^2) + 2 \sum_{\substack{(j,j') \text{ non ordonné} \\ (j \neq j')}} \mathcal{E}(X_j X_{j'}) \\ &= \sum_{j=1}^K \mathcal{E}(X_j) + 2 \sum_{\substack{(j,j') \\ (j \neq j')}} \mathcal{E}(X_j X_{j'}) = Ka + 2 \sum_{\substack{(j,j') \\ (j \neq j')}} \mathcal{E}(X_j X_{j'}). \end{aligned}$$

Mais pour $m \geq m_0$ et $j \neq j'$, nous avons

$$\mathcal{E}(X_j X_{j'}) = (1 - 2\delta_m)^m \leq [(1 - \delta_m)^m]^2 = a^2,$$

d'où

$$\mathcal{E}(X^2) \leq Ka + 2 \frac{K(K-1)}{2} a^2 \leq Ka + K^2 a^2,$$

ce qui conduit à

$$\text{Prob}[X = 0] = 1 - P_m \leq \frac{1}{\mathcal{E}^2(X)} \mathcal{E}[X - \mathcal{E}(X)]^2 = \frac{1}{\mathcal{E}^2(X)} [\mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X)] \leq \frac{1}{K\alpha},$$

d'où

$$P_m \geq 1 - \frac{1}{K\alpha} \quad \text{pour } m \geq m_0$$

d'où

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} P_m \geq 1 - \frac{1}{K\alpha},$$

ce qui établit le lemme puisque, dans cette dernière inégalité, K est arbitraire.

LEMME 2. — *Pour tout entier naturel $K \geq 2$, nous avons*

$$(1 - Kx) \leq (1 - x)^K \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{K}.$$

Démonstration. — Elle résulte de ce que, pour l'intervalle considéré des valeurs de x , $f(x) = (1 - x)^K - (1 - Kx)$ vérifie

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = -K(1 - x)^{K-1} + K = K[1 - (1 - x)^{K-1}] \geq 0.$$

LEMME 3. — *Supposons que dans le placement au hasard sur T des intervalles du système $S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$ avec $(1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots)$ nous sommes presque sûr que l'ensemble $E(\omega) \subset T$ des points de T seulement un nombre fini de fois recouvert est non dénombrable.*

Dans ces conditions, pour tout intervalle ouvert $I \subset T$ avec $|I| = \frac{1}{n}$, n entier naturel, il est presque sûr que l'ensemble

$$E(\omega) \cap I$$

est non dénombrable ($\omega \in \Omega_{1,\infty}$ = champ de probabilités).

Démonstration. — Si le lemme est inexact, d'après la loi du 0 ou 1, il est presque sûr que $E(\omega) \cap I$ est au plus dénombrable, et ceci est également vrai pour tout translaté de I .

Mettant alors n intervalles de mesure commune $\frac{1}{n}$ bout à bout, nous voyons que nous sommes presque sûr que $E(\omega)$ est au plus dénombrable contrairement à nos hypothèses, d'où le lemme.

Nous restons maintenant dans les hypothèses suivantes :

1° Nous supposons que dans le placement au hasard sur T des intervalles du système

$$S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots) \quad (1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots)$$

nous sommes presque sûr que l'ensemble $E(\omega) \subset T$ des points de T seulement un nombre fini de fois recouvert est non dénombrable (cas de non couverture non dénombrable) ($\omega \in \Omega_{1,\infty}$ = champ de probabilités).

$$2^0 \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| = \infty.$$

Fixons arbitrairement un entier naturel *pair* ν et fixons sur T ν intervalles mis bout à bout, de mesure commune $\frac{1}{\nu}$ soit

$$I_1, I_2, \dots, I_\nu.$$

Pour chaque entier pair j que nous nous fixons avec $2 \leq j \leq \nu$, l'événement $A_j \subset \Omega$ pour lequel $E(\omega) \cap I_j$ est non dénombrable vérifie

$$\text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A_j) = 1.$$

A chaque $\omega \in A_j$ correspond un plus petit entier $n(\omega)$ tel que

$$(\Delta_{n(\omega)+1}, \Delta_{n(\omega)+2}, \dots)$$

laisse une infinité de points non recouverts dans I_j , puisque dans le cas contraire, $E(\omega) \cap I_j$ serait au plus dénombrable.

De là, si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement fixé, nous pouvons fixer un entier n_j assez grand pour que

$$A_j^* = \{ \omega \in A_j \mid (\Delta_{n_j+1}, \Delta_{n_j+2}, \dots) \text{ laisse une infinité de points non recouverts dans } I_j \}$$

vérifie

$$\text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A_j^*) \geq \text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A_j) - \frac{\varepsilon}{\nu} = 1 - \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

Soit

$$n_0 \geq \sup_{j=2,4,\dots,\nu} n_j \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{j=2,4,\dots,\nu} A_j^*.$$

Nous avons

$A' = \{ \omega \in \Omega_{1,\infty} \mid (\Delta_{n_0+1}, \Delta_{n_0+2}, \dots) \text{ laisse une infinité de points non recouverts dans chaque } I_j, j = 2, 4, \dots, \nu \}$

$\supset A$,

d'où, en posant $B =$ projection sur $\Omega_{n_0+1,\infty}$ de A' ,

$$\text{Prob}_{\Omega_{n_0+1,\infty}}(B) = \text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A') \geq \text{Prob}_{\Omega_{1,\infty}}(A) \geq 1 - \left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous imposerons encore à n_0 de vérifier les conditions

$$(1') \quad |\Delta_{n_0+1}| < \frac{1}{\nu},$$

$$(2') \quad \frac{1}{(1 - |\Delta_{n_0+j_2}|)(1 - |\Delta_{n_0+j_1}|) \dots (1 - |\Delta_{n_0+j_\nu}|)} \leq 2$$

pour tout système de $\frac{\nu}{2}$ entiers naturels (j_2, j_4, \dots, j_ν) deux à deux distincts.

Définissons l'entier naturel N_ν par le fait que si l'entier m vérifie $m \geq N_\nu$, δ_m défini par

$$0 < \delta_m < 1, \quad (1 - \delta_m)^m = (1 - |\Delta_1|)(1 - |\Delta_2|) \dots (1 - |\Delta_{n_0}|)$$

vérifie

$$(3) \quad \delta_m < \frac{1}{\nu}.$$

D'après le lemme 1, pour chaque $\omega^* \in B$, il existe un plus petit entier $m(\omega^*) \geq N_\nu$ tel que pour chaque entier $m \geq m(\omega^*)$, dans le placement au hasard sur T de m intervalles de mesure commune δ_m il y ait une probabilité $\geq 1 - \varepsilon$ pour qu'il reste à l'intérieur de chaque I_j ($j = 2, 4, \dots, \nu$) au moins un point non recouvert par ces intervalles et par les intervalles $\Delta_{n_0+1}, \Delta_{n_0+2}, \dots$ déterminés par ω^* .

Fixons l'entier $m_0 \geq N_\nu$ assez grand pour que

$$B^* = \{ \omega^* \in B \mid m(\omega^*) \leq m_0 \}$$

vérifie

$$\text{Prob}_{\Omega_{n_0+1, \infty}}(B^*) \geq \text{Prob}_{\Omega_{n_0+1, \infty}}(B) - \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\text{Prob}_{\Omega_{n_0+1, \infty}}(B^*) \geq 1 - \varepsilon.$$

Dans le placement au hasard sur T de m_0 intervalles

$$\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_{m_0}^*$$

de mesure commune δ_{m_0} , le champ de probabilité sera le champ

$$\Omega' = \Omega'_1 \times \Omega'_2 \times \dots \times \Omega'_{m_0}$$

des suites finies $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{m_0})$, où ω'_j est le centre de Δ_j^* ($j = 1, 2, \dots, m_0$).

Ainsi, d'après le théorème de Fubini appliqué au produit

$$\Omega' \times \Omega_{n_0+1, \infty}$$

dans le placement au hasard sur T des intervalles du système

$$S^* = (\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_{m_0}^*, \Delta_{n_0+1}, \Delta_{n_0+2}, \dots)$$

il y a une probabilité $\geq (1 - \varepsilon)^2$ au sens de $\Omega' \times \Omega_{n_0+1, \infty}$ pour qu'il reste au moins un point non recouvert à l'intérieur de chaque I_j ($j = 2, 4, \dots, \nu$).

Vu que $\sum_{p=1}^{\infty} |\Delta_{n_0+p}| = \infty$, nous pouvons choisir un entier n'_0 assez grand pour que si $n \geq n'_0$, dans le placement au hasard sur T des intervalles du système

$$S_n^* = (\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_{m_0}^*, \Delta_{n_0+1}, \Delta_{n_0+2}, \dots, \Delta_{n_0+n})$$

il y ait une probabilité $\geq 1 - \varepsilon$ au sens de $\Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}$ pour que les extrémités des intervalles Δ_j^* ($j = 1, 2, \dots, m_0$) et celles des intervalles I_j ($j = 2, 4, \dots, \nu$) soient simultanément recouvertes par les intervalles $\Delta_{n_0+1}, \Delta_{n_0+2}, \dots, \Delta_{n_0+n}$.

Mais d'après ce que nous avons obtenu, au sens de $\Omega' \times \Omega_{n_0+1, \infty}$, donc au sens de $\Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}$, dans le placement au hasard sur T des intervalles de S_n^* , il y a une probabilité $\geq (1 - \varepsilon)^2$ pour qu'il reste à l'intérieur de chaque I_j ($j = 2, 4, \dots, \nu$) au moins un point non recouvert par les intervalles de S_n^* .

Ainsi pour $n \geq n_0^*$, l'événement

$$D_n \subset \Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}$$

pour lequel, dans le placement au hasard sur T des intervalles du système S_n^* , il y a à l'intérieur de chaque intervalle I_j ($j = 2, 4, \dots, \nu$) au moins une extrémité $\omega_{n_0+p} + \frac{|\Delta_{n_0+p}|}{2}$ d'intervalle Δ_{n_0+p} ($1 \leq p \leq n$) non recouverte vérifie

$$(4) \quad \text{Prob}_{\Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}}(D_n) \geq (1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon.$$

Majorons le membre gauche de (4).

Fixons-nous arbitrairement une combinaison

$$j_2, j_4, \dots, j_\nu \quad (j_2 < j_4 < \dots < j_\nu)$$

des n premiers entiers et considérons l'événement

$$D_{(j_2, j_4, \dots, j_\nu)}$$

pour lequel

$$\omega_{n_0+j_k} + \frac{|\Delta_{n_0+j_k}|}{2} \quad (k = 2, 4, \dots, \nu)$$

sont chacun à l'intérieur d'un intervalle I_j ($j = 2, 4, \dots, \nu$) différent.

Nous avons

$$D_n = \bigcup_{(j_2, j_4, \dots, j_\nu)} D_{(j_2, j_4, \dots, j_\nu)}.$$

D'après (1'), (3) puis (2') nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{\Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}}(D_{(j_2, j_4, \dots, j_\nu)}) &\leq \left(1 - \frac{\nu}{2} \delta_{m_0}\right)^{m_0} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \in \{j_2, j_4, \dots, j_\nu\}}} \left(1 - \frac{\nu}{2} |\Delta_{n_0+j}|\right) \\ &\leq 2 \left(1 - \frac{\nu}{2} \delta_{m_0}\right)^{m_0} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{2} |\Delta_{n_0+j}|\right) \end{aligned}$$

et par suite, d'après le lemme 2 et la définition de δ_{m_0} ,

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{\Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}}(D_{(j_2, j_3, \dots, j_\nu)}) &\leq 2 \left[(1 - \delta_{m_0})^{m_0} \prod_{j=1}^n (1 - |\Delta_{n_0+j}|) \right]^{\frac{\nu}{2}} \\ &= 2 \left[\prod_{p=1}^{n_0+n} (1 - |\Delta_p|) \right]^{\frac{\nu}{2}}. \end{aligned}$$

Puisqu'il y a $C_n^{\frac{\nu}{2}} \leq \frac{n^{\binom{\nu}{2}}}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}$ événements $D_{(j_2, j_3, \dots, j_\nu)}$ nous voyons que pour $n \geq n_0$,

$$(1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon \leq \text{Prob}_{\Omega' \times \Omega_{n_0+1, n_0+n}} \left[\bigcup_{(j_2, j_3, \dots, j_\nu)} D_{(j_2, j_3, \dots, j_\nu)} \right] \leq 2 \frac{1}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} \left[n \prod_{p=1}^{n_0+n} (1 - |\Delta_p|) \right]^{\frac{\nu}{2}}.$$

Prenons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que: $\frac{1}{2} \leq (1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon$, nous voyons que

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \right]^{\binom{2}{\nu}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n \prod_{p=1}^{n_0+n} (1 - |\Delta_p|) \right] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \right].$$

D'après la formule de Stirling, nous avons

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \right]^{\binom{2}{\nu}} \xrightarrow{(\nu \rightarrow \infty)} \infty,$$

donc

$$n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \infty$$

et puisque ce résultat est encore valable si $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$, nous avons le

THÉORÈME 3. — *Si le système d'intervalles $S = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$ ($1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots$) est un cas de non-couverture non dénombrable, nous avons*

$$(5) \quad n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \infty.$$

COROLLAIRE. — *Dans le cas de la série harmonique*

$$|\Delta_n| = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

nous avons

$$n \prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|) = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1.$$

Ainsi, dans ce cas, l'ensemble des points de T seulement un nombre fini de fois recouvert est presque sûrement au plus dénombrable.

Exemples de non-couverture non dénombrable.

1^o Il y a naturellement le cas où $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$, puisque dans ce cas,

l'ensemble des points de T seulement un nombre fini de fois recouverts est presque sûrement (et même sûrement) de mesure 1 sur T .

2^o Prenons un cas de non-couverture (Δ_n) avec $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| = \infty$ (par exemple $|\Delta_n| = \frac{1-\varepsilon}{n}$ où $0 < \varepsilon < 1$).

Considérons une suite d'indices (n_k) ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_{n_k}| = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in (n_k)} |\Delta_n| = \infty$$

(par exemple $n_k = 2k$). Montrons que dans ces conditions le système (Δ_{n_k}) est un cas de non-couverture non dénombrable.

En effet, désignons par Ω' le champ des suites (ω_{n_k}) puis par Ω'' le champ des suites complémentaires. Ainsi

$$\Omega = \Omega' \times \Omega''.$$

Il en découle que (Δ_{n_k}) est un cas de non-couverture non dénombrable puisque, dans le cas contraire, pour presque chaque $\omega' \in \Omega'$ fixé, l'ensemble des points de T seulement un nombre fini de fois recouverts par les Δ_{n_k} est au plus dénombrable.

Donc pour presque chaque $\omega' \in \Omega'$ fixé, nous voyons que pour presque tout $\omega'' \in \Omega''$, tout point de T est une infinité de fois recouvert par les Δ_n , donc nous sommes presque sûr, au sens de Ω , que tout point de T est une infinité de fois recouvert par les Δ_n ce qui est contraire à notre hypothèse.

3^o D'après le théorème 2 du paragraphe 2, tout système (Δ_n) avec $1 > |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_n| \geq \dots$ tel que

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta_n - \Delta_{n+1}|}{n} < \infty,$$

$$\prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)$$

$$(7) \quad \frac{|\Delta_n|}{n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

$$\prod_{p=1}^n (1 - |\Delta_p|)$$

est un cas de non couverture. Montrons que c'est un cas de non-couverture non dénombrable, c'est évident si $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$. Écartons donc cette hypothèse. D'abord visiblement $|\Delta_n| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$. Ainsi, partant de n_1 assez grand, pour chaque suite d'indices (n_k) ,

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

nous pouvons intercaler entre Δ_{n_k} et $\Delta_{n_{k+1}}$ ν_k intervalles $\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, \dots, \Delta_{\nu_k}^{(k)}$ de mesure commune $|\Delta_{n_k}|$ de sorte que, pour chaque k ,

$$(8) \quad \frac{1}{3} < (1 - |\Delta_{n_k}|)^{\nu_k} \leq \frac{1}{2}.$$

Choisissons alors la suite (n_k) suffisamment croissante pour que

$$(6') \quad \sum_k \left[3^k \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{|\Delta_n| - |\Delta_{n+1}|}{n} \prod_{p=1}^{\nu_k} (1 - |\Delta_p|) \right] < \infty,$$

$$(7') \quad 3^{k(n)} \frac{|\Delta_n|}{n} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0, \\ \prod_{p=1}^{\nu_k} (1 - |\Delta_p|)$$

où $k = k(n)$ est défini par $n_k \leq n < n_{k+1}$.

(6') et (7') montrent alors, d'après le théorème 2 du paragraphe 2, que le système obtenu en adjoignant au système (Δ_n) le système des $\Delta_j^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, \nu_k$) est un cas de non-couverture. Mais d'après (8)

$$\sum_{k, j} |\Delta_j^{(k)}| = \infty,$$

donc, d'après le 2^o, (Δ_n) est bien un cas de non-couverture non dénombrable.

Application. — Se reportant aux exemples de non-couverture du paragraphe 2, nous voyons que les cas de non-couverture $\Delta_n = \frac{1-\varepsilon}{n}$ ($0 < \varepsilon < 1$) sont des cas de non-couverture non dénombrable.

Si $|\Delta_n| = \frac{1}{n+1}$ était un cas de non-couverture, ce serait, d'après le corollaire du théorème 3, un cas de non-couverture dénombrable, donc de nature différente du cas $|\Delta_n| = \frac{1-\varepsilon}{n}$ ($0 < \varepsilon < 1$).

Mais nous ne savons pas montrer que $|\Delta_n| = \frac{1}{n+1}$ est un cas de non-couverture, plus encore, nous ne savons pas montrer qu'il existe des cas de non-couverture dénombrable.

4. GÉNÉRALISATIONS DU PROBLÈME DE COUVERTURE DU CERCLE PAR DES INTERVALLES PLACÉS AU HASARD.

Au lieu d'étudier les points de T qui ne sont qu'un nombre fini de fois recouverts, nous pouvons étudier les points de T qui peuvent être une infinité de fois recouverts, mais avec une « rareté » précisée.

Voici un exemple de « rareté ». Étant donnée une série

$$S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergente, dont le terme général a_n décroît et tend vers zéro, la suite d'indices $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ sera dite rare S si est seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \infty.$$

A ce sujet, cf. (III) et aussi (IV), chap. XIII., § 7. Ainsi, lorsque nous plaçons les intervalles Δ_n [$|\Delta_n| = \frac{1}{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$)] sur T , pour presque tout point $t \in T$, la suite (n_k) telle que $t \in \Delta_{n_k}$ est rare S si S est fixée telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} < \infty$$

(par exemple si $S \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(n+1)}$).

Désignons en effet par φ_n la fonction caractéristique de Δ_n , nous avons à estimer la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t).$$

Cette convergence a lieu presque partout puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T \varphi_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} < \infty.$$

Voici une autre façon d'exprimer ce résultat. Étant donnée une suite numérique $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ disons qu'elle est convergente S , $S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, vers s si et seulement s'il existe une suite d'indices (n_k) rare S , telle que pour la suite d'indices restante, il y ait convergence de s_n vers s .

Puisque la réunion de deux suites d'indices rares S est rare S , nous voyons que (s_n) ne peut être convergente S que vers une seule limite.

Dans ces conditions, le résultat précédent peut s'exprimer ainsi : La suite φ_n est presque partout convergente $S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vers 0, dès que S est fixée avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$.

Définition 1. — Étant donnée la suite (X_n) de variables aléatoires réelles sur le champ Ω , $S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série divergente dont le terme général a_n décroît et tend vers zéro, nous dirons que la suite (X_n) est pour toute suite d'indices presque sûrement convergente S si et seulement si pour toute suite d'indices (n_k) , la suite (X_{n_k}) est presque sûrement convergente S .

Cela étant, nous avons la caractérisation suivante de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

THÉORÈME 4. — *La suite (X_n) de variables aléatoires réelles sur le champ Ω est convergente en probabilité si et seulement s'il existe une série*

$$S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergente, dont le terme général a_n décroît et tend vers zéro, de sorte que la suite (X_n) est pour toute suite d'indices presque sûrement convergente S .

Démonstration. — Supposons la suite (X_n) convergente en probabilité vers X . Alors nous pouvons trouver une suite (ε_n) de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro telle que

$$A_n = \{ |X_n - X| \geq \varepsilon_n \}$$

vérifie

$$\text{Prob}(A_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

Posons

$$\lambda_n = \sup_{m \geq n} \text{Prob}(A_m) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La suite (λ_n) décroît et tend vers zéro. Soit donc (n_k) une suite d'indices avec $n_1 = 1$, $n_{k+1} - n_k$ croissant avec k tendant vers l'infini et

$$\lambda_{n_k} \leq \frac{1}{2^k} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

et considérons la suite (a_n) définie par

$$a_n = \frac{1}{n_{k+1} - n_k} \quad \text{pour } n_k \leq n < n_{k+1}.$$

La suite (a_n) décroît, tend vers zéro et

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n < \infty.$$

Mais puisque λ_n décroît, pour toute suite d'indices (ν_j) , nous avons

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\nu_j} a_j < \infty.$$

Ainsi, pour toute suite d'indices (ν_j) nous avons

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{Prob}(\Lambda_{\nu_j}) < \infty$$

ou encore, en désignant par χ_n la variable aléatoire égale à 1 pour $\omega \in A_n$ et à 0 ailleurs

$$\mathcal{E} \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{\nu_j} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathcal{E}(\chi_{\nu_j}) < \infty,$$

ce qui montre que pour presque chaque $\omega \in \Omega$, la suite des indices j pour lesquels

$$\omega \in A_{\nu_j}$$

est rare $S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donc que (X_{ν_j}) converge presque sûrement S vers X.

Inversement, supposons l'existence d'une série divergente $S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dont le terme général a_n décroît et tend vers zéro, de sorte que pour toute suite d'indices (n_k) la suite (X_{n_k}) converge presque sûrement S.

Montrons que la suite (X_n) converge en probabilité.

En effet, supposons le contraire. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ avec une suite (n_k) telle que

$$\text{Prob} [|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}| \geq \varepsilon] \geq \eta \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Mais par hypothèse, la suite (X_{n_k}) converge presque sûrement S. De là, pour presque chaque $\omega \in \Omega$, la suite des indices $2k$ tels que

$$|X_{n_{2k}}(\omega) - X_{n_{2k+1}}(\omega)| \geq \varepsilon$$

est rare S. Posant $A_{2k} = \{ |X_{n_{2k}} - X_{n_{2k+1}}| \geq \varepsilon \}$ et désignant par χ_{2k} la variable aléatoire égale à 1 pour $\omega \in A_{2k}$ et 0 ailleurs, il s'ensuit que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \chi_{2k}$$

converge presque sûrement. Nous pouvons donc trouver $M > 0$ tel que

$$\text{Prob} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \chi_{2k} \leq M \right] \geq 1 - \frac{\eta}{2}.$$

Posant alors $B = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \chi_{2k} \leq M \right]$ nous avons

$$\mathcal{E}_B \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \chi_{2k} \right) < \infty, \quad \text{soit} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \mathcal{E}_B(\chi_{2k}) < \infty.$$

Mais $\text{Prob}(B) \geq 1 - \frac{\eta}{2}$ et $\text{Prob}(A_{2k}) \geq \eta$ ($k = 1, 2, \dots$) donnent $\mathcal{E}_B(\chi_{2k}) \geq \frac{\eta}{2}$ ($k = 1, 2, \dots$), donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \left(\frac{\eta}{2} \right) < \infty,$$

ce qui est impossible et achève la démonstration.

Si nous supposons seulement que la suite X_n est presque sûrement convergente S, nous avons le

THÉORÈME 4'. — Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles sur le champ Ω où la mesure est supposée complète.

Si (X_n) est presque sûrement convergente S $\left(S \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$ et nous supposons seulement que $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ il est possible de supprimer de la suite (X_n) une sous-suite (X_{n_k}) correspondant à une suite d'indices (n_k) rare S, de sorte que la suite restante de variables aléatoires soit convergente en probabilité.

Démonstration. — Désignons par A l'événement constitué des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $(X_n(\omega))$ est convergente S. Par hypothèse,

$$\text{Prob}(A) = 1.$$

A chaque $\omega \in A$ associons une suite d'indices \mathcal{S}_ω rare S telle que pour n variant dans la suite complémentaire, il y ait convergence de $(X_n(\omega))$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et posons les deux définitions suivantes

$$(1) \quad A_{n,m} = [|X_n - X_m| \geq \varepsilon] \quad \text{pour } n < m,$$

$$(2) \quad \varepsilon_n = \inf \left[\sup_{\substack{m \in (m_k) \\ m > n}} \text{Prob}(A_{n,m}) \right],$$

où (m_k) désigne une suite d'indices rare S quelconque. Montrons

$$(3) \quad \text{La suite } (\varepsilon_n) \text{ est convergente S vers } 0.$$

Pour le voir, faisons l'hypothèse non (3). Dans ces conditions il existe $\varepsilon' > 0$ tel que les indices n pour lesquels $\varepsilon_n \geq \varepsilon'$ forment une suite non rare S. En effet, sinon, prenant successivement

$$\varepsilon' = \frac{1}{2^j} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

les n pour lesquels $\varepsilon_n \geq \frac{1}{2^j}$ forment une suite \mathcal{S}_j^* qui est rare S et quitte à supprimer un nombre fini de termes de \mathcal{S}_j^* , nous pouvons supposer que

$$\sum_{n \in \mathcal{S}_j^*} a_n \leq \frac{1}{2^j}.$$

Il en résulte que la suite

$$\mathcal{S}^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{S}_j^*$$

est rare S et, pour n variant dans la suite complémentaire, il y a convergence vers 0 de ε_n , ce qui contredit non (3).

Désignons alors par (n_k) la suite non rare S des indices n pour lesquels

$$\varepsilon_n \geq \varepsilon', \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Nous avons

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \quad \text{avec } a_{n_k} \neq 0 \text{ pour tout } k.$$

Pour chaque n_k , la suite des indices $m > n_k$ tels que

$$\text{Prob}(A_{n_k, m}) \geq \frac{\varepsilon'}{2}$$

n'est pas rare S, car sinon d'après (2), nous aurions $\varepsilon_{n_k} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ en contradiction avec la définition de la suite (n_k) .

Il en résulte qu'opérant successivement avec $k = 1, 2, \dots$ et utilisant $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, nous avons la possibilité d'associer à chaque n_k les indices

$$m_{k,1} < m_{k,2} < \dots < m_{k,\nu_k}$$

tels que

$$(5) \quad n_k < m_{k,1}, m_{k,\nu_k} < m_{k+1,1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$(6) \quad \frac{1}{2} a_{n_k} \leq \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{m_{k,j}} \leq a_{n_k}, \quad \text{Prob}(A_{n_k, m_{k,j}}) \geq \frac{\varepsilon'}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, \nu_k).$$

Soit B l'événement constitué des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite des indices $m_{k,j}$ tels que $\omega \in A_{n_k, m_{k,j}}$ n'est pas rare S.

B n'est pas un événement de probabilité nulle, car sinon, désignant par $\chi_{m_{k,j}}$ la variable aléatoire égale à 1 pour $\omega \in A_{n_k, m_{k,j}}$ et à 0 ailleurs, la série

$$\sum_{k,j} a_{m_{k,j}} \chi_{m_{k,j}}$$

converge presque sûrement. Nous pouvons donc prendre $M > 0$ assez grand pour que

$$B^* = \left[\sum_{k,j} a_{m_{k,j}} \chi_{m_{k,j}} \leq M \right]$$

vérifie

$$(7) \quad \text{Prob}(B^*) \geq 1 - \frac{\varepsilon'}{4}.$$

Nous avons donc $\sum_{k,j} a_{m_{k,j}} \mathcal{E}_{B^*}(\chi_{m_{k,j}}) < \infty$, d'où, avec (6) et (7),

$$\sum_{k,j} a_{m_{k,j}} \left(\frac{\varepsilon'}{4} \right) < \infty,$$

ce qui est contradictoire avec (4) et (6).

Ainsi

$$B \cap A \neq \emptyset.$$

Soit alors $\omega_0 \in B \cap A$. Les $m_{k,j}$ pour lesquels

$$m_{k,j} \notin \mathcal{S}_{\omega_0}, \quad \omega_0 \in A_{n_k, m_{k,j}}$$

forment une suite non rare S. Les n_k qui leur correspondent forment eux aussi une suite non rare S en raison de (6).

Nous pouvons donc trouver une infinité d'indices k avec un j_k correspondant ($1 \leq j_k \leq \nu_k$) de sorte que

$$\omega_0 \in A_{n_k, m_{k,j_k}} \quad \text{avec} \quad n_k \notin \mathcal{S}_{\omega_0} \quad \text{et} \quad m_{k,j_k} \notin \mathcal{S}_{\omega_0}.$$

Ceci contredit la définition de \mathcal{S}_{ω_0} et (3) se trouve établi.

Cela étant, désignons par $\Lambda_{0,\varepsilon}$ une suite rare S telle que pour $n \notin \Lambda_{0,\varepsilon}$, $\varepsilon_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$.

A chaque $n \notin \Lambda_{0, \varepsilon}$, nous pouvons associer une suite $\Lambda_{n, \varepsilon}$ rare S, telle que pour $m > n$, $m \notin \Lambda_{n, \varepsilon}$ nous ayons

$$\text{Prob}(\Lambda_{n, m}) \leq \varepsilon_n + \frac{1}{n}.$$

Quitte à supprimer un nombre fini de termes de $\Lambda_{n, \varepsilon}$, nous pouvons supposer que

$$\sum_{v \in \Lambda_{n, \varepsilon}} a_v \leq \frac{1}{2^n},$$

de là,

$$\Lambda_\varepsilon = \Lambda_{0, \varepsilon} \cup \left[\bigcup_{n \notin \Lambda_{0, \varepsilon}} \Lambda_{n, \varepsilon} \right]$$

est rare S, et si $\varepsilon'' > 0$ est donné, prenant $n_0 \notin \Lambda_{0, \varepsilon}$ assez grand pour que

$$\varepsilon_{n_0} + \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon''$$

nous voyons que pour $m, m' \notin \Lambda_\varepsilon$, $m, m' >$ au premier terme de $\Lambda_{n_0, \varepsilon}$, nous avons

$$\text{Prob}[|X_m - X_{m'}| \geq 2\varepsilon] \leq \text{Prob}[|X_m - X_{n_0}| \geq \varepsilon] + \text{Prob}[|X_{m'} - X_{n_0}| \geq \varepsilon] \leq 2\varepsilon''.$$

Ainsi lorsque m et m' tendent vers l'infini en évitant la suite rare S Λ_ε , $\text{Prob}[|X_m - X_{m'}| \geq 2\varepsilon]$ tend vers zéro.

Prenons alors successivement $\varepsilon = \frac{1}{2^j}$ ($j = 1, 2, \dots$) et définissons à chaque fois la suite rare S $\Lambda_{\frac{1}{2^j}}$ de sorte que, pour $m, m' \rightarrow \infty$, $m, m' \notin \Lambda_{\frac{1}{2^j}}$, nous ayons

$$\text{Prob}\left[|X_m - X_{m'}| \geq 2 \frac{1}{2^j}\right] \rightarrow 0.$$

Quitte à supprimer un nombre fini de termes de $\Lambda_{\frac{1}{2^j}}$, nous aurons

$$\sum_{v \in \Lambda_{\frac{1}{2^j}}} a_v \leq \frac{1}{2^j},$$

de sorte que $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_{\frac{1}{2^j}}$ est rare S. Mais alors nous voyons que lorsque $m, m' \rightarrow \infty$, $m, m' \notin \Lambda$, $\text{Prob}[|X_m - X_{m'}| \geq \varepsilon''']$ tend vers zéro quel que soit $\varepsilon''' > 0$. Ceci achève la démonstration.

Application du théorème 4' aux séries lacunaires. — Considérons la série trigonométrique lacunaire à coefficients réels

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x] \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Nous savons que si

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \infty$$

aucun procédé de sommation de Töplitz ne peut servir à sommer (8) sur un ensemble de mesure positive.

Le théorème 4' montre qu'il en est de même pour tout procédé

$$S \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \alpha_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \alpha_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0.$$

En effet, si le procédé S réussit sur l'ensemble E de mesure positive, alors, à condition d'éviter une suite d'indices (n_k) rare S, la suite

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n [a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x]$$

est convergente en mesure sur E, ainsi, nous pouvons en extraire une sous-suite qui est une suite d'indices de convergence pour presque tout point de E.

Ceci contredit le résultat de (III), page 205, remarque b.

BIBLIOGRAPHIE.

(2^e partie.)

- (I) J.-P. KAHANE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 184-186.
- (II) P. ERDÖS, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sc.*, vol. VI, série A., fasc. 1, 2, 1961, p. 254.
- (III) A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*. t. 1 et 2, 2^e édition, 1959.
- (IV) P. BILLARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 618-619.
- (V) A. DVORETZKI, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, t. 42, 1956, p. 199-203.

