

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. DURRANDE

Étude de l'accélération dans le déplacement d'un système de forme variable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 3 (1874), p. 151-164

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__151_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE
DE
L'ACCÉLÉRATION DANS LE DÉPLACEMENT

D'UN SYSTÈME DE FORME VARIABLE,

PAR M. DURRANDE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

1. Dans un Mémoire précédent (¹), je me suis occupé du déplacement d'une figure qui subit en même temps une déformation homographique, c'est-à-dire d'un système de points dont les vitesses sont des fonctions linéaires des coordonnées de chacun d'eux. Dans ce premier travail, je n'ai considéré que les relations entre les vitesses des divers points du système; ces relations sont déjà assez remarquables pour fixer un peu l'attention. En étudiant les propriétés du déplacement d'un système dont les déformations sont soumises à la loi de l'homographie, je dois forcément retrouver tous les théorèmes donnés par M. Chasles sur le déplacement d'un corps solide. Les lecteurs de mon premier Mémoire ont pu remarquer avec quelle simplicité j'ai pu déduire toutes les relations entre les vitesses des divers points d'une figure géométrique de l'expression qui donne la vitesse d'un point estimée dans une certaine direction; cette même formule m'a également fourni une solution extrêmement simple du problème qui a pour objet la détermination des paramètres du déplacement d'un système lorsqu'on connaît en grandeur et en direction les vitesses de quatre points donnés.

Le second travail, que je présente aujourd'hui, a pour objet l'étude de l'accélération dans le système considéré du Mémoire précédent. Je montre d'abord que l'accélération totale d'un point du système peut être considérée comme la résultante de trois accélérations partielles,

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2^e série, t. II, p. 81.

savoir : 1° une accélération commune à tous les points; 2° une accélération relative à l'origine, qui dépend des paramètres de la déformation et qui fait l'objet principal de cette seconde étude; 3° l'accélération relative à l'origine dans le cas où le système serait solidifié.

Dans la première Partie, on a vu que la dérivée logarithmique du rayon vecteur, ce que j'ai désigné par ϵ et qu'on pourrait appeler le coefficient de *déformation du premier ordre*, joue un très-grand rôle; sa variation est représentée par une surface du second ordre que j'ai appelée *déformatrice*. Ici nous allons rencontrer une grandeur analogue, qu'on pourra appeler le *coefficient de déformation du second ordre*, et dont la variation, plus compliquée que celle de ϵ , sera donnée par une surface du quatrième ordre en général.

Je donne le nom de *seconde déformatrice*, non pas à cette surface du quatrième ordre, mais à une surface du second degré, qui a les mêmes axes principaux que la première déformatrice, et qui joue le même rôle dans l'étude de l'accélération. Ainsi la composante de l'accélération qui ne dépend que des paramètres de la déformation est normale en chaque point à une surface homothétique à la seconde déformatrice et proportionnelle à son demi-paramètre différentiel du premier ordre.

Dans le cas où l'on suppose le système dépourvu d'un mouvement général de translation et de rotation, et soumis uniquement à des *déformations statiques*, la demi-dérivée du carré de la vitesse est le produit des deux demi-paramètres différentiels des deux déformatrices par le cosinus de l'angle de leurs directions.

On remarquera que je n'insiste pas sur les propriétés qui résultent de ce que les composantes des accélérations totales ou partielles suivant les axes sont des fonctions linéaires des coordonnées; ce serait répéter ce que j'ai déjà indiqué dans le premier travail sur les vitesses. Il n'est pas difficile de voir, par exemple, que les points du système pour lesquels l'accélération totale ou l'une des accélérations partielles est la même sont situés sur des surfaces du second ordre; et cela serait vrai pour les accélérations des divers ordres (1).

(1) Les principaux résultats contenus dans ce travail ont paru déjà dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, novembre 1872.

I. — *Expressions des composantes de l'accélération.*

2. Nous avons trouvé (p. 77 du premier Mémoire), pour les expressions des vitesses composantes, dans le cas où le système n'a aucun point fixe :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - r y + q z + u_1, \\ \frac{dy}{dt} = r x + \varepsilon_2 y - p z + u_2, \\ \frac{dz}{dt} = -q x + p y + \varepsilon_3 z + u_3. \end{cases}$$

En différentiant de nouveau les équations (1) par rapport au temps, on aura

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = J_x^0 + J'_x + J''_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = J_y^0 + J'_y + J''_y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = J_z^0 + J'_z + J''_z; \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(3) \quad \begin{cases} J_x^0 = \varepsilon_1 u_1 - r u_2 + q u_3 + \frac{du_1}{dt}, \\ J_y^0 = r u_1 + \varepsilon_2 u_2 - p u_3 + \frac{du_2}{dt}, \\ J_z^0 = -q u_1 + p u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \frac{du_3}{dt}, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} J'_x = \left(\varepsilon_1^2 + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \right) x - r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) y + q(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) z, \\ J'_y = r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x + \left(\varepsilon_2^2 + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \right) y - p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) z, \\ J'_z = -q(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) x + p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) y + \left(\varepsilon_3^2 + \frac{d\varepsilon_3}{dt} \right) z; \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} J''_x = -(r^2 + q^2) x + \left(pq - \frac{dr}{dt} \right) y + \left(pr + \frac{dq}{dt} \right) z, \\ J''_y = \left(pq + \frac{dr}{dt} \right) x - (r^2 + p^2) y + \left(rq - \frac{dp}{dt} \right) z, \\ J''_z = \left(pr - \frac{dq}{dt} \right) x + \left(qr + \frac{dp}{dt} \right) y - (p^2 + q^2) z. \end{cases}$$

Posons encore, pour abréger l'écriture,

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_1^2 + \frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = \varepsilon_2^2 + \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_3 = \varepsilon_3^2 + \frac{d\varepsilon_3}{dt},$$

$$P = p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad Q = q(\varepsilon_3 + \varepsilon_1), \quad R = r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

les expressions des J' deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} J'_x = \mathcal{E}_1 x - R y + Q z, \\ J'_y = R x + \mathcal{E}_2 y - P z, \\ J'_z = -Q x + P y + \mathcal{E}_3 z. \end{cases}$$

Quant aux J'' , on peut aussi les écrire d'une manière assez simple; en effet, on a

$$J''_x = -\omega^2 x + p(px + qy + rz) + z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt};$$

δ désignant la distance du point (x, y, z) au plan

$$px + qy + rz = 0,$$

perpendiculaire à l'axe de rotation, on voit que

$$px + qy + rz = \delta\omega,$$

d'où

$$(7) \quad \begin{cases} J''_x = \omega^2 [\delta \cos(\widehat{\omega, x}) - x] + z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt}, \\ J''_y = \omega^2 [\delta \cos(\widehat{\omega, y}) - y] + x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt}, \\ J''_z = \omega^2 [\delta \cos(\widehat{\omega, z}) - z] + y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt}. \end{cases}$$

Les formules (2) expriment que l'accélération totale d'un point du système se compose de trois parties :

- 1° L'accélération J_0 , commune à tous les points du système;
- 2° L'accélération J' , due à la déformation;
- 3° L'accélération J'' , qui serait celle du système solidifié, pivotant autour de l'origine.

3. Les composantes de l'accélération totale, comme celles des accélérations partielles J' , J'' , comme aussi celles des vitesses, sont des fonctions linéaires des coordonnées du point. Par suite, toutes les rela-

tions, tous les théorèmes déduits de cette forme linéaire, trouvés pour les vitesses, s'appliqueront aux accélérations; tels sont en particulier les théorèmes démontrés au paragraphe IV de mon premier Mémoire, et les discussions relatives à l'existence d'un centre ou d'un axe des vitesses (1).

Je laisserai donc de côté tout ce qui concerne les *centre* et *axe* d'accélération, pour m'occuper tout spécialement de l'étude de la partie *J'* de l'accélération qui dépend de la déformation du système.

II. — *Des paramètres qui entrent dans les expressions des composantes de J'.*

4. Si l'on se reporte aux équations du groupe (6), on remarquera sans peine la parfaite analogie de forme des expressions de J'_x, J'_y, J'_z et de celles des vitesses relatives à l'origine. Ces équations renferment six paramètres $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, P, Q, R$, dont nous allons chercher la signification.

5. *Variation de C.* — Les trois paramètres $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sont évidemment, d'après leur définition, les trois valeurs principales de la quantité définie par la relation

$$C = \epsilon^2 + \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Or, en désignant par ρ le rayon vecteur, on sait (premier Mémoire, p. 86) que

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

d'où

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\epsilon^2 + \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2};$$

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2}.$$

(1) On pourra voir toutefois dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 13 avril 1874) une Note où j'indique la démonstration d'un certain nombre de propriétés géométriques du déplacement dépendant à la fois des vitesses et des accélérations. Telles sont les questions relatives à la distribution des plans osculateurs aux trajectoires des divers points et des normales principales. (Voir la Note placée à la fin de cette étude.)

On voit donc ainsi que \mathcal{C} peut être considéré comme le coefficient de l'accélération de déformation linéaire dans la direction du rayon vecteur⁽¹⁾. Cette quantité joue donc, par rapport à l'accélération, le même rôle que ε par rapport à la vitesse.

Nous avons trouvé (p. 88 du premier Mémoire) que si (α, β, γ) sont les angles d'une direction avec les axes coordonnés rectangulaires, la valeur de ε qui correspond à cette direction est donnée par la formule

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma,$$

qui exprime que ε varie en raison inverse du carré du rayon vecteur d'une surface du second ordre au centre

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 1,$$

à laquelle j'ai donné le nom de *déformatrice*. Il est naturel de se demander s'il n'existe pas pour \mathcal{C} un mode analogue de représentation.

Pour le découvrir, reprenons les formules (10) (premier Mémoire, p. 89)

$$\begin{aligned} \varepsilon \cos \alpha + \theta \cos \xi &= \varepsilon_1 \cos \alpha - r \cos \beta + q \cos \gamma, \\ \varepsilon \cos \beta + \theta \cos \eta &= r \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta - p \cos \gamma, \\ \varepsilon \cos \gamma + \theta \cos \zeta &= -q \cos \alpha + p \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma, \end{aligned}$$

p, q, r étant les projections de la vitesse angulaire ω sur les axes; on peut, en introduisant les angles (ξ', η', ζ') que la normale au plan $(\rho\omega)$ fait avec les axes, et posant $\omega \sin(\widehat{\rho, \omega}) = \theta$, écrire les formules précédentes sous la forme

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon \cos \alpha + \theta \cos \xi = \varepsilon_1 \cos \alpha + \theta' \cos \xi', \\ \varepsilon \cos \beta + \theta \cos \eta = \varepsilon_2 \cos \beta + \theta' \cos \eta', \\ \varepsilon \cos \gamma + \theta \cos \zeta = \varepsilon_3 \cos \gamma + \theta' \cos \zeta'; \end{cases}$$

θ' est ce que deviendrait θ si le système ne se déformait pas, ou si les déformations étaient les mêmes en tous sens.

(1) Il serait peut-être préférable de donner à ε le nom de *coefficient de déformation du premier ordre*, et à \mathcal{C} le nom de *coefficient de déformation du second ordre*.

Dès formules (8) on déduit sans peine, en posant, comme dans la première Partie (p. 93),

$$\cos \tau = \cos \xi \cos \xi' + \cos \eta \cos \eta' + \cos \zeta \cos \zeta',$$

et remarquant que $\sum \cos \xi \cos \alpha = 0$, $\sum \cos \xi' \cos \alpha = 0$

$$(9) \quad \varepsilon^2 = \sum \varepsilon_i^2 \cos^2 \alpha - \theta^2 - \theta'^2 + 2\theta\theta' \cos \tau.$$

D'autre part, de l'expression de ε on déduit

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{d\varepsilon_i}{dt} \cos^2 \alpha + 2 \sum \varepsilon_i \cos \alpha \frac{d(\cos \alpha)}{ds};$$

mais, à cause de (n° 2, premier Mémoire, p. 86),

$$\frac{d(\cos \alpha)}{dt} = \theta \cos \xi,$$

on a

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{d\varepsilon_i}{dt} \cos^2 \alpha + 2\theta \sum \varepsilon_i \cos \alpha \cos \xi;$$

mais des équations (8) on tire

$$\theta = \sum \varepsilon_i \cos \alpha \cos \xi + \theta' \cos \tau,$$

d'où

$$(10) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \frac{d\varepsilon_i}{dt} \cos^2 \alpha + 2\theta^2 - 2\theta\theta' \cos \tau.$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (9) et (10), il vient

$$(11) \quad \mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i \cos^2 \alpha + \theta^2 - \theta'^2.$$

Telle est la relation qui donne la loi de la variation de \mathcal{C} autour d'un point quelconque du système.

On peut exprimer la différence $\theta^2 - \theta'^2$ en fonction des paramètres du déplacement et de la direction (α, β, γ) . On a d'abord

$$\theta' = \omega \sin(\widehat{\rho, \omega}) = \sqrt{\sum (q \cos \gamma - r \cos \beta)^2};$$

de plus, le groupe d'où l'on déduit le groupe (8) donne

$$\varepsilon^2 + \theta^2 = \sum \varepsilon_i^2 \cos^2 \alpha + \theta'^2 + 2 \sum \varepsilon_i \cos \alpha (q \cos \gamma - r \cos \beta),$$

et par suite, en éliminant ε ,

$$\theta^2 - \theta'^2 = 2 \sum \varepsilon_i \cos \alpha (q \cos \gamma - r \cos \beta) + \sum (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta;$$

on en conclut

$$(12) \quad \mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i \cos^2 \alpha - 2 \sum r (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \alpha \cos \beta + \sum (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta.$$

On voit que la variation de \mathcal{C} suit une loi plus compliquée que celle de ε . Aussi, si l'on veut représenter cette loi au moyen d'une surface, on prévoit que cette surface sera du quatrième degré; en effet, si l'on pose

$$\mathcal{O}_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \mathcal{O}_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \mathcal{O}_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \dots,$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

la relation (12) devient

$$(x^2 + y^2 + z^2) (\mathcal{C}_1 x^2 + \mathcal{C}_2 y^2 + \mathcal{C}_3 z^2 - 2p \mathcal{O}_1 yz - 2q \mathcal{O}_2 zx - 2r \mathcal{O}_3 xy) + \mathcal{O}_1^2 y^2 z^2 + \mathcal{O}_2^2 z^2 x^2 + \mathcal{O}_3^2 x^2 y^2 = 1,$$

équation qui représente bien une surface du quatrième degré.

La discussion de cette surface ne saurait présenter un grand intérêt; remarquons d'ailleurs que si les différences \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 , \mathcal{O}_3 sont assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés, l'équation précédente se ramène au second degré en posant

$$\mathcal{C} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Quoi qu'il en soit, je donnerai le nom de *seconde déformatrice* à la surface du second degré

$$\mathcal{C}_1 x^2 + \mathcal{C}_2 y^2 + \mathcal{C}_3 z^2 = 1,$$

qui donnerait la loi de la variation de ε dans le cas d'une déformation sensiblement sphérique, et qui joue dans ce qui va suivre un rôle plus important que la surface qui représente véritablement la variation de ε .

6. *Paramètres mixtes.* — Les paramètres P, Q, R, qui ont pour expression $p(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, $q(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)$, $r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, peuvent être considérés comme des paramètres *mixtes* dépendant à la fois du déplacement général du système et de la déformation. Posons

$$\Omega^2 = P^2 + Q^2 + R^2, \quad \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

soit en outre ε_ω la valeur de ε pour la direction de l'axe de rotation ω , δ_ω la distance de l'origine au plan tangent à la déformatrice première à l'extrémité du diamètre dirigé suivant l'axe de rotation; on aura

$$\Omega^2 = \sum p^2 (\Theta - \varepsilon_i)^2 = \Theta^2 \omega^2 - 2 \Theta \sum \varepsilon_i p^2 + \sum \varepsilon_i^2 p^2.$$

De l'expression bien connue de ε on déduit

$$\omega^2 \varepsilon_\omega = \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2;$$

d'autre part,

$$\varepsilon_1^2 p^2 + \varepsilon_2^2 q^2 + \varepsilon_3^2 r^2 = \frac{\omega^2}{\delta_\omega^2 \rho_\omega^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon_\omega}{\delta_\omega^2}; \quad (1)$$

or

$$\delta_\omega = \rho_\omega \cos \varphi, \quad \varphi = (\widehat{\delta_\omega, \rho_\omega});$$

donc

$$\sum \varepsilon_i^2 p^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_\omega^2}{\cos^2 \varphi} = \omega^2 \varepsilon_\omega^2 \sec^2 \varphi.$$

On aura donc enfin pour l'expression de Ω

$$\Omega^2 = \omega^2 (\Theta^2 - 2 \Theta \varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega^2 \sec^2 \varphi = \omega^2 [(\Theta - \varepsilon_\omega)^2 + \varepsilon_\omega^2 \tan^2 \varphi];$$

d'où

$$\Omega = \omega \sqrt{(\Theta - \varepsilon_\omega)^2 + \varepsilon_\omega^2 \tan^2 \varphi}.$$

(1) ρ_ω désigne le rayon vecteur de la première déformatrice, suivant la direction de l'axe de rotation; et, d'après la définition de cette surface, on a $\varepsilon_\omega = \frac{1}{\rho_\omega^2}$.

Ω , comme P, Q, R, est donc un *paramètre mixte*, produit d'une vitesse angulaire par un coefficient de vitesse de déformation.

III. — Décomposition de l'accélération J'.

7. Il résulte de la simple inspection des expressions de J'_x, J'_y, J'_z que l'accélération J' peut être considérée comme la résultante de deux accélérations :

1° D'une accélération dont les projections sont

$$\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y, \varepsilon_3 z$$

et dont la résultante est, par conséquent,

$$\sqrt{\varepsilon_1^2 x^2 + \varepsilon_2^2 y^2 + \varepsilon_3^2 z^2},$$

c'est-à-dire *le demi-paramètre différentiel du premier ordre de la SECONDE DÉFORMATRICE, ou du moins d'une surface homothétique de celle-ci passant par le point (x, y, z); de plus, cette composante de J' est normale à cette surface;*

2° D'une seconde partie dont les projections sont

$$Qz - Ry, \quad Rx - Pz, \quad Py - Qx.$$

On voit d'abord que cette seconde composante de J' est perpendiculaire au rayon vecteur ρ , car sa projection sur ce rayon vecteur est nulle. De plus, on trouve aisément qu'elle a pour valeur

$$\rho \Omega \sin(\widehat{\Omega, \rho});$$

c'est donc une véritable accélération composée, car c'est le produit d'une vitesse angulaire par une vitesse linéaire, d'après ce que nous avons dit de Ω .

Ainsi, dans le déplacement d'un système de points dont les vitesses sont des fonctions linéaires des coordonnées, la partie de l'accélération qui dépend des paramètres de la déformation est la résultante : 1° d'une accélération normale à une surface du second ordre homothétique de la seconde déformatrice, et égale au demi-paramètre différentiel du premier

ordre de cette surface; 2° d'une accélération composée perpendiculaire au rayon vecteur et à la direction de l'accélération mixte Ω .

IV. — Quelques théorèmes sur l'accélération.

8. *Expression de l'accélération J' estimée suivant le rayon vecteur.* — Si l'on multiplie les trois expressions J'_x, J'_y, J'_z respectivement par x, y, z , et qu'on ajoute, il vient

$$x J'_x + y J'_y + z J'_z = \mathcal{E}_1 x^2 + \mathcal{E}_2 y^2 + \mathcal{E}_3 z^2 = V,$$

d'où

$$\rho \cdot J'_\rho = V \quad \text{et} \quad J'_\rho = \frac{V}{\rho};$$

ce qui signifie qu'en tous les points d'une surface

$$V = c$$

l'accélération J' estimée dans la direction du rayon vecteur est inversement proportionnelle au rayon vecteur.

Les surfaces

$$V = c$$

sont précisément des *surfaces de niveau* par rapport à la partie de l'accélération J' qui ne dépend que des déformations du système.

9. *Expressions de l'accélération totale relative à l'origine estimée suivant le rayon vecteur.* — L'accélération relative à l'origine est la résultante des accélérations J', J''. Multiplions respectivement par x, y, z les sommes $J'_x + J''_x, J'_y + J''_y, J'_z + J''_z$, et ajoutons, il vient d'abord

$$x J'_x + y J'_y + z J'_z = \sum \mathcal{E}_1 x^2 = \rho^2 \sum \mathcal{E}_1 \cos^2 \alpha.$$

$$x J''_x + y J''_y + z J''_z = -\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) + (px + qy + rz)^2 = -\rho^2 \theta'^2;$$

donc

$$(13) \quad J'_\rho + J''_\rho = \rho \left(\sum \mathcal{E}_1 \cos^2 \alpha - \theta'^2 \right).$$

D'autre part, comme d'après les formules (8) la vitesse d'un point relative à l'origine a pour composantes

$$\varepsilon x + \rho \theta \cos \xi, \quad \varepsilon y + \rho \theta \cos \gamma, \quad \varepsilon z + \rho \theta \cos \zeta,$$

on en déduit, en les différentiant,

$$\begin{aligned} J'_x + J''_y &= \left(\varepsilon^2 + \frac{d\varepsilon}{dt} \right) x + \rho \varepsilon \theta \cos \xi + \frac{d(\rho \theta \cos \xi)}{dt} \\ &= \varepsilon x + \rho \varepsilon \theta \cos \xi + \frac{d(\rho \theta \cos \xi)}{dt}, \end{aligned}$$

avec deux autres analogues.

Or, multiplier ces trois expressions par x, y, z revient à les multiplier par $\rho \cos \alpha, \rho \cos \beta, \rho \cos \gamma$; si l'on ajoute ensuite membre à membre, il vient

$$\sum x (J'_x + J''_x) = \varepsilon \rho^2 + \rho^2 \varepsilon \theta \sum \cos \alpha \cos \xi + \rho \sum \cos \alpha \frac{d(\rho \theta \cos \xi)}{dt}.$$

Mais on a vu (n° 5) que

$$\sum \cos \alpha \cos \xi = 0;$$

d'après cette relation, le deuxième groupe de termes de l'équation précédente disparaît; le troisième groupe se décompose en deux autres

$$\frac{d(\rho \theta)}{dt} \sum \cos \alpha \cos \xi = 0, \quad \rho^2 \theta \sum \cos \alpha \frac{d(\cos \xi)}{dt};$$

mais, en vertu de la relation rappelée ci-dessus, on a

$$\sum \cos \alpha \frac{d(\cos \xi)}{dt} = - \sum \cos \xi \frac{d(\cos \alpha)}{dt} = - \theta \sum \cos^2 \xi = - \theta.$$

Donc enfin on trouve pour la seconde expression de $J'_\rho + J''_\rho$

$$(14) \quad J'_\rho + J''_\rho = \rho (\varepsilon - \theta^2).$$

Le rapprochement des équations (13) et (14) nous fait précisément retomber sur la relation (11), (n° 5).

V. — Détermination des paramètres de l'accélération.

10. Les expressions des diverses composantes de l'accélération d'un point du système, données au n° 2 [groupes (3), (4), (5)], montrent qu'indépendamment des paramètres des vitesses, au nombre de douze, que nous avons appris à déterminer dans le premier Mémoire (V), il

s'est introduit neuf nouveaux paramètres

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_3}{dt}, \quad \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dr}{dt}, \quad \frac{du_1}{dt}, \quad \frac{du_2}{dt}, \quad \frac{du_3}{dt},$$

qu'il faut déterminer pour que la loi du mouvement soit connue.

Il semble, d'après cela, qu'il suffirait de connaître, outre les vitesses de quatre points déterminés, les accélérations de trois d'entre eux; il n'en est rien cependant.

Si l'on se reporte, en effet, aux considérations géométriques du premier Mémoire, p. 112, considérations qui s'appliquent exactement aux accélérations, on voit qu'il faut absolument connaître les accélérations de quatre points pour pouvoir déterminer celle d'un autre point quelconque du système. Si le nombre des paramètres à déterminer paraît moindre que ne semblent l'indiquer les considérations géométriques, cela tient tout simplement à ce que les équations (3), (4), (5) renferment des expressions réduites, rapportées à un système d'axes particuliers, et dans lesquelles ne figurent pas les paramètres propres à fixer la position de ces axes.

On voit bien d'ailleurs qu'il en est de même pour les vitesses, car dans les équations (1) il n'entre que neuf paramètres, et nous savons cependant qu'en réalité il y en a douze à déterminer.

En particulier, dans le cas d'un système invariable, il n'entre que six paramètres dans les expressions des vitesses composantes; or il est bien facile de s'assurer directement sur ces expressions elles-mêmes qu'il ne suffit pas de connaître les vitesses et les coordonnées de deux points du système.

Sauf la longueur des calculs, provenant de la complication des coefficients des variables dans les expressions des composantes de l'accélération, la marche analytique à suivre pour la détermination des paramètres sera identiquement la même que celle qui est indiquée au n° 17 du premier Mémoire.

VI. — *Expression remarquable de la demi-dérivée du carré de la vitesse dans le cas d'une déformation statique.*

11. Si l'on suppose que le système n'ait pas de mouvement général de translation et de rotation, c'est-à-dire si l'on suppose $u_1 = 0$, $u_2 = 0$,

$u_3 = 0, p = 0, q = 0, r = 0$, nous aurons ce qu'on peut appeler une simple *déformation statique* du système. C'est ce qui arrive, par exemple, dans les systèmes articulés que j'ai considérés à la fin de mon premier travail.

Dans ce cas, les expressions des vitesses sont

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 y, \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon_3 z;$$

d'où

$$v^2 = \varepsilon_1^2 x^2 + \varepsilon_2^2 y^2 + \varepsilon_3^2 z^2 = \delta_1^2,$$

en désignant par δ_1 le demi-paramètre différentiel du premier ordre de la première déformatrice.

Si nous différencions l'équation précédente, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \sum \left(\varepsilon_i^2 x \frac{dx}{dt} + \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} x^2 \right) = \sum \left(\varepsilon_i^3 x^2 + \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} x^2 \right) = \sum \mathcal{E}_i \varepsilon_i x^2.$$

Or, Δ_1 désignant le demi-paramètre différentiel de la seconde déformatrice, θ l'angle que font les normales aux deux déformatrices au point (x, y, z) , on a

$$\cos \theta = \sum \frac{\varepsilon_i x}{\delta_1} \frac{\mathcal{E}_i x}{\Delta_1} = \frac{1}{\Delta_1 \delta_1} \sum \mathcal{E}_i \varepsilon_i x^2; \quad \text{donc enfin} \quad \frac{1}{2} \frac{d.v^2}{dt} = \Delta_1 \delta_1 \cos \theta.$$

Ainsi la demi-dérivée du carré de la vitesse d'un point du système dans le cas d'une déformation statique est le produit des paramètres différentiels du premier ordre des deux déformatrices et du cosinus de l'angle des normales en ce point.

Il était d'ailleurs facile de prévoir ce résultat, en remarquant que la force relative à l'unité de masse n'est autre chose que Δ_1 , et que le déplacement infiniment petit du point (x, y, z) est $\delta_1 dt$ (premier Mémoire, n° 7); le travail élémentaire de la force est donc

$$\Delta_1 \delta_1 \cos \theta . dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} d.v^2.$$

Dans une prochaine Communication je m'occuperai des relations qui existent entre les forces diverses agissant sur le système que j'ai considéré. On trouve des résultats assez intéressants, car les forces intérieures ne peuvent plus être éliminées comme dans le cas d'un solide invariable.