

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FALGAS

## Sur les séries de base de polynomes

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 81, n° 1 (1964), p. 1-76

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1964\\_3\\_81\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_1_1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ANNALES**  
SCIENTIFIQUES  
DE  
**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

---

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,  
3<sup>e</sup> série, t. 81, 1964, p. 1 à 76.

SUR  
**LES SÉRIES DE BASE DE POLYNOMES**

PAR M. MAURICE FALGAS (1).

---

INTRODUCTION.

De nombreux travaux ont été faits sur l'interpolation par des séries de polynomes. Je me propose d'abord de donner de ces séries une définition assez générale pour s'appliquer à la plupart des cas connus et ensuite d'en tirer des conditions de convergence vers les fonctions qu'elles sont chargées de représenter. Le champ d'application de ces conditions est assez vaste pour recouvrir celui des conditions énoncées par H. Cannon ou R. P. Boas et R. C. Buck.

Le chapitre I donne quelques théorèmes préliminaires dont certains paraissent nouveaux, mais comme ils ne constituent pas l'objet principal de ce travail, j'ai omis les démonstrations ou me suis contenté de les esquisser.

Les deux chapitres suivants forment la base de cette étude et sont essentiellement consacrés à des résultats généraux.

Enfin dans les trois derniers chapitres on pourra voir comment les considérations qui précèdent permettent de simplifier considérablement

---

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1963.

les démonstrations de certains théorèmes connus et d'arriver à des énoncés souvent plus généraux.

Les notations utilisées seront indiquées au fur et à mesure. Je signalerai simplement que les abreviations EV, EVT, EVTLC seront employées respectivement à la place des expressions « espace vectoriel », « espace vectoriel topologique », « espace vectoriel topologique localement convexe ».

Une courte notice bibliographique placée à la fin signale les ouvrages et publications qui m'ont servi pour rédiger ce travail. Une bibliographie très complète sur les séries d'interpolation est donnée, par exemple, dans [2 b], il m'a paru inutile de la reproduire.

## CHAPITRE I.

### ESPACES VECTORIELS DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

Le but de ce premier chapitre est de donner quelques définitions et propriétés qui seront utilisées dans la suite du travail.

#### I. — Espaces vectoriels de fonctions holomorphes.

1. FONCTIONS HOLOMORPHES, FONCTIONS HOLOMORPHES LOCALES. — Étant donné un domaine  $D$  (resp. une partie  $\Delta$  non vide de la sphère de Riemann) dont le complémentaire est non vide et un EVTLC  $E$ , nous adopterons pour les fonctions holomorphes dans  $D$  à valeurs dans  $E$ , pour les fonctions holomorphes locales sur  $\Delta$  à valeurs dans  $E$  et les fonctions holomorphes locales généralisées sur  $\Delta$  à valeurs dans  $E$  les définitions données par A. Grothendieck dans [8 a].

$\mathcal{H}(D, E)$  désignera l'EV des fonctions holomorphes dans  $D$  à valeurs dans  $E$  nulles à l'infini si  $\infty \in D$ , muni de la topologie de la convergence compacte.

$\mathcal{P}(\Delta, E)$  désignera l'EV des fonctions holomorphes locales sur  $\Delta$  à valeurs dans  $E$  nulles à l'infini si  $\infty \in \Delta$ , muni de la topologie localement convexe obtenue en le considérant comme une limite inductive généralisée d'espaces  $\mathcal{H}(D_n, E)$ , la suite des domaines  $D_n$  vérifiant

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} D_n = \Delta, \quad \Delta \subset D_{n+1} \subset D_n.$$

$Q(\Delta, E)$  désignera l'EV des fonctions holomorphes locales généralisées sur  $\Delta$ , nulles à l'infini si  $\infty \in \Delta$ .

Lorsque  $E$  est le corps  $C$  des complexes nous utiliserons  $\mathcal{H}(D)$ ,  $P(\Delta)$ ,  $Q(\Delta)$  au lieu de  $\mathcal{H}(D, C)$ ,  $P(\Delta, C)$ ,  $Q(\Delta, C)$ .

Lorsque  $\Delta$  est un domaine  $D$ ,  $P(\Delta, E)$  et  $Q(\Delta, E)$  s'identifient à  $\mathcal{H}(D, E)$ .

Dans tout ce qui suit  $E$  est un EVTLC complet.

Indiquons sommairement quelques propriétés des EV qui viennent d'être définis (pour les démonstrations, cf. [8 a]).

Soit  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann et soit  $E'$  le dual topologique de  $E$ . Soit

$$\bar{f} \in P(\Delta_1, E) \quad \text{et} \quad \bar{g} \in P(\Delta_2, E').$$

Soit  $\vec{f}$  un représentant de  $\bar{f}$  défini dans le voisinage  $U_1$  de  $\Delta_1$ ,  $\vec{g}$  un représentant de  $\bar{g}$  défini dans le voisinage  $U_2$  de  $\Delta_2$ .  $U_1$  et  $U_2$  peuvent être choisis de manière que  $\infty \notin U_1 \cap U_2$ .

Soit  $\Lambda$  une courbe simple rectifiable fermée séparant les points de  $\bigcup U_2$  de ceux de  $\bigcup U_1$ . Supposons  $\Lambda$  muni d'un sens de parcours positif autour de  $\bigcup U_2$ . Posons alors

$$(1) \quad \langle \bar{f}, \bar{g} \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int \langle \vec{f}(z), \vec{g}(z) \rangle dz.$$

On démontre que l'intégration a un sens et que la forme bilinéaire  $(\bar{f}, \bar{g}) \rightarrow \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$  établit une dualité séparante entre les espaces  $P(\Delta_1, E)$  et  $P(\Delta_2, E')$ .

La convention faite sur le choix de  $\Lambda$  et de son sens de parcours sera adoptée dans toute la suite du travail.

Étant donné  $\bar{g} \in P(\Delta_2, E')$  on dit qu'il a *localement une image équi-continue* s'il vérifie la propriété suivante :

Il existe un représentant  $\vec{g}$  de  $\bar{g}$  défini dans un voisinage  $U$  de  $\Delta_2$  et tel que pour tout  $z \in U$ , il existe un voisinage  $U_z$  de  $z$  contenu dans  $U$  et tel que  $\vec{g}(U_z)$  soit une partie équicontinue de  $E'$ .

**THÉORÈME 1.** — *Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont deux parties complémentaires connexes non vides de la sphère de Riemann, le dual de  $P(\Delta_1, E)$  s'identifie par (1) au sous-espace de  $P(\Delta_2, E')$  formé par les fonctions holomorphes locales qui ont localement une image équicontinue dans  $E'$ .*

**THÉORÈME 2.** — *Pour qu'une partie du dual de  $P(\Delta_1, E)$  soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle provienne d'un ensemble  $A$  de fonctions holomorphes définies dans un même voisinage  $V$  de  $\Delta_2$  tel que pour tout compact  $K \subset V$ ,*

$\bigcup_{\vec{f} \in A} \vec{f}(K)$  soit une partie équicontinue de  $E'$ .

F représente un espace complet,  $\mathcal{L}_s(E, F)$  désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence simple sur E. Le théorème 1 est généralisé par le suivant :

**THÉORÈME 3.** — E et F vérifiant les hypothèses qui précèdent, soit  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann, alors les applications linéaires bornées u de  $P(\Delta_1, E)$  dans F correspondent biunivoquement aux fonctions holomorphes locales  $\bar{L}$  appartenant à  $P(\Delta_2, \mathcal{L}_s(E, F))$  et qui vérifient l'hypothèse :

Il existe un borné A dans F tel que  $\bar{L}$  ait localement une image équicontinue lorsqu'on la considère comme application de  $\Delta_2$  dans  $\mathcal{L}_s(E, F_A)$ .

La correspondance entre u et  $\bar{L}$  est définie par

$$(2) \quad u(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} L(z) (f(z)) dz$$

[l'expression sous le signe  $\int$  a le sens suivant : L est un représentant de  $\bar{L}$ , L(z) est donc un élément de  $\mathcal{L}_s(E, F)$ ,  $\vec{f}(z)$  est un élément de E, L(z) ( $\vec{f}(z)$ ) est l'image de  $\vec{f}(z)$  par L(z)].

Nous dirons qu'un ensemble M d'applications linéaires d'un espace localement convexe P dans un autre F est *uniformément borné* s'il existe un voisinage V de o dans P tel que

$$\bigcup_{u \in M} u(V)$$

soit partie bornée de F. Le théorème 3 peut alors être généralisé par le suivant :

**THÉORÈME 4.** — Les ensembles uniformément bornés d'applications linéaires de  $P(\Delta_1, E)$  dans F sont ceux qui proviennent d'un ensemble  $(L_i)_{i \in I}$  d'applications holomorphes définies dans un même voisinage U de  $\Delta_2$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}_s(E, F)$  et telles que pour tout compact  $K \subset U$ , l'ensemble  $(L_i(\xi))_{\xi \in K, i \in I}$  soit partie uniformément bornée de  $\mathcal{L}_s(E, F)$ .

Nous pouvons également donner le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.** — Soit  $(\Omega_1, \Omega_2)$  et  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  deux couples de parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann  $\Omega$ , E et F deux espaces localement convexes, on suppose que  $\Sigma_1$  est ouvert et F complet ou que F est un sous-espace fermé d'un dual fort d'espace  $\mathcal{F}$ . Alors toute application linéaire bornée u de  $P(\Omega_1, E)$  dans  $P(\Sigma_1, F)$  est définie par la formule

$$(3) \quad u(\bar{f}) = \text{restriction à } \Sigma_1 \text{ de } \tau \rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} L(\zeta, \tau) f(\zeta) d\zeta,$$

$L$  est une fonction holomorphe dans le produit d'un voisinage ouvert  $U_2$  de  $\Omega_2$  par un voisinage ouvert  $V_1$  de  $\Sigma_1$  à valeurs dans  $\mathcal{L}_s(E, F)$  ayant localement une image uniformément bornée et telle que  $L(\xi, \eta) = 0$ , si  $\xi = \infty \in \Omega_2$  ou si  $\eta = \infty \in \Sigma_1$ .

Réciproquement pour toute fonction  $L$  vérifiant les propriétés précédentes, la formule (3) définit une application linéaire bornée de  $P(\Omega_1, E)$  dans  $P(\Omega_1, F)$ . Deux telles fonctions holomorphes définissent la même application linéaire si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de  $U_2 \times V_1$ .

Enfin, la notion de fonction holomorphe locale généralisée permet de donner le théorème suivant :

**THÉORÈME 5.** — Soit  $\Delta$  une partie connexe non vide de la sphère de Riemann et dont le complémentaire est non vide, alors les applications linéaires  $u$  continues de  $P(\Delta)$  dans  $F$  correspondent biunivoquement aux éléments  $\bar{L}$  de  $Q(\mathcal{C}\Delta, F)$ .

Pour la détermination précise de la correspondance on pourra se reporter à [8 a].

## II. — La convexité trigonométrique d'ordre $\rho$ .

1. L'ENSEMBLE  $\mathcal{C}_\rho$ . —  $\rho$  est un nombre réel vérifiant  $0 < \rho < \infty$ ,  $\mathcal{C}_\rho$  est l'ensemble des fonctions réelles  $k$  définies sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant les propriétés suivantes :

CT.  $k$  est périodique de période  $2\pi$ , continue et bornée;

CT $_\rho$ . Si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sont des nombres réels, les deux conditions

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3, \quad \varphi_3 - \varphi_1 \leq \frac{\pi}{\rho}$$

entraînent

$$(4) \quad \begin{vmatrix} k(\varphi_1) & \cos \rho\varphi_1 & \sin \rho\varphi_1 \\ k(\varphi_2) & \cos \rho\varphi_2 & \sin \rho\varphi_2 \\ k(\varphi_3) & \cos \rho\varphi_3 & \sin \rho\varphi_3 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Lorsqu'une fonction appartient à  $\mathcal{C}_\rho$ , nous dirons qu'elle vérifie la propriété de convexité trigonométrique d'ordre  $\rho$ .

Nous représenterons par  $\mathcal{C}_\rho^+$  la partie de  $\mathcal{C}_\rho$  formée par les fonctions  $k$  telles que  $\forall \varphi \in \mathbb{R} : k(\varphi) \geq 0$ .

2. SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE DOMAINES ÉTOILÉS. — Nous dirons qu'un domaine  $D$  est étoilé par rapport à  $O$  si  $O$  est intérieur à ce domaine et si tout segment ayant une extrémité en  $O$  et l'autre extrémité en un point quelconque du domaine est intérieure au domaine.

Nous dirons qu'un arc de courbe de Jordan  $\Gamma$  ne passant pas par  $O$  est étoilé par rapport à  $O$  si toute droite passant par  $O$  le coupe en un point au plus. Si  $A$  et  $B$  sont les extrémités,  $\widehat{AOB}$  sera appelé l'amplitude de  $\Gamma$ .

Nous dirons que l'arc  $\Gamma$  est *convexe par rapport à O* si, quel que soit  $M \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $V(M)$  de  $M$  et une droite  $\Delta$  passant par  $M$  tels que  $O$  et  $V(M) \cap \Gamma$  soient au sens large d'un même côté de cette droite.

LEMME 1. — *Étant donné un arc de courbe de Jordan  $\Gamma$  ne passant pas par O et étoilé par rapport à O, d'amplitude inférieure ou égale à  $\pi$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Gamma$  soit convexe par rapport à O est qu'à chaque point  $M$  de  $\Gamma$  on puisse associer un voisinage  $V(M)$  de ce point tel que les conditions :*

$M_1$  et  $M_2$  appartiennent à  $\Gamma \cap V(M)$ ;

le sens  $M_1 M M_2$  est le sens direct autour de O entraînent :

$$0 \leq \left( \overbrace{M_1 M, M M_2} \right) \leq \pi.$$

Nous admettrons ce résultat.

Les domaines  $\Delta_\rho(r_0, \varphi_0)$ . — Soit  $\rho, r_0, \varphi_0$  des nombres vérifiant  $\rho > 0$ ,  $0 < r_0 < \infty$ ,  $\varphi_0$  quelconque  $\in \mathbb{R}$ . Le domaine  $\Delta_\rho(r_0, \varphi_0)$  est, par définition, le domaine du plan complexe limité par la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = r_0 (\cos \rho (\varphi - \varphi_0))^{\frac{1}{\rho}},$$

$$\left( |\varphi - \varphi_0| \leq \inf \left\{ \pi, \frac{\pi}{\rho} \right\} \right).$$

Nous dirons qu'un domaine  $D$  appartient à  $\mathcal{G}_\rho$  s'il est étoilé et s'il est une réunion de domaines  $\Delta_\rho(r, \varphi)$ ,  $\rho$  ayant une valeur constante,  $r$  décrivant une partie de  $[0, \infty[$  bornée inférieurement par un nombre strictement positif et  $\varphi$  décrivant l'ensemble  $[0, 2\pi[$ .

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Pour que le domaine étoilé borné  $D$  appartienne à  $\mathcal{G}_\rho$ , il faut et suffit que la transformation*

$$z \rightarrow z^{-\rho}$$

*transforme tout arc de sa frontière dont l'amplitude est inférieure à  $\frac{\pi}{\rho}$  en un arc convexe par rapport à O.*

La proposition résulte de ce que  $\Delta_\rho(r_0, \varphi_0)$  a pour transformé un demi-plan, nous nous dispenserons de donner la démonstration.

On peut, en généralisant les notions précédentes, étendre la proposition aux domaines non bornés.

3. RELATION ENTRE LES ENSEMBLES  $\mathcal{C}_\rho^+$  ET  $\mathcal{G}_\rho$ . — Étant donné un domaine étoilé D appartenant ou non à  $\mathcal{G}_\rho$ , nous pouvons associer à chaque  $\varphi \in \mathbb{R}$  un nombre  $k(\varphi)$  vérifiant

$$0 \leq k(\varphi) < \infty$$

défini par

$$(5) \quad k(\varphi) = \inf_{\Delta_\rho(r, \varphi) \subset D} r^{-\rho}.$$

Réciproquement, étant donné  $k \in \mathcal{C}_\rho^+$ , nous pouvons lui associer le domaine  $D \in \mathcal{G}_\rho$  qui est la réunion des domaines  $\Delta_\rho((k(\varphi))^{-\frac{1}{\rho}}, \varphi)$  lorsque  $\varphi$  décrit  $[0, 2\pi]$ .

On peut démontrer qu'on établit de cette manière une correspondance biunivoque entre les éléments de  $\mathcal{C}_\rho^+$  et les éléments de  $\mathcal{G}_\rho$ . Une fonction  $k \in \mathcal{C}_\rho^+$  et un domaine  $D \in \mathcal{G}_\rho$  qui se correspondent comme il vient d'être indiqué seront dits associés.

4. DOMAINES APPARTENANT A  $\mathcal{G}_\rho$  ET APPLICATION CONFORME. — Soit D un domaine étoilé borné admettant le point O comme point intérieur. Nous désignerons par  $Z \rightarrow \theta(Z)$  une application conforme biunivoque du disque ouvert  $\Delta(|Z| < R)$  sur D, on sait d'après un théorème de Carathéodory que la fonction  $\theta$  peut être prolongée sur  $\bar{\Delta}$  et qu'elle définit alors une correspondance biunivoque bicontinue entre  $\bar{\Delta}$  et  $\bar{D}$ . Nous ferons de plus sur  $\theta$  l'hypothèse  $\theta(o) = o$ . On a alors l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le domaine étoilé D appartienne à  $\mathcal{G}_\rho$  est que  $\forall Z$  vérifiant  $|Z| = R$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$0 < \alpha < \varepsilon, \quad 0 < \beta < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \arg \frac{(\theta(Z e^{i\beta}))^{-\rho} - (\theta(Z))^{-\rho}}{(\theta(Z))^{-\rho} - (\theta(Z e^{-i\alpha}))^{-\rho}} \leq \pi.$$

Les déterminations de  $(\theta(X))^{-\rho}$  sont prises de manière que

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} (\theta(Z e^{i\beta}))^{-\rho} - (\theta(Z))^{-\rho} &= 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\theta(Z))^{-\rho} - (\theta(Z e^{-i\alpha}))^{-\rho} &= 0. \end{aligned}$$

La détermination de l'argument est celle qui appartient à  $] -\pi, \pi ]$ .

Démonstration. — La proposition résulte de la proposition 2 et du lemme 1.

THÉORÈME 6. — *Si  $D \in \mathcal{G}_\rho$ , si  $\Gamma'$  est l'image par  $\theta$  du cercle  $|Z| = R' < R$  et si  $D'$  est le domaine ayant pour frontière  $\Gamma'$ , alors  $D' \in \mathcal{G}_\rho$ .*

Démonstration. — Le théorème est général et ne nécessite pas que D soit borné, cependant le rôle de cette propriété est peu important dans le



présent travail et nous nous limiterons (ce qui simplifie considérablement) au cas où  $D$  est borné.

Soit  $\Gamma$  la frontière de  $D$ . Par suite de la continuité de  $\theta$  sur  $\bar{D}$ , il existe  $\varepsilon$  tel que tout arc d'amplitude  $\leq \varepsilon$  sur  $|Z| = R$  ait pour transformé un arc de  $\Gamma$  d'amplitude  $\leq \inf \left\{ \frac{\pi}{\rho}, 2\pi \right\}$  (on appelle amplitude d'un arc  $AB$  de  $\Gamma$  la mesure de l'angle  $\widehat{AOB}$  ayant cet arc en son intérieur).

$D'$  est étoilé par rapport à  $O$ , car si  $0 < \alpha \leq \varepsilon < \pi$ ,

$$|Z| = R \Rightarrow 0 \leq \arg \frac{\theta(Z e^{i\alpha})}{\theta(Z)} \leq \pi.$$

Si  $\alpha$  est fixe,  $Z \rightarrow \log \frac{\theta(Z e^{i\alpha})}{\theta(Z)}$  est holomorphe pour  $|Z| < R$ , continue pour  $|Z| \leq R$  et la conclusion résulte de l'harmonicité de

$$(X, Y) \rightarrow \arg \frac{\theta(Z e^{i\alpha})}{\theta(Z)} \quad (Z = X + iY).$$

$D'$  appartient à  $\mathcal{G}_\rho$  : La méthode est analogue,

$$(X, Y) \rightarrow \arg \frac{(\theta(Z e^{i\beta}))^{-\rho} - (\theta(Z))^{-\rho}}{(\theta(Z))^{-\rho} - (\theta(Z e^{-i\alpha}))^{-\rho}}$$

prolongée par continuité au point  $O$ , est harmonique dans le disque  $|Z| < R$  et continue sur  $|Z| \leq R$ , d'où la propriété.

*Remarque.* — Si  $D$  est borné, si au lieu d'effectuer l'application conforme biunivoque du disque  $|Z| < R$  sur  $D$ , on effectue l'application conforme de ce disque sur  $\bar{D}$ , si  $\Gamma'$  est défini comme précédemment ainsi que  $D'$ , alors on a encore

$$D \in \mathcal{G}_\rho \Rightarrow D' \in \mathcal{G}_\rho.$$

Dans le même ordre d'idées on peut montrer que si  $D \in \mathcal{G}_\rho$  et si  $\rho' > \rho$ , alors  $D \in \mathcal{G}_{\rho'}$ .

Si  $D$  est borné et limité par une courbe dont l'équation en coordonnées polaire est

$$r = f(\varphi)$$

( $f$  admettant des dérivées continues jusqu'au second ordre), si l'on pose

$$\theta = \arg(\vec{Ox}, \vec{MT})$$

( $\vec{Ox}$ , axe polaire de coordonnées;  $\vec{MT}$ , tangente à la frontière de  $D$  orientée dans le sens des arguments croissants, ceux-ci étant pris avec une déter-

mination continue quelconque), alors la condition nécessaire et suffisante pour que D appartienne à  $\mathcal{G}_\rho$  est qu'on ait

$$\frac{d\theta}{d\varphi} \leq \rho + 1.$$

On peut remarquer en particulier que si D est un disque centré en O, il appartient à  $\mathcal{G}_\rho$  pour  $\rho$  quelconque.

### III. — Les espaces $\mathcal{J}_{\rho,k}$ et $\mathcal{J}_{\rho,k}(E)$ .

1. DÉFINITIONS. — Étant donné le nombre  $\rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ) et la fonction  $k \in \mathcal{C}_\rho$ , du point de vue algébrique  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  désignera l'espace vectoriel des fonctions entières d'ordre fini telles que

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^* : \lim_{r \rightarrow \infty} f(r e^{i\varphi}) e^{-r^\nu (k(\varphi) + \frac{1}{\nu})} = 0.$$

Si  $f$  est d'ordre  $\rho$  et si son indicatrice est majorée par  $k$ , la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{J}_{\rho,k}$ . Si  $k \in \mathcal{C}_\rho^+$  toute fonction d'ordre inférieur à  $\rho$  et en particulier tout polynôme appartient à  $\mathcal{J}_{\rho,k}$ . Mais s'il existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que  $k(\varphi) < 0$ , les fonctions d'ordre strictement inférieur à  $\rho$  n'appartiennent pas en général à  $\mathcal{J}_{\rho,k}$ .

Nous dirons que  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  est de *première espèce* si  $k \in \mathcal{C}_\rho^+$ , nous dirons que  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  est de *seconde espèce* s'il existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que  $k(\varphi) < 0$ .

Si  $\rho < \frac{1}{2}$ , on peut montrer aisément que  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  est toujours de première espèce.

Si  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  est de première espèce, l'ensemble des polynômes est partout dense dans  $\mathcal{J}_{\rho,k}$ , si  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  est de seconde espèce, les polynômes autres que 0 n'appartiennent pas à  $\mathcal{J}_{\rho,k}$ .

On peut également montrer que :

PROPOSITION 4. — Si  $f \in \mathcal{J}_{\rho,k}$ , si  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , il existe M dépendant de  $\nu$  et de  $f$  tel qu'on ait uniformément, lorsque  $z = r e^{i\varphi}$  décrit le plan complexe,

$$f(r e^{i\varphi}) e^{-r^\nu (k(\varphi) + \frac{1}{\nu})} \leq M.$$

Ceci permet de définir une topologie sur  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  : Nous posons

$$N_\nu(f) = \sup_{\substack{0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} f(r e^{i\varphi}) e^{-r^\nu (k(\varphi) + \frac{1}{\nu})} \quad (\nu \in \mathbb{N}^*).$$

Les fonctions  $N_\nu$  sont des normes sur  $\mathcal{J}_{\rho,k}$ . La topologie de  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  sera définie par ces normes. On voit facilement que  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  est un Fréchet.

2. ESPACES  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE. — Dans tout ce qui suit  $E_{\rho}$  désigne la fonction de Mittag-Leffler d'ordre  $\rho$

$$E_{\rho}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)} z^n.$$

Si  $k \in \mathcal{J}_{\rho}^+$ , soit  $D$  le domaine de  $\mathcal{G}_{\rho}$  associé à la fonction  $k$ . On sait que si  $f \in \mathcal{J}_{\rho, k}$ , l'intégrale de Laplace-Borel

$$g(z) = \rho \int_0^{\infty} f(zt) e^{-t^{\rho}} t^{\rho-1} dt$$

définit une application linéaire biunivoque

$$f \rightarrow g = L^{-1}(f)$$

de  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  sur l'espace  $\mathcal{H}(D)$  des fonctions holomorphes dans  $D$ .

L'application  $L$  est définie par

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \frac{g(\zeta)}{\zeta} E_{\rho}\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta$$

( $\Lambda$ , contour simple fermé entourant l'origine parcouru dans le sens direct).

On a :

THÉORÈME 7. — Si  $k \in \mathcal{C}_{\rho}^+$  et si  $D$  est le domaine de  $\mathcal{G}_{\rho}$  associé à  $k$ , la transformation de Laplace-Borel établit un isomorphisme algébrique et topologique entre  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  et  $\mathcal{H}(D)$ .

Soit  $\rho$  vérifiant  $\frac{1}{2} < \rho < \infty$ , et soit  $n$  l'entier tel que  $n - 1 \leq \rho < n$ .

Nous désignons par  $F_{\rho}$  la fonction entière définie par

$$F_{\rho}(z) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} E_{\rho}\left(ze^{-\frac{i\nu\pi}{n}}\right).$$

La croissance de cette fonction s'étudie aisément. On a :

PROPOSITION 5. — Si  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2n}$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log F_{\rho}(r e^{i\varphi})}{r^{\rho}} = \cos(\rho\varphi).$$

Si  $\frac{\pi}{2n} < \varphi < \frac{\pi}{n}$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log F_{\rho}(r e^{i\varphi})}{r^{\rho}} = \cos \rho \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right).$$

Si  $\varphi = \frac{\pi}{2n}$ , on a

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log F_{\rho}(r e^{i\varphi})}{r^{\rho}} = \cos \frac{\rho\pi}{2n}.$$

Comme la fonction est invariante par la substitution  $z \rightarrow z e^{\frac{i\pi}{n}}$ , la proposition fournit son mode de croissance sur toute demi-droite issue de l'origine.

De la proposition 5 on déduit facilement :

**THÉORÈME 8.** — Si  $k \in \mathcal{C}_\rho$ , si  $a > 0$ , si l'on pose  $h(z) = F_\rho(az) f(z)$ , si  $f$  décrit  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ , l'application  $f \rightarrow h$  est un monomorphisme de  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  dans  $\mathcal{J}_{\rho, k+ia^2}$  ( $l$  indicatrice de croissance de  $F_\rho$ ).

En particulier, tout espace  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  de seconde espèce est isomorphe à un sous-espace d'un espace  $\mathcal{J}_{\rho, k_1}$  de première espèce. Cette remarque et le théorème 7 montrent en particulier que tout espace  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  est nucléaire. Elle permet également de voir que les espaces  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  sont des espaces de Montel.

On étudierait de la même manière les espaces  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  définis comme suit : On considère toutes les fonctions  $h \in \mathcal{C}_\rho$  qui sont majorées strictement par  $k$ .  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  est alors la réunion des  $\mathcal{J}_{\rho, h}$ , sa topologie est la topologie la plus fine pour laquelle les applications canoniques  $\mathcal{J}_{\rho, h} \rightarrow \mathcal{J}_{\rho, k}$  sont continues.

3. ESPACES  $\mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E})$ . —  $\mathbb{E}$  est un EVTLC séparé complet. Nous désignerons par  $\mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E})$  l'EV des fonctions entières  $\vec{f}$  à valeurs dans  $\mathbb{E}$  qui appartiennent scalairement à  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ , c'est-à-dire telles que pour tout  $\vec{e}' \in \mathbb{E}'$  la fonction

$$z \rightarrow \langle \vec{f}(z), \vec{e}' \rangle$$

soit un élément de  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ .

Nous représenterons cette fonction par  $\langle \vec{f}, \vec{e}' \rangle$ . L'application

$$\vec{e}' \rightarrow \langle \vec{f}, \vec{e}' \rangle$$

est une application linéaire de  $\mathbb{E}'$  dans  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ . Si nous la représentons par  $l_{\vec{f}}$ , l'application  $f \rightarrow l_{\vec{f}}$  est une injection de  $\mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E})$  dans l'EV  $\mathcal{L}(\mathbb{E}', \mathcal{J}_{\rho, k})$  des applications linéaires de  $\mathbb{E}'$  dans  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ .

Il est facile de voir qu'étant donné  $\vec{f} \in \mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E})$  et la partie équicontinue  $A'$  de  $\mathbb{E}'$ , si  $\vec{e}'$  décrit  $A'$ , la fonction  $\langle \vec{f}, \vec{e}' \rangle$  décrit une partie bornée de  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ . On peut donc munir  $\mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E})$  considéré comme sous-EV de l'EV des applications linéaires de  $\mathbb{E}'$  dans  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  de la topologie  $\varepsilon$  de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de  $\mathbb{E}'$ .

$\mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E})$  ainsi topologisé est complet. Si  $\mathbb{E}$  est un Banach ou un espace semi-réflexif, alors on a les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{J}_{\rho, k} \hat{\otimes}_\pi \mathbb{E} \approx \mathcal{J}_{\rho, k} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathbb{E} \approx \mathcal{J}_{\rho, k}(\mathbb{E}) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbb{E}', \mathcal{J}_{\rho, k}) \approx \mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{J}_{\rho, k})'_c, \mathbb{E}).$$

( $E'$  [resp.  $(\mathcal{J}_{\rho, k})'$ ] est le dual de  $E$  (resp.  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ ) muni de la topologie de la convergence compacte sur  $E$  (resp.  $\mathcal{J}_{\rho, k}$ ). Pour la définition de la topologie  $\pi$  et de la topologie  $\varepsilon$  sur un produit tensoriel, on pourra se reporter à [18 b].)

## CHAPITRE II.

### LA DÉFINITION D'UN ENSEMBLE DE SÉRIES DE BASE.

#### I. — Notations.

Dans tout ce qui suit,  $E$  est un EVTLC complet, de sorte que dans  $E$  l'enveloppe convexe équilibrée de tout compact est un compact.

$\mathcal{A}(E)$  est un sous-EVT d'un espace appartenant à l'un des types suivants :

—  $\mathcal{H}(D, E)$  (avec  $D$  simplement connexe);

—  $P(\Delta, E)$  ou  $Q(\Delta, E)$  (avec  $\Delta$  et  $\int \Delta$ , parties simplement connexes de la sphère de Riemann);

—  $\mathcal{C}(\bar{D}, E)$  EVT des fonctions holomorphes dans  $D$  continues sur  $\bar{D}$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur  $\bar{D}$  ( $\bar{D}$  simplement connexe);

— Espace  $\mathcal{J}_{\rho, k}(E)$  de première espèce.

Lorsque  $E$  est identique à  $C$ , nous supprimerons la lettre  $E$  dans les symboles précédents (nous écrirons  $\mathcal{A}$  pour  $\mathcal{A}(C)$ , etc.).

$\mathcal{P}$  est l'EV des polynomes de la variable  $z$  à coefficients dans  $C$ .

$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P} \otimes E$  est l'EV des polynomes de la variable  $z$  à coefficients dans  $E$ .

$P = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathcal{P}$ .

$S_p(E)$  est l'EV des séries formelles  $\vec{s}$  du type

$$(1) \quad \vec{s} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}_n p_n \quad (\vec{a}_n \in E).$$

Lorsque  $E$  est identique à  $C$ ,  $S_p(E)$  sera désigné par  $S_p$ .

$S_p(E)$  est algébriquement isomorphe à  $E^{\mathbb{N}}$ , nous le supposons topologisé par transport de la topologie de  $E^{\mathbb{N}}$ .

#### II. — Généralités.

Le problème de la représentation des fonctions holomorphes par des séries de base de polynomes a été étudié dans un très grand nombre de cas particuliers, mais il ne semble pas qu'on ait jusqu'ici donné une méthode

de définition suffisamment générale pour s'appliquer aux principaux cas usuels.

Deux méthodes cependant ont un champ d'utilisation assez vaste, nous allons les exposer brièvement.

*Méthode A.* — C'est la méthode utilisée par Whittaker-Cannon. Les coefficients  $\pi_{mn}$  sont définis par

$$(2) \quad z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{mn} P_n(z)$$

(avec  $\pi_{mn} = 0$ , sauf pour un ensemble fini de valeurs de  $n$  qui peut dépendre de  $m$ ).

Les  $\pi_{mn}$  forment une matrice infinie nulle à droite.

Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n \in \mathbb{C}$  tel que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \pi_{mn} \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

converge vers  $a_n$ , on dit que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n$  est la série de base de  $f$ .

H. Cannon a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que, par exemple,  $D$  étant le disque ouvert  $|z| < R$ , toute fonction  $f$  appartenant à  $\mathcal{H}(D)$  admette une série de base qui converge vers  $f$  dans  $\mathcal{H}(D)$ . Les principaux résultats à ce sujet sont les suivants [19] :

**THÉORÈME 1.** — *Si l'on pose*

$$(3) \quad F_m(r) = \sup_{n' \leq n''} \left( \sup_{|z| \leq r} \left| \sum_{n=n'}^{n''} \pi_{mn} P_n(z) \right| \right),$$

$$(4) \quad \chi(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} (F_m(r))^{\frac{1}{m}}$$

pour que toute fonction  $f$  appartenant à  $\mathcal{H}(D)$  admette une série de base qui converge vers  $f$  dans  $\mathcal{H}(D)$ , il faut et il suffit que

$$(5) \quad \forall r < R, \quad \chi(r) < R.$$

On dit que la base  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de Cannon si  $N_m =$  nombre de coefficients  $\pi_{mn}$  non nuls dans (2) vérifie

$$(6) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (N_m)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Dans ce cas particulier, H. Cannon donne le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Si la condition (6) est satisfaite, si l'on pose*

$$M_n(r) = \sup_{|z| \leq r} |P_n(z)|,$$

$$\lambda(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_{mn}| M_n(r) \right)^{\frac{1}{m}},$$

pour que toute fonction appartenant à  $\mathcal{H}(D)$  admette une série de base convergente dans  $\mathcal{H}(D)$ , il faut et il suffit que

$$(7) \quad \forall r < R : \lambda(r) < R.$$

Enfin, au sujet de la représentation des fonctions entières, citons par exemple le théorème :

**THÉORÈME 3.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction entière  $f$  dont la croissance est moindre que ordre  $\varrho$ , type  $\sigma$  ( $0 < \varrho < \infty$ ,  $0 < \sigma < \infty$ ) admette une série de base qui converge vers  $f$  au sens de la convergence compacte est que*

$$(8) \quad \forall r \geq 0 : \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{e \rho \sigma}{m} \right)^{\frac{1}{\varrho}} (F_m(r))^{\frac{1}{m}} \right) \leq 1.$$

Ces résultats peuvent s'étendre à des domaines  $D$  dont la frontière est analytique en remplaçant le développement de Mac Laurin par un développement de Faber [19], et également aux fonctions de plusieurs variables [5].

*Méthode B.* — Soit  $\Delta$  et  $D$  deux domaines simplement connexes du plan complexe et  $U$  un voisinage de  $\int \Delta$ . Supposons que  $\infty \notin D$ . Soit  $K$  une fonction holomorphe des variables  $x$  et  $z$  définie sur  $U \times D$  telle que si  $\infty \in \int \Delta$  on ait  $K(\infty, z) = 0$ ,  $\forall z \in D$ . (Le domaine  $D$  peut être le plan complexe tout entier.)

Supposons, d'autre part, qu'il existe un développement

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

dans lequel les  $\varphi_n$  sont des fonctions de la variable  $x$ , holomorphes sur  $U$ , nulles à l'infini si  $\infty \in \int \Delta$  et les  $p_n$  sont des polynomes en  $z$  formant une base. On suppose de plus que ce développement converge vers  $K$  dans  $\mathcal{H}(U \times D)$ .

$\mathcal{H}_1$  désigne le sous-espace de  $\mathcal{H}(D)$  formé par les fonctions  $f$  définies par

$$(10) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} K(x, z) g(x) dx$$

( $\Lambda$ , contour simple rectifiable, séparant l'ensemble des points singuliers de  $g$  de l'ensemble des points singuliers de toutes les fonctions

$$x \rightarrow K(x, z) \quad (z \in D)$$

et parcouru dans le sens direct autour de ce dernier ensemble,  $g \in \mathcal{H}(\Delta)$ ).

Si l'on pose

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \varphi_n(x) g(x) dx,$$

$$f = l(g),$$

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n,$$

alors, lorsque  $f \in \mathcal{H}_1$  et lorsque  $g$  décrit  $l^{-1}(f)$ ,  $\sigma$  décrit un ensemble qui est appelé l'ensemble des séries de base de  $f$ . Ces séries convergent vers  $f$  dans  $\mathcal{H}_1$ .

On peut remarquer que :

1° Aucune des deux méthodes n'est plus générale que l'autre;

2° La seconde méthode est conditionnée par la connaissance *a priori* d'un développement convergent. On utilise cette convergence pour construire les séries de base, mais elle n'est pas nécessaire comme on le verra au chapitre IV pour que des séries formées avec les  $p_n$  convergent vers les fonctions  $f$  auxquelles elles sont associées;

3° La première méthode donne au maximum une seule série de base, la seconde méthode en donne une infinité en général;

4° La première méthode peut être appliquée avec ou sans succès à une fonction donnée, la seconde méthode s'applique en bloc à tout un EV de fonctions.

Nous nous proposons de faire une synthèse des définitions précédentes qui nous permettra, d'une part de simplifier les démonstrations données par H. Cannon, d'autre part d'étendre à des domaines quelconques un certain nombre de résultats déjà établis pour le disque.

### III. — La définition des séries de base.

1. ENSEMBLE DES SÉRIES DE BASE DÉFINI SUR UN EVTLC  $\mathfrak{A}(E)$ . — Nous supposons que  $\mathfrak{A}(E)$  est dense dans  $\mathfrak{A}(E)$  et nous supposons donnés *a priori* en plus de la base  $P$  et de l'EVT  $\mathfrak{A}(E)$  :

a. Un EV  $\Pi$  et une partie  $\mathcal{K}(E)$  de  $S_v(E)$  algébriquement isomorphe à  $\Pi$  formée de séries  $\vec{s}$  convergentes dans  $\mathfrak{A}(E)$ . L'isomorphisme de  $\Pi$  sur  $\mathcal{K}(E)$  sera désigné par  $\nu_0$ . L'application de  $\mathcal{K}(E)$  dans  $\mathfrak{A}(E)$  qui, à chaque série de  $\mathcal{K}(E)$ , associe sa somme dans  $\mathfrak{A}(E)$  sera désignée par  $\theta$  et l'image de  $\mathcal{K}(E)$  par  $\theta$  sera représentée par  $\mathfrak{A}_0(E)$ .



b. Une famille  $(\Gamma_i)_{i \in I}$  d'EVTLIC dépendant d'un même paramètre  $i$ , un EV  $\Gamma$  et une famille  $\mathfrak{A}_i(E)_{i \in I}$  d'EV tels que :

— les  $\mathfrak{A}_i(E)$  appartiennent au point de vue algébrique à l'une des catégories indiquées au début du chapitre, la même pour tous ;

$$\text{— } \Pi \subset \Gamma \subset \sum_{i \in I} \Gamma_i, \mathfrak{A}_0(E) \subset \mathfrak{A}(E) \subset \sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i(E).$$

c. Une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'applications de  $\Gamma_i$  dans  $\mathfrak{A}_i(E)$  telle que :

$$\text{— } \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \forall \gamma \in \Gamma_i \cap \Gamma_j : u_i(\gamma) = u_j(\gamma);$$

— Si  $u$  est l'application linéaire de  $\sum_{i \in I} \Gamma_i$  dans  $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i(E)$  définie par les  $u_i$  on ait

$$u(\Gamma) \subset \mathfrak{A}(E).$$

—  $\theta, \nu_0 =$  restriction de  $u$  à  $\Pi$ .

Nous dirons que :

Le système

$$\{P; \Pi, \mathfrak{X}(E), \nu_0; (\Gamma_i)_{i \in I}, (\mathfrak{A}_i(E))_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}; \Gamma\}$$

définit dans  $\mathfrak{A}(E)$  un ensemble de séries de base si  $\forall i \in I$ , la restriction de  $\nu_0$  à  $\Pi \cap \Gamma_i$  est continue sur  $\Pi \cap \Gamma_i$  muni de la topologie induite par celle de  $\Gamma_i$ .

Dans ces conditions,  $\nu_0$  se prolonge en une application  $\nu$  linéaire continue de  $\Gamma$  considéré comme sous-EVT de  $\sum_{i \in I} \Gamma_i$  dans  $S_p(E)$ . Nous désignons par  $\nu_i$  la restriction de  $\nu$  à  $\Gamma_i \cap \Gamma$ .

Lorsque  $u(\Gamma) = \mathfrak{A}(E)$ , on dit que l'ensemble des séries de base est défini sur  $\mathfrak{A}(E)$ .

Si  $\nu_0$  est prolongeable comme il vient d'être indiqué, si  $\vec{f} \in \mathfrak{A}(E)$  et si  $\vec{s} \in S_p(E)$ , nous dirons que  $\vec{s}$  est une série de base de  $\vec{f}$  si et seulement si

$$\bar{u}(\vec{f}) \cap \bar{\nu}(\vec{s}) \neq \emptyset.$$

Si  $\gamma \in \Gamma$ , si  $u(\gamma) = \vec{f} \in \mathfrak{A}(E)$  et si  $\nu(\gamma) = \vec{s}$ , on dit que  $\vec{s}$  est la série de base de  $\vec{f}$  associée à  $\gamma$ .

*Remarque 1.* — Le rôle joué par  $\mathfrak{X}$  dans la définition précédente peut être joué par un autre sous-ensemble admettant une base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dénombrable et tel que  $\mathfrak{X} \otimes E$  soit partout dense dans  $\mathfrak{A}(E)$ .

*Remarque 2.* — Si  $\Gamma_0 = \bar{u}^{-1}(0) \cap \bar{\nu}^{-1}(0)$  [  $u$  et  $\nu$  étant considérées comme des applications de  $\sum_{i \in I} \Gamma_i$  dans  $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i(E)$  et  $S_p(E)$  respectivement ], si  $\omega$

est l'application canonique de  $\sum_{i \in I} \Gamma_i$  dans  $\sum_{i \in I} \Gamma_i / \Gamma_0$  on ne change pas l'ensemble des séries de base en remplaçant  $\Gamma$  par  $\omega(\Gamma)$ ,  $\Gamma_i$  par  $\omega(\Gamma_i)$ .

Nous pouvons donc sans restreindre la généralité supposer dans tout ce qui suit que  $\Gamma_0 = \{0\}$ . Dans ce cas, quelques circonstances particulières peuvent se produire :

a.  $\bar{u}(0) \cap \Gamma \neq \{0\}$ . On ne peut avoir  $\nu(\bar{u}(0) \cap \Gamma) = \{0\}$ , donc toute fonction de  $\mathcal{A}(E)$  admet une infinité de séries de base. On dit que l'ensemble admet des développements de zéro. C'est le cas des séries de Newton et de leurs généralisations.

b.  $\bar{u}(0) \cap \Gamma = \{0\}$ . Toute fonction de  $\mathcal{A}(E)$  admet une seule série de base.

c.  $\bar{\nu}(0) \cap \Gamma \neq \{0\}$ . On ne peut avoir  $u(\bar{\nu}(0) \cap \Gamma) = \{0\}$  et chaque série de base de  $\nu(\Gamma)$  est associée à une infinité de fonctions de  $\mathcal{A}(E)$ . H. Cannon a donné un exemple, nous en rencontrerons d'autres au chapitre IV avec les séries de Bruwier.

*Remarque 3.* — Si le système

$$\{P; \Pi, \mathcal{K}(E), \nu_0; (\Gamma_i)_{i \in I}, (\alpha_i(E))_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}; \Gamma\}$$

définit sur  $\mathcal{A}(E)$  un ensemble de séries de base, cet ensemble est déterminé simplement par la connaissance de  $P, \Gamma, u, \nu$ , c'est pourquoi nous dirons parfois d'une manière plus abrégée que l'ensemble des séries de base est défini par  $\{P; \Gamma, \nu, u\}$ .

*Remarque 4.* — La topologie propre de  $\mathcal{A}(E)$  n'intervient pas dans la définition précédente mais cette topologie sera utilisée pour définir l'effectivité.

2. EXEMPLES. — Supposons que  $\mathcal{A}(E)$  muni de la topologie induite par celle de  $\sum_{i \in I} \mathcal{A}_i(E)$  soit identique à  $\mathcal{H}(D, E)$  ( $D$ , domaine simplement connexe dont le complémentaire sur la sphère de Riemann est simplement connexe) et que  $\Gamma = P(\Delta, F)$  ( $\Delta$ , partie simplement connexe non vide de la sphère de Riemann dont le complémentaire est simplement connexe;  $F$ , EVTLC complet). Nous supposons que la topologie induite par  $\sum_{i \in I} \Gamma_i$  sur  $\Gamma$  est celle de  $P(\Delta, E)$ . Nous supposons de plus que  $u$  est bornée. Alors (chapitre I, prop. 1)  $u$  est définie par une fonction  $L$  holomorphe dans  $U \times D$  ( $U$  voisinage ouvert de  $\bigcirc \Delta$ ) à valeurs dans  $\mathcal{L}_s(F, E)$  (espace des applications linéaires continues de  $E$  dans  $E$  muni de la topologie

de la convergence finie) ayant localement une image uniformément bornée et telle que

$$L(\infty, z) = 0, \quad \forall z \in D \quad \text{si } \infty \in \bigcup \Delta,$$

telle que

$$L(x, \infty) = 0, \quad \forall x \in U \quad \text{si } \infty \in D.$$

Les  $\varphi_n$  sont identifiables à des fonctions holomorphes locales généralisées définies sur  $\bigcup \Delta$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}_s(F, E)$  qui s'annulent à l'infini si  $\infty \in \bigcup \Delta$ .

Dans le cas particulier où  $E = C$ ,  $F = C$ ,  $L$  est holomorphe dans  $U \times D$ , les  $\varphi_n$  sont alors des applications bornées, elles sont identifiables à des fonctions holomorphes locales définies chacune dans un voisinage  $U_n$  de  $\bigcup \Delta$  et nulles à l'infini si  $\infty \in \bigcup \Delta$ .

L'hypothèse «  $u$  est bornée » peut être remplacée par «  $u$  est continue »,  $L$  est alors identifiable à une fonction holomorphe locale généralisée.

En utilisant les propriétés et les correspondances indiquées au chapitre I, on peut traiter de la même manière le cas où  $\Gamma$  [resp.  $\mathcal{A}(E)$ ] est un espace  $\mathcal{J}_{\rho, k}(E)$ .

Le paragraphe suivant va nous fournir un autre exemple.

#### IV. — Les séries de base au sens de Whittaker-Cannon.

Nous allons montrer que la méthode de définition de Whittaker-Cannon peut être considérée comme un cas particulier de la nôtre.

1. ESPACE  $\mathcal{E}_f$ . — Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de l'origine par sa série de MacLaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

convergente dans le disque  $D$  ( $|z| < R$ ).

Posons

$$\sigma_n(z) = \sum_{j=n-1}^{\infty} a_j z^j \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et

$$f_n = f - \sigma_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Soit  $\mathcal{E}_f$  l'espace vectoriel engendré par les  $\sigma_n$  et soit  $\Lambda$  l'ensemble des suites  $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de nombres réels qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad n \geq \lambda_n > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Soit  $V_\lambda$  l'enveloppe convexe équilibrée dans  $\mathcal{E}_f$  de l'ensemble

$$\{\lambda_1\sigma_1, \dots, \lambda_n\sigma_n, \dots\}.$$

Cet ensemble est absorbant, soit  $\rho_\lambda$  sa jauge. Les  $\rho_\lambda (\lambda \in \Lambda)$  constituent une famille filtrante de semi-normes, donc définissent une topologie localement convexe sur  $\mathcal{E}_f$ .

Il résulte de la définition de la topologie de  $\mathcal{E}_f$  que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  et, par conséquent, que les polynômes  $f_n$  forment une partie totale de  $\mathcal{E}_f$ .

**PROPOSITION 1.** — *Pour qu'un ensemble  $h_\alpha (\alpha \in \Lambda)$  d'applications linéaires de  $\mathcal{E}_f$  dans un EVTLC E soit équicontinu sur  $\mathcal{E}_f$ , il faut et il suffit que, lorsque n tend vers l'infini, la suite*

$$(h_\alpha(\sigma_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

*tende vers zéro uniformément par rapport à  $\alpha$ .*

*Démonstration.* — La condition est nécessaire, d'après la remarque qui précède.

Elle est également suffisante : Soit W un voisinage convexe équilibré ouvert de 0 dans E. Soit  $\xi$  sa jauge. Posons

$$k_n = \sup_{\alpha \in \Lambda} \xi(h_\alpha(\sigma_n)),$$

$$\lambda_n = n \quad \text{pour } k_n = 0,$$

$$\lambda_n = \inf \left\{ n, \frac{1}{\sqrt{k_n}} \right\} \quad \text{pour } k_n \neq 0.$$

Alors, on a

$$\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Lambda$$

et

$$\xi(h_\alpha(\lambda_n \sigma_n)) = \lambda_n \xi(h_\alpha(\sigma_n)) \leq \sqrt{k_n}.$$

De plus, puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_n} = 0$ , il existe M tel que

$$\forall \alpha \in \Lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad \xi(h_\alpha(\lambda_n \sigma_n)) \leq M.$$

Il en résulte que

$$\forall \sigma \in V_\lambda: \quad \xi(h_\alpha(\sigma)) \leq M,$$

d'où l'équicontinuité de l'ensemble des  $h_\alpha$ .

**COROLLAIRE 1.** — *Le dual de  $\mathcal{E}_f$  est isomorphe algébriquement à l'EV des suites de nombres complexes tendant vers zéro.*

Soit  $N'$  l'ensemble des  $n$  tels que  $a_n \neq 0$  et soit  $\vec{b}_{\alpha, n}$  l'image de  $z \rightarrow z^n$  par  $h_\alpha$  dans E. La proposition précédente peut se mettre sous la forme :

**COROLLAIRE 2.** — *Pour que les  $h_\alpha$  forment un ensemble équicontinu d'applications linéaires de  $\mathcal{E}_f$  dans E, il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{\alpha, n}$$

*converge uniformément dans  $\mathcal{E}_f$  vers  $h_\alpha(f)$ .*

*Démonstration.* — En effet,

$$h_\alpha(\sigma_n) = h_\alpha(\sigma_1) - \sum_{j=0}^{n-2} a_n b_{\alpha, n},$$

car, par hypothèse,  $\sigma_1 = f$ .

**THÉORÈME 4.** — Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R'} \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R''},$$

si  $D'$  et  $D''$  sont des disques ouverts de centre  $O$ , de rayons respectifs  $R'$  et  $R''$ , la topologie de  $\mathcal{E}_f$  est comprise entre les topologies induites sur  $E_f$  par celle de  $\mathcal{H}(D')$  et celle de  $P(\overline{D''})$ .

*Démonstration.* — 1° La topologie de  $\mathcal{E}_f$  est moins fine que celle induite par  $P(\overline{D''})$ .

En effet, soit une partie équicontinue de  $(\mathcal{E}_f)'$  formée par les  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in H}$ .

Posons

$$\varphi_\alpha([z^n]) = b_{\alpha, n}.$$

Étant donné  $R_1 > R''$ ,  $\exists m > 0$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq m \frac{1}{R_1^n},$$

donc  $\exists m'$  tel que

$$\forall \alpha \in H, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{b_{\alpha, n}}{R_1^n} \leq m'.$$

Les  $\varphi_\alpha$  appartiennent donc à une partie bornée de  $\mathcal{H}(\mathbb{C}\overline{D''})$  et, par conséquent, tout voisinage de  $0$  dans  $\mathcal{E}_f$  contient l'intersection de  $\mathcal{E}_f$  et d'un voisinage de  $0$  de  $P(\overline{D''})$  dual fort de  $\mathcal{H}(\mathbb{C}\overline{D''})$ .

2° La topologie de  $\mathcal{E}_f$  est plus fine que celle induite par la topologie de  $\mathcal{H}(D')$ .

Considérons une partie équicontinue de  $(\mathcal{H}(D'))''$  formée par les  $(\varphi_\beta)_{\beta \in B}$ .

Les  $\varphi_\beta$  peuvent être considérés comme des fonctions de  $P(\mathbb{C}D')$  dont les représentants sont définis par des séries de la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1}}, \quad \text{avec} \quad \frac{c_n}{R_1^n} \leq m(R_1) \quad (R_1 < R').$$

Si  $R_2$  vérifie

$$R_1 < R_2 < R',$$

il existe  $m'$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \frac{m'}{R_2^n}$$

et

$$|a_n c_{\beta, n}| \leq m' m(R_1) \frac{R_1^n}{R_2^n}.$$

Donc, d'après la proposition 1, les  $(\varphi_\beta)_{\beta \in B}$  forment un ensemble équi-continu dans  $\mathcal{E}_f$  et notre affirmation est démontrée.

**THÉORÈME 5.** — *Si D est le disque ouvert de centre O de rayon R, la topologie la plus fine sur l'EV  $\mathcal{H}(D)$  pour laquelle l'application canonique  $\mathcal{E}_f \rightarrow \mathcal{H}(D)$  est continue quel que soit  $f \in \mathcal{H}(D)$ , est la topologie de la convergence compacte.*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{C}$  cette topologie. D'après le théorème 4,  $\mathfrak{C}$  est plus fine que la topologie de la convergence compacte. Il reste à montrer qu'elle est moins fine. Soit  $\varphi \in (\mathcal{H}(D))'_{\mathfrak{C}}$ . Posons  $([z^n]) = \pi_n$ . Puisque

$$\left( z \rightarrow \frac{1}{R-z} \right) \in \mathcal{H}(D),$$

on voit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_n}{R^{n+1}}$$

converge. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_n}{x^{n+1}}$$

définit une fonction holomorphe au voisinage de l'infini, nulle à l'infini.

L'application de  $(\mathcal{H}(D))'_{\mathfrak{C}}$  dans l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de l'infini est injective. Considérons une partie équicontinue de  $(\mathcal{H}(D))'_{\mathfrak{C}}$  formée par les  $\varphi_\alpha (\alpha \in A')$ . Supposons  $\varphi_\alpha$  représenté par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_{\alpha n}}{x^{n+1}}$$

et supposons

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{\alpha \in A'} |\pi_{\alpha n}|^{\frac{1}{n}} \right) \geq R.$$

Si  $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres tels que  $0 < R_j < R$ , avec

$$\lim_{j \rightarrow \infty} R_j = R.$$

il existe alors une suite de couples  $(\alpha_j, n_j)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) telle que

$$\frac{|\pi_{\alpha_j n_j}|^{\frac{1}{n_j}}}{R_j} \geq 1.$$

Posons

$$a_n = \frac{1}{R_j^n} \quad \text{pour } n = n_j,$$

$$a_n = 0 \quad \text{s'il n'existe pas de } j \text{ tel que } n_j = n.$$

On voit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{\alpha n} a_n$$

ne converge pas uniformément pour  $\alpha \in A'$ , donc

$$\overline{\lim}_{\alpha \in A'} \left( \sup_{\alpha \in A'} |\pi_{\alpha n}| \right)^{\frac{1}{n}} < R.$$

Les fonctions associées aux  $\varphi_{\alpha}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ) forment une famille d'éléments de  $P(\mathcal{C}D)$  bornée sur un ensemble  $|x| \geq R'$ , avec  $R' < R$ , donc cette famille est un ensemble équicontinu dans le dual de  $\mathcal{H}(D)$  lorsque  $\mathcal{H}(D)$  est muni de la topologie de la convergence compacte. Le théorème en résulte.

*Remarque.* — Si l'on remplaçait  $\mathcal{H}(D)$  par  $P(\overline{D})$ , on obtiendrait de la même manière la topologie de  $P(\overline{D})$ .

## 2. LA DÉFINITION DES SÉRIES DE BASE DE WHITTAKER-CANNON.

**THÉORÈME 6.** — *Si  $u_f$  est l'application identique de  $\mathcal{E}_f$  sur lui-même, si  $\nu_0$  est l'application linéaire de  $\mathfrak{X}$  dans  $S_p$  telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \nu_0(p_n) = p_n$$

et si  $\mathcal{K} = \nu_0(\mathfrak{X})$  :

1° *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. *La fonction  $f$  admet relativement à la base  $P$  une série de base au sens de Whittaker-Cannon;*

b. *Le système  $\{P; \mathfrak{X}, \mathcal{K}, \nu_0; \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, u_f; \mathcal{E}_f\}$  définit sur  $\mathcal{E}_f$  un ensemble de séries de base.*

2° *Si  $D$  est un disque ouvert centré en  $O$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

c. *Toute fonction  $f \in \mathcal{H}(D)$  admet relativement à la base  $P$  une série de base au sens de Whittaker-Cannon;*

d. *Le système  $\{P; \mathfrak{X}, \mathcal{K}, \nu_0; (\mathcal{E}_f)_{f \in \mathcal{H}(D)}, (\mathcal{E}_f)_{f \in \mathcal{H}(D)}, (u_f)_{f \in \mathcal{H}(D)}, \mathcal{H}(D)\}$  définit sur  $\mathcal{H}(D)$  un ensemble de séries de base.*

*Démonstration.* — Nous posons

$$\nu_0([z^m]) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{mn} p_n$$

et  $\varphi_n$  est la forme linéaire sur  $\mathfrak{X}$  telle que

$$\varphi_n([z^m]) = \pi_{mn}.$$

On voit, d'après le corollaire 2 de la proposition 1, que les propriétés suivantes sont équivalentes :

*a.*  $f$  admet relativement à la base  $P$  une série de base au sens de Whittaker-Cannon;

*a<sub>1</sub>.*  $\varphi_n$  est continue sur  $\mathcal{X} \cap \mathcal{E}_f$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ;

*b.* Le système  $\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0; \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, u_f; \mathcal{E}_f\}$  définit sur  $\mathcal{E}_f$  un ensemble de séries de base.

Enfin, si ceci est vérifié quel que soit  $f \in \mathcal{H}(D)$ , chaque  $\varphi_n$  est continu sur  $\mathcal{X}$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathcal{H}(D)$ , ceci entraîne  $d$  et il est évident que  $d$  entraîne  $c$ .

*Remarque 1.* — On peut dans l'énoncé précédent remplacer  $\mathcal{H}(D)$  par  $P(\overline{D})$ .

*Remarque 2.* — On peut également remplacer  $D$  par un domaine dont la frontière est une courbe analytique. On utilise alors le développement de Faber de  $f$  pour la définition de  $\mathcal{E}_f$  et la construction des séries de base donnée par Hassab Elnabi. [Pour définir les séries de base sur  $P(\overline{D})$  l'analyticité de la frontière n'est d'ailleurs pas nécessaire.]

#### V. — Étude du cas où $\Gamma$ est un espace de Fréchet séparé admettant une partie totale dénombrable.

Nous allons voir que lorsque  $\Gamma$  est un Fréchet séparé admettant une partie totale dénombrable, tout système de séries de base sur  $\mathcal{A}$  peut être obtenu par un procédé qui est une extension de la méthode de Whittaker-Cannon. Rappelons au préalable quelques résultats.

Soit  $X$  un espace localement compact,  $(\mu) = (\mu_\alpha) (\alpha \in \mathbb{N})$  une famille dénombrable de mesures sur  $X$  et  $G$  l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies sur  $X$  et à support compact. Soit  $\mathcal{F}(\mu)$  l'ensemble des fonctions  $f$  à valeurs complexes définies sur  $X$  et telles que  $\forall \alpha \in \mathbb{N} : \mu_\alpha^*(|f|) < \infty$ . Cet espace muni de la topologie définie par les semi-normes  $\mu_\alpha^*$  est complet, car  $\alpha$  décrit un ensemble dénombrable [18 b]. On appelle  $\mathcal{L}(\mu)$  le sous-espace de  $\mathcal{F}(\mu)$  qui est l'adhérence de  $G$  dans  $\mathcal{F}(\mu)$  et  $L(\mu)$  l'espace quotient de  $\mathcal{L}(\mu)$  par l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{L}(\mu)$  pour lesquelles  $\forall n \in \mathbb{N} : \mu_n^*(|f|) = 0$ .

Supposons que  $\Gamma$  soit un espace de Fréchet dans lequel il existe une partie totale dénombrable  $\Gamma_0$ . Soit  $\rho_\alpha (\alpha \in \mathbb{A})$  les semi-normes définissant la topologie de  $\Gamma$ . On peut, en utilisant les combinaisons rationnelles d'éléments de  $\Gamma_0$ , construire un sous-ensemble  $\Gamma_1$  partout dense dans  $\Gamma$  et ne contenant pas 0. Cet ensemble est en correspondance biunivoque avec  $\mathbb{N}$ . Soit  $\gamma(n)$  l'image dans  $\Gamma$  de  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathbb{N}$  est muni de la topologie



discrète, si  $G$  est l'EV des fonctions scalaires à support compact (c'est-à-dire fini) dans  $N$ , nous définissons sur  $N$  une famille de mesures  $(\mu_\alpha)$  par les formes linéaires sur  $G$

$$\lambda \rightarrow \mu_\alpha(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) \rho_\alpha(\gamma(n)),$$

$\mathcal{L}(\mu)$  et  $L(\mu)$  sont complets et ici ils sont identiques.

Nous posons encore

$$\omega(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) \gamma(n),$$

$\omega$  se prolonge en une épijection linéaire continue de  $L(\mu)$  sur  $\Gamma$ . Soit  $e_n$  la fonction appartenant à  $\Lambda$ , qui prend la valeur 1 au point  $n$  et qui est nulle ailleurs. On a le théorème :

**THÉORÈME 7.** — *Si  $\Gamma$  est un espace de Fréchet admettant une partie totale dénombrable, si  $L(\mu)$ ,  $G$  et  $\omega$  sont les espaces et l'application qui viennent d'être définis, alors étant donné l'ensemble des séries de base défini sur  $\mathcal{A}$  par le système  $\{P; \Gamma, \nu, u\}$ , cet ensemble est aussi défini par le système  $\{P, L(\mu), \nu\omega, u\omega\}$  et si l'on pose*

$$u\omega(e_m) = h_m, \quad \nu\omega(e_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{mn} p_n,$$

la série de base de  $\lambda$  est

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n, \quad \text{avec } a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda(m) \pi_{mn}.$$

La démonstration utilise un procédé assez classique et nous l'omettrons.

## VI. — Questions d'unicité.

1. Les considérations qui précèdent rendent évidents certains résultats démontrés par H. Cannon. Dans l'énoncé suivant H. Cannon supposait, en outre, que les séries de base des fonctions de  $\mathcal{H}(D)$  convergent vers ces fonctions, ce qui n'est pas nécessaire.

**THÉORÈME 8.** — *Si  $f$  est holomorphe au voisinage de l'origine, si la série*

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n p_n$$

*converge uniformément vers  $f$  sur tout compact contenu dans le voisinage  $U$  de l'origine et si  $U$  contient un domaine  $D(|z| < R)$  dans lequel toute fonction de  $\mathcal{H}(D)$  admet au sens de Whittaker-Cannon une série de base relativement à  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors la série (1) est la série de base de  $f$ .*

*Démonstration.* — Les notations étant celles du paragraphe précédent, on voit que si  $\varphi_n$  est continue dans  $\mathcal{H}(D)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(f) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_n \left( \sum_{s=0}^l b_s p_s \right) = b_n.$$

THÉORÈME 9. — Si la série (I) converge dans  $\mathcal{H}(D)$ , si l'on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R},$$

alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n p_n$  est la série de base de  $f$ . (Il suffit d'appliquer le théorème 4.)

2. DÉVELOPPEMENTS DE 0. — Nous supposons que

$$\bar{u}^{-1}(0) \cap \bar{v}^{-1}(0) = \{0\}.$$

Dans ces conditions, pour qu'il y ait des développements de 0 il est nécessaire et suffisant que  $\bar{u}^{-1}(0) \neq 0$ . Il n'y en a pas dans la méthode de Whittaker-Cannon et d'une manière plus générale lorsque  $u$  est injective.

A titre d'exemple, nous les rechercherons dans le cas suivant :  $\Gamma$  est un espace  $P(\Delta)$  [ $\Delta$  fermé, borné, non nécessairement connexe, de sorte que les restrictions d'un élément de  $P(\Delta)$  aux différentes composantes connexes de  $\Delta$  sont analytiquement indépendantes].  $\mathcal{A}(E)$  est un espace  $\mathcal{H}(E)$ . L'application continue  $u$  est alors définie par  $K \in \mathcal{H}(\bigcup \Delta, D)$  et l'on a

$$(2) \quad u(\gamma) = \int_{\Delta} \gamma(x) K(x, z) dx.$$

Nous supposons les composantes connexes de  $\Delta$  en nombre fini de sorte que  $\Delta$  se décompose en un nombre fini de contours.

Nous voyons immédiatement un premier cas où il y a des développements de 0 : c'est celui où il existe un ensemble  $\Delta_1, \dots, \Delta_p$  de composantes connexes de  $\Delta$  telles que les fonctions

$$x \rightarrow K(x, z) \quad (z \in D)$$

soient prolongeables en des fonctions holomorphes sur  $\bigcup \Delta \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p$  et telles que pour au moins une valeur de  $n$ ,  $\varphi_n$  admette au moins un point singulier sur  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p$ .

Ceci se produit en particulier pour les séries de Newton et leurs généralisations (cf. [15], [12]).

Notre méthode nous conduit à poser, dans ce cas,

$$(3) \quad \begin{cases} K(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{p_{n+1}(x)}, \\ p_0(z) = 1, \\ p_n(z) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \quad \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Nous prenons  $\Delta_i = \{\lambda_i\}$  pour  $1 \leq i \leq p$  et nous supposons que

$$\Delta_{p+1}, \{\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots\} \quad \text{et} \quad D \subset \Delta_{p+1}.$$

Moyennant un choix convenable de  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  de  $\Delta_{p+1}$  et de  $D$ , la série (3) converge dans  $\Delta \times D$  pour la topologie de la convergence compacte vers  $\frac{1}{x-z}$ .

Les fonctions  $x \rightarrow \frac{1}{x-z}$  se prolongent aux points  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  et nous aurons les développements suivants qui seront des développements de 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_{\Delta_i} \frac{dx}{p_{n+1}(x)} \right) p_n.$$

Des développements de 0 peuvent encore se produire même si  $\Delta$  est connexe, aussi pouvons-nous donner une condition plus générale pour que  $u$  admette un noyau non nul.

D'après la théorie de Runge, si  $\gamma$  est une fonction holomorphe dans  $\Delta$ , toute fonction appartenant à  $\mathcal{H}(\Delta)$  peut être approchée par une suite uniformément convergente sur tout compact de  $\Delta$ , du type  $\left(\pi_n\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $x_0$  est un point de  $\bigcirc \Delta$  qu'on peut choisir arbitrairement et  $\pi_n$  un polynôme.

Désignons par  $\pi(x_0, D)$  un opérateur sur  $P(\bigcirc \Delta)$  du type

$$h \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left[ \frac{\partial^n}{\partial x^n} (h(x_0)) \right]_{x=x_0}$$

( $\alpha_n = 0$ , sauf pour un ensemble fini de valeurs de  $n$ ).

On voit que, pour que le noyau de  $u$  ne se réduise pas à  $\{0\}$ , il faut et suffit qu'il existe une suite  $(\pi_n(x_0, D))_{n \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs du type précédent telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(x_0, D) K_n(x, z) = 0$$

(quel que soit  $z \in \Delta$  à un ensemble contenu dans  $D$  et admettant un point d'accumulation dans  $D$ ) et telle que la suite  $\pi_n \left( \frac{1}{x - x_0} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur toute partie compacte de  $\Delta$ .

C'est le cas notamment s'il existe des nombres  $\beta_1, \dots, \beta_p$  tels que

$$\left[ \beta_1 \frac{\partial^{n_1}}{\partial x^{n_1}} K(x, z) + \dots + \beta_p \frac{\partial^{n_p}}{\partial x^{n_p}} K(x, z) \right]_{x=x_0} = 0.$$

3. FONCTIONS NON NULLES ADMETTANT DES SÉRIES DE BASE NULLES. — On peut faire une étude analogue en intervertissant le rôle joué par  $u$  et par la famille des  $\varphi_n$ . Ici même l'application de la méthode de Whittaker-Cannon peut conduire à des développements identiquement nuls pour des fonctions non nulles. Des considérations analogues aux précédentes fournissent un moyen théorique de mettre en évidence des classes d'unicité sans faire appel à la convergence des séries de base, le plus facile sera en général de montrer qu'une classe donnée n'est pas une classe d'unicité.

### CHAPITRE III.

#### L'EFFECTIVITÉ DES SÉRIES DE BASE DE POLYNOMES.

##### I. — Définitions.

1. PARTIE COMPLÉTANTE D'UN EVTLC. — Étant donné l'EVTLC  $F$  et la partie  $B$  convexe équilibrée qui coupe toute droite issue de  $O$  suivant un segment fermé (éventuellement réduit à  $O$ ), il est d'usage de représenter par  $F_B$  le sous-espace de  $F$  engendré par  $B$ , muni de la jauge de  $B$  qui constitue sa norme.

On dit que la partie bornée  $B$  est *complétante* si elle est convexe équilibrée, si elle coupe toute droite issue de  $O$  suivant un segment fermé et si  $F_B$  est complet.

Toute partie  $B$  de  $F$  bornée convexe équilibrée complète est complétante, donc si  $F$  est complet les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

—  $F$  est limite inductive des  $F_B$  lorsque  $B$  décrit l'ensemble des parties complétantes de  $F$ ;

—  $F$  est bornologique.

2. L'EFFECTIVITÉ. — Nous nous plaçons ici dans des conditions un peu moins générales que celles du chapitre précédent. Nous supposons vérifiées les propriétés suivantes :

$E_1$ . Il existe un EVTLC séparé complet  $\mathcal{A}$  de fonctions holomorphes dans  $D$  (resp. holomorphes locales sur  $\Delta$ ) tel que  $\mathcal{A}(E)$  soit l'ensemble des fonctions appartenant scalairement à  $\mathcal{A}$ .

E<sub>2</sub>. Si A' est une partie équicontinue de E' et si  $\vec{f} \in \mathcal{A}(E)$ , alors la fonction  $z \rightarrow \langle \vec{f}(z), \vec{e}' \rangle$  que nous représenterons par  $\langle \vec{f}, \vec{e}' \rangle$  décrit une partie bornée de  $\mathcal{A}$  lorsque  $\vec{e}'$  décrit A'. (Ces propriétés sont vérifiées par les espaces dont il a été question au chapitre II).

E<sub>3</sub>. La topologie de  $\mathcal{A}(E)$  est la topologie  $\varepsilon$  (cf. [18 b]).

Étant donné un ensemble de séries de base défini dans  $\mathcal{A}(E)$ , nous dirons qu'il est *effectif* si toute série de base de l'ensemble converge dans  $\mathcal{A}(E)$  vers la fonction correspondante.

Lorsque le système de séries de base est défini avec un espace  $\Gamma = \mathcal{A}(E)$  et une application  $u$  qui est l'application identique, nous dirons d'une manière plus abrégée qu'il y a *effectivité* sur  $\mathcal{A}(E)$ .

Si  $\nu$  peut être représenté par le développement

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

nous dirons aussi que le développement (1) est effectif sur  $\Gamma$  pour dire que  $\forall \gamma \in \Gamma$  la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\gamma) \otimes p_n$$

converge dans  $\mathcal{A}(E)$  vers  $u(\gamma)$ .

3. DÉFINITION D'UNE TOPOLOGIE SUR  $\mathcal{K}(E)$ . —  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des parties équicontinues de E'. La topologie de  $\mathcal{A}$  peut être définie par une famille filtrante  $N_\alpha (\alpha \in I)$  de semi-normes, la topologie de  $\mathcal{A}(E)$  est alors définie par les semi-normes  $N_{A,\alpha} (A \in \mathcal{U}, \alpha \in I)$

$$(2) \quad N_{A,\alpha}(f) = \sup_{\vec{e}' \in A} N_\alpha(\langle \vec{f}, \vec{e}' \rangle)$$

qui forment également une famille filtrante.

Si  $\vec{k} \in \mathcal{K}(E)$  et si  $\vec{k}$  est la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}_n p_n$ , nous posons

$$(3) \quad \mathcal{N}_{A,\alpha}(\vec{k}) = \sup_{0 < n' \leq n'' < \infty} N_{A,\alpha} \left( \sum_{n=n'}^{n''} \vec{a}_n p_n \right) \quad (A \in \mathcal{U}, \alpha \in I).$$

On voit facilement que  $\forall A \in \mathcal{U}, \forall \alpha \in I, \mathcal{N}_{A,\alpha}$  est une semi-norme et que la famille des semi-normes  $\mathcal{N}_{A,\alpha}$  est filtrante. Elle définit sur  $\mathcal{K}(E)$  une topologie localement convexe séparée. Si  $\mathcal{A}(E)$  est métrisable, il en est de même de  $\mathcal{K}(E)$ .

$\Sigma(E)$  est le sous-espace de  $S_p(E)$  formé par les séries  $\vec{\sigma}$  pour lesquelles  $\forall A \in \mathcal{U}, \forall \alpha \in I, \mathcal{N}_{A,\alpha}(\vec{\sigma})$  a une valeur finie. Il est à peu près évident que :

PROPOSITION 1. — *Le complété  $\widehat{\mathcal{K}(E)}$  de  $\mathcal{K}(E)$  est formé par des séries convergentes dans  $\mathcal{A}(E)$ .*

II. — **Les conditions pour l'effectivité.**

Nous supposons que le système

$$\{P; \Pi, \mathcal{K}(E), \nu_0; (\Gamma_\omega), (\alpha_\omega), (u_\omega); \Gamma\}_{\omega \in \Omega}$$

définit dans  $\mathcal{A}(E)$  un ensemble de séries de base.  $u$  désigne l'application linéaire de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{A}(E)$  qui coïncide avec  $u_\omega$  sur  $\Gamma_\omega \cap \Gamma$  quel que soit  $\omega \in \Omega$ , et  $\nu$  désigne le prolongement de  $\nu_0$  à  $\sum_{\omega \in \Omega} \Gamma_\omega$ .

THÉORÈME 1. — *Étant donné une partie B de  $\Gamma$  bornée pour la topologie induite par celle de  $\sum_{\omega \in \Omega} \Gamma_\omega$  et vérifiant la propriété suivante :*

F. *Il existe une suite  $(\alpha_n)$  de nombres appartenant à C telle que :*

— *Toute série du type  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n (\gamma_n \in B)$  converge dans  $\Gamma$ ;*

— *Il existe  $\beta$  vérifiant  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $n \geq n_0$  entraîne*

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} |\alpha_s| \leq \beta |\alpha_n|.$$

*Alors, s'il existe  $A \in \mathcal{U}$  et  $\alpha \in I$  tels que  $\mathcal{N}_{A,\alpha}(\nu(\gamma))$  ne soit pas borné sur B, il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\nu(\gamma)$  ne converge pas dans  $\mathcal{A}(E)$ .*

*Démonstration.* — Nous représenterons pour simplifier  $\mathcal{N}_{A,\alpha}$  par  $\mathcal{N}$  et  $N_{A,\alpha}$  par N.

Supposons  $\nu(\Gamma)$  formé par des séries convergentes dans  $\mathcal{A}(E)$  et posons

$$\nu(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\gamma) \otimes p_n.$$

Il existe  $n'$  et  $n'' (n' \leq n'')$  dépendant de  $\gamma$  et  $\varepsilon$  tels que

$$\mathcal{N}(\nu(\gamma)) - \varepsilon \leq N\left(\sum_{n=n'}^{n''} \varphi_n(\gamma) \otimes p_n\right) \leq \mathcal{N}(\nu(\gamma)).$$

Donc étant donné une suite strictement croissante arbitraire  $(M_j)$  ( $M_j > 0; j \in \mathbb{N}$ ), il existe une suite  $(n'_j, n''_j, \gamma_j)$  telle que :

- a.  $\gamma_j \in B$ ;
- b.  $n'_j \leq n''_j < n'_{j+1}$ ;
- c.  $N\left(\sum_{n=n'_j}^{n''_j} \varphi_n(\gamma_j) \otimes p_n\right) \geq M_j$ .

L'existence de  $\{n'_0, n''_0, \gamma_0\}$  vérifiant *a*, *b*, *c* résulte de l'hypothèse. On peut raisonner par récurrence.

Posons

$$(4) \quad b_n = \sup_{\substack{\gamma \in B \\ \vec{e}' \in \Lambda}} |\langle \varphi_n(\gamma), \vec{e}' \rangle|$$

$$\left( b_n \text{ est fini, car } B \text{ est borné et } \varphi_n \text{ est continue sur } \sum_{\omega \in \Omega} \Gamma_\omega \right)$$

$$(5) \quad N(p_n) = Q_n$$

et

$$(6) \quad S_k = \sum_{j=0}^{n''_k} b_j Q_j.$$

Il existe alors  $\gamma_{k+1}, n'''_{k+1}, n''_{k+1}$  ( $n'''_{k+1} \leq n''_{k+1}, \gamma_{k+1} \in B$ ) tels que

$$(7) \quad N\left(\sum_{n=n'''_{k+1}}^{n''_{k+1}} \varphi_n(\gamma_{k+1}) \otimes p_n\right) \geq M_{k+1} + S_k.$$

Par suite de (5) et (6), on a

$$n''_{k+1} > n''_k$$

et si l'on pose

$$n_{k+1} = \sup\{n'''_{k+1}, n''_k + 1\},$$

la condition *b* est réalisée pour  $j = k$ .

Si  $n'_{k+1} = n'''_{k+1}$ , la condition *c* est vérifiée *a fortiori* pour  $j = k + 1$ .

Si  $n'_{k+1} = n''_k + 1$ , (6) et (7) entraînent encore *c*.

Nous pouvons maintenant déterminer une suite  $(q'_k, q''_k, \gamma'_k, M'_k)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- a.  $\gamma'_k \in B$ ;
- b.  $q'_k \leq q''_k < q'_{k+1}$  pour  $k \geq 1$ ;
- c.  $N\left(\sum_{n=q''_k}^{q'_k} \varphi_n(\gamma'_k) \otimes p_n\right) \geq M'_k$ ;

d.  $M'_k |\alpha_k|$  tend vers l'infini en croissant strictement lorsque  $k$  tend vers l'infini;

e.  $N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma'_k) \otimes p_n\right) \geq h \sup_{\gamma \in B} N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma) \otimes q_n\right)$  ( $h$ , nombre fixe compris entre 0 et 1 tel que  $\frac{\beta}{2} < h < 1$ );

f. Si  $T_k = \sum_{s=0}^k |\alpha_s| \sup_{n'' \geq n' \geq n''_s} N\left(\sum_{n=n'}^{n''} \varphi_n(\gamma'_s) \otimes p_n\right)$ , on a

$$T_k \leq M'_{k+1} \frac{|\alpha_{k+1}|}{2}.$$

On peut construire le premier terme en prenant

$$M'_0 = M_0, \quad q'_0 = n'_0, \quad q''_0 = n''_0$$

et en choisissant  $\gamma'_0$  de manière que  $e$  soit vérifiée. Les conditions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont satisfaites, les autres font intervenir les termes suivants.

Supposons qu'on ait déjà construit les termes d'indices 0, 1, ...,  $k$  de la suite avec des nombres  $M'_k$  pris dans la suite des  $M_j$ . Nous posons  $M'_s = M_{j,s}$  ( $s = 0, \dots, k$ ).  $T_k$  est fini puisque les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\gamma'_s) \otimes p_n \quad (s = 0, 1, \dots, k)$$

convergent dans  $\mathfrak{A}(E)$ . On prend dans la suite  $M_j$  un terme  $M_{j_{k+1}} = M'_{k+1}$  déterminé par

$$M'_{k+1} > \sup \left\{ \frac{|\alpha_k| M'_{k+1}}{|\alpha_{k+1}|}, \frac{2T_k}{|\alpha_{k+1}|}, M'_k + 1 \right\}.$$

De plus, puisque la suite  $(M_j)$  est croissante, la condition  $M'_{k+1} > M'_k$ , c'est-à-dire  $M_{j_{k+1}} > M_{j_k}$  entraîne  $j_{k+1} > j_k$ .

Donc si l'on prend

$$q''_{k+1} = n''_{j_{k+1}}, \quad q'_{k+1} = n'_{j_{k+1}},$$

la condition  $b$  est réalisée.

Si l'on a

$$N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma_{j_{k+1}}) \otimes p_n\right) \geq h \sup_{\gamma \in B} N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma) \otimes q_n\right),$$



on prend  $\gamma'_{k+1} = \gamma_{j_{k+1}}$ . Si cette inégalité n'est pas vérifiée, on choisit  $\gamma'_{k+1}$  de manière que  $e$  soit vérifiée, on aura alors

$$N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma'_{k+1}) \otimes P_n\right) \geq N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma_{j_{k+1}}) \otimes P_n\right) \geq M'_{k+1}$$

et, de toutes façons,  $c$  et  $e$  sont vérifiées. Ainsi la suite est déterminée.

Nous poserons

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n$$

et nous représenterons la série de base de  $\nu(\gamma)$  par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}_n \otimes P_n.$$

On a, par suite de la continuité de  $\varphi_n$ ,

$$\vec{a}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_n(\gamma'_k)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=q'_k}^{q''_k} \vec{a}_n \otimes P_n &= \sum_{n=q'_k}^{q''_k} \left( \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s \vec{\varphi}_n(\gamma'_s) \otimes P_n \right) \\ &+ \sum_{n=q'_k}^{q''_k} \alpha_k \varphi_n(\gamma'_k) \otimes P_n + \sum_{n=q'_k}^{q''_k} \left( \sum_{s=k+1}^{\infty} \alpha_s \varphi_n(\gamma'_s) \otimes P_n \right). \end{aligned}$$

D'après la condition  $f$ ,

$$N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi_n(\gamma'_j)\right) \otimes P_n\right) = N\left(\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s \sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma'_s) \otimes P_n\right) \leq T_{k+1} \leq \frac{M'_k \alpha_k}{2}.$$

D'autre part, d'après  $e$ ,

$$\begin{aligned} N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \left(\sum_{s=k+1}^{\infty} \alpha_s \varphi_n(\gamma'_s) \otimes P_n\right)\right) &\leq \sum_{s=k+1}^{\infty} |\alpha_s| N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma'_s) \otimes P_n\right) \\ &\leq \frac{1}{h} \left(\sum_{s=k+1}^{\infty} |\alpha_s|\right) N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma'_k) \otimes P_n\right). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
 N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} a_n \otimes p_n\right) &\cong N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \alpha_k \varphi_n(\gamma'_k) \otimes p_n\right) \\
 &\quad - \left(\sum_{q=q'_k}^{q''_k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi_n(\gamma'_j) \otimes p_n\right)\right) \\
 &\quad - N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \left(\sum_{s=k+1}^{\infty} \alpha_s \varphi_n(\gamma'_s) \otimes p_n\right)\right) \\
 &\cong \left(|\alpha_k| - \frac{1}{h} \sum_{s=k+1}^{\infty} |\alpha_s|\right) N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \varphi_n(\gamma'_k) \otimes p_n\right) \\
 &\quad - N\left(\sum_{n=q'_k}^{q''_k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi_n(\gamma'_j) \otimes p_n\right)\right) \\
 &\cong |\alpha_k| \left(1 - \frac{\beta}{h}\right) M'_k - T_{k-1} \cong |\alpha_k| \left(1 - \frac{\beta}{h} - \frac{1}{2}\right) M'_k,
 \end{aligned}$$

d'après e,  $1 - \frac{\beta}{h} - \frac{1}{2} > 0$ , donc d montre que la série  $\nu(\gamma)$  ne converge pas.

**COROLLAIRE.** — Si B est une partie complétante de  $\Gamma$  muni de la topologie induite par celle de  $\sum_{\omega \in \Omega} \Gamma_{\omega}$ , alors  $\forall A \in \mathcal{U}$ ,  $\forall \alpha \in I$ ,  $\mathcal{N}_{A,\alpha}(\nu(\gamma))$  est uniformément borné lorsque  $\gamma$  décrit B.

Ce corollaire admet aussi une démonstration directe à peu près évidente indépendante de la précédente. Il suffit de remarquer que les fonctions

$$\gamma \rightarrow N_{A,\alpha} \left( \sum_{n=n'}^{n''} \tilde{a}_n p_n \right)$$

sont continues sur  $\Gamma_B$  et d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus.

En faisant des hypothèses supplémentaires sur  $\Gamma$ , on obtient facilement les propriétés suivantes (la topologie de  $\Gamma$  est celle induite par la topologie de  $\sum_{\omega \in \Omega} \Gamma_{\omega}$ ):

$\nu_{n'n''}$  et  $u_{n'n''}$ , désignent respectivement les applications de  $\Gamma$  dans  $\Sigma(E)$  et de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{A}(E)$  représentées par le développement  $\sum_{n=n'}^{n''} \varphi_n \otimes p_n$ ;

$\Sigma(E)$  est muni de la topologie définie par les semi-normes  $N_{A,\alpha}$ .

PROPOSITION 2. — Si  $\Gamma$  est bornologique et semi-complet, si l'ensemble des séries de base défini dans  $\mathcal{A}(\mathbf{E})$  est effectif, alors :

- 1°  $\nu$  est une application linéaire continue de  $\Gamma$  dans  $\widehat{\mathcal{K}}(\mathbf{E})$ ;
- 2° Les  $\nu_{n'n''}$  forment un ensemble équicontinu d'applications linéaires de  $\Gamma$  dans  $\widehat{\Sigma}(\mathbf{E})$ ;
- 3° Les  $u_{n'n''}$  forment un ensemble équicontinu d'applications linéaires de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ .

Démonstration. — Si  $\Gamma$  est bornologique et semi-complet, toute partie B bornée convexe équilibrée fermée de  $\Gamma$  est complétante. Puisque  $\Gamma$  est limite inductive des  $\Gamma_B$ ,  $\nu$  est une application linéaire continue de  $\Gamma$  dans  $\Sigma(\mathbf{E})$ .

$\Pi \cap \Gamma$  est partout dense dans  $\Gamma$  et, puisque  $\nu(\Pi) = \mathcal{K}(\mathbf{E})$ ,  $\nu(\Gamma) \subset \mathcal{K}(\mathbf{E})$ , ce qui démontre le 1°.

Étant donné B, partie complétante de  $\Gamma$ ,  $A \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha \in \Gamma$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\lambda_B > 0$  tel que quels que soient  $n'$  et  $n''$ ,

$$\gamma \in \lambda_B B \Rightarrow \left( N_{A, \alpha} \left( \sum_{n=n'}^{n''} \varphi_n(\gamma) \otimes p_n \right) \leq \varepsilon \right) \Leftrightarrow (\mathcal{N}_{A, \alpha}(\nu_{n'n''}(\gamma)) \leq \varepsilon).$$

Si U est l'enveloppe convexe équilibrée de  $\lambda_B B$  lorsque B décrit l'ensemble des parties complétantes de  $\Gamma$ , on a quels que soient  $n'$  et  $n''$ ,

$$(\mathcal{N}_{A, \alpha}(\nu_{n'n''}(U)) \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (N_{A, \alpha}(u_{n'n''}(U)) \leq \varepsilon),$$

ce qui démontre le 2° et le 3°.

PROPOSITION 3. — Si  $\Gamma$  est un espace vectoriel topologique localement convexe complet, si  $\mathcal{L}_c(\Gamma, \Sigma(\mathbf{E}))$  [resp.  $\mathcal{L}_c(\Gamma, \mathcal{A}(\mathbf{E}))$ ] est l'EVT des applications linéaires continues de  $\Gamma$  dans  $\Sigma(\mathbf{B})$  [resp. de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ ] muni de la topologie de la convergence compacte sur  $\Gamma$ , si les  $u_{0n}$  forment un ensemble équicontinu, alors :

1° On a dans  $\mathcal{L}_c(\Gamma, \Sigma(\mathbf{E}))$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{0n} = \nu;$$

2° On a dans  $\mathcal{L}_c(\Gamma, \mathcal{A}(\mathbf{E}))$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{0n} = u;$$

3° On a :

$$\forall \gamma \in \Gamma: \nu(\gamma) \in \widehat{\mathcal{K}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad u(\gamma) = \theta(\nu(\gamma)).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer un résultat classique (cf. [4 b], chap. III, § 3, corollaire 1 du théorème 4).

On a donc :

**THÉORÈME 2.** — *Étant donné un ensemble de séries de base défini dans  $\mathcal{A}(E)$ , si  $\Gamma$  est bornologique et complet, pour qu'il y ait effectivité, il faut et il suffit que les applications  $u_{\nu_n}$  de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{A}(E)$  forment un ensemble équicontinu sur  $\Gamma$  (ou ce qui est équivalent, sur le sous-espace  $\Pi \cap \Gamma$  partout dense dans  $\Gamma$ ).*

*Remarque 1.* — S'il y a effectivité, l'ensemble des séries de base peut être considéré comme défini par le système

$$\{P; \Pi, \mathcal{K}(E), \nu_0; \Gamma, \mathcal{A}(E), u; \Gamma\}$$

(dans le cas particulier où  $\Gamma$  est bornologique).

*Remarque 2.* — Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des Banach, ainsi que  $\mathcal{A}_1(E)$  et  $\mathcal{A}_2(E)$ , si  $\Pi \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ , si  $u_1$  et  $u_2$  coïncident sur  $\Pi$  et sont des applications continues de  $\Gamma_1$  dans  $\mathcal{A}_1(E)$  et de  $\Gamma_2$  dans  $\mathcal{A}_2(E)$  respectivement, si dans  $\mathcal{A}_1(E)$  [resp.  $\mathcal{A}_2(E)$ ] l'ensemble des séries de base défini par le système

$$\{P; \Pi, \mathcal{K}(E), \nu_0; \Gamma_1, \mathcal{A}_1(E), u_1; \Gamma_1\}$$

[resp. par le système

$$\{P; \Pi, \mathcal{K}(E), \nu_0; \Gamma_2, \mathcal{A}_2(E), u_2; \Gamma_2\}$$

est effectif, si  $\Gamma$  [resp.  $\mathcal{A}(E)$ ] est un espace d'interpolation construit par l'une des méthodes de Cagliardo [6] ou Lions [10] associé au couple  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  [resp.  $\mathcal{A}_1(E), \mathcal{A}_2(E)$ ], alors l'ensemble des séries de base défini dans  $\mathcal{A}(E)$  par le système  $\{P; \Pi, \mathcal{K}(E), \nu_0; \Gamma, \mathcal{A}(E), u; \Gamma\}$  est effectif ( $u$  est le prolongement à  $\Gamma$  de  $u_1 \cap u_2$ ).

Cela résulte immédiatement dans chacun des cas cités de la détermination de la norme d'une application linéaire de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{A}(E)$  en fonction de la norme de cette même application considérée comme application de  $\Gamma_1$  dans  $\mathcal{A}_1(E)$  [resp. de  $\Gamma_2$  dans  $\mathcal{A}_2(E)$ ].

#### CAS PARTICULIERS.

*Premier cas :*  $\Gamma$  est un espace  $\mathcal{H}(\Delta)$ ,  $\mathcal{A}(E)$  est l'espace  $\mathcal{H}(D)$ . Considérons l'ensemble des séries de base défini dans  $\mathcal{H}(D)$  par

$$\{P; \mathcal{H}(\Delta), \nu, u\},$$

$u$  est alors défini au moyen d'une fonction  $L$  holomorphe sur un voisinage de  $\bigcirc \Delta \times D$  [telle que  $L(\infty, z) = 0$ ,  $\forall z \in D$  si  $\infty \in \bigcirc \Delta$ ] par

$$f = u(\gamma) \iff f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} \gamma(x) L(x, z) dx.$$

$\nu$  peut se mettre sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n.$$

Les  $\varphi_n$  peuvent être identifiés aux fonctions  $x \rightarrow \varphi_n(x)$  à  $P(\int \Delta)$ .

Pour qu'il y ait effectivité il faut et il suffit que, quel que soit le compact  $K$  contenu dans  $D$ , il existe un voisinage  $U_K$  de  $\int \Delta$  tel que, lorsque  $n$  décrit  $N$ , les fonctions

$$(8) \quad (x, z) \rightarrow \sum_{s=0}^n \varphi_n(x) p_n(z)$$

soient holomorphes dans  $U_K \times D$  et uniformément bornées sur tout ensemble de la forme  $H \times K$  ( $H$  compact quelconque contenu dans  $U_K$ ).

Ceci entraîne la convergence uniforme de la série (8) vers  $L(x, z)$  ou vers son prolongement sur  $H \times K$ .

*Second cas* :  $\Gamma$  est un espace  $\mathcal{H}(\Delta)$  et  $\mathcal{A}(E)$  un espace  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  de première espèce. Les notations étant les mêmes que dans le premier cas, pour qu'il y ait effectivité, il faut et il suffit qu'à chaque  $\nu \in N^*$ , on puisse associer un voisinage  $U_\nu$  de  $\int \Delta$  tel que, pour tout compact  $H \subset U_\nu$ , les fonctions

$$(x, z) \rightarrow \sum_{s=0}^n \varphi_n(x) p_n(r e^{i\varphi}) e^{-r^2 \left( k(\varphi) + \frac{1}{\nu} \right)} \quad (z = r e^{i\varphi})$$

soient uniformément bornées sur  $H \times C$  et les  $\varphi_n$  holomorphes dans  $U_\nu \times C$ .

### III. — L'effectivité pour les ensembles de séries de base au sens de Whittaker-Cannon.

Nous conservons les notations du chapitre II et nous nous proposons de déduire du théorème 2 les conditions nécessaires et suffisantes pour l'effectivité données par H. Cannon.

1. L'EFFECTIVITÉ SUR  $\mathcal{H}(D)$  LORSQUE  $D$  EST UN DISQUE OUVERT. —  $D$  est le disque ouvert de centre  $O$  de rayon  $r$ , nous supposons que toute fonction de  $\mathcal{H}(D)$  admet une série de base au sens de Whittaker-Cannon, c'est-à-dire que le système  $\{ P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu; (\mathcal{E}_f), (\mathcal{E}_f), (u_f); \mathcal{H}(D) \}$  ( $u_f$ , application identique de  $\mathcal{E}_f$  sur lui-même) définit sur  $\mathcal{H}(D)$  un système de séries de base.

La topologie induite sur  $\mathcal{H}(D)$  par celle de  $\sum_{f \in \mathcal{H}(D)} \mathcal{E}_f$  est la topologie habituelle de  $\mathcal{H}(D)$ , donc elle définit une structure d'espace bornologique complet et l'on peut lui appliquer le théorème 2.

Pour qu'il y ait effectivité, il faut et il suffit que, quel que soit  $r < R$ , on puisse déterminer  $R_0 < R$  tel que  $\forall R'$  vérifiant  $R_0 < R'$ , il existe  $M > 0$  dépendant de  $R'$  et  $r$  pour lequel

$$(9) \quad (|x| \geq R', |z| \leq r) \Rightarrow \left| \sum_{n=n'}^{n''} \varphi_n(x) p_n(z) \right| \leq M.$$

Par conséquent, s'il y a effectivité, il existe  $M' > 0$  tel que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$|z| \leq r \Rightarrow \left| \sum_{n=n'}^{n''} \pi_{mn} p_n(z) \right| \leq M'R'^m$$

et

$$F_m(r) \leq M'R'^m,$$

donc

$$\forall r' < R : \chi(r) \leq R' < R.$$

Réciproquement, on voit facilement que cette condition entraîne (9).

2. L'EFFECTIVITÉ SUR LES EVT DE FONCTIONS ENTIÈRES. — Soit  $\rho$  et  $\sigma$  des nombres strictement positifs et  $(\mathcal{J}_{\rho,\sigma})_c$  l'EV  $\mathcal{J}_{\rho,\sigma}$  muni de la topologie de la convergence compacte.

Si  $f \in \mathcal{J}_{\rho,\sigma}$  et si  $f(z) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , soit  $g = L^{-1}f$  la transformée de  $f$  par la transformation de Laplace-Borel d'ordre  $\rho$ ,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) z^n,$$

$L^{-1}$  établit un isomorphisme entre  $\mathcal{J}_{\rho,\sigma}$ , muni de sa topologie habituelle et  $\mathcal{H}(D)$  ( $D$  disque ouvert  $|z| < \frac{1}{\rho}$ ).

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

— Toute fonction de  $\mathcal{J}_{\rho,\sigma}$ , admet au sens Whittaker-Cannon une série de base convergente dans  $(\mathcal{J}_{\rho,\sigma})_c$ ;

— Le système  $\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0; (\mathcal{E}_f), (\mathcal{E}_f), (u_f); \mathcal{J}_{\rho,\sigma}\}$  ( $f$  décrivant  $\mathcal{J}_{\rho,\sigma}$ ) définit sur  $(\mathcal{J}_{\rho,\sigma})_c$  un ensemble de séries de base effectif;

— Le système  $\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0 L; (\mathcal{E}_{L^{-1}f}), (\mathcal{E}_f), (L_f); \mathcal{H}(D)\}$  [ $L_f$  : restriction de  $L$  à  $(\mathcal{E}_{L^{-1}f})$ ] définit sur  $(\mathcal{J}_{\rho,\sigma})_c$  un système de séries de base effectif.

Et si l'on suppose que toute fonction de  $\mathcal{J}_{\rho,\sigma}$  admet une série de base, en utilisant la notation abrégée du début du chapitre II, on peut dire que les propriétés précédentes sont équivalentes à :

— Le système  $\{P, \mathcal{H}(D), (\mathcal{J}_{\rho,\sigma})_c, L\}$  définit sur  $\mathcal{J}_{\rho,\sigma}$  un système de séries de base effectif.

Or, en utilisant les notations du  $r^0$ , la restriction de  $L$  à  $\mathfrak{E}$  est définie par le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n,$$

avec

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi_{mn}}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{\rho}\right)} x^{m+1}.$$

Un calcul analogue à celui du  $r^0$  montre alors qu'il existe  $M > 0$  et  $R' < \sigma^{-\frac{1}{\rho}}$  tels que

$$\forall r > 0 : F_m(r) \leq M \Gamma\left(1 + \frac{m}{\rho}\right) R'^m$$

et le théorème 3 du chapitre II en résulte.

*Généralisation.* — Si l'on remplace dans la définition générale de  $L$  la fonction  $E_\rho$  :

$$E_\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)}$$

par une fonction  $\Psi$

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n t^n, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = 0$$

(fonction de comparaison de Nachbin), on définit des EV qui généralisent les EV  $\mathcal{J}_{\rho\sigma}$ . La croissance des fonctions est alors caractérisée par le  $\Psi$ -type qui peut s'exprimer au moyen de la suite des coefficients de Taylor [2 b]. Le raisonnement qui précède montre qu'on obtiendra un théorème analogue au théorème 3 du chapitre II chaque fois que les  $\Psi_n$  admettront un équivalent simple en  $m$  pour  $m \rightarrow \infty$ .

3. BASES EFFECTIVES SUR DEUX DISQUES CONCENTRIQUES. — Le théorème suivant démontré par H. Cannon en utilisant le théorème des trois cercles et le théorème 1 du chapitre II se déduit aisément du théorème 2.

**THÉORÈME 3.** — *Étant donné trois disques ouverts  $D'$ ,  $D''$ ,  $D$  de rayons respectifs  $R'$ ,  $R$ ,  $R''$  ( $R' < R < R''$ ), si la base  $P$  est effective sur  $\mathcal{H}(D')$  et  $\mathcal{H}(D'')$ , elle est effective sur  $\mathcal{H}(D)$ .*

*Démonstration.* — Soit

$$R'_1 = kR'', \quad R_1 = kR' \quad (k < 1).$$

Aux compacts  $\bar{D}_1''(|z| \leq kR'')$ ,  $D_1'(|z| \leq kR')$  on peut associer des voisinages  $U''$  et  $U'$  de  $\bigcirc D''$  et  $\bigcirc D'$  du type  $|x| > lR''$  et  $|x| > lR'$ ,

avec  $l < 1$  tels que si  $l_1 > l$ , si  $H''$  et  $H'$  sont les compacts  $|x| \geq l_1 R''$ ,  $|x| \geq l_1 R'$ , les expressions

$$(10) \quad \sum_{n=n''}^{n'} \varphi_n(x) p_n(z)$$

soient uniformément bornées sur  $\mathcal{H}'' \times \bar{D}_1''$  et  $H' \times \bar{D}_1'$ .

Il existe  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) tel que

$$\log R = \lambda \log R' + (1 - \lambda) \log R''.$$

D'après les propriétés de complétion analytique, les expressions (10) sont holomorphes dans  $U \times D$  ( $U$  : domaine  $|x| > lR$ ), car

$$\lambda \log R'' + (1 - \lambda) \log R' = \log R.$$

D'autre part, elles sont uniformément bornées sur  $H \times K$  ( $H$ , complémentaire du disque ouvert de rayon  $l_1 R$ ,  $l_1 > l$ ;  $K$ , disque fermé de rayon  $kR$ ).

D'où l'effectivité sur  $\mathcal{H}(D)$ .

#### IV. — Bases transposées.

Nous avons remarqué au début du chapitre II que le fait pour  $P$  d'être une base de polynômes n'était pas essentiel. Nous allons utiliser cette remarque. Nous nous plaçons dans le cas  $F = C$ .

1. L'EFFECTIVITÉ DE LA BASE TRANSPOSÉE. — Supposons qu'on ait défini sur  $\mathcal{A}$  un ensemble de séries de base caractérisé par le système  $\{P; \Gamma, \varphi, u\}$ . Si  $\varphi$  est injective et représentée par le développement

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n,$$

les  $\varphi_n$  forment un ensemble total dans  $\Gamma'$  muni d'une topologie compatible avec la dualité  $(\Gamma, \Gamma')$ . Nous dirons que  $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la base transposée de la base  $P$ .

On peut considérer l'ensemble  $S_\Phi$  des séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n.$$

Le développement (11) définit une application  $\varphi_1$  de  $\mathcal{A}'$  dans  $S_\Phi$  et l'on a le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.** — *Si le système  $\{P; \Gamma, \varphi, u\}$  définit un ensemble de séries de base effectif sur  $\mathcal{A}$ , si  $\Gamma$  est un EVTLC complet, si  $\Gamma$  et  $\mathcal{A}$  sont semi-réflexifs, si  $u$  est injective, alors le système  $\{\Phi; \mathcal{A}'_T, \varphi_1, 'u\}$  définit dans  $\Gamma'_T$  un système de séries de base effectif. Si, de plus,  $u$  est un isomorphisme de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{A}$  pour les topologies faibles, l'ensemble des séries de base est effectif sur  $\Gamma'_T$ .*



*Démonstration.* — La topologie  $\tau$  sur  $\mathcal{A}'$  et  $\Gamma$  est la topologie forte. Toute partie B bornée fermée de  $\Gamma$  est complétante et puisqu'il y a effectivité (corollaire du théorème 1), à chaque B on peut associer une partie A bornée de  $\mathcal{A}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n(B) \subset A.$$

Il en résulte l'équicontinuité des  $'u_n$ . De plus, si  $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{A}$  tels que

$$\langle p'_n, p'_s \rangle = \delta_{ns}.$$

L'ensemble des  $p'_n$  est total dans  $\mathcal{A}'$  et la série  $\nu_1(p'_n)$  est convergente vers  $'u(p'_n)$  puisqu'elle est finie (le système des  $p'_n$  existe et est unique, car l'ensemble  $\{p_0, \dots, p_{n-1}, p_{n+1}, \dots\}$  n'est pas total dans  $\mathcal{A}$ , tandis que P est total). L'effectivité résulte alors du théorème 2.

Enfin, si  $u$  est un isomorphisme de  $\Gamma$  faible sur  $\mathcal{A}$  faible,  $'u$  est épijetive, d'où le théorème.

2. EXEMPLE. — Prenons  $\Gamma = \mathcal{A} = \mathcal{H}(D)$ , soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points contenus dans D. Posons  $p_n = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda^i}\right)$  [ $u$  : application identique de  $\mathcal{H}(D)$  sur lui-même] et prenons pour  $\nu$  l'application de  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\Sigma_p$  représentée par

$$\frac{1}{[p_1(x)]} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[p_{j+1}(x)]} \otimes p_j.$$

Les séries de base ainsi définies généralisent les séries de Newton, les séries correspondant à la base transposée généralisent les séries de Facultés.

On pose

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{p_{j+1}(x)} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

S'il y a effectivité de l'ensemble défini par  $\{P; \mathcal{H}(D), \nu, u\}$  sur  $\mathcal{H}(D)$ , il y a effectivité de l'ensemble défini par  $\{\Phi; P(\mathbb{C}D), \nu_1, 'u\}$  sur  $P(\mathbb{C}D)$ .

## CHAPITRE IV.

### EXEMPLES.

Nous allons utiliser les résultats des deux chapitres précédents pour définir des ensembles de séries de base ou pour établir leur effectivité.

Le premier exemple répond à une question posée par R. P. Boas et R. C. Buck [2 a] et montre qu'on peut obtenir des systèmes de séries de base effectifs à partir de développements générateurs divergents. Le second

exemple a pour but de compléter quelques résultats de O. Perron [16] et de montrer que (les notations sont celles du chapitre précédent), même dans le cas où  $u$  est l'application identique, la série  $\nu(\gamma)$  peut converger dans  $\mathcal{A}(E)$  vers une fonction autre que  $u(\gamma)$ .

I. — Ensemble de séries de base effectif  
 construit au moyen d'un développement non convergent.

Le développement indiqué dans la question posée par R. P. Boas et R. C. Buck s'écrit, en utilisant nos notations,

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} (1 + 1!z + \dots + n!z^n).$$

Ce développement est divergent lorsqu'on le considère comme une série de fonctions.

1. NOTATIONS. — Nous posons

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_n &= 1 + 1!z + \dots + n!z^n, \\ P &= (p_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Le développement (1) est trivialement convergent lorsqu'on le considère comme un opérateur linéaire  $u_0$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$ .

Soit  $L$  la transformation de Laplace de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$  définie par

$$L([z^n]) = \left[ \frac{z^n}{n!} \right].$$

On a

$$(2) \quad L\nu_0L = \left[ \frac{1}{z-1} \right] \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!x^{n+1}} \right] \otimes [z^{k+1}] - \left[ \frac{1}{n!x^{n+1}} \right] \otimes 1 \right).$$

$D$  est un disque ouvert de centre  $O$  de rayon  $R$ .

$L$  se prolonge en un isomorphisme de  $\mathcal{H}(D)$  sur  $\mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}$ .

Soit  $\nu_0$  l'application de  $\mathcal{X}$  dans  $S_p$  définie par le développement (1) et  $\mathcal{K}$  l'image de  $\mathcal{X}$  par  $\nu_0$ .

Nous allons voir que  $u_0$  se prolonge en une application continue  $u$  de  $\mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}$  dans  $\mathcal{H}(D)$  et étudier l'ensemble des séries de base définies dans  $\mathcal{H}(D)$  par le système  $\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0; \mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}, \mathcal{H}(D), u; \mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}\}$ .

2. PROPRIÉTÉS D'EFFECTIVITÉ.

THÉORÈME 1. —  $u_0$  se prolonge en une application continue  $u$  de  $\mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}$  dans  $\mathcal{H}(D)$  et quel que soit  $R$ , l'ensemble des séries de base défini dans  $\mathcal{H}(D)$  par  $\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0, \mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}, \mathcal{H}(D), u; \mathcal{J}_{1, \frac{1}{R}}\}$  est effectif.

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que  $Lu_0L$  se prolonge en une application continue de  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathcal{J}_{\frac{1}{R}}$  et que le système

$$\{L(P); \mathfrak{X}, L\nu_0L(\mathfrak{X}); \mathcal{H}(D), \mathcal{J}_{\frac{1}{R}}, LuL; \mathcal{H}(D)\}$$

est effectif dans  $\mathcal{J}_{\frac{1}{R}}$ .

Or  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! x^{n+1}}$  converge uniformément sur tout compact contenu dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  et si  $\nu \in \mathbb{N}^*$  :

$$\left( \sum_{n=0}^p \frac{z^{n+1}}{n! x^{n+1}} \right) e^{-|z| \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\nu} \right)} \leq |z| e^{|z| \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\nu} \right)}.$$

Donc si l'on prend  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{R} - \frac{1}{2\nu}$ , l'expression précédente est bornée par un nombre indépendant de  $p$ . Les opérateurs  $Lu_pL$  représentés par cette expression forment un ensemble équicontinu, ils convergent simplement sur  $\mathfrak{X}$ , donc ils convergent sur  $\mathcal{H}(D)$  vers une application linéaire  $LuL$  continue de  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathcal{J}_{\frac{1}{R}}$  qui prolonge  $Lu_0L$ .

De plus, d'après le théorème 2 du chapitre III, l'équicontinuité entraîne l'effectivité.

## II. — Séries de Bruwier.

1. DÉFINITIONS. — Les polynômes  $p_n$  définis par

$$(3) \quad p_n(z) = \frac{(z + nc)^n}{n!}$$

forment une base. (On ne restreint pas la généralité en supposant  $c$  réel strictement positif, pour  $c = 0$  on aurait des polynômes donnant les séries de Mac Laurin comme séries de base.)

Étant donné une fonction  $f$  holomorphe dans un voisinage de l'axe réel, on appelle série de Bruwier de cette fonction la série

$$(4) \quad (f^{(n)}(-nc) - cf^{(n+1)}(-nc)) p_n.$$

Nous allons d'abord donner quelques indications sur les conditions de convergence des séries de la forme

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n.$$

THÉORÈME 2. — Pour qu'une famille de séries de la forme

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{(z+nc)^n}{n!}$$

dépendant du paramètre  $x$  qui décrit l'ensemble  $X$  converge uniformément sur tout produit de la forme  $X \times B$  ( $B$ , partie bornée du plan complexe) il est nécessaire et suffisant que (6) converge uniformément sur  $X \times \{0\}$ .

Démonstration. — Il y a seulement à démontrer que la condition est suffisante. Nous utilisons la transformation d'Abel.

En posant

$$b_n = a_n(x) \frac{(nc)^n}{n!},$$

$$c_n = \left( \frac{z+nc}{nc} \right)^n = \left( 1 + \frac{z}{nc} \right)^n,$$

on a

$$\sum_{n=n'}^{n''} b_n c_n = c_{n'} \sum_{n=n'}^{n''} b_n + (c_{n'+1} - c_{n'}) \sum_{n=n'+1}^{n''} b_n + \dots$$

$$+ (c_{n''-1} - c_{n''-2}) \sum_{n=n''-1}^{n''} b_n + (c_{n''} - c_{n''-1}) b_{n''}.$$

Soit  $\eta < 0$ . Par hypothèse, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n'' \geq n' \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=n'}^{n''} b_n \right| \leq \eta \quad \text{pour } x \in X,$$

donc

$$n'' \geq n' \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=n'}^{n''} b_n c_n \right| \leq \eta (|c_{n'}| + |c_{n'+1} - c_{n'}| + \dots + |c_{n''} - c_{n''-1}|).$$

Considérons, d'autre part, l'expression

$$\left( 1 + \frac{u}{s} \right)^s$$

dans laquelle  $u$  est complexe et  $s$  réel positif. Si l'on suppose  $s > |u|$ , on a successivement

$$\frac{d}{ds} \left( 1 + \frac{u}{s} \right)^s = \left( 1 + \frac{u}{s} \right)^s \left( \log \left( 1 + \frac{u}{s} \right) - \frac{u}{u+s} \right),$$

$$\log \left( 1 + \frac{u}{s} \right) - \frac{u}{u+s} = \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \left( 1 - \frac{1}{j} \right) \left( \frac{u}{s} \right)^j = \frac{1}{2} \left( \frac{u}{s} \right)^2 \left( 1 + g \left( \frac{u}{s} \right) \right)$$

( $g$  étant une fonction holomorphe dans le disque ouvert de rayon 1).

Donc si  $\left| \frac{u}{s} \right| \leq 1 - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), il existe  $K$  tel que

$$\left| \frac{d}{ds} \left( \left( 1 + \frac{u}{s} \right)^s \right) \right| \leq K \left| \frac{u}{s} \right|^2.$$

Dans ces conditions, si  $n \geq \frac{u}{1-\varepsilon}$ , on aura donc

$$\left| \left( 1 + \frac{u}{n+1} \right)^{n+1} - \left( 1 + \frac{u}{n} \right)^n \right| \leq K |u|^2 \int_n^{n+1} \frac{ds}{s^2} \leq K' |u|^2$$

et si  $n'' \geq n' \geq \frac{|u|}{1-\varepsilon}$ ,

$$\sum_{n=n'}^{n''} \left| \left( 1 + \frac{u}{n+1} \right)^{n+1} - \left( 1 + \frac{u}{n} \right)^n \right| \leq K |u|^2 \int_{n'}^{n''} \frac{ds}{s^2} \leq K'' |u|^2.$$

D'autre part, si  $s \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \left( 1 + \frac{u}{s} \right)^s \right| \leq \left( 1 + \frac{|u|}{s} \right)^s \leq e^{|u|}.$$

Prenons pour  $B$  le disque fermé  $|z| \leq R$ .

Si  $n_1 \geq \sup \left\{ n_0, \frac{R}{c(1-\varepsilon)} \right\}$ , on aura

$$\left| \sum_{n=n'}^{n''} b_n c_n \right| \leq n \left( e^{c n_1} + K'' \left( \frac{R}{c} \right)^2 \right),$$

ce qui démontre la propriété.

On a également le résultat suivant que nous n'utiliserons pas dans ce qui suit :

PROPOSITION 1. — *Pour que les séries de la forme*

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)| \frac{|z + nc|^n}{n!}$$

dépendant du paramètre  $x$  qui décrit  $X$  convergent uniformément sur tout ensemble de la forme  $X \times B$  ( $B$ , partie bornée du plan complexe), il est nécessaire et suffisant que (7) converge uniformément sur  $X \times \{0\}$ .

La propriété résulte immédiatement de ce que si  $|z| \leq R$ , on a

$$\left| \frac{(z + nc)^n}{(nc)^n} \right| \leq \left( 1 + \frac{R}{nc} \right)^n \leq e^{\frac{R}{c}}.$$

2. SÉRIES DE BRUWIER CONSIDÉRÉES COMME SÉRIES DE BASE. — Désignons par  $\mathcal{A}$  l'espace vectoriel  $\mathcal{J}_{1,k}$  ( $k \in \mathcal{C}_1$ ) muni de la topologie de la convergence compacte. La notation  $\mathcal{J}_{1,k}$  sera conservée lorsque l'espace est muni de la topologie définie au chapitre I.

Si l'on prend pour  $\varphi_n$  la forme linéaire sur  $\mathcal{J}_{1,k}$  :

$$f \rightarrow f^{(n)}(-nc) - cf^{(n+1)}(-nc),$$

$\varphi_n$  est continue. On peut identifier  $\varphi_n$  à la fonction

$$x \rightarrow \frac{n!}{(x+nc)^{n+1}} - \frac{(n+1)!c}{(x+nc)^{n+2}} = \frac{n!}{(x+nc)^{n+2}}(x-c).$$

L'opérateur  $u$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$  représenté par

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

est l'application identique, car

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \langle p_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}.$$

Nous appellerons  $\nu_0$  l'application de  $\mathcal{X}$  dans  $S_p$  définie par (8),  $\mathcal{K}$  l'image  $\nu_0(\mathcal{X})$  de  $\mathcal{X}$  par cette application.

L'ensemble des séries de Bruwier des fonctions  $\mathcal{J}_{1,k}$  est l'ensemble des séries de base définies dans  $\mathcal{A}$  par le système

$$\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0; \mathcal{J}_{1,k}, \mathcal{A}, u; \mathcal{J}_{1,k}\}.$$

Nous nous proposons de déterminer la fonction  $k$  pour qu'il y ait effectivité dans  $\mathcal{A}$ .

$L$  désigne la même application qu'au 1<sup>o</sup>.

Soit  $D$  le domaine de  $\mathcal{G}_1$  associé à  $k$ . L'effectivité du système étudié est équivalente à celle du système

$$\{P; \mathcal{X}, \mathcal{K}, \nu_0 L^{-1}; \mathcal{K}(D), \mathcal{A}, L^{-1}; \mathcal{K}(D)\}$$

Nous poserons

$$\psi_n = \varphi_n L^{-1}$$

et comme nous l'avons déjà fait antérieurement  $\psi_n$  et  $\varphi_n$  serviront à la fois à désigner les formes linéaires et les fonctions holomorphes au voisinage de l'infini, nulles à l'infini qui s'identifient à elles.

De plus,  $g(\tilde{z})$  désignera la fonction

$$z \rightarrow g(z).$$

On a

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi_n(x) &= \psi_n\left(\frac{1}{x-\tilde{z}}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{x} e^{\frac{\tilde{z}}{x}}\right) \\ &= \left[ \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{x} e^{\frac{\tilde{z}}{x}} \right]_{z=-nc} - c \left[ \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \frac{1}{x} e^{\frac{\tilde{z}}{x}} \right]_{z=-nc}, \\ \psi_n(x) &= \frac{e^{-\frac{nc}{x}}}{x^{n+1}} \left( 1 - \frac{c}{x} \right). \end{aligned}$$

Soit  $\Delta_n$  une suite de disques fermés de rayons respectivement égaux à  $n \in \mathbb{N}^*$  centrés en O. D'après le théorème 2 du chapitre III, pour qu'il y ait effectivité, il faut et il suffit qu'à chaque  $\Delta_n$ , on puisse associer un voisinage  $U_n$  de  $\bigcup D$  tel que si H est un compact quelconque contenu dans  $U_n$ , la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{(z + nc)^n}{n!}$$

converge uniformément sur  $H \times \Delta_n$ .

D'après le théorème 2, pour que cette condition soit réalisée, il faut et suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de  $\bigcup D$  tel que la série

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{(nc)^n}{n!}$$

converge uniformément sur toute partie compacte contenue dans U.

En tenant compte de (9), la série (10) s'écrit

$$\frac{1}{x} \left(1 - \frac{c}{x}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{c}{x} e^{-\frac{c}{x}}\right)^{-n}.$$

Elle converge uniformément (et même absolument) sur tout compact du domaine défini par

$$\left| \frac{c}{x} e^{-\frac{c}{x}} \right| < \frac{1}{e}$$

et diverge en tout point du domaine défini par

$$\left| \frac{c}{x} e^{-\frac{c}{x}} \right| > \frac{1}{e}.$$

Pour étudier la forme de ces deux domaines on peut passer par l'intermédiaire de  $y = \frac{c}{x}$ .

Dans le plan des  $y$ , la convergence a lieu dans  $A_1$  et  $A_2$ . La divergence a lieu dans  $A_3$  (fig. 1). La courbe qui sépare les domaines précédents passe par le point 1 de C et admet en ce point des tangentes de pente 2 et  $-2$ . Le domaine  $A_1$  est convexe et admet O comme point intérieur.

Si l'on passe au plan des  $x$ , la courbe L lieu des points vérifiant

$$\left| \frac{c}{x} e^{\frac{c}{x}} \right| = \frac{1}{e}$$

partage C en trois domaines placés comme l'indique la figure 2.

Le fait que  $A_1$  est connexe et admet  $O$  comme point intérieur entraîne que  $\mathcal{C}\bar{B}_1$  appartient à  $\mathcal{G}_1$ .

La convergence de (10) a lieu uniformément sur tout compact contenu dans  $B_1 \cup B_2$ .

Soit  $L_1$  la frontière de  $B_1$ , si  $D \in \mathcal{G}_1$  et si l'on n'a pas  $\mathcal{C}D \subset B_1$ , alors  $\mathcal{C}D$  contient au moins un point de  $L_1$  et tout voisinage ouvert de  $\mathcal{C}D$  contient au moins un point de  $B_3$ . Comme en ces points la série (10) diverge, il ne peut y avoir effectivité.

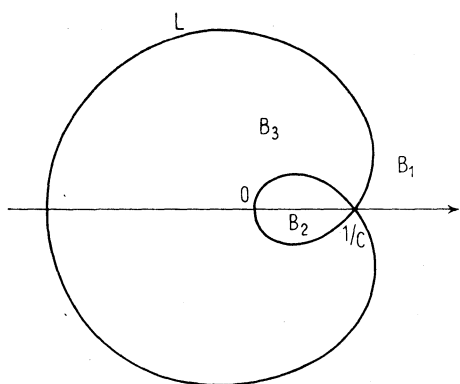


Fig. 1.

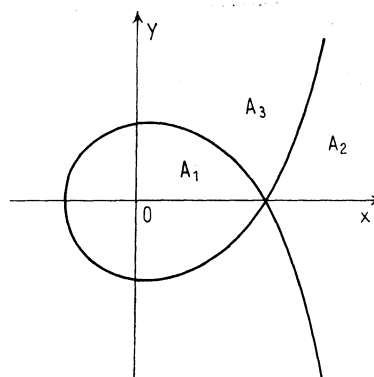


Fig. 2.

Si  $\mathcal{C}D \subset B_1$ , les conditions pour l'effectivité sont réalisées. On peut, d'après la remarque qui suit le théorème 6 du chapitre I obtenir une infinité de domaines  $D \in \mathcal{G}_1$  donnant lieu à l'effectivité en effectuant une application conforme biunivoque du disque  $|z| < 1$  sur  $B_1$  et en prenant pour  $D$  le complémentaire de l'image par cette application d'un disque fermé de rayon strictement inférieur à 1. On a :

THÉORÈME 3. — *Le domaine  $B_1$  étant celui qu'on vient de déterminer, pour que le système*

$$\{P; \mathcal{A}, \mathcal{K}, \nu_0; \mathcal{J}_{1,k}, \alpha, u; \mathcal{J}_{1,k}\},$$

définisse un ensemble de séries de base effectif sur  $\alpha$ , il faut et suffit que  $k$  soit la fonction de  $\mathcal{C}_1^+$  associée à un domaine  $D$  de  $\mathcal{G}_1$  qui vérifie

$$\mathcal{C}D \subset B_1.$$

3. SÉRIES DE BASE CONVERGEANT VERS DES FONCTIONS DIFFÉRENTES DE CELLES AUXQUELLES ELLES SONT ASSOCIÉES. — Si l'on prend  $x$  dans  $B_2$ , les résultats précédents montrent que la série

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{(z + nc)^n}{n!}$$



converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  (et même absolument), cependant elle n'appartient pas aux classes de séries de base effectives que nous avons délimitées.

Il n'y a pas contradiction entre ces deux choses, car les séries convergent alors vers des fonctions différentes de celles auxquelles elles sont associées.

En effet, on a

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{(z+nc)^n}{n!} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{c}{x}\right) \left(e^{-\frac{c}{x}}\right)^n \frac{(z+nc)^n}{n!}.$$

Si l'on pose  $u = \frac{e^{-\frac{c}{x}}}{x}$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{(z+nc)^n}{n!}$  est la série appelée par O. Perron série spéciale (spezielle Reihe), sa somme [16] est

$$\frac{1}{1 - \rho^e} e^{\rho z},$$

où  $\rho$  désigne la racine de plus petit module de l'équation

$$\rho = u e^{\rho c}.$$

En revenant aux anciennes notations, la somme de la série (11) est

$$(13) \quad \frac{1}{x} \left(1 - \frac{c}{x}\right) \frac{t}{t-c} e^{\frac{z}{t}},$$

$t$  désignant la racine de plus grand module de l'équation

$$\frac{e^{\frac{c}{x}}}{x} = \frac{1}{t} e^{-\frac{c}{t}}.$$

De plus, O. Perron a démontré que cette équation a toujours une racine dans  $B_1$  et une seule. Si  $x \in B_1$  la racine de plus grand module est  $t = x$  et (13) devient égal à  $\frac{1}{x} e^{\frac{z}{x}}$  qui définit bien la fonction associée à la série de base considérée. Mais si  $x \in B_2$ , on a  $t \neq x$  et la limite de la série (11) est l'expression (13) qui est différente de  $\frac{e^{\frac{z}{x}}}{x}$ .

## CHAPITRE V.

### LES SÉRIES DE BASE SIMPLES.

Nous dirons qu'une base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est simple si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  est de degré  $n$ . Une série de base sera dite simple si elle est construite avec une base simple. Les résultats des chapitres II et III rendent presque évidents un certain nombre de propriétés démontrées par Nassif, Mursi-Makar [19] et les rattachent à des considérations plus générales.

I. — Isomorphisme associé à deux séries de base simples effectives sur  $\mathcal{H}(D)$ .

1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS. — Étant donné le développement

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes P_n,$$

nous dirons qu'il est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D'))$  [EV des applications linéaires continues de  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathcal{H}(D')$ ] si les opérateurs

$$(2) \quad u_n = \sum_{j=0}^n \varphi_j \otimes P_j$$

forment un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D'))$ .

De même, si l'on a défini une application linéaire  $\varphi'$  de l'EVT E dans  $\mathcal{H}(D)$  et une application linéaire  $\varphi''$  de  $\mathcal{H}(D')$  dans un EVT F, nous dirons en abrégé que le développement (1) est effectif dans  $\mathcal{L}(E, F)$  lorsque les opérateurs

$$(3) \quad \varphi'' \cdot u_n \cdot \varphi'$$

forment un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . Lorsque les applications  $\varphi'$  et  $\varphi''$  s'introduisent de façon évidente nous nous dispenserons de les définir.

Étant donné l'EVTLCE et un voisinage V convexe de O dans cet espace,  $E_V$  désigne l'EVT obtenu en munissant E de la norme qui est la jauge de V et en prenant le quotient de cet espace par l'ensemble des éléments de jauge nulle. On sait que E est la limite projective des  $E_V$  lorsque V parcourt une base du filtre des voisinages de o dans E. [Si E est  $\mathcal{H}(D)$ , si V est l'ensemble  $\mathcal{V}(K, \varepsilon)$  des  $f \in \mathcal{H}(D)$  tels que  $\forall z \in K : |f(z)| \leq \varepsilon$  (K compact contenu dans D), alors l'ensemble des points de jauge nulle se réduit à o.]

## 2. PROPRIÉTÉS D'EFFECTIVITÉ.

LEMME 1. —  $\Delta$  étant une partie connexe non vide de la sphère de Riemann, dont le complémentaire est non vide et D un domaine simplement connexe, pour qu'un ensemble  $u_i$  ( $i \in I$ ) d'applications linéaires de  $P(\Delta)$  dans  $\mathcal{H}(D)_{\mathcal{V}(K, \varepsilon)}$  soit équicontinu dans  $\mathcal{L}(P(\Delta), \mathcal{H}(D)_{\mathcal{V}(H, \varepsilon)})$  il faut et il suffit qu'il provienne d'un ensemble de fonctions

$$(x, z) \rightarrow L_i(x, z)$$

holomorphes dans  $U \times D$  (U voisinage ouvert de  $\bigcup \Delta$  dépendant de K) et telles que pour tout compact  $H \subset U$ , les expressions  $L_i(x, z)$  soient uniformément bornées sur  $H \times K$ .

Ce lemme est une conséquence immédiate des résultats mentionnés dans [8 a] (chap. I, § 3 f et § 5, remarque 2 qui suit la démonstration du théorème 3).

LEMME 2. — *Étant donné le domaine D simplement connexe n'admettant pas le point à l'infini comme point intérieur et le compact  $K \subset D$ , si le développement*

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

*est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ , il existe un compact  $K_0 \subset D$  tel que pour tout compact  $K'$  vérifiant  $K_0 \subset K'$ , le développement (4) soit effectif dans  $\mathcal{L}(P(K'), \mathcal{H}(D)_{\mathcal{Q}(K, \varepsilon)})$ .*

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer le lemme précédent aux opérateurs :

$$u_n = \sum_{j=0}^n \varphi_j \otimes p_j$$

qui forment un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ , donc dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D)_{\mathcal{Q}(K, \varepsilon)})$  et de poser  $K_0 = \bigcup U$ .

*Remarque.* — Si l'on prend pour  $K$  l'adhérence  $\bar{\Delta}$  d'un domaine borné  $\Delta$ , si  $D'$  est un domaine vérifiant  $K_0 \subset D' \subset D$  et si  $\Delta' \subset K$ , l'hypothèse du lemme 2 entraîne l'effectivité du développement (4) dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D'), \mathcal{H}(\Delta'))$ , car l'application canonique  $\mathcal{H}(D') \rightarrow P(K_0)$  est continue.

Étant donné un domaine  $\Delta$  simplement connexe dont la frontière est analytique, nous désignerons par  $x \rightarrow \omega(x)$  une fonction holomorphe qui réalise une application conforme biunivoque de  $\bigcup \bar{\Delta}$  sur le disque  $|X| < R$ , de telle manière que  $\omega(\infty) = 0$  et que le terme  $\frac{\alpha}{x}$  de degré  $-1$  dans le développement de Laurent de  $\omega(x)$  soit réel. Nous choisissons  $R$  de manière que  $\alpha = 1$ . La fonction  $\omega$  sera dite *associée* à  $\Delta$ . Nous dirons que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *semblables* si leurs frontières sont les images par l'application réciproque de  $\omega$  de deux cercles concentriques.

Nous représenterons par  $F_n$  les polynômes de Faber définis au moyen de  $\omega$ . Ces polynômes forment une base simple de  $\mathcal{F}$ .

Nous appellerons « base duale » d'une base de polynômes  $(p_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) l'ensemble  $(\varphi_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) des formes linéaires tel que

$$\langle \varphi_m, p_n \rangle = \delta_{mn}$$

et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle \varphi_m, [z^n] \rangle = 0,$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de  $m$ .

Dans ces conditions, la suite

$$(5) \quad (x \rightarrow \omega'(x) (\omega(x))^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$$

formée par des fonctions holomorphes dans un voisinage de  $\mathcal{C}\Delta$ , peut servir à représenter la « base duale » de la base  $(F_n)$ , par suite des relations

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} F_m(z) (\omega(z))^{n-1} \omega'(z) dz = \delta_{mn}$$

( $\Lambda$ , contour simple rectifiable fermé laissant en son intérieur les points singuliers de  $\omega$ ).

Soit  $D$  un domaine simplement connexe et supposons le développement (4) effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ . Soit  $K_0$  le compact défini dans le lemme 2 et  $\Delta$  un domaine dont la frontière est analytique vérifiant

$$K_0 \subset \Delta \subset \bar{\Delta} \subset D.$$

Nous associons comme il vient d'être indiqué à  $\Delta$  la fonction  $\omega$  et les polynomes de Faber  $F_n$ . Le développement

$$[\omega'(x) (\omega(x))^{n-1}] \otimes F_n$$

est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Delta'), \mathcal{H}(\Delta'))$  lorsque  $\Delta'$  est semblable à  $\Delta$  et il existe des coefficients  $\pi_{mn}$  formant une matrice infinie nulle à droite définis d'une manière unique tels que

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{mn} \omega'(x) (\omega(x))^{m-1}$$

(la convergence étant uniforme sur tout compact contenu dans le complémentaire du plus petit ensemble fermé contenant  $K_0$  et semblable à  $\Delta$ ).

LEMME 3. — 1° Soit  $D$  un domaine simplement connexe quelconque et le développement

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ , si  $K$  est un compact contenu dans  $D$ , si  $\varepsilon > 0$ , il existe un domaine  $D'_0$  dont la frontière est analytique vérifiant la condition

$$(7) \quad K \subset D'_0 \subset \bar{D}'_0 \subset D$$

tel que si  $\omega$  est sa fonction associée, le développement

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{nm} [\omega'(x) (\omega(x))^{n-1}] \otimes P_n$$

soit effectif dans  $\mathcal{L}(P(\bar{D}'_0), (\mathcal{H}(D))_{\mathcal{V}(K, \varepsilon)})$ .

2° Soit  $D'$  un domaine simplement connexe dont la frontière est analytique, vérifiant

$$(9) \quad D' \subset \bar{D}' \subset D$$

si  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des polynomes de Faber associés à  $D'$ , il existe un compact  $K_0$  vérifiant

$$(9') \quad D' \subset \bar{D}' \subset K_0 \subset D$$

tel que le développement

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \varphi_n \otimes F_n$$

soit effectif dans

$$\mathcal{L}(P(K_0), \mathcal{H}(D'))$$

$$\left[ \text{les } p_{ns} \text{ sont les coefficients du polynome } p_n : p_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ns} z^s \right].$$

*Démonstration.* —  $1^\circ$  Au compact  $K$ , on peut associer un voisinage  $U$  de  $\mathcal{C}D$  de telle sorte que les expressions

$$\varphi_j(x) p_j(z)$$

soient holomorphes dans  $U \times D$  et uniformément bornées sur tout ensemble de la forme  $H \times K$  ( $H$  compact contenu dans  $U$ ).

Soit  $D'_0$  un domaine dont la frontière est *analytique* et qui vérifie

$$(11) \quad \mathcal{C}U \subset D'_0 \subset \bar{D}'_0 \subset D.$$

Il existe un voisinage  $U' \subset U$  de  $\mathcal{C}D'_0$  sur lequel on a (au sens de la convergence compacte)

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \pi_{mn} \omega'(x) (\omega(x))^{m-1}$$

( $\omega$ , fonction associée à  $D'_0$ ).

Donc les expressions

$$\pi_{nn} \omega'(x) (\omega(x))^{n-1} p_n(z) = -\omega'(x) (\omega(x))^{n-1} p_n(z)$$

sont uniformément bornées sur tout ensemble de la forme  $(H \times K)$  ( $H$  compact contenu dans  $U'$ ,  $U'$  voisinage de  $\mathcal{C}D'_0$  convenablement choisi).

Pour tout domaine  $D'_2$  semblable à  $D'$  tel que

$$\bar{D}'_0 \subset D'_2 \subset \bar{D}'_2 \subset D,$$

les expressions

$$\sum_{j=0}^n \pi_{jj} \omega'(x) (\omega(x))^{j-1} p_j(z)$$

sont uniformément bornées sur  $\mathcal{C}D'_2 \times K$ .

La frontière de  $D'_2$  est arbitrairement voisine de celle de  $D'_0$ . Les opérateurs

$$u'_n = \sum_{j=0}^n [\pi_{jj} \omega'(x) (\omega(x))^{j-1}] \otimes p_j$$

appliquent  $P(\overline{D}'_0)$  dans  $\mathcal{H}(D)$  et le résultat qu'on vient d'obtenir montre qu'ils forment un ensemble équicontinu dans  $(P(D'_0), \mathcal{H}(D)_{\mathcal{V}(K, \varepsilon)})$ .

2° Au compact  $D'$  on peut associer le voisinage  $V$  de  $\int D$  tel que, comme précédemment, les expressions  $\varphi_n(x) p_n(z)$  soient uniformément bornées dans  $H \times \overline{D}'$  pour tout compact  $H$  contenu dans  $V$ .

Puisque  $D'$  a une frontière analytique, il existe des domaines  $D''$  semblables à  $D'$  dont la frontière est analytique et dont l'adhérence est contenue dans  $D'$ . Soit  $D''_1$  l'un d'eux. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des polynômes de Faber associée à  $D'$ . Les expressions  $\varphi_n(x) p_{nn} F_n(z)$  sont uniformément bornées sur  $H \times D''_1$  et si  $D''_2$  est semblable à  $D'$  et vérifie  $D''_2 \subset D''_1$  (ce qui est possible puisque la frontière de  $D'$  est analytique), les expressions

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{jj} \varphi_j(x) F_j(z), \quad n \in \mathbb{N}$$

sont uniformément bornées sur  $H \times D''_2$ .

$D''_2$  a une frontière arbitrairement voisine de celle de  $D'$ , donc si l'on pose  $K_0 = \int V \subset D$ , les opérateurs

$$u''_n = \sum_{j=0}^n p_{jj} \varphi_j \otimes F_j$$

forment un ensemble équicontinu et même équiborné dans  $\mathcal{L}(P(K_0), \mathcal{H}(D'))$ , d'où le 2°.

*Remarque.* — I. Le domaine  $D'_0$  peut être choisi de manière à contenir un compact donné *a priori* intérieur à  $D$ .

2. Pour tout domaine  $D'$  vérifiant  $D'_0 \subset D' \subset D$ , le développement (8) est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D'), \mathcal{H}(D)_{\mathcal{V}(K, \varepsilon)})$ .

3. Il existe une infinité de domaines  $D'$  semblables à  $D'_0$  tels que  $D'_0 \subset D' \subset D$ .

4. Le développement (10) est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D'))$ .

LEMME 4. — *Étant donné une expression de la forme  $\varphi(x) p(z)$  dans laquelle  $p$  est un polynôme de degré  $n$  :*

$$p(z) = \sum_{s=0}^n \beta_s z^s$$

et  $\varphi$  est une fonction holomorphe dans un voisinage  $U$  de l'infini nulle à l'infini, admettant pour développement de Laurent

$$\varphi(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\alpha_m}{x^{m+1}}$$

si  $\Delta$  est un domaine simplement connexe borné dont la frontière est analytique et qui contient les points singuliers de  $\varphi$ , si  $\omega$  est la fonction associée à  $\Delta$  et si l'on pose

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{m=n}^{\infty} \alpha_m \omega'(x) (\omega(x))^{m-1}, \\ \rho(z) &= \sum_{s=0}^n b_s F_s \end{aligned}$$

$[(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polynome de Faber associé à  $\Delta$  et  $\omega]$ , le produit  $a_n b_n$  est indépendant de  $\Delta$  et est égal à  $\alpha_n \beta_n$ .

*Démonstration.* — Dans le développement de Laurent de  $\varphi(x) p(z)$ , le terme de plus fort degré en  $z$  et de plus fort degré (ici négatif) en  $x$  est  $\alpha_n \beta_n$ .

Si

$$F_n(z) = \pi_0 + \pi_1 z + \dots + \pi_n z^n$$

et si

$$\omega'(x) (\omega(x))^{n-1} = -\frac{1}{x^{n+1}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\mu_j}{x^{j+1}} \quad (\mu_n = -1),$$

la relation

$$\langle [\omega'(x) (\omega(x))^{n-1}], F_n \rangle = 1$$

montre que  $\pi_n = -1$ .

On aura

$$\alpha_n \beta_n = \pi_n \mu_n a_n b_n = a_n b_n.$$

Étant donné les deux bases simples  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et les deux développements

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n,$$

$$(13) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \otimes q_n$$

effectifs sur  $\partial\mathcal{C}(D)$  et définissant l'application identique, il existe une infinité de domaines  $\Delta$  dont la frontière est analytique et tels que pour tout  $n$  les fonctions  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  soient holomorphes dans un voisinage de  $\mathcal{C}\Delta$ .

Si l'on construit alors la fonction  $\omega$  et les polynomes  $F_n$  associés à  $\Delta$ , on peut poser

$$p_n = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ns} F_s, \quad \varphi_n(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \pi_{mn} \omega'(x) (\omega(x))^{n-1},$$

$$q_n = \sum_{s=0}^{\infty} q_{ns} F_s, \quad \psi_n(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \mu_{mn} \omega'(x) (\omega(x))^{n-1}.$$

Alors, d'après le lemme 4, les produits  $\pi_{nn} q_{nn}$  et  $\mu_{nn} p_{nn}$  sont égaux à 1 [car les développements (12) et (13) définissent l'application identique] et l'on a le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Étant donné le domaine D simplement connexe, si les développements (12) et (13) construits avec des bases simples sont effectifs dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$  et définissent l'application identique de  $\mathcal{H}(D)$  sur lui-même, alors :*

1° Les développements

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \otimes p_n,$$

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes q_n$$

sont effectifs dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ ;

2° Les applications linéaires définies par ces développements sont des isomorphismes de  $\mathcal{H}(D)$  sur lui-même.

*Démonstration.* — Démontrons, par exemple, la propriété pour le développement (14). Soit K un compact quelconque contenu dans D. On peut (lemme 3 et remarque 2 qui le suit) lui associer un domaine  $\Delta$  vérifiant  $K \subset \Delta \subset \bar{\Delta} \subset D$ , dont la frontière est analytique, tel que si  $u'_n$  est l'opérateur défini par

$$(16) \quad u'_n = \sum_{j=0}^n \pi_{nj} [\omega'(x) (\omega(x))^{n-1}] \otimes p_n,$$

les  $u'_n$  forment un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Delta), \mathcal{H}(D))_{\mathcal{V}(K, \varepsilon)}$ .

La remarque 1 suivant le lemme 3 montre qu'on peut choisir  $D'$  de manière que les  $\psi_n$  soient holomorphes dans un voisinage de  $\mathcal{C}D'$ .

Si  $v''$  est l'opérateur défini par

$$(17) \quad v''_n = \sum_{j=0}^n q_{nj} \psi_n \otimes F_n,$$

les  $v''_n$  forment (lemme 3 et remarque qui le suit) un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(\Delta))$ .



Dans (16) et (17)  $F_n$  et  $[\omega'(x) (\omega(x))^{n-1}]$  sont associés au même domaine  $\Delta$ , donc les opérateurs

$$l_n = u'_n v''_n = \sum_{j=0}^n \pi_{nn} q_{nn} \psi_n \otimes p_n = \sum_{j=0}^n \psi_n \otimes p_n$$

forment un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D)_{\mathcal{Q}(\mathbb{K}, \varepsilon)})$ .

D'autre part,  $\mathcal{H}(D)$  est la limite projective des  $(\mathcal{H}(D)_{\mathcal{Q}(\mathbb{K}, \varepsilon)})$  lorsque  $\mathbb{K}$  décrit l'ensemble des parties compactes de  $D$  et lorsque  $\varepsilon$  décrit une suite quelconque tendant vers zéro. Les  $l_n$  forment donc un ensemble équi-continu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$  et (14) est effectif sur  $\mathcal{H}(D)$ .

2° Les opérateurs  $l_n$  appliquent  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}(D)$ , l'équicontinuité de l'ensemble des  $l_n$  entraîne que l'opérateur  $l$  représenté par (14) appartient à  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ . Il en est de même pour l'opérateur représenté par (15). D'autre part, puisque

$$\langle \varphi_k, p_n \rangle = \langle \psi_k, q_n \rangle = \delta_{kn},$$

on a, les multiplications étant prises comme produits d'opérateurs,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^n \psi_j \otimes p_j \right) \left( \sum_{k=0}^n \varphi_k \otimes q_n \right) &= \sum_{l=0}^n \varphi_l \otimes p_l, \\ \left( \sum_{k=0}^n \varphi_k \otimes q_k \right) \left( \sum_{j=0}^n \psi_j \otimes p_j \right) &= \sum_{l=0}^n \psi_l \otimes q_l. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini les deux membres de chacune de ces égalités convergent dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties précompactes de  $\mathcal{H}(D)$  et l'on a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \otimes p_j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \otimes q_k \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l \otimes p_l, \\ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \otimes q_k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \otimes p_j \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \otimes q_l. \end{aligned}$$

Les membres de droite définissent l'application identique de  $\mathcal{H}(D)$  sur lui-même, le 2° en résulte.

**THÉORÈME 2.** — *Étant donné un domaine  $D$  simplement connexe n'admettant pas le point à l'infini comme point intérieur, si les développements (12), (14) et (15) sont effectifs dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ , alors le développement (13) est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .*

*Démonstration.* — Les opérateurs définis par (14) et (15) appartiennent à  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ , donc

$$\sum_{j=0}^n \psi_j \otimes q_j = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \otimes q^j \right) \left( \sum_{k=0}^n \varphi_k \otimes p_j \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \otimes p_l \right),$$

d'où le théorème.

II. — Cas particulier où D est un disque ouvert.

Dans tout ce paragraphe, D désigne un disque ouvert de centre O, de rayon R.

1. UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR L'EFFECTIVITÉ. — La suite des polynomes  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit une base simple et le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \otimes q_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{x^{n+1}} \right] \otimes [z^n]$$

définit l'application identique de  $\mathcal{H}(D)$  sur lui-même. Il est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$  puisque les séries de base correspondantes sont les séries de Mac Laurin. On peut donc l'utiliser pour appliquer les théorèmes précédents.

Nous poserons

$$(18) \quad p_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ns} z^s,$$

$$(19) \quad z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{mn} p_n(z)$$

(les  $\pi_{mn}$  étant nuls, sauf un nombre fini d'entre eux).

THÉORÈME 3. — Si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base simple, si  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la « base duale » de  $(p_n)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Le développement

$$(20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .

(2) Les développements

$$(21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \varphi_n \otimes [z^n] \quad \text{et} \quad \left[ \frac{\pi_{nn}}{x^{n+1}} \right] \otimes p_n$$

sont effectifs dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .

Si l'une de ces deux conditions est réalisée, les développements (21) définissent un isomorphisme de  $\mathcal{H}(D)$  sur lui-même.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 1 et le théorème 2 en tenant compte des remarques qui précèdent.

Nous poserons

$$\bar{p}_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{mn} z^n,$$

$$\bar{\varphi}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{ns}}{x^{n+1}}.$$

Nous appellerons  $\bar{u}$  l'application de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{X}$  définie par le développement

$$(22) \quad \bar{\varphi}_n \otimes \bar{p}_n.$$

Nous appellerons respectivement  $u''$  et  $u'$  les applications de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{X}$  représentées par les deux développements (21), et respectivement  $\bar{u}''$  et  $\bar{u}'$  les applications de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{X}$  représentées par les deux développements

$$(23) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{nn} \bar{\varphi}_n \otimes [z^n] \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{p_{nn}}{x^{n+1}} \right] \otimes \bar{p}_n.$$

On peut remarquer que  $\bar{u} = u$  et que les deux conditions :

( $p_n$ ) est simple;

( $\bar{p}_n$ ) est simple,

sont équivalentes.

De même, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$u$  est l'application identique;

$\bar{u}$  est l'application identique.

Enfin si, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_{nn} = p_{nn} = 1$ , on a

$$u' = \bar{u}'' \quad \text{et} \quad u'' = \bar{u}'.$$

**THÉORÈME 4.** — Si la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $p_{nn} = 1$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui entraîne  $\pi_{nn} = 1$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , chacune des conditions (1) ou (2) du théorème 3 est équivalente à :

(3) Les développements (23) sont effectifs dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}(\mathbb{D}), \mathfrak{X}(\mathbb{D}))$  et lorsque ces conditions sont vérifiées, les égalités  $u' = \bar{u}''$ ,  $u'' = \bar{u}'$  sont vraies sur  $\mathfrak{X}(\mathbb{D})$ .

*Démonstration.* — (2)  $\Rightarrow$  (3). Démontrons par exemple que l'effectivité du premier développement de (21) entraîne l'effectivité du second développement de (23).

Soit  $R' < R$ . Il existe  $\rho < R$  tel qu'à tout  $R'' > \rho$  on puisse associer un nombre strictement positif  $M(R'', R')$  tel que

$$|x| \geq R'', \quad |z| \leq R' \Rightarrow |\varphi_n(x) z^n| \leq M(R'', R'), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et, par conséquent,

$$|x| \geq R'', \quad |z| \leq R' \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_{mn}}{x^{m+1}} z^n \right| \leq M(R'', R'), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si  $R' < R''$ , il existe  $M(R'', R')$  tel que

$$|x| \geq R'', \quad |z| \leq R' \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_{mn} z^n}{x^{m+1}} \right| \leq M(R'', R'), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

et si  $R'_1 > R''$ , il existe  $M(R''_1, R')$  tel que

$$|x| \geq R''_1, \quad |z| \leq R' \Rightarrow \left| \sum_{m=0}^{m'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_{mn} z^n}{x^{m+1}} \right| \leq M(R''_1, R'), \quad \forall m' \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$\left| \sum_{m=0}^{m'} \frac{\bar{p}_m}{x^{m+1}} \right| \leq M(R''_1, R'), \quad \forall m' \in \mathbb{N},$$

d'où l'effectivité du second développement de (23), l'effectivité du premier se démontre d'une manière analogue.

(3)  $\Rightarrow$  (2) résulte de ce que  $\bar{u} = u$ .

2. L'EFFECTIVITÉ DES ESPACES DE FONCTIONS ENTIÈRES. — Nous considérons les espaces  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  dans lesquels  $k$  est une fonction constante égale à  $k$ .  $D$  est le disque ouvert de centre  $O$  de rayon  $R = k^{-\frac{1}{\rho}}$ .  $L$  est l'isomorphisme de  $\mathcal{H}(D)$  sur  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  défini par la transformation de Laplace-Borel d'ordre  $\rho$ .

Nous posons

$$L^{-1} p_n = r_n \quad \text{et} \quad {}^tL(\varphi_n) = \rho_n, \quad v = L^{-1} u L,$$

donc, si

$$r_n = \sum_{s=0}^{\infty} r_{ns} z^s$$

et si

$$\rho_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{mn}}{x^{m+1}},$$

on a

$$r_{ns} = p_{ns} \Gamma\left(1 + \frac{s}{\rho}\right),$$

$$\mu_{mn} = \frac{\pi_{mn}}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{\rho}\right)}$$

et

$$(24) \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} {}^tL(\varphi_n) \otimes L^{-1}(p_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \otimes r_n.$$

De plus, si

$$u_{n'} = \sum_{n=0}^{n'} \varphi_n \otimes p_n \quad \text{et} \quad v_{n'} = \sum_{n=0}^{n'} \rho_n \otimes r_n,$$

on a

$$v_{n'} = L^{-1} u_{n'} L,$$

de sorte que les deux propriétés :

(20) est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{J}_{\rho, k}; \mathcal{J}_{\rho, k})$ ;

(24) est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}\mathcal{C}(D), \mathcal{H}\mathcal{C}(D))$ ,

sont équivalentes.

$u'$  et  $u''$  ont le même sens que dans le numéro précédent, nous avons alors

$$v' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\pi_{nn}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) x^{n+1}} \right] \otimes \rho_n = L^{-1} u' L,$$

$$v'' = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \otimes \left[ p_{nn} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) z^n \right] = L^{-1} u'' L,$$

$$\bar{r}_n = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)} \bar{p}_n,$$

$$\rho_n = \Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) \bar{\varphi}_n,$$

$$v = \bar{u}, \quad \bar{v}' = \bar{u}', \quad \bar{v}'' = \bar{u}''.$$

Pour démontrer l'effectivité du développement (20) dans  $\mathcal{L}(\mathcal{J}_{\rho, k}, \mathcal{L}_{\rho, k})$  on pourra utiliser le théorème 4 appliqué à la base  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque

$$p_{nn} = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)}$$

(ce qui entraîne  $\pi_{nn} = \Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)$ , car  $u$  est l'application identique).

*Exemple.* —  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points tels que  $|a_n| \leq 1$ .

Nous appelons  $\varphi_n$  la forme linéaire continue sur  $\mathcal{J}_{\rho, k}$  ( $k \in ]0, \infty[$ )

$$f \rightarrow f^{(n)}(a_n).$$

On a alors

$$\pi_{mn} = m(m-1) \dots (m-n+1) a_n^{m-n}.$$

Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la base de polynomes associée à la matrice infinie nulle à droite qui est l'inverse de la matrice infinie nulle à droite définie par les  $\pi_{nn}$ .

On a  $\pi_{nn} = n!$  donc, pour appliquer les résultats précédents, il faut prendre  $\mathcal{J}_{\rho, k} = \mathcal{J}_{1, k}$ .

Les  $p_{ns}$  ( $s = 0, 1, \dots, n$ ) sont définis par les relations

$$\sum_{s=m}^n p_{ns} \pi_{sm} = \delta_{nm} \quad (0 \leq m \leq n).$$

En faisant successivement  $m = n, n - 1, \dots, 0$ , on calcule de proche en proche  $p_{ns}$  pour  $s = n, n - 1, \dots, 1, 0$ .

$p_{nm}$  est donné par

$$p_{nm} m! + \sum_{s=m+1}^n p_{ns} \pi_{sm} = 0,$$

donc

$$|p_{nm} m!| \leq \sum_{s=m+1}^n s(s-1) \dots (s-m+1) |a_m^{s-m}| \cdot |p_{ns}|.$$

$W$  étant un nombre  $> 0$  donné, on peut déterminer  $b$  tel que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} n! |p_{nn}| &\leq b, \\ (n-1)! |p_{n; n-1}| &\leq bW. \end{aligned}$$

En effet,

$$p_{nn} n! = 1, \quad |p_{n, n-1} (n-1)!| = |p_{nn} \pi_{n, n-1}| = |a_{n-1}|.$$

Supposons que, d'une manière plus générale,

$$|p_{ns}| s! \leq b W^{n-s} \quad \text{pour } s = n, n-1, \dots, m+1.$$

On aura

$$\begin{aligned} |p_{nm} m!| &\leq b \sum_{s=m+1}^n W^{n-s} \frac{s(s-1) \dots (s-m+1)}{s!} |a_m^{s-m}| \\ &\leq b W^{n-m} \sum_{s=m+1}^n \frac{|a_m|^{s-m}}{(s-m)! W^{s-m}} \leq b W^{n-m} \left| e^{\frac{|a_m|}{W}} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Si l'on prend  $W \geq \frac{1}{\log 2}$ , on a

$$\left| e^{\frac{|a_m|}{W}} - 1 \right| \leq 1.$$

Donc, quels que soient  $m$  et  $n$ ,

$$|p_{nm}| m! \leq b W^{n-m},$$

$D$  désigne toujours le disque ouvert de centre  $O$  de rayon  $R = \frac{1}{k}$ .

Considérons dans  $\mathcal{H}(D)$  le voisinage de  $O$  formé par les  $f$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |c_n| R^n \leq \varepsilon, \quad R' < \frac{1}{k}.$$

On aura

$$|\langle \bar{\varphi}_m, f \rangle| = \left| \sum_{n=m}^{\infty} p_{nm} c_n \right| \leq \varepsilon b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W^{n-m}}{m! R'^n} \leq \varepsilon \frac{b}{m! W^m} \frac{1}{1 - \frac{W}{R'}}$$

pourvu que  $R' > W$ .

D'autre part, si  $|z| < R''$ ,

$$\left| \sum_{m=0}^{m'} \langle \bar{\varphi}_m, f \rangle z^m \pi_{mm} \right| \leq \varepsilon b \sum_{m=0}^{m'} \frac{1}{1 - \frac{W}{R'}} \left( \frac{R''}{W} \right)^m \leq \varepsilon b \frac{1}{1 - \frac{W}{R'}} \frac{1}{1 - \frac{R''}{W}}$$

pourvu qu'on ait  $R'' < W$ .

Si  $k < \log 2$ , les calculs précédents sont valables avec  $R'' < W < R' < \frac{1}{k}$  l'équicontinuité de l'ensemble des applications

$$\bar{u}_n'' = \sum_{m=0}^n \bar{\varphi}_m \otimes [z^m \pi_{mm}],$$

de  $\mathcal{H}(D)$  dans lui-même en résulte ainsi que l'effectivité du développement  $\bar{u}''$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .

Considérons maintenant le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{p_{nn}}{x^{n+1}} \right] \otimes \bar{p}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{n!}{x^{n+1}} \right] \otimes \bar{p}_n.$$

On a, pour  $|z| \leq R''$ ,

$$|\bar{p}_n(z)| \leq b \sum_{m=0}^n n(n-1) \dots (n-m+1) |z^m| \leq b R''^n n! \sum_{m=0}^n \frac{1}{(n-m)!} \frac{1}{R''^{n-m}} \leq b R''^n n! e^{\frac{1}{R''}}$$

et

$$\left| \sum_{n=0}^{n'} \left\langle \left[ \frac{p_{nn}}{x^{n+1}} \right], f \right\rangle \bar{p}_n(z) \right| \leq \varepsilon b \sum_{n=0}^{n'} \left( \frac{R''}{R} \right)^n e^{\frac{1}{R''}} \leq \varepsilon b \frac{e^{\frac{1}{R''}}}{1 - \frac{R''}{R}}$$

pourvu que  $R'' < R$ .

Donc l'ensemble des applications  $u'_n$  est un ensemble équicontinu d'applications de  $\mathcal{H}(D)$  dans lui-même quel que soit le rayon de  $D$ . Le développement  $u'$  est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .

On a le théorème suivant :

**THÉORÈME 5.** — *Si les  $a_n$  sont des nombres complexes vérifiant*

$$|a_n| \leq 1;$$

*si  $k$  est un nombre réel vérifiant  $0 < k < \log 2$ ;*

si les  $\varphi_n (n \in \mathbb{N})$  et les  $p_n (n \in \mathbb{N})$  sont définis comme il vient d'être indiqué :  
 1° le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n$$

est effectif dans  $\mathcal{J}_{1,k}$  et représente l'application identique;

2° les applications  $u'$  et  $u''$  définissent un isomorphisme de  $\mathcal{J}_{1,k}$  sur lui-même. Si  $f \in \mathcal{J}_{1,k}$ , si l'on pose

$$b_n = f^{(n)}(a_n), \quad g = u'(f),$$

alors dans  $\mathcal{J}_{1,k}$  topologique,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p_n,$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left[ \frac{z^n}{n!} \right].$$

Ce théorème contient le résultat suivant dû à Kakeya :

COROLLAIRE. — Si  $f$  est d'ordre 1, de type inférieur à  $\log 2$  et si sur une suite  $(a_n)$  telle que  $|a_n| \leq 1$ , on a  $f^{(n)}(a_n) = 0$ , alors  $f = 0$ .

### 3. BASES INVERSES. PRODUIT DE NASSIF DE DEUX BASES.

DÉFINITION. — Étant donné la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la base  $(\bar{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie plus haut est appelée la base inverse de la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On a le résultat suivant qui contient un théorème de Mursi et Makar :

THÉORÈME 6. — 1° Si la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est effective sur  $\mathcal{H}(D)$  ( $D$ , disque ouvert de centre  $O$  de rayon  $R$ ) au sens de Whittaker-Cannon, si elle est simple et si  $\forall n \in \mathbb{N} : p_{nn} = 1$ , la base inverse est effective sur  $\mathcal{H}(D)$ .

2° Si la base  $(p_n)$  est effective sur  $\mathcal{J}_{\rho,k}$  ( $k$ , constante  $> 0$ ) au sens de Whittaker-Cannon, et si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{nn} = \frac{1}{\Gamma \frac{1+u}{\rho}}$ , la base inverse est

effective sur  $\mathcal{H}(D)$  ( $D$ , disque de  $\mathcal{G}_\rho$  associé à la fonction constante  $k \in \mathcal{C}_\rho$ ).

Démonstration. — Pour démontrer le 1° il suffit de remarquer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\bar{u}_n = \bar{u}'_n \cdot \bar{u}''_n$$

et d'appliquer le théorème 4.

Le 2° se démontre de la même manière en passant par l'intermédiaire de  $\mathcal{H}(D)$ .

Remarques. — 1. Les relations  $\bar{p} = p_n$  ne permettent pas de conclure que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi effective sur  $\mathcal{H}(D)$ , car  $\bar{p}_{nn} = 1$ .



2. Dans le 1<sup>o</sup>, on peut, sans changer l'énoncé, remplacer  $\mathcal{H}(D)$  par  $P(\bar{D})$ .

DÉFINITION. — Soit les deux bases  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On appelle produit de Nassif  $(p_n)(q_n)$  des deux bases, la base  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$r_{ns} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{jn} q_{sj}.$$

Si P, Q, R. sont respectivement les matrices  $(p_{mn})$ ,  $(q_{mn})$ ,  $(r_{mn})$ , on a

$$R = PQ.$$

Les résultats que nous avons obtenus rendent à peu près évident le théorème suivant dû à Nassif (pour la démonstration originale, cf. par exemple [19]) :

THÉORÈME 7. — Si les bases  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont effectives dans  $\mathcal{H}(D)$  et si elles sont simples, si de plus pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $q_{nn} = 1$ , la base  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est effective dans  $\mathcal{H}(D)$ .

Démonstration. — Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la « base duale » de  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\omega$  l'application linéaire de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{X}$  définie par

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes r_n.$$

Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  respectivement les « bases duales » de  $(p_n)$  et  $(q_n)$ ,  $u$  et  $v$  les applications de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{X}$  représentées par les développements

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \otimes q_n.$$

Posons

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi_{mn}}{x^{m+1}}; \quad \psi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{mn}}{x^{m+1}}; \quad \varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{x^{m+1}}.$$

On a

$$\omega_m = \bar{v}'' u'_m u''_m \bar{v}'.$$

En effet, si  $f \in \mathfrak{X}$ ,

$$\begin{aligned} v'' u'_m u''_m v(f) &= \frac{1}{(2i\pi)^4} \iiint \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^m \sum_{s=0}^{\infty} \bar{\psi}_n(\xi) z^n \frac{1}{\eta^{a+1}} p_a(\xi) \\ &\quad \times \varphi_b(\zeta) \eta^b \frac{1}{x^{s+1}} q_s(\zeta) f(x) d\xi d\eta d\zeta dx. \end{aligned}$$

(Les contours d'intégration étant des cercles entourant l'origine, parcourus dans le sens direct.)

En tenant compte des hypothèses faites sur  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et sur  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cette intégrale s'écrit

$$\frac{1}{2i\pi} \int \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^m \sum_{a=0}^m \sum_{s=0}^m \sum_{j=0}^m z^n q_{rn} \rho_{ar} \pi_{sa} \frac{\mu_{js}}{z^{s+1}} f(x) dx = \frac{1}{2i\pi} \int \sum_{a=0}^m \rho_a(x) r_a(z) f(x) dx = \omega_m(f)(z).$$

Les coefficients  $q_{nn}$  étant égaux à 1 pour tout  $n$ , il en est de même des coefficients  $\mu_{nn}$  et, d'après le théorème 4,  $\bar{v}'$  et  $\bar{v}''$  sont continues sur  $\mathcal{H}(D)$ .

La simplicité de la base  $(p_n)$  entraîne  $u_m = u'_m u''_m$ .

Puisque  $(p_n)$  est effective, l'ensemble des  $u_m$  est équicontinu et converge vers  $u$  qui est l'application identique.

Il en résulte que l'ensemble des  $\omega_m$  est équicontinu et converge vers

$$\bar{v}'' \cdot \bar{v}' = v' v'' = v$$

qui est l'application identique, d'où l'effectivité de la base  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sens de Whittaker-Cannon sur  $\mathcal{H}(D)$ .

### III. — Opérateurs J.

1. DÉFINITION. — On sait qu'étant donné une base simple de polynomes  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe un opérateur unique appliquant  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  de la forme

$$(25) \quad J = \sum_{n=0}^{\infty} D^{(n+1)} \otimes T_n$$

( $T_n$  désignant un polynome qui dépend de  $n$ ,  $D$  désignant l'opérateur de dérivation), tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}: J(p_{n+1}) = p_n, \quad J(p_0) = 0.$$

2. CONTINUITÉ DE J ET EFFECTIVITÉ DE LA BASE  $(p_n)$ . —  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne toujours la « base duale » de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $D$  est un domaine simplement connexe borné quelconque.

PROPOSITION 1. — Pour que l'opérateur  $J$  soit continu lorsqu'on munit  $\mathcal{E}$  de la topologie  $\mathfrak{C}$  induite par celle de  $\mathcal{H}(D)$ , il est nécessaire et suffisant que le développement

$$(26) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} \otimes p_n$$

soit effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .

Démonstration. — 1° La condition est nécessaire, car si l'on pose

$$u_n = \sum_{j=0}^n \varphi_j \otimes p_j,$$

on a

$$Ju_n = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{j+1} \otimes p_j.$$

2° La condition est suffisante : Si elle est vérifiée, les  $Ju_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) forment un ensemble équicontinu d'applications de  $\mathcal{E}_{\mathfrak{C}}$  ( $\mathcal{E}$  muni de la topologie  $\mathfrak{C}$ ) dans lui-même. La convergence simple a lieu sur  $\mathcal{E}$  vers  $J$ .

Donc  $J$  est continue et son prolongement à  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  est une application continue de  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ .

Nous pouvons remarquer qu'étant donné un développement simple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes p_n,$$

on peut toujours, en multipliant les  $p_n$  et les  $\varphi_n$  par des coefficients convenables de produit égal à 1 quel que soit  $n$ , supposer que le terme de plus fort degré de  $p_n$  est  $z^n$ . Cette propriété ne modifie en rien les propriétés d'effectivité du développement ni l'opérateur qu'il représente.

**THÉORÈME 8.** — *Si  $\mathbb{D}$  est un domaine simplement connexe, si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base simple de polynômes telle que pour tout  $n$  le terme de plus fort degré de  $p_n$  soit  $z^n$ , alors l'opérateur  $J$  se prolonge par continuité en un opérateur appartenant à  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \mathcal{H}(\mathbb{D}))$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathbb{K}$  un compact contenu dans  $\mathbb{D}$ , on peut lui associer (lemme 3 et remarques qui le suivent) un domaine  $\Delta$  dont la frontière est analytique et tel que les développements

$$(27) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{nn} [\omega'(x) \omega^{n-1}(x)] \otimes p_n$$

et

$$(28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \varphi_n \otimes F_n$$

soient effectifs respectivement dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Delta), \mathcal{H}(\mathbb{D}))_{\mathfrak{C}(\mathbb{K}, \varepsilon)}$  et dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \mathcal{H}(\Delta))$  ( $\omega$  et  $F_n$  sont définis comme dans le lemme 3).

Le fait que

$$\omega(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x_2} \omega_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

( $\omega_1$  holomorphe autour de 0) entraîne

$$\omega'(x) (\omega(x))^{n-1} = -\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}} \omega_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

( $\omega_2$ , holomorphe autour de 0).

Et, par suite de l'hypothèse faite sur le terme de plus fort degré de  $p_n$ , on a

$$\pi_{nn} = -1, \quad p_{nn} = -1.$$

D'autre part, l'opérateur  $\left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right]$  appartient à  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Delta), \mathcal{H}(\Delta))$ .

Posons

$$J_n = \left( \sum_{k=0}^n [\omega'(x) (\omega(x))^{k-1}] \otimes p_k \right) \circ \left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right] \circ \left( \sum_{j=0}^n \varphi_j \otimes F_j \right)$$

(le signe  $\circ$  indiquant qu'il s'agit de la multiplication des opérateurs).

En remarquant qu'en particulier sur  $\mathfrak{X}$ ,

$$\left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} [\omega'(x) (\omega(x))^{l-1}] \otimes F_l(z),$$

on voit que, sur  $\mathfrak{X}$ ,

$$J_n = \sum_{j=1}^n \varphi_j \otimes F_{j-1}.$$

Les opérateurs  $J_n$  forment un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{G}}, (\mathcal{H}(\mathbb{D}))_{\mathfrak{V}(\mathbb{K}, \varepsilon)})$ , donc puisqu'ils convergent sur  $\mathfrak{X}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , l'opérateur limite  $J$  appartient à  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{G}}, \mathcal{H}(\mathbb{D}))_{\mathfrak{V}(\mathbb{K}, \varepsilon)}$  [on a, en effet,  $J(\mathfrak{X}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ] et par conséquent,  $J$  se prolonge en un opérateur unique défini et continu dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \mathcal{H}(\mathbb{D}))$ .

**COROLLAIRE.** — Si la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est effective dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  au sens de Whittaker-Cannon et si une fonction  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  a pour série de base

$$(29) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n,$$

alors, pour tout  $k$ , la série

$$(30) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} p_n$$

converge dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  vers la fonction  $g = J^k f$  et (30) est la série de base de  $g$ .

*Démonstration.* — Par suite de la continuité de  $J$  (donc de  $J^k$ ), la convergence de (30) résulte de celle de (29).

(30) est la série de base de  $g$ . En effet, les polynomes

$$g_s = \sum_{k=0}^s a_{n+k} p_n$$

convergent lorsque  $s$  tend vers l'infini vers  $g$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  et si  $b_{n,s}$  est le coefficient de  $p_n$  dans la série de base de  $g_s$ , on a  $b_{n,s} = a_{n+k}$ . La série de base de  $g$  existe puisque  $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . La continuité des applications  $\varphi_n$  montre que  $a_{n+k}$  est le coefficient de  $p_n$  dans cette série.

### 3. NOYAU DES OPÉRATEURS $J^k$ DANS $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ .

**THÉORÈME 9.** — *Si la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est effective dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  (au sens de Whittaker-Cannon), le noyau de l'opérateur  $J$  associé à cette base et considéré comme élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \mathcal{H}(\mathbb{D}))$  est l'ensemble des polynômes  $\lambda p_0$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ).*

*Démonstration* ( $\Delta$  et  $\omega$  ont le même sens que dans la démonstration du théorème 8). — Si  $u'$  est l'opérateur,

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\omega'(x) (\omega(x))^{k-1}] \otimes p_k$$

appartenant à  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Delta), (\mathcal{H}(\mathbb{D}))_{\mathcal{V}(\mathbb{K}, \varepsilon)})$  et si  $u''$  est l'opérateur,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \otimes F_j$$

appartenant à  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \mathcal{H}(\Delta))$ , on a

$$J = u' \circ \left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right] \circ u''.$$

L'opérateur  $u'$  est injectif, car si  $f \neq 0$  appartient à  $\mathcal{H}(\Delta)$  son développement de Faber n'est pas identiquement nul et il existe  $n$  tel que

$$\langle [\omega'(x) (\omega(x))^{n-1}], f \rangle \neq 0,$$

$u'(f)$  aura sa série de base dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  égale à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \omega'(x) (\omega(x))^{n-1}, f \rangle p_n$$

(on le voit par un raisonnement analogue à celui du corollaire précédent).

Comme cette série de base n'est pas identiquement nulle et, par suite de l'effectivité dans  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , on a  $u'(f) \neq 0$ .

De même, l'opérateur  $u''$  est injectif. En effet, soit  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  et non nul. Sa série de base relative à  $p_n$  n'est pas identiquement nulle par suite de l'effectivité. Donc il existe  $n$  tel que  $\langle \varphi_n, f \rangle \neq 0$  et l'unicité du développement de Faber de  $u''(f)$  montre que  $u''(f) \neq 0$ .

Déterminons maintenant le noyau de  $\left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right]$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Delta), \mathcal{H}(\Delta))$ .

Si l'on pose

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n$$

et

$$\left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right] (f) = g,$$

on a

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} F_n.$$

Donc le noyau de  $\left[ \frac{\omega(x)}{x-z} \right]$  est l'ensemble des fonctions constantes et le noyau de  $J$  est l'image réciproque par  $u''$  de cet ensemble, c'est-à-dire l'ensemble des polynomes de la forme  $\lambda p_0$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ).

Pour déterminer le noyau de  $J^k$  on peut appliquer la même méthode en utilisant une suite de  $k$  domaines à frontières analytiques  $\Delta_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) vérifiant

$$K \subset \Delta_1 \subset \bar{\Delta}_1 \subset \dots \subset \Delta_k \subset \bar{\Delta}_k \subset D$$

et en décomposant  $J^k$  en un produit de  $3^k$  opérateurs définis comme les trois opérateurs ci-dessus, on voit sans difficulté que le noyau de  $J^k$  sera l'ensemble des polynomes

$$\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}).$$

**COROLLAIRE.** — *Si la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est effective dans  $\mathcal{H}(D)$  au sens de Whittaker-Cannon, pour que l'équation fonctionnelle*

$$(31) \quad J^k f = g \quad [g \in \mathcal{H}(D)]$$

admette des solutions dans  $\mathcal{H}(D)$ , il faut et il suffit que la série de base de  $g$  étant  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n$ , la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_{n+k}$$

converge dans  $\mathcal{H}(D)$ . Dans ces conditions, la solution générale de l'équation (31) est

$$\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_{n+k}$$

( $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ , constantes arbitraires appartenant à  $\mathbb{C}$ ).

## CHAPITRE VI.

## SUR CERTAINES BASES EN ESCALIER.

Les considérations qui font l'objet de ce chapitre ont pour point de départ un résultat de Portisky (*cf.*, par exemple, [11]).

## I. — Hypothèses et notations.

D désigne toujours un disque ouvert de centre O de rayon R.

1. BASES EN ESCALIER D'ORDRE  $m \in \mathbb{N}^*$ . —  $P = (p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  est une base de polynomes, on dit que la base P est une base en escalier d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si elle vérifie la propriété suivante :

$\nu$  étant mis sous la forme  $\nu = mn + q$ , avec  $0 \leq q < m$ ,  $p_\nu$  est de degré inférieur ou égal à  $m(n + 1) - 1$ .

Autrement dit, la matrice des  $p_{\nu\sigma}$  a sa  $\nu^{\text{ième}}$  ligne qui comporte  $m(n + 1)$  éléments. La matrice inverse formée par les  $\tau_{\mu\nu}$  peut se calculer en résolvant une suite  $(\Sigma_n)$  de systèmes linéaires à  $m(n + 1)$  inconnues et la matrice des  $\pi_{\mu\nu}$  possède une propriété analogue.

Nous représenterons encore par  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  la « base duale » de  $(p_n)$  et nous identifierons  $\varphi_\nu$  à l'opérateur

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\pi_{\mu\nu}}{x^{\mu+1}}.$$

2. ULTRA-EFFECTIVITÉ D'ORDRE  $m$ . — Nous supposons que toute fonction de  $\mathcal{H}(D)$  admet relativement à la base P en escalier d'ordre  $m$  une série de base au sens de Whittaker-Cannon, c'est-à-dire que les  $\varphi_\nu$  sont continues sur  $\mathcal{H}(D)$ .  $u_\nu$  est l'application de  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathcal{F}$  définie par le développement

$$\sum_{j=0}^{\nu} \varphi_j \otimes p_j.$$

Nous dirons que la base P est *ultra-effective d'ordre m sur*  $\mathcal{H}(D)$  ou que le développement

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu \otimes p_\nu$$

est *ultra-effectif d'ordre m* dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$  si  $\forall f \in \mathcal{H}(D)$ , on a dans  $\mathcal{H}(D)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{mn-1}(f) = f.$$

On démontre aisément comme on l'a fait pour l'effectivité ordinaire :

PROPOSITION I. — *Pour que la base P soit ultra-effective d'ordre m sur  $\mathcal{X}(D)$ , il faut et suffit que la suite  $(u_{mn-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  forme un ensemble équicontinu d'applications linéaires de  $\mathcal{X}(D)$  dans  $\mathcal{X}(D)$ .*

3. PARTIE ENTIÈRE D'UN DÉVELOPPEMENT DE LAURENT. — Étant donné un développement de Laurent de  $f$ , nous désignerons par  $P.e(f(z))$  le développement de Taylor obtenu en supprimant dans ce développement les termes dont l'exposant est négatif (c'est-à-dire  $< 0$ ).

LEMME 1. — *Si  $f(z)$  est un polynôme ou une série entière, si*

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{z} + \dots + \frac{\lambda_n}{z^n} + \dots, \quad \text{avec } \lambda_0 \neq 0,$$

alors

$$P.e((P.e(f(z) \lambda(z))) (\lambda(z))^{-1}) = f(z).$$

Démonstration. — Si l'on pose

$$f(z) \lambda(z) = g(z) + g_1(z),$$

[ $g(z)$  formé par les termes à exposant  $\geq 0$ ,  $g_1(z)$  formé par les termes à exposant  $< 0$ ], on a

$$(g(z) + g_1(z) (\lambda(z))^{-1}) = f(z),$$

$g_1(z) (\lambda(z))^{-1}$  est formé par des termes à exposant strictement négatif, d'où la propriété.

4. HYPOTHÈSES. —  $P = (p_v)$  est une base en escalier d'ordre  $m > 0$  et nous reprenons les notations du 1<sup>o</sup>. Il existe :

— des fonctions  $\psi_n (n \in \mathbb{N})$  appartenant à  $P(\mathbb{C}D)$ ;

— des fonctions  $\psi_n (n \in \mathbb{N})$  appartenant à  $P(\mathbb{C}D')$  ( $D'$  désigne le disque ouvert de centre  $O$  de rayon  $R^m$ );

— des fonctions  $\lambda_q (q \in \{0, 1, \dots, m-1\})$  holomorphes dans un voisinage de  $\mathbb{C}D$ , non nulles à l'infini,

telles que :

$$A_1. \varphi_{mn+q}(x) = \lambda_q(x) \psi_n(x);$$

$$A_2. \psi_n(x) = x^{m-1} \Psi_n(x^m);$$

A<sub>3</sub>. chaque  $\Psi_n$  est défini dans un voisinage de  $\mathbb{C}D'$  par un développement de Laurent

$$\Psi_n(X) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\mu_{jn}}{x^{j+1}} \quad (\text{avec } \mu_{nn} \neq 0).$$

Enfin nous poserons  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ .



## II. — Recherche de conditions pour l'ultra-effectivité.

### 1. CONSTRUCTION D'UNE BASE SIMPLE ASSOCIÉE A LA BASE EN ESCALIER.

PROPOSITION 2. — 1° *L'expression*

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{P.e}(\lambda_q(\omega^k z) p_{mn+q'}(\omega^k z))$$

est nulle si  $q = q'$  et c'est un polynome  $Q_0(z^m)$  dépendant seulement de  $n$  lorsque  $q \neq q'$ .

2° La suite des opérateurs  $\Psi_n$  définis par les fonctions  $X \rightarrow \Psi_n(X)$  et la suite des polynomes  $Q_n(X)$  sont associés à des matrices infinies nulles à droites inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Par hypothèse, on a

$$\langle \varphi_{mn+q}, p_{mn'+q'} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{qq'}$$

d'où l'on tire successivement

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \psi_n(x) \lambda_q(x) p_{mn'+q'}(x) dx = \delta_{nn'} \delta_{qq'}$$

( $\Lambda$ , contour simple fermé entourant l'origine, rectifiable parcouru dans le sens direct)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \Psi_n(x^m) x^{m-1} \lambda_q(x) p_{mn'+q'}(x) dx &= \delta_{nn'} \delta_{qq'}, \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \Psi_n(x^m) x^{m-1} \lambda_q(\omega^k x) p_{mn'+q'}(\omega^k x) dx &= \delta_{nn'} \delta_{qq'}, \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \Psi_n(x^m) x^{m-1} \text{P.e}(\lambda_q(\omega^k x) p_{mn'+q'}(\omega^k x)) dx &= \delta_{nn'} \delta_{qq'}, \\ \frac{1}{2i\pi m} \int_{\Lambda} \Psi_n(x^m) x^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \text{P.e}(\lambda_q(\omega^k x) p_{mn'+q'}(\omega^k x)) dx &= \delta_{nn'} \delta_{qq'}. \end{aligned}$$

Cette relation s'écrit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Lambda} \Psi_n(x^m) Q_{n',q,q'}(x^m) x^{m-1} dx = \delta_{nn'} \delta_{qq'}$$

ou

$$(1) \quad \frac{1}{2i\pi m} \int_{\Lambda'} \Psi_n(X) Q_{n',q,q'}(X) dX = \delta_{nn'} \delta_{qq'}$$

( $\Lambda'$ , contour simple rectifiable fermé entourant l'origine parcouru dans le sens direct).

Par suite de l'hypothèse  $A_3$ , la matrice infinie associée aux  $\Psi_n$  est nulle à droite. La relation (1) montre alors que

$$\begin{aligned} q \neq q' &\Rightarrow Q_{n,q,q'} = 0, \\ q = q' &\Rightarrow Q_{n,q,q'} \end{aligned}$$

est un polynome  $Q_n$  dépendant seulement de  $n$  et l'ensemble des  $\Psi_n$  constitue la « base duale » de la base formée par les  $Q_n$ .

**COROLLAIRE.** — *Le développement  $\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \otimes Q_n$  définit l'application identique de  $\mathfrak{X}$  sur  $\mathfrak{X}$ .*

2. L'ULTRA-EFFECTIVITÉ DE LA BASE P.

**PROPOSITION 3.** — *Si le déterminant*

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \lambda_0(x) & \lambda_1(x) & \dots & \lambda_{m-1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0(\omega^{m-1}x) & \lambda_1(\omega^{m-1}x) & \dots & \lambda_{m-1}(\omega^{m-1}x^m) \end{vmatrix}$$

*n'admet pas de zéros sur  $\mathfrak{C}D$ , l'ultra-effectivité d'ordre  $m$  sur  $\mathfrak{X}\mathcal{C}(D)$  pour le développement*

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \otimes P_n$$

*entraîne l'effectivité sur  $\mathfrak{X}\mathcal{C}(D')$  pour le développement*

$$(4) \quad \Psi_n \otimes Q_n.$$

*Démonstration.* — Par hypothèse, les applications

$$u_n = \sum_{j=0}^n \sum_{q=0}^{m-1} [\Psi_j(x^m) x^{m-1} \lambda_q(x)] \otimes P_{mj+q}(z)$$

forment un ensemble équicontinu d'applications de  $\mathfrak{X}\mathcal{C}(D)$  dans lui-même.

Il en sera de même de l'ensemble des

$$v_n = \sum_{j=0}^n \sum_{q=0}^{m-1} \left[ \Psi_j(x^m) \lambda_q(x) \right] \otimes \left[ P_{mj+q}(z) \sum_{q'=0}^{m-1} \lambda_{q'}(z) \right]$$

sur  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}\mathcal{C}(D), \mathfrak{X}\mathcal{C}(D \cap U))$  ( $U$ , voisinage de  $\mathfrak{C}D$  laissant dans son extérieur les points singuliers de  $\lambda_q$ ).

On peut dire la même chose successivement des ensembles d'opérateurs

$$\begin{aligned} \omega_{n,k,l} &= \sum_{j=0}^n \sum_{q=0}^{m-1} [\Psi_j(x^m) \lambda_q(\omega^k x)] \otimes \left[ P_{mj+q}(\omega^l z) \left( \sum_{q'=0}^{m-1} \lambda_{q'}(\omega^l z) \right) \right] \\ &\quad (n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1, \dots, m-1\}, l \in \{0, \dots, m-1\}), \\ \omega_{n,k} &= \sum_{j=0}^n \sum_{q=0}^{m-1} [\Psi_j(x^m) \lambda_q(\omega^k x)] \otimes \left[ P.e \left( \sum_{l=0}^{m-1} P_{mj+q}(\omega^l z) \sum_{q'=0}^{m-1} \lambda_{q'}(\omega^l z) \right) \right] \end{aligned}$$

et en tenant compte de la proposition 2, on voit que les  $\varphi_{n,k}$  ont la forme

$$\omega_{n,k} = \sum_{j=0}^n \sum_{q=0}^{m-1} [\Psi_j(x^m) \lambda_q(\omega^k x)] \otimes [Q_j(z^m)].$$

L'hypothèse faite sur le déterminant (2) entraîne l'effectivité dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \mathcal{H}(\mathbb{D}))$  de

$$\sum_{j=0}^{\infty} [\Psi_j(x^m)] \otimes [Q_j(z^m)]$$

et l'effectivité dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{D}'), \mathcal{H}(\mathbb{D}'))$  du développement

$$\sum_{j=0}^{\infty} [\Psi_j(x)] \otimes [Q_j(z)].$$

PROPOSITION 4. — Si le déterminant (2) n'admet pas de zéros sur  $\mathbb{C}\mathbb{D}$ , l'effectivité sur  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  du développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \otimes Q_n$$

entraîne l'ultra-effectivité d'ordre  $m$  pour la base donnée.

Démonstration. — Posons

$$G_n(x, z) = \sum_{j=0}^n \Psi_j(x^m) Q_j(z^m) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Les opérateurs  $[G_n(x, z)]$  forment un ensemble équicontinu.

Si, de plus, on pose

$$g_{n,q}(x, z) = \Psi_j(x^m) p_{jm+q}(z),$$

on a (prop. 2)

$$G_n(x, z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P.e_z(\lambda_q(\omega^k z) g_{n,q}(\omega^k z)),$$

$$0 = \sum_{k=0}^{m-1} P.e_z(\lambda_{q'}(\omega^k z) g_{n,q}(\omega^k z)) \quad \text{pour } q \neq q'$$

( $P.e_z$  est la partie entière relative à la variable  $z$ ).

Si  $\Delta(z)$  est la valeur du déterminant (2) lorsqu'on remplace  $x$  par  $z$ , si dans les mêmes conditions  $\Delta_q(z)$  est le quotient du coefficient de  $\lambda_q(z)$  par  $\Delta(z)$ , on a

$$g_{n,q}(x, z) = \frac{1}{m} P.e_z(G_n(x, z) \Delta_q(z))$$

[car  $\Delta_q(z)$  a un développement de Laurent ne comportant que des puissances négatives de  $z$ ].

Les  $[g_{n,q}(x, z)]$  forment un ensemble équicontinu d'opérateurs sur  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ , donc il en est de même des opérateurs

$$\sum_{j=0}^n \sum_{q=0}^{m-1} [\Psi_j(x^m) x^{m-1} \lambda_q(x)] \otimes [p_{j,m+q}(z)],$$

d'où l'effectivité dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ .

En réunissant les propositions 3 et 4, on obtient le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Si le déterminant (2) n'admet pas de zéro sur  $\mathcal{C}D$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Le développement  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu} \otimes p_{\nu}$  est ultra-effectif d'ordre  $m$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D), \mathcal{H}(D))$ ;*

2° *Le développement  $\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \otimes Q_n$  est effectif dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}(D'), \mathcal{H}(D'))$ .*

**3. CAS D'INTERPOLATION DE PORITSKY.** — Il consiste à étudier les séries de base associées aux opérateurs

$$\left[ \frac{(mn)!}{(x - a_p)^{mn+1}} \right].$$

Si  $L$  est la transformation de Laplace,  $z^n \rightarrow \frac{z^n}{n!}$ , nous avons

$$\left[ \frac{(mn)!}{(x - a_p)^{mn+1}} \right] \circ L = \frac{1}{x^{mn+1}} e^{\frac{a_p}{x}}.$$

Les conditions précédentes sont donc réalisées en posant

$$\psi_n(x) = \frac{1}{x^{mn+1}} = x^{m-1} \frac{1}{x^{m(n+1)}}, \quad \lambda_p(x) = e^{\frac{a_p}{x}},$$

$$\Psi_n(X) = \frac{1}{X^{n+1}},$$

donc les  $Q_n$  dont la « base duale » est constituée par les  $\Psi_n$  sont les polynomes

$$Q_n(Z) = Z^n.$$

On a :

**THÉORÈME 2.** — *La base  $(p_n)$  ayant pour « base duale » l'ensemble des opérateurs  $\frac{(mn)!}{(x - a_p)^{mn+1}}$  est ultra-effective d'ordre  $m$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{1,k}, \mathcal{H}_{1,k})$ , où  $k$  est inférieur au module du plus petit zéro du déterminant*

$$\begin{vmatrix} e^{a_0 \zeta} & e^{a_1 \zeta} & \dots & e^{a_{m-1} \zeta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{a_0(m-1)\zeta} & e^{a_1(m-1)\zeta} & \dots & e^{a_{m-1}(m-1)\zeta} \end{vmatrix}.$$

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOAS, *Entire functions*.
- [2] BOAS et BUCK :  
 a. *Publications of University of Wisconsin*, 1954;  
 b. *Polynomial expansions of analytic functions (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 19, 1958)*.
- [3] BÖCHNER, *Several complex variables*.
- [4] BOURBAKI :  
 a. *Fonctions de variables réelles*;  
 b. *Espaces vectoriels topologiques*.
- [5] FALGAS, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 2366-2368; t. 242, 1956, p. 1563-1566; t. 242, 1956, p. 1677-1679; t. 244, 1957, p. 2275-2278; t. 245, 1957, p. 1208-1211; t. 249, 1959, p. 2705-2707; t. 250, 1960, p. 43-45; t. 252, 1961, p. 2363-2365; t. 254, 1962, p. 2913-2915; t. 254, 1962, p. 3296-3298; t. 254, 1962, p. 3473-3475.
- [6] GAGLIARDO, *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni (Ricerche di matematica, t. 9, 1960, p. 58-81)*.
- [7] GELFAND et SILOV, *Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem (Amer. Math. Soc. Trans., 2<sup>e</sup> série, t. 5, 1957)*.
- [8] GROTHENDIECK :  
 a. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes (J. reine angew. Math., Bd 192, Heft 1, 1953, p. 36-64; Heft 2, 1953, p. 77-95)*;  
 b. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires (Mem. Amer. Math. Soc., 1955)*.
- [9] KÖTHE :  
 a. *Dualität in der Funktionentheorie (J. reine angew. Math., Bd 191, 1953, p. 30-49)*;  
 b. *Topologische lineare Räume*.
- [10] LIONS, *Équations aux dérivées partielles et interpolation (Séminaire Schwartz, 1960-1961)*.
- [11] MAC INTYRE, *Interpolation series for integral functions of exponential type (Trans. Amer. Math. Soc., t. 76, 1954)*.
- [12] MARTIN, *Sur les séries d'interpolation (Thèse, 1949)*.
- [13] MITTAG-LEFFLER, *Sur la série de Dirichlet et la série de facultés (Acta math., t. 46, 1925, p. 337-340)*.
- [14] MONTEL, *Sur les séries de polynomes*.
- [15] NORLUND, *Sur les séries d'interpolation*.
- [16] PERRON, *Ueber Bruwiersche Reihen (Math. Z., Bd 45, 1939, p. 127-141)*.
- [17] RAINVILLE, *Special functions*.
- [18] SCHWARTZ :  
 a. *Théorie des distributions*;  
 b. *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications (Séminaire de l'Institut H. Poincaré, 1953-1954)*.
- [19] WHITTAKER, *Sur les séries de base de polynomes quelconques*.