

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

WITOLD POGORZELSKI

**Problème aux limites pour un système parabolique
d'équations aux dérivées partielles**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 80, n° 2 (1963), p. 173-191

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_2_173_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME AUX LIMITES POUR UN SYSTÈME PARABOLIQUE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

PAR M. WITOLD POGORZELSKI.

1. INTRODUCTION. — Soit un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre $M \geq 2$:

$$(1) \quad \Psi^{(\alpha)}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_\nu \\ 1 \leq \beta \leq N \\ 0 \leq \nu \leq M}} A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots, k_\nu}(X, t) \frac{\partial^\nu u_\beta}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_\nu}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

à $N \geq 1$ fonctions inconnues $u_1(X, t), \dots, u_N(X, t)$. Nous admettons les hypothèses suivantes :

I. Les coefficients $A_{\alpha\beta}$ sont des fonctions réelles du point $X(x_1, \dots, x_n)$ de l'espace euclidien E_n et de la variable réelle t , définies et *bornées* dans la région

$$(2) \quad X \in E_n; \quad 0 \leq t \leq T,$$

vérifiant les conditions de Hölder suivantes :

$$(3) \quad |A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots, k_M}(X, t) - A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots, k_M}(X', t')| \leq \text{Cte} [|\text{XX}'|^h + |t - t'|^{h'}],$$

$$(4) \quad |A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots, k_\nu}(X, t) - A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots, k_\nu}(X', t')| \leq \text{Cte} |\text{XX}'|^h$$

si $\nu < M$; $0 < h, h' \leq 1$; on a désigné par $|\text{XX}'|$ la distance euclidienne des points X, X' . On admet, en outre, la continuité uniforme des coefficients par rapport à la variable t dans la région (2).

Sans restreindre la généralité on suppose bien naturellement les égalités

$$A_{\alpha\beta}^{k_1 \dots k_\nu}(X, t) = A_{\alpha\beta}^{j_1 \dots j_\nu}(X, t),$$

où les deux suites des nombres entiers (k_1, \dots, k_ν) et (j_1, \dots, j_ν) ne diffèrent que par l'ordre de leurs éléments.

II. Conformément à la définition de Petrovsky [1] de la parabolicité du système, toutes les racines en λ de l'équation

$$(5) \quad \det_{\alpha, \beta} \left[\sum_{k_1, \dots, k_M} A_{\alpha\beta}^{k_1 \dots k_M}(X, t) (is_{k_1}) \dots (is_{k_M}) - \delta_{\alpha\beta} \lambda \right] = 0 \quad (\delta_{\alpha\beta}, \text{ symbole de Kronecker})$$

ont leurs parties réelles inférieures à un nombre négatif fixé, δ :

$$(6) \quad \operatorname{Re}(\lambda) < -\delta < 0$$

pour toutes les valeurs des variables réelles s_1, s_2, \dots, s_n vérifiant l'égalité

$$(7) \quad s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1$$

et pour tout point de la région (2). Cette hypothèse exige donc que le degré M du système (1) soit *pair*. Désignons par Ψ une matrice d'opérateurs dont les éléments $\Psi_{\alpha\beta}$ sont des opérateurs différentiels définis par la formule

$$(8) \quad \Psi_{\alpha\beta} = \sum_{k_1, \dots, k_\nu}^{0 \leq \nu \leq M} A_{\alpha\beta}^{k_1 \dots k_\nu}(X, t) \frac{\partial^\nu}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_\nu}} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N).$$

Désignons ensuite par $u(X, t)$ la colonne des fonctions $[u_1(X, t), \dots, u_N(X, t)]$, nous pouvons alors écrire le système (1) sous la forme abrégée

$$(9) \quad \Psi u(X, t) = 0$$

conformément à la définition du produit formel d'une matrice par une colonne.

Dans le travail [2], nous avons construit une matrice des solutions fondamentales $\Gamma(X, t; Y, \tau) = \{\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\}$ du système (1), dans les hypothèses I et II. Les propriétés de cette matrice étaient étudiées dans les travaux [3] et [4].

La limitation suivante de la norme de la matrice Γ et de ses dérivées ⁽¹⁾ d'ordre $m < M$ est très importante :

$$(9') \quad |D_x^{(m)} \Gamma(X, t; Y, \tau)| < \frac{\text{Cte}}{(t - \tau)^\mu} \frac{\exp[-k|XY|^Z]}{|XY|^{u+m-M, \mu}},$$

(1) On appelle dérivée d'une matrice, la matrice composée des dérivées de ses éléments; nous définirons dans la suite la norme $|A|$ d'une matrice A (ou colonne) par la plus grande valeur des modules de ses éléments.

où μ et χ sont des nombres positifs choisis arbitrairement dans les intervalles

$$\frac{m}{M} < \mu < \min\left(1, \frac{n+m}{M}\right),$$

$$1 \leq \chi < \frac{M}{M-1},$$

k est une constante positive arbitraire, le coefficient Cte dépend du choix des constantes k , μ et χ .

2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES. — Soit dans l'espace E_n un domaine fini ou infini Ω limité par une suite finie ou infinie S_1, S_2, \dots de surfaces à $n-1$ dimensions, fermées ou illimitées sans bords. Dans ce dernier cas le nombre de telles surfaces est fini. Toutes les surfaces vérifient les conditions connues de Liapounoff à l'exposant h .

Si $K(X, R)$ est une sphère, centrée au point arbitraire $X \in E$, de rayon arbitraire R , nous admettons que la somme A_K des aires de toutes les portions des surfaces S_1, S_2, \dots comprises dans la sphère $K(X, R)$ vérifie l'inégalité

$$(10) \quad A_K < e^{cR}$$

quels que soient X et R ; c est une constante positive.

En outre, nous admettons qu'il existe un nombre positif δ_0 , suffisamment petit pour que toute sphère de rayon δ_0 , centrée au point arbitraire P d'une surface arbitraire S_ν , ne contienne à l'intérieur que les points d'une portion de cette surface S_ν , toutes les autres surfaces étant extérieures. Dans la suite nous désignerons par S l'ensemble de points $S = S_1 + S_2 + \dots$ de toutes les surfaces S_ν .

DÉFINITION 1. — Nous appelons *potentiel de charge spatiale, relatif au système (I)*, une colonne de fonctions $U = [U_1, \dots, U_N]$ définie par l'intégrale de volume

$$(11) \quad U(X, t) = \int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(X, t; Y, \tau) \rho(Y, \tau) dY d\tau,$$

où $\rho(Y, \tau)$, dite *densité de la charge*, est une colonne des fonctions définies pour $[Y \in \Omega, 0 < \tau < T]$; sous l'intégrale (11) figure le produit de la matrice Γ par la colonne ρ , conformément à la formule

$$(\Gamma\rho)_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \Gamma_{\alpha\beta} \rho_\beta.$$

THÉORÈME 1. — Si la densité $\rho(Y, \tau)$ de la charge, définie dans la région $[Y \in \Omega, 0 < \tau \leq T]$ vérifie l'inégalité

$$(12) \quad |\rho(Y, \tau)| < a_\rho \tau^{-\mu} \exp[b|YX_0|^{\chi_1} (1 + |YP_Y|^{-\rho})],$$

où les constantes données a_ρ , b , μ_ρ , p , χ satisfont aux inégalités

$$(13) \quad a_\rho > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq \mu_\rho, \quad p < 1, \quad 1 \leq \chi < \frac{M}{M-1},$$

X_0 est un point fixé dans l'espace E , P_Y est un point de la frontière S le plus approché du point $Y \in \Omega$, si en outre la fonction $\rho(Y, \tau)$ est intégrable dans toute région bornée et mesurable :

$$Y \in \Omega^* \subset \Omega \quad 0 < \tau \leq T,$$

alors le potentiel de charge spatiale (11) et ses dérivées d'ordre $m < M$ sont déterminés en tout point $X \in \Omega + S$ pour $0 < t < T$, vérifient les limitations

$$(14) \quad |D_X^{(m)} U(X, t)| < \frac{\text{Cte } a_\rho}{t^{\mu_\rho + \mu_{m-1}}} \exp\{2^{\chi-1} b |XX_0|^\chi\} \quad (m = 0, \dots, M-1)$$

[les constantes μ_m étant choisies arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $(\frac{m+p}{M}, 1)$] et possède une continuité régulière s'exprimant par les inégalités généralisées de Hölder :

$$(15) \quad |D_X^{(m)} U(X, t) - D_X^{(m)} U(X', t')| < \text{Cte } a_\rho t^{-\mu_\rho} \exp\{2^{\chi-1} b |XX_0|^\chi\} \left\{ |XX'|^{\theta_m} + |t - t'|^{(\tilde{h}_m - \frac{p+m}{M})\theta'} \right\},$$

où

$$\begin{aligned} X, X' \in \Omega + S, \quad |XX_0| \geq |X'X_0|, \quad 0 < t < t' \leq T; \\ \theta_m = 1, \quad \text{si } m = 0, 1, \dots, M-2; \quad \theta_{M-1} = (1-p)\theta; \end{aligned}$$

les constantes positives θ et θ' sont arbitrairement inférieures à l'unité; $\tilde{h}_m = \min(1, \frac{n+m}{M})$; le coefficient positif Cte dépend du choix des constantes θ et θ' , mais ne dépend pas de la fonction ρ .

La démonstration du théorème est analogue à celle que nous avons donnée dans le travail [4], [5].

L'introduction de la densité $\rho(Y, \tau)$, non bornée si $Y \rightarrow P$, est nécessaire dans l'étude d'un problème aux limites ultérieur sous l'hypothèse bien générale.

THÉORÈME 2. — Si la densité $\rho(Y, \tau)$ est continue et vérifie une inégalité de Hölder :

$$|\rho(Y, \tau) - \rho(Y', \tau)| < \text{Cte } \tau^{-\mu_\rho} |YY'|^{\mu_\rho}$$

dans un domaine $\Omega^* \subset \Omega$, pour $0 < \tau \leq T$, alors le potentiel (11) de charge spatiale admet les dérivées d'ordre M qui vérifient une équation généralisée de Poisson :

$$(16) \quad \Psi U(X, t) = -\rho(X, t)$$

en tout point X intérieur du domaine Ω^* , pour $0 < t < T$.

La preuve du théorème est donnée dans notre travail [3].

DÉFINITION 2. — Nous appelons potentiel de simple couche, relatif au système (1), une colonne de fonctions $V = [V_1, \dots, V_N]$ définie par l'intégrale de surface

$$(17) \quad V(X, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(X, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau,$$

où la colonne de fonctions $\varphi(Q, \tau)$ est dite densité de la couche.

THÉORÈME 3. — Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de la couche, définie dans la région $[Q \in S, 0 < \tau \leq T]$, vérifie l'inégalité

$$(18) \quad |\varphi(Q, \tau)| < a_\varphi \tau^{-\mu_\varphi} \exp\{b |QX_0|^\chi\},$$

où les constantes données $a_\varphi, \mu_\varphi, b, \chi$ satisfont aux conditions

$$(19) \quad a_\varphi > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq \mu_\varphi < 1, \quad 1 \leq \chi < \frac{M}{M-1},$$

si en outre la densité φ est intégrable dans toute région bornée et mesurable $[Q \in S^* \subset S; 0 < \tau \leq T]$, alors le potentiel (17) de simple couche a les propriétés suivantes :

1° il admet les dérivées spatiales d'ordre $m \leq M$ qui vérifient le système (1)

$$V(X, t) = 0$$

en tout point $X \in E - S$, pour $0 < t < T$;

2° le potentiel (17) et ses dérivées d'ordre $m < M - 1$ s'expriment par les intégrales absolument convergentes :

$$(20) \quad D_X^{(m)} V(X, t) = \int_0^t \iint_S D_X^{(m)} \Gamma(X, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau$$

en tout point $X \in E$, pour $0 < t < T$, vérifiant les inégalités

$$(21) \quad |D_X^{(m)} V(X, t)| < \frac{\text{Cte } a_\varphi}{t^{\mu_\varphi + \tilde{\mu}_m - 1}} \exp\{2^{\chi-1} b |XX_0|^\chi\},$$

où les constantes $\tilde{\mu}_m$ sont fixées arbitrairement dans l'intervalle

$$(21') \quad \frac{m+1}{M} < \mu_m < 1;$$

3° Le potentiel (17) et ses dérivées spatiales d'ordre $m < M - 1$ ont une continuité régulière en tout point $X \in E$ (même sur S) pour $0 < t \leq T$, s'exprimant par l'inégalité de Hölder suivante :

$$(22) \quad |D_X^{(m)} V(X, t) - D_X^{(m)} V(X', t')| < \text{Cte } a_\varphi t^{-\mu_\varphi} \exp\{2^{\chi-1} b |XX_0|^\chi\} \left\{ |XX'|^{0_{m+}} + |t - t'| \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{0'} \right\},$$

où $\theta_m = 1$, si $m = 0, 1, \dots, M-3$, $\theta_{M-2} = 0$; θ et θ' sont des nombres positifs arbitraires, inférieurs à l'unité; on admet que $|\mathbf{X}\mathbf{X}_0| \geq |\mathbf{X}'\mathbf{X}_0|$, $0 < t < t' \leq T$;

4° les dérivées spatiales d'ordre $M-1$ du potentiel (17) s'expriment aussi par l'intégrale (20) et vérifient une limitation

$$(23) \quad |D_{\mathbf{X}}^{(M-1)} V(\mathbf{X}, t)| < \frac{\text{Cte } a_{\varphi} (1 + |\mathbf{X}\mathbf{P}|^{M(1-\mu)})}{t^{\mu_{\varphi} + \mu - 1} |\mathbf{X}\mathbf{P}_{\mathbf{X}}|^{M(1-\mu)}} \exp \{ 2^{\lambda-1} b |\mathbf{X}\mathbf{X}_0|^{\lambda} \}$$

en tout point $\mathbf{X} \in E - S$, pour $0 < t < T$, où la constante μ est fixée arbitrairement dans l'intervalle

$$(24) \quad 1 - M^{-1} < \mu < 1.$$

En outre ces dérivées vérifient une condition de Hölder dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω .

La démonstration du théorème est analogue à celle que nous avons donnée dans le travail [5].

Les dérivées spatiales d'ordre $M-1$ du potentiel (17) de simple couche n'ont pas, en général, une limite si le point \mathbf{X} tend vers un point \mathbf{P} de la surface S , tandis qu'une certaine combinaison linéaire de ces dérivées, dite dérivée transversale, définie par l'auteur, aura une limite, si $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}$, sous l'hypothèse de la continuité de la densité φ .

DÉFINITION 3. — Nous appelons *dérivée transversale* d'ordre $M-1$ du potentiel de simple couche (17), relativement au point \mathbf{P} sur S , une colonne de résultats des opérations différentielles suivantes :

$$(25) \quad D_{\Gamma(\mathbf{P})}^{(M-1)} V(\mathbf{X}, t) = \left\{ \sum_{k_1, \dots, k_M} A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots, k_M}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial^{M-1}}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{M-1}}} \cos(x_{k_M}, n_{\mathbf{P}}) \right\} V(\mathbf{X}, t)$$

(conformément à la règle de la multiplication formelle de la matrice par la colonne); la normale $n_{\mathbf{P}}$ est dirigée vers l'intérieur du domaine Ω .

THÉORÈME 4 (de M. A. Piskorek). — Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de simple couche est continue et vérifie l'inégalité (18), alors la dérivée transversale (25) d'ordre $M-1$ du potentiel de simple couche (17) a la propriété limite suivante :

$$(26) \quad \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}} D_{\Gamma(\mathbf{P})}^{(M-1)} V(\mathbf{X}, t) = D_{\Gamma(\mathbf{P})}^{(M-1)} V(\mathbf{P}, t) \\ = -\frac{1}{2} \varphi(\mathbf{P}, t) + \int_0^t \iint_S D_{\Gamma(\mathbf{P})}^{(M-1)} [\Gamma(\mathbf{P}, t; \mathbf{Q}, \tau)] \varphi(\mathbf{Q}, \tau) d\mathbf{Q} d\tau,$$

où l'intégrale est absolument convergente, en vertu de la limitation aux singularités faibles de la norme de la matrice suivante :

$$(27) \quad |D_{\Gamma(\mathbf{P})}^{(M-1)} \Gamma(\mathbf{P}, t; \mathbf{Q}, \tau)| < \frac{\text{Cte exp} [-k |\mathbf{P}\mathbf{Q}|^{\lambda}]}{(t - \tau)^{\mu} |\mathbf{P}\mathbf{Q}|^{n+M(1-\mu)-1-k^*}},$$

la constante μ étant choisie à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{h^*}{M}, 1\right)$,

$$h^* = \min(h, Mh', h).$$

L'opération $D_{T(P)}^{(M-1)}$ est en accord avec la règle de produit formel d'une matrice par une matrice.

La démonstration du théorème est donnée par M. A. Piskorek dans le travail [6].

THÉORÈME 5. — Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ vérifie les conditions du théorème 3, alors l'intégrale

$$(28) \quad H(P, t) = \int_0^t \iint_S D_{T(P)}^{(M-1)} \Gamma(P, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau,$$

figurant dans la propriété (26) vérifie la condition de Hölder suivante :

$$(29) \quad |H(P, t) - H(P', t')| < \frac{\text{Cte } a_\varphi \exp[2^{\chi-1} b |PX_0|]}{t^{\mu+\mu_\varphi-1}} \left[|PP'|^\theta h^* + |t-t'|^{\frac{\theta h^*}{2M-1}} \right],$$

où $P, P' \in S$, $|PX_0| \geq |P'X|$; $0 < t < t' < T$, les constantes θ et μ sont choisies dans les intervalles

$$0 < \theta < 1; \quad 1 - \frac{h^*}{M} < \mu < 1$$

et liées par la relation

$$\mu = 1 - \frac{h^*}{M} (1 - \theta),$$

La preuve est donnée dans le travail [7] de M. A. Piskorek.

THÉORÈME 6. — Si la colonne de fonctions $f(Y)$, définies dans la région Ω , vérifie l'inégalité

$$(30) \quad |f(X)| < a_f \frac{1 + |XP_X|^p}{|XP_X|^p} \exp[b |XX_0|^\chi] \quad (a_f > 0, 0 \leq p < 1)$$

et est intégrable dans tout domaine borné et mesurable $\Omega^* \subset \Omega$, alors la colonne de fonctions

$$(31) \quad J(X, t) = \iiint_{\Omega} \Gamma(X, t; Y, 0) f(Y) dY,$$

analogue à l'intégrale de Poisson-Weierstrass, a les propriétés suivantes :

1° elle vérifie le système

$$\Psi J(X, t) = 0$$

en tout point $X \in E$ pour $0 < t < T$;

2° elle-même et ses dérivées d'ordre $m < M$ vérifient les inégalités

$$(32) \quad |D_X^{(m)} J(X, t)| < \frac{\text{Cte } a_f}{t^{\mu_m}} \exp\{2^{\chi-1} b |XX_0|^\chi\} \quad (m = 0, 1, \dots, M-1),$$

où

$$\frac{m+p}{M} < \mu_m < 1$$

et les inégalités de Hölder :

$$(33) \quad |D_X^{(m)} J(X, t) - D_X^{(m)} J(X', t')| \\ < \text{Cte } a_f t^{-\mu_m} \exp \{ 2^{\lambda-1} b |XX_0|^\lambda \} \{ |XX'|^{\theta_m} + |t-t'|^{\mu_m - \frac{m+p}{M}} \},$$

où $\tilde{\mu}_m$ est choisi arbitrairement dans l'intervalle

$$(m+p)M^{-1} < \mu_m < \min \left(1, \frac{n+m}{M} \right),$$

$$\theta_m = 1, \quad \text{si } m = 0, 1, \dots, M-2;$$

si $m = M-1$, on a

$$\theta_m = (1-p)\theta; \quad \tilde{\mu}_m - \frac{m+p}{M} = \frac{(1-p)\theta}{M},$$

θ étant un nombre arbitraire positif, inférieur à l'unité;

$$X, X' \in \Omega + S; \quad 0 < t < t' \leq T;$$

$$|XX_0| \geq |X'X_0|;$$

3° l'intégrale (31) a la propriété limite

$$(34) \quad \lim_{t \rightarrow 0} J(X, t) = f(X)$$

en tout point $X \in \Omega$ où la fonction $f(X)$ est continue.

La démonstration du théorème est analogue à celle donnée dans notre travail [5].

3. ÉNONCÉ DU PROBLÈME. — Soit un système parabolique quasi linéaire de N équations d'ordre $M \geq 2$ de la forme

$$(35) \quad \Psi u = F[X, t, u, (D^1 u), \dots, (D^{M-1} u)],$$

où l'opérateur matriciel parabolique Ψ est défini par les formules (8), $F(X, t, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{M-1})$ est une colonne de fonctions F_1, \dots, F_N définies dans certaine région; u est une colonne (u_1, \dots, u_N) de fonctions inconnues; $(D^\nu u)$ désigne une matrice dont les éléments aux indices α, β sont les dérivées d'ordre fixé ν ($1, \dots, M-1$) des fonctions inconnues

$$(36) \quad D_\beta^\nu u_\alpha = \frac{\partial^\nu u_\alpha}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_\nu}},$$

β désignant le numéro d'une suite $1, 2, \dots, n_\nu$ suivant laquelle on a ordonné tous les systèmes de nombres (k_1, \dots, k_ν) choisis parmi les nombres $(1, 2, \dots, n)$ (avec répétitions possibles). Désignons par $u^{(\nu)}$ une matrice des éléments réels $\varphi_{\alpha\beta}^{(\nu)}$ à deux indices $\alpha = 1, \dots, N$; $\beta = 1, \dots, n_\nu$, ν étant un nombre fixé dans la suite $1, 2, \dots, M-1$. Désignons ensuite

par R_ν un ensemble de toutes les matrices $\nu^{(\nu)}$ aux éléments réels, où ν est fixé. R_0 désigne un ensemble de toutes les colonnes $\nu^{(0)}$ des nombres réels ν_1, \dots, ν_N .

III. Nous admettons que la colonne des fonctions réelles

$$(37) \quad F[X, t, \nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(M-1)}]$$

est définie et continue dans la région $X \in E; 0 < t \leq T$:

$$(38) \quad \nu^{(\nu)} \in R_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots, M-1);$$

Nous supposons ensuite que la colonne F vérifie l'inégalité

$$(39) \quad |F[X, t, \nu^{(0)}, \dots, \nu^{(M-1)}]| < m_F \sum_{\nu=0}^{M-1} |\nu^{(\nu)}|^r + m'_F t^{-\mu_F} \exp\{b |XX_0|\} (1 + |XP_X|^p)$$

dans la région (38) et une condition de Hölder de la forme

$$(40) \quad |F(X, t, \nu^{(0)}, \dots, \nu^{(M-1)}) - F(X', t, \nu'^{(0)}, \dots, \nu'^{(M-1)})| \\ < k_F \sum_{\nu=0}^{M-1} |\nu^{(\nu)} - \nu'^{(\nu)}|^{h_F} + C(\Omega^*) t^{-\mu_F} |XX'|^{h'_F}$$

dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$, pour $0 < t < T$; $m_F, m'_F, \mu_F, p, r, k_F, h_F, \mu_F, h'_F$ sont des constantes données vérifiant les conditions

$$(41) \quad m_F, m'_F, k_F > 0; \quad 0 \leq \mu_F, p, r < 1; \quad 0 < h_F, h'_F \leq 1;$$

$C(\Omega^*)$ est un coefficient positif, dépendant du domaine Ω^* , qui peut être non borné si $\Omega^* \subset \Omega$.

Nous posons le problème de la recherche d'une colonne des fonctions $u(X, t)$ qui vérifie :

(A) le système parabolique (35) en tout point de la région ($X \in \Omega, 0 < t < T$);

(B) la condition à la frontière suivante :

$$(42) \quad D_{\Gamma(P)}^{(M-1)} u(P, t) + \sum_{0 < \nu \leq M-2}^{k_1, \dots, k_\nu} g^{k_1, \dots, k_\nu}(P, t) \frac{\partial^\nu u(P, t)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_\nu}} = G[P, t, u_P, (D^1 u)_P, \dots, (D^{M-2} u)_P]$$

en tout point $P \in S$, pour $0 < t < T$;

(C) la condition initiale :

$$(43) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(X, t) = f(X)$$

en tout point intérieur $X \in \Omega$.

IV. On admet les hypothèses suivantes :

1° les matrices $g^{k_1 \dots k_\nu}(\mathbf{P}, t)$ aux éléments $g_{\alpha\beta}^{k_1 \dots k_\nu}(\mathbf{P}, t)$ sont définies, continues et bornées dans la région ($\mathbf{P} \in \mathbf{S}$, $0 < t \leq \mathbf{T}$);

2° la colonne des fonctions $\mathbf{G}[\mathbf{P}, t, \nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(M-2)}]$ est définie et continue dans la région

$$(44) \quad \mathbf{P} \in \mathbf{S}, \quad 0 < t \leq \mathbf{T}, \quad \nu^{(\nu)} \in \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 0, \dots, \mathbf{M} - 2)$$

et vérifie l'inégalité

$$(45) \quad \begin{aligned} & | \mathbf{G}[\mathbf{P}, t, \nu^{(0)}, \dots, \nu^{(M-2)}] | \\ & < m_G \sum_{\nu=0}^{M-2} | \nu^{(\nu)} |^r + m'_G t^{-\mu_G} \exp [b | \mathbf{P} \mathbf{X}_0 |], \end{aligned}$$

les constantes données m_G, m'_G, r, μ_G, b , vérifiant les conditions

$$(45') \quad m_G, m'_G, b > 0; \quad 0 \leq r, \quad \mu_G < 1;$$

3° la colonne des fonctions $f(\mathbf{X})$ est définie et continue dans le domaine Ω et vérifie l'inégalité

$$(46) \quad |f(\mathbf{X})| < m_f \exp [b | \mathbf{X} \mathbf{X}_0 |] (1 + | \mathbf{X} \mathbf{P}_\mathbf{X} |^{-p}),$$

m_f étant une constante positive donnée et p une constante non négative inférieure à l'unité.

4. RÉSOLUTION DU PROBLÈME. — Nous cherchons la solution du problème sous la forme d'une somme

$$(47) \quad \begin{aligned} u(\mathbf{X}, t) = & - \int_0^t \iiint_{\Omega} \Gamma(\mathbf{X}, t; \mathbf{Y}, \tau) \mathbf{F}[\mathbf{Y}, \tau, u(\mathbf{Y}, \tau), (D_Y^1 u), \dots, (D_Y^{M-1} u)] d\mathbf{Y} d\tau \\ & + \int_0^t \iint_{\mathbf{S}} \Gamma(\mathbf{X}, t; \mathbf{Q}, \tau) \varphi(\mathbf{Q}, \tau) d\mathbf{Q} d\tau + \iiint_{\Omega} \Gamma(\mathbf{X}, t; \mathbf{Y}, 0) f(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \end{aligned}$$

du potentiel de charge spatiale, du potentiel de simple couche de densité inconnue φ et de l'intégrale de Poisson-Weierstrass. En demandant que la somme (47) vérifie la condition à la frontière (42), sous l'hypothèse que la fonction $\varphi(\mathbf{Q}, \tau)$ soit continue, on arrive, en vertu du théorème 4, à une équation intégrodifférentielle

$$(48) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{P}, t) + \int_0^t \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{N}(\mathbf{P}, t; \mathbf{Q}, \tau) \varphi(\mathbf{Q}, \tau) d\mathbf{Q} d\tau \\ & = \int_0^t \iiint_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{P}, t; \mathbf{Y}, \tau) \mathbf{F}[\mathbf{Y}, \tau, u(\mathbf{Y}, \tau), (D_Y^1 u), \dots, (D_Y^{M-1} u)] d\mathbf{Y} d\tau \\ & - f^*(\mathbf{P}, t) + \mathbf{G}[\mathbf{P}, t, u(\mathbf{P}, t), (D^1 u)_\mathbf{P}, \dots, (D^{M-2} u)_\mathbf{P}], \end{aligned}$$

où N est une matrice définie par la formule

$$(48') \quad N(P, t; Y, \tau) = D_{T(P)}^{(M-1)} \Gamma(P, t; Y, \tau) + \sum_{\substack{k_1, \dots, k_\nu \\ 0 \leq \nu \leq M-2}} g^{k_1, \dots, k_\nu}(P, t) \frac{\partial^\nu \Gamma(P, t; Y, \tau)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_\nu}}$$

et f^* une colonne fonctionnelle connue :

$$(48'') \quad f^*(P, t) = \iiint_{\Omega} N(P, t; Y, 0) f(Y) dY.$$

Nous sommes donc amené à étudier le système d'équations intégrales (47), (48) à deux colonnes fonctionnelles inconnues : $u(X, t)$ dans la région ($X \in \Omega$, $0 < t < T$) et $\varphi(Q, \tau)$ dans la région ($Q \in S$, $0 < \tau < T$).

Pour résoudre le système (47), (48), considérons le système d'équations intégrales suivantes :

$$(49) \quad \begin{aligned} \nu^{(\nu)}(X, t) = & - \int_0^t \iiint_{\Omega} \mathfrak{N}^{(\nu)}(X, t; Y, \tau) F[Y, \tau, \nu^{(0)}(Y, \tau), \nu^{(1)}(Y, \tau), \dots, \nu^{(M-1)}(Y, \tau)] dY d\tau \\ & + \int_0^t \iint_S \mathfrak{N}^{(\nu)}(X, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau + \iiint_{\Omega} \mathfrak{N}^{(\nu)}(X, t; Y, 0) f(Y) dY; \end{aligned}$$

$$(50) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \varphi(P, t) + \int_0^t \iint_S N(P, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau \\ & = \int_0^t \iiint_{\Omega} N(P, t; Y, \tau) F[Y, \tau, \nu^{(0)}(Y, \tau), \dots, \nu^{(M-1)}(Y, \tau)] dY d\tau - f^*(P, t) \\ & + G[P, t, \nu^{(0)}(P, t), \dots, \nu^{(M-1)}(P, t)]; \end{aligned}$$

aux matrices fonctionnelles inconnues $\nu^{(0)}(Y, \tau), \dots, \nu^{(M-1)}(Y, \tau)$ dans la région ($Y \in \Omega$; $0 < t < T$) et la colonne des fonctions inconnues $\varphi(P, t)$ dans la région ($P \in S$; $0 < t < T$).

Nous signalons, en accord avec les symboles précédents, que $\nu^{(\nu)}(Y, \tau)$ désigne une matrice fonctionnelle dont les éléments $\nu_{\alpha\beta}^{(\nu)}(Y, \tau)$ ont les indices $\alpha = 1, 2, \dots, N$; $\beta = 1, \dots, n_\nu$.

$\mathfrak{N}^{(\nu)}(X, t; Y, \tau)$ désigne une matrice à *trois dimensions*, dont les éléments sont définis par les formules [voir (36)]

$$(51) \quad \mathfrak{N}^{(\nu)}(X, t; Y, \tau) = \frac{\partial^\nu \Gamma_{\alpha\gamma}(X, t; Y, \tau)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_\nu}}$$

[β désignant le numéro de la suite (k_1, \dots, k_ν) où $\alpha = 1, \dots, N$; $\beta = 1, \dots, n_\nu$; $\gamma = 1, \dots, N$; $X \in E_n$; $Y \in E_n$: ($X \neq Y$); $0 \leq \tau \leq t \leq T$;

Dans l'équation (49) figurent les produits de la matrice $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ par les colonnes conformément à la règle de multiplication

$$(52) \quad (\mathfrak{N}^{(\nu)} F)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^N \mathfrak{N}_{\alpha\beta\gamma}^{(\nu)} F_\gamma; \quad 0 < \nu \leq M-1.$$

Dans le cas particulier $\nu = 0$, on a $\beta = 1$, la matrice $\mathcal{N}^{(0)}$ se réduit à la matrice à deux dimensions :

$$(53) \quad \mathcal{N}^{(0)}(X, t; Y, \tau) = \{ \Gamma_{\alpha\gamma}(X, t; Y, \tau) \}$$

et $\nu^{(0)}(X, t)$ à une colonne des fonctions inconnues.

Le système (49), (50) étant irrésoluble par l'Analyse classique, nous l'étudierons en nous appuyant sur le théorème topologique connu de Schauder [8] : *Si dans un espace de Banach une transformation continue transforme un ensemble fermé et convexe en son sous-ensemble compact, alors dans cet ensemble existe au moins un point invariant relativement à la transformation.*

L'application de ce théorème au système (49), (50) exige des considérations plus délicates, puisque les intégrales qui y figurent sont en général non bornées dans les régions *ouvertes* :

$$(54) \quad [X \in \Omega; 0 < t < T] \text{ resp. } [P \in S; 0 < t < T],$$

en vertu des théorèmes cités antérieurement.

Soit donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de matrices fonctionnelles réelles, continues

$$(55) \quad [\nu^{(0)}(X, t), \nu^{(1)}(X, t), \dots, \nu^{(M-1)}(X, t), \varphi(P, t)]$$

définies dans les régions ouvertes (54) et vérifiant les inégalités

$$(56) \quad \begin{cases} \sup \left\{ t^{\mu+\alpha} \frac{|XP_X|^{0+\beta}}{1+|XP_X|^{0+\beta}} \exp[-b'|XX_0|] |\nu^{(\nu)}(X, t)| \right\} < \infty, \\ \sup \left\{ t^{\mu+\alpha} \exp[-b'|PX_0|] |\varphi(P, t)| \right\} < \infty \\ (\nu = 0, \dots, M-1), \end{cases}$$

où les constantes positives $\mu, \theta, \alpha, \beta, b'$ sont fixées pour tout l'espace Λ de façon qu'on ait

$$(57) \quad \begin{cases} \max \left(\mu_F, \mu_G, 1 - \frac{1-p}{M} \right) < \mu < 1; & p \leq \theta < 1; \\ \mu + \alpha < 1; & \theta + \beta < 1; & b' > b. \end{cases}$$

Nous définirons la norme d'un élément $V = [\nu^{(0)}, \dots, \nu^{(M-1)}, \varphi]$ de l'espace Λ par la somme des bornes supérieures

$$(58) \quad \|V\| = \max_{0 \leq \nu \leq M-1} \sup_{\substack{X \in \Omega \\ 0 < t < T}} \left\{ \frac{t^{\mu+\alpha} |XP_X|^{0+\beta}}{1+|XP_X|^{0+\beta}} \exp[-b'|XX_0|] |\nu^{(\nu)}(X, t)| \right\} \\ + \sup_{\substack{P \in S \\ 0 < t < T}} \left\{ t^{\mu+\alpha} \exp[-b'|PX_0|] |\varphi(P, t)| \right\}.$$

Ensuite nous définirons, comme d'habitude, les opérations linéaires par les formules

$$\begin{aligned} [\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(M-1)}, \varphi] + [\rho^{(0)'}, \dots, \rho^{(M-1)'}, \varphi'] &= [\rho^{(0)} + \rho^{(0)'}, \dots, \rho^{(M-1)} + \rho^{(M-1)'}, \varphi + \varphi'], \\ \lambda[\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(M-1)}, \varphi] &= [\lambda\rho^{(0)}, \dots, \lambda\rho^{(M-1)}, \lambda\varphi] \end{aligned}$$

et la distance entre deux points V et V' par la formule

$$\delta(V, V') = \|V - V'\|.$$

Par conséquent, l'espace Λ est *linéaire* et *normé*. Ensuite on peut montrer sans peine qu'il est complet, c'est-à-dire que la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence, au sens de la norme (58), d'une suite arbitraire de points de l'espace Λ . Cet espace est donc un espace de Banach. Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble \mathcal{E} de tous les points $V = [\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(M-1)}, \varphi]$ vérifiant les inégalités

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{t^\nu}{1 + |\mathbf{X}\mathbf{P}_\mathbf{x}|^2 \varepsilon_\nu} \exp[-b|\mathbf{P}\mathbf{X}_0|] |\rho^{(\nu)}(\mathbf{X}, t)| \leq \rho_1, \\ t^\nu \exp[-b|\mathbf{P}\mathbf{X}_0|] |\varphi(\mathbf{P}, t)| \leq \rho_2 \\ \nu = 0, \dots, M-1, \end{array} \right.$$

où

$$\varepsilon_\nu = 0, \quad \text{si } \nu = 0, 1, \dots, M-2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_\nu = 1, \quad \text{si } \nu = M-1;$$

ρ_1 et ρ_2 sont des constantes positives fixées arbitrairement. L'ensemble \mathcal{E} est évidemment *fermé*. En outre il est *convexe*; en effet, si les deux points V et V' vérifient les inégalités (59), alors leur combinaison linéaire $\lambda V + (1 - \lambda)V'$ vérifie aussi ces inégalités, si le paramètre réel λ varie de 0 à 1.

Eu égard au système d'équations intégrales (49), (50), transformons maintenant l'ensemble \mathcal{E} par les formules

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^{(\nu)}(\mathbf{X}, t) = - \int_0^t \iiint_{\Omega} \mathfrak{N}^{(\nu)}(\mathbf{X}, t; \mathbf{Y}, \tau) F[\mathbf{Y}, \tau, \rho^{(0)}(\mathbf{Y}, \tau), \dots, \rho^{(M-1)}(\mathbf{Y}, \tau)] d\mathbf{Y} d\tau \\ \quad + \int_0^t \iint_S \mathfrak{N}^{(\nu)}(\mathbf{X}, t; \mathbf{Q}, \tau) \varphi(\mathbf{Q}, \tau) d\mathbf{Q} d\tau + \iiint_{\Omega} \mathfrak{N}^{(\nu)}(\mathbf{X}, t; \mathbf{Y}, 0) f(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \\ \quad (\nu = 0, \dots, M-1); \end{array} \right.$$

$$(61) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \psi(\mathbf{P}, t) + \int_0^t \iint_S \mathfrak{N}(\mathbf{P}, t; \mathbf{Q}, \tau) \psi(\mathbf{Q}, \tau) d\mathbf{Q} d\tau \\ & = \Xi(\mathbf{P}, t; \rho^{(0)}, \dots, \rho^{(M-1)}) + G[\mathbf{P}, t, \omega^{(0)}(\mathbf{P}, t), \dots, \omega^{(M-2)}(\mathbf{P}, t)], \end{aligned}$$

en posant

$$(62) \quad \begin{aligned} \Xi(\mathbf{P}, t; \rho^{(0)}, \dots, \rho^{(M-1)}) \\ = \int_0^t \iiint_{\Omega} \mathfrak{N}(\mathbf{P}, t; \mathbf{Y}, \tau) F[\mathbf{Y}, \tau, \rho^{(0)}(\mathbf{Y}, \tau), \dots, \rho^{(M-1)}(\mathbf{Y}, \tau)] d\mathbf{Y} d\tau - f^*(\mathbf{P}, t). \end{aligned}$$

Cherchons une condition suffisante pour que les formules (60), (61) fassent correspondre à tout point arbitraire $V = [\varrho^{(0)}, \dots, \varrho^{(M-1)}, \varphi]$ de l'ensemble \mathcal{E} un point $W = [\varpi^{(0)}, \dots, \varpi^{(M-1)}, \psi]$ du même ensemble. Remarquons donc que, d'après l'hypothèse (3g) et les inégalités (5g), la colonne F vérifie l'inégalité

$$(63) \quad |F[Y, \tau, \varrho^{(0)}(Y, \tau), \dots, \varrho^{(M-1)}(Y, \tau)]| \\ < \{m_F[(M+1) + 2|Y P_Y|^{-r_0}] \rho_1^r + m'_F(1 + |Y P_Y|^{-r})\} \tau^{-\mu} \exp[b|Y X_0|].$$

Il en résulte, en vertu des limitations (14), (21), (23), (32), (5g), que les fonctions transformées (60) vérifient les inégalités

$$(64) \quad |\omega^{(\nu)}(X, t)| < (1 + |X P_X|^{-\theta \varepsilon_\nu}) [C_1(m_F \rho_1^r + m'_F + m_f) + C_2 \rho_2] t^{-\mu} \exp[b|X X_0|],$$

où C_1, C_2 sont des constantes positives indépendantes des fonctions F, f et des constantes ρ_1 et ρ_2 ; nous rappelons que $\varepsilon_\nu = 0$, si $\nu = 0, \dots, M-2$, $\varepsilon_{M-1} = 1$.

Cherchons la limitation de la colonne ψ , donnée par l'équation de Volterra (61). Son noyau, en vertu de l'inégalité (27), vérifie la limitation

$$(65) \quad |N(P, t; Q, \tau)| < \frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^{\mu^*}} \frac{\exp[-k|PQ|]}{|PQ|^{n+M(1-\mu^*)-1-h^*}}$$

aux faibles singularités, si μ^* est choisie à l'intérieur de l'intervalle $(1 - \frac{h^*}{M}, 1)$, où $h^* = \min(h, Mh', h)$. Donc l'équation (61) admet une solution donnée par la formule de Volterra :

$$(66) \quad \psi(P, t) = \Xi^*(P, t) + \int_0^t \iint_S \mathcal{N}(P, t; Q, \tau) \Xi^*(Q, \tau) dQ d\tau,$$

où

$$(67) \quad \Xi^*(P, t) = -{}_2\Xi(P, t; \varrho^{(0)}, \dots, \varrho^{(M-1)}) - {}_2G(P, t, \omega^{(0)}(P, t), \dots, \omega^{(M-2)}(P, t))$$

et la matrice-noyau résolvant \mathcal{N} est une somme de la série des noyaux itérés absolument convergente :

$$(68) \quad \mathcal{N}(P, t; Q, \tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu(P, t; Q, \tau) \quad (N_1 = {}_2N).$$

Le noyau résolvant (68) vérifie une limitation de la forme (65). Dans la suite, en s'appuyant sur les inégalités (63), (65), (46), (45), on trouve

$$(69) \quad |\Xi(P, t; \varrho^{(0)}, \dots, \varrho^{(M-1)})| < c(m_F \rho_1^r + m'_F + m_f) t^{-\mu} \exp[b|P X_0|],$$

$$(70) \quad |G(P, t, \omega^{(0)}(P, t), \dots, \omega^{(M-2)}(P, t))| \\ < c'[m_G(m_F \rho_1^r + m'_F + m_f)^r + \rho_2^r + m'_G] t^{-\mu} \exp[b|P X_0|].$$

Nous en déduisons pour la fonction (66) la limitation suivante :

$$(71) \quad |\psi(P, t)| < \{ C_1 (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f) + C_2 [m_G (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f)^r + \rho_2^r + m'_G] \} t^{-\mu} \exp [b |PX_0|];$$

C_1 et C_2 étant des constantes positives. Remarque faite des inégalités (59), (64), (71), nous concluons que les inégalités

$$(72) \quad \begin{cases} C_1 (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f) + C_2 \rho_2 \leq \rho_1, \\ C_1 (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f) + C_2 [m_G (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f)^r + \rho_2^r + m'_G] \leq \rho_2 \end{cases}$$

présentent une condition suffisante pour que l'ensemble \mathcal{E}' , transformé de l'ensemble \mathcal{E} par les relations (60), (61), fasse partie de l'ensemble \mathcal{E} . Écrivons les inégalités (72) sous la forme équivalente

$$(73) \quad C_1 (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f) + C_2 [m_G (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f)^r + \rho_2^r + m'_G] \leq \rho_2 \leq [\rho_1 - C_1 (m_F \rho_1^r + m'_F + m_f)] C_2^{-1}$$

et remarquons qu'on a supposé $0 \leq r \leq 1$ et que le choix des constantes ρ_1 et ρ_2 est arbitraire. Nous en concluons le fait essentiel qu'on peut toujours choisir les constantes ρ_1 et ρ_2 suffisamment grandes, pour que la condition (72) ou (73) soit vérifiée, quelles que soient les constantes du problème $m_F, m'_F, m_G, m'_G, m_f, b, T$.

Nous démontrerons encore les deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *La transformation définie par les relations (60), (61) est continue dans l'espace Λ .*

Démonstration. — Conformément à la définition de la transformation continue, il faut et il suffit de démontrer que les relations (60), (61) transforment une suite arbitraire $\{V_m\}$ de points $V_m = [\varphi_m^{(0)}, \varphi_m^{(1)}, \dots, \varphi_m^{(M-1)}, \varphi_m]$ de l'ensemble \mathcal{E} , convergente au sens de la norme (58) vers un point $V = [\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(M-1)}, \varphi_0]$ de cet ensemble, en une suite de points $W_m = [\varpi_m^{(0)}, \dots, \varpi_m^{(M-1)}, \psi_m]$ convergente vers un point $W = [\varpi^{(0)}, \dots, \varpi^{(M-1)}, \psi]$, qui correspond au point limite V par les relations (60), (61).

En vertu de la définition (58) de la norme, nous admettons donc la propriété

$$(74) \quad \|V_m - V\| = \max_v \sup \left\{ \frac{t^{\mu+\alpha} |XP_X|^{0+\beta}}{1 + |XP_X|^{0+\beta}} \exp [-b |XX_0|] |\varphi_m^{(v)}(X, t) - \varphi^{(v)}(X, t)| \right\} + \sup \{ t^{\mu+\alpha} \exp [-b |XX_0|] |\varphi_m(P, t) - \varphi(P, t)| \} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

et nous étudierons la norme $\|V_m - W\|$ correspondante.

D'après l'hypothèse (40), les relations (60) et les limitations (9), nous aurons

$$\begin{aligned}
 (75) \quad & | \omega_m^{(\nu)}(X, t) - \omega^{(\nu)}(X, t) | \\
 & < \text{Cte } k_F \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu'}} \iiint_{\Omega} \frac{\sum_{\nu=0}^{M-1} | \rho_m^{(\nu)}(Y, \tau) - \rho^{(\nu)}(Y, \tau) |^{h_F}}{|XY|^{n+M(1-\mu)-1}} e^{-k|XY|} dY \\
 & + \text{Cte} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu'}} \iint_S \frac{|\varphi_m(Q, \tau) - \varphi(Q, \tau)|}{|XQ|^{n+M(1-\mu')-1}} e^{-k|XQ|} dQ \\
 & < \text{Cte} \max_{\nu} \sup \left\{ \frac{\tau^{\mu+\alpha} |Y P_Y|^{0+\beta}}{1 + |Y P_Y|^{0+\beta}} e^{-b' |X_0 Y|} | \rho_m^{(\nu)}(Y, \tau) - \rho^{(\nu)}(Y, \tau) | \right\}^{h_F} \\
 & \times t^{1-\mu'-(\mu+\alpha)h_F} \iiint_{\Omega} \frac{\exp[-k|XY| + h_F b' |X_0 Y|] [1 + |Y P_Y|^{0+\beta}]^{h_F}}{|XY|^{n+M(1-\mu)-1} |Y P_X|^{(0+\beta)h_F}} dY \\
 & + \text{Cte} \sup \{ \tau^{\mu+\alpha} e^{-b' |X_0 Q|} | \varphi_m(Q, \tau) - \varphi(Q, \tau) | \} \\
 & \times t^{1-\mu''-(\mu+\alpha)} \iint_S \frac{\exp[-k|XQ| + b' |X_0 Q|]}{|XQ|^{n+M(1-\mu'')-1}} dQ,
 \end{aligned}$$

où les constantes μ' , k vérifient les inégalités

$$(76) \quad \frac{1}{M} + \frac{(\theta + \beta) h_{\varphi}}{M} < \mu' < 1; \quad k > b' + c.$$

Nous en concluons la limitation suivante :

$$\begin{aligned}
 (77) \quad & t^{\mu+\alpha} |X P_X|^{0+\beta} e^{-b' |X X_0|} | \omega_m^{(\nu)}(X, t) - \omega^{(\nu)}(X, t) | \\
 & < \text{Cte } t^{1-\mu} \max_{\nu} \sup \left\{ \frac{\tau^{\mu+\alpha} |Y P_Y|^{0+\beta}}{1 + |Y P_Y|^{0+\beta}} e^{-b' |X_0 Y|} | \rho_m^{(\nu)}(Y, \tau) - \rho^{(\nu)}(Y, \tau) | \right\}^{h_F} \\
 & + \text{Cte } t^{1-\mu''} \sup \{ \tau^{\mu+\alpha} e^{-b' |X_0 Q|} | \varphi_m(Q, \tau) - \varphi(Q, \tau) | \},
 \end{aligned}$$

où la constante μ'' est choisie dans l'intervalle

$$1 - \frac{\theta + \beta}{M} < \mu'' < 1.$$

Donc, d'après l'hypothèse (74), la borne supérieure du produit (77) tend vers zéro si $m \rightarrow \infty$.

Pour limiter la différence $\psi_m(P, t) - \psi(P, t)$, nous étudierons la fonction (62) d'une façon analogue et nous arriverons à la propriété

$$(78) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \{ | \Xi(P, t, \rho_m^{(0)}, \dots, \rho_m^{(M-1)}) - \Xi(P, t, \rho^{(0)}, \dots, \rho^{(M-1)}) | t^{\mu+\alpha'} e^{-b' |P X_0|} \} = 0.$$

Quant à la fonction $G[P, t, \omega^{(0)}(P, t), \dots, \omega^{(M-2)}(P, t)]$, remarquons que, d'après la limitation (70) au nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre les nombres positifs t_{ε} et R_{ε} tels qu'on ait quel que soit m :

$$(79) \quad t^{\mu+\alpha} e^{-b' |P X_0|} | G[P, t, \omega_m^{(0)}(P, t), \dots, \omega_m^{(M-2)}(P, t)] | < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $0 < t \leq t_{\varepsilon}$; ou bien si $[0 < t < T; |P X_0| \geq R_{\varepsilon}]$.

Pour la portion restante S_ε de la surface S , on peut au nombre ε faire correspondre un indice N_ε tel qu'on ait

$$(80) \quad T^{\mu+\alpha} |G[P, t, \omega_m^{(0)}, \dots, \omega_m^{(M-2)}] - G[P, t, \omega^{(0)}, \dots, \omega^{(M-2)}]| < \varepsilon$$

si $m > N_\varepsilon$; $P \in S_\varepsilon$, $t_\varepsilon < t \leq T$. Il en résulte

$$(81) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \{t^{\mu+\alpha} e^{-b'|PX_0|} |G(P, t, \omega_m^{(0)}, \dots, \omega_m^{(M-2)}) - G(P, t, \omega^{(0)}, \dots, \omega^{(M-2)})|\} = 0.$$

En vertu des propriétés (78) et (81), nous concluons sans peine pour la fonction (66) la propriété

$$(82) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \{t^{\mu+\alpha} e^{-b'|PX_0|} |\psi_m(P, t) - \psi(P, t)|\} = 0.$$

En rapprochant les résultats (77) et (82) on conclut que

$$(83) \quad \lim_{m \rightarrow 0} \|W_m - W\| = 0,$$

le lemme 1 est donc démontré.

LEMME 2. — *L'ensemble \mathcal{E}' transformé de l'ensemble \mathcal{E} par les relations (60), (61) est compact.*

Démonstration. — Par définition, l'ensemble \mathcal{E}' est compact si de toute suite de ses points on peut extraire une suite partielle convergente au sens de la norme (58). Soit donc une suite arbitraire $\{W_m\}$ de points

$$(84) \quad W_m = [\omega_m^{(0)}(X, t), \dots, \omega_m^{(M-1)}(X, t), \psi_m(P, t)]$$

de l'ensemble \mathcal{E}' . En vertu des limitations (64) et (71), nous pouvons à tout nombre $\varepsilon > 0$ faire correspondre : 1° un ensemble de surface S_ε ; 2° un nombre $t_\varepsilon > 0$ suffisamment petit; 3° un nombre $R_\varepsilon > 0$ suffisamment grand, pour qu'on ait les inégalités

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|XP_X|^{0+\beta}}{1+|XP_X|^{0+\beta}} t^{\mu+\alpha} \exp[-b'|XX_0|] |\omega_m^{(\nu)}(X, t)| < \frac{\varepsilon}{4} \\ (\nu = 0, 1, \dots, M-1, m = 1, 2, \dots); \\ t^{\mu+\alpha} \exp[-b'|PX_0|] |\psi_m(P, t)| < \frac{\varepsilon}{4} \end{array} \right.$$

dans les trois régions définies par les conditions

$$(86) \quad [X \in (SS_\varepsilon); 0 < t < T]; [X \in \Omega; 0 < t < t_\varepsilon]; [|XX_0| \geq R_\varepsilon; 0 < t < T]$$

respectivement dans les deux régions suivantes :

$$(87) \quad [P \in S; 0 < t < t_\varepsilon]; [|PX_0| > R_\varepsilon, 0 < t \leq T];$$

on a désigné par (SS_ε) la partie du domaine Ω située entre les surfaces S et S_ε . Dans la région bornée et fermée $[X \in \Omega - (SS_\varepsilon); |XX_0| \leq R_\varepsilon; t_\varepsilon \leq t \leq T]$ complémentaire à la somme des régions (86) les fonc-

tions $\omega_m(X, t)$ sont équibornées, en vertu des limitations (64) et également continues, puisqu'elles vérifient une condition de Hölder, d'après les théorèmes 1, 3 et 6. Dans la région bornée et fermée $[|PX_0| \leq R_\varepsilon; t_\varepsilon \leq t \leq T]$, complémentaire à la région (87), les fonctions $\psi_m(P, t)$ sont aussi équibornées et également continues, en vertu des théorèmes 1, 3, 5 et 6. Nous en concluons, d'après un théorème connu d'Arzelà, que de la suite de points (84) on peut extraire une suite partielle de points $W_{k_m} = [\omega_{k_m}^{(M-1)}, \dots, \omega_{k_m}^{(M-1)}, \psi_m]$ dont les fonctions composantes convergent uniformément au sens habituel dans les régions complémentaires précédemment précisées. Nous pouvons donc au nombre $\varepsilon > 0$ faire correspondre un indice N_ε tel qu'on ait

$$(88) \quad \begin{cases} T^{\mu+\alpha} |\omega_{k_m}^{(v)}(X, t) - \omega_{k_s}^{(v)}(X, t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ T^{\mu+\alpha} |\psi_{k_m}(P, t) - \psi_{k_s}(P, t)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

dans les régions complémentaires, si $m, s \geq N_\varepsilon$. Nous en concluons, d'après la définition de la norme (58) et les inégalités (85), (88), qu'on aura

$$(89) \quad \|W_{k_m} - W_{k_s}\| < \varepsilon, \quad \text{si } m, s \geq N_\varepsilon,$$

c'est-à-dire la condition de Cauchy. L'espace Λ étant complet, l'ensemble \mathcal{E}' est donc compact.

En s'appuyant sur les propriétés démontrées et sur le théorème cité de Schauder, nous concluons l'existence dans l'ensemble \mathcal{E} d'au moins un point

$$V^* = [\check{\rho}^{(0)}, \check{\rho}^{(1)}, \dots, \check{\rho}^{(M-1)}, \varphi^*]$$

invariant relativement à la transformation (60), (61), donc une solution du système d'équations intégrales (49), (50).

Or, en vertu de l'égalité (51) et les propriétés citées des potentiels, on a les relations [voir (36)]

$$\check{\rho}^{(v)}(X, t) = D^v \check{\rho}^{(0)}(X, t),$$

donc les fonctions trouvées $\check{\rho}^{(0)}(X, t)$, $\varphi^*(P, t)$ forment une solution du système (47), (48) d'équations intégrodifférentielles. Observons maintenant que la colonne

$$\Phi(Y, \tau) = F[Y, \tau, \check{\rho}^{(0)}(Y, t), (D_Y^1 \check{\rho}^{(0)}), \dots, (D_Y^{M-1} \check{\rho}^{(0)})],$$

en vertu de l'hypothèse (40) et les propriétés citées des intégrales figurant dans la somme (47), vérifie une condition de Hölder relativement à la variable Y dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$ pour $0 < \tau < T$. Donc la colonne $\check{\rho}^{(0)}(X, t)$ vérifie le système

$$\Psi \check{\rho}^{(0)} = F[X, t, \check{\rho}^{(0)}, (D^1 \check{\rho}^{(0)}), \dots, (D^{M-1} \check{\rho}^{(0)})]$$

en tout point X du domaine Ω , pour $0 < t < T$. Cette colonne vérifie évidemment la condition à la frontière (42) et la condition initiale (43). Nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Si les coefficients du système (1) et les colonnes fonctionnelles données F, G, g, f du problème vérifient les conditions I, II, III, IV, si la frontière S du domaine Ω vérifie les conditions de Liapounoff et l'inégalité (10), alors il existe au moins une colonne des fonctions $u(X, t)$ qui vérifient : 1° le système quasi linéaire (35) en tout point [$X \in \Omega, 0 < t < T$]; 2° la condition à la frontière (42); 3° la condition initiale (43), quelles que soient les constantes données du problème.*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. PETROVSKY, *Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen* (Bull. Univ. Moscou, fasc. 7, 1938).
- [2] W. POGORZELSKI, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles* (Ricerche di Matem., Napoli, t. 7, 1958).
- [3] W. POGORZELSKI, *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles* (Mathem. Scand., 1959).
- [4] W. POGORZELSKI, *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique* (Ann. Éc. Norm. Sup., Paris, t. 76, 1959).
- [5] W. POGORZELSKI, *Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique* (Ricerche di Matem., Napoli, t. 10, 1961).
- [6] A. PISKOREK, *Propriété limite de la dérivée transversale d'un potentiel relatif au système parabolique* (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 254, 1962, p. 2283 ou Ricerche di Matem., Napoli, 1962).
- [7] A. PISKOREK, *Sur la continuité régulière d'une intégrale concernant la dérivée transversale du potentiel relatif au système parabolique* [Ann. Pol. Mathem. sous presse].
- [8] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (Studia Mathematica, 1930).