ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NICOLAS OECONOMIDIS

Sur la convergence relative d'une suite d'ensembles et de leurs applications sur les suites de fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 2 (1963), p. 107-133
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_2_107_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 108 à 133.

SUR LA CONVERGENCE RELATIVE D'UNE SUITE D'ENSEMBLES ET DE LEURS APPLICATIONS SUR LES SUITES DE FONCTIONS [1]

PAR M. NICOLAS ŒCONOMIDIS.

INTRODUCTION.

Dans le présent article, consacré à l'étude des suites d'ensembles et des suites de fonctions, nous introduisons la notion de la convergence relative d'une suite d'ensembles, et nous donnons des applications de cette notion.

Dans la première partie, nous donnons d'abord, la définition de la convergence relative d'une suite d'ensembles, situés dans un espace $\mathcal{L}^*$, et nous démontrons que cette notion est un invariant des transformations continues Ensuite, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes, afin que la limite relative d'une suite d'ensembles, situés dans un espace métrique, soit un ensemble borné, compact, fermé ou ouvert.

Dans la seconde partie, nous donnons quelques applications de la notion de la convergence relative aux suites de fonctions, définies dans un espace métrique et dont les valeurs appartiennent aussi à un espace métrique.

(1) Les résultats principaux de cet article ont été exposés dans deux Notes aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 2555-2557 et t. 256, 1963, p. 353-356.

Nous trouvons ainsi des conditions nécessaires et suffisantes, afin qu'une suite de fonctions ait comme limite une fonction bornée, ou une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz d'ordre p $(0 < p \leqq 1)$.

Enfin, nous donnons quelques propositions, concernant les suites des nombres dérivés d'une suite de fonctions réelles.

PREMIÈRE PARTIE.

Convergence relative d'une suite d'ensembles.

1. Définitions. — Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles non vides, situés dans un espace [2] $\mathcal{L}^\star$, et $G = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ leur produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble de fonctions f, définies sur l'ensemble de nombres naturels Φ, de façon qu'on ait

$$f(n) \in A_n \qquad \text{pour tout} \quad n \in \Phi.$$

Nous dirons qu'un élément $f \in G$ est *convergent*, quand la suite $\{f(n)\}$ est convergente; dans ce cas, nous posons, pour abréger,

$$\lim_{n=\infty} f(n) = \hat{f}.$$

Nous posons aussi

$$G^{\to}[A_n] = \{f : f \in G, f \text{ convergent}\}$$

et

$$\hat{G}[A_n] = \{\hat{f} : f \in G^{\to}[A_n]\}.$$

Nous donnons maintenant la définition suivante :

Définition A. — *On dit que la suite* $\{A_n\}$ *converge vers* A, *relativement à* H, *et l'on écrit* $\underset{\to}{(H)} \lim_{n=\infty} A_n = A$, *si :*

1° $H \subset G^{\to}[A_n]$;

2° $\bigcup_{f \in H} f(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

3° $A = \{\hat{f} : f \in H\}$.

Nous appellerons l'ensemble A limite de la suite $\{A_n\}$ relativement à H, ou plus simple, limite relative de $\{A_n\}$.

Il est évident que, étant donnée la suite $\{A_n\}$ et l'ensemble H, d'après la définition A, la limite relative A est unique.

---

(2) Casimir Kuratowski, *Topologie*, I, Warszawa, 1952, p. 83.

Un cas spécial de la convergence relative est le suivant :

Soit $\{ F_n(x) \}$ une suite de fonctions, définies sur un ensemble E, et dont les valeurs appartiennent à un espace $\mathcal{L}^\star$, et supposons que

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \text{pour chaque} \quad x \in E;$$

cela posé, on prouve aussitôt que $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} F_n(E) = F(E)$, où H est l'ensemble des éléments

$$(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n(E),$$

pour tous les éléments $x \in E$.

On prouve aussi facilement que :

1.1. $\underset{\longrightarrow}{(G^{\rightarrow}[A_n])} \lim\limits_{n=\infty} A_n = \hat{G}[A_n]$.

En effet, il est évident que les conditions 1° et 3° de la définition A sont valables; nous démontrerons que la condition 2° de A est aussi valable. Si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, il existe un indice p, tel que $x \in A_p$. Considérons maintenant un élément quelconque $f \in G^{\rightarrow}[A_n]$; si $f(p) = x$, alors

$$(1) \qquad x \in \bigcup_{f \in G^{\rightarrow}[A_n]} f(\Phi);$$

si $f(p) \neq x$, on a aussi (1), car l'élément $f_1 \in G$, pour lequel on a

$$f_1(n) = f(n) \quad \text{pour } n \neq p \qquad \text{et} \qquad f_1(p) = x,$$

appartient à $G^{\rightarrow}[A_n]$. Il en résulte que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{f \in G^{\rightarrow}[A_n]} f(\Phi)$$

et, puisque la relation

$$\bigcup_{f \in G^{\rightarrow}[A_n]} f(\Phi) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

est évidente, on prouve que la condition 2° de A est valable.

La proposition suivante montre que la notion donnée par A est un invariant des transformations continues :

1.2. *Si :* (i) $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A$; (ii) $A_n \subset X$ *pour tout* $n \in \Phi$, *où* X *est un espace* $\mathcal{L}^\star$, *et* (iii) φ *est une transformation continue de l'espace* X *en l'espace* Y *qui est aussi un espace* $\mathcal{L}^\star$, *alors*

$$\underset{\longrightarrow}{(\varphi(H))} \lim_{n=\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A).$$

En effet, φ étant continue, on a

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \varphi(f(n)) = \varphi(\hat{f}) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H};$$

il en résulte que, si

$$\varphi(f) = (\varphi(f(1)), \varphi(f(2)), \ldots, \varphi(f(n)), \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \varphi(\mathrm{A}_n)$$

et

$$(2) \qquad \varphi(\mathrm{H}) = \{ \varphi(f) : f \in \mathrm{H} \},$$

on a

$$\varphi(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}^{\rightarrow}[\varphi(\mathrm{A}_n)],$$

c'est-à-dire la condition 1° de la définition A est valable.

Mais, puisque

$$\bigcup_{f \in \mathrm{H}} f(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n,$$

on a

$$\bigcup_{f \in \mathrm{H}} \varphi(f(\Phi)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(\mathrm{A}_n)$$

ou bien

$$\bigcup_{g \in \varphi(\mathrm{H})} g(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(\mathrm{A}_n)$$

et, par suite, la condition 2° de A est aussi valable.

Enfin, en vertu de (1) et (2), on a

$$\left\{ \lim_{n=\infty} g(n) : g \in \varphi(\mathrm{H}) \right\} = \{ \varphi(\hat{f}) : f \in \mathrm{H} \} = \varphi(\mathrm{A})$$

et, par suite, la condition 3° de A est valable.

2. Suites d'ensembles dans un espace métrique. — Soit $\{ \mathrm{A}_n \}$ une suite d'ensembles non vides, situés dans un espace métrique X; puisque l'espace métrique X peut être considéré comme espace $\mathcal{L}^{\star}$, en convenant que la formule

$$p = \lim_{n=\infty} p_n \qquad \text{signifie que} \quad \lim_{n=\infty} |pp_n| = 0,$$

la définition A peut être valable dans le cas où X est un espace métrique.

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que les ensembles considérés sont sous-ensembles de l'espace métrique X.

On prouve facilement que [3] :

2.1. *Si* $A_n \subset X$ *pour tout* $n \in \Phi$ *et* $\hat{G}[A_n] \neq \emptyset$, *alors*

$$\hat{G}[A_n] = \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n.$$

En effet, si $x \in \hat{G}[A_n]$, il existe un $f \in G^{\rightarrow}[A_n]$, tel qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} f(n) = x$$

et, puisque $f(n) \in A_n$ pour tout $n \in \Phi$, on a $x \in \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n$; il en résulte que

$$(1) \qquad \hat{G}[A_n] \subset \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n.$$

Inversement, si $x \in \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n$, il existe une suite $\{x_n\}$, telle que $x = \lim_{n=\infty} x_n$ et $x_n \in A_n$ pour tout $n \in \Phi$; mais, si l'on pose $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, il est évident que $f \in G^{\rightarrow}[A_n]$, et, par suite, $x \doteq \hat{f} \in \hat{G}[A_n]$; il en résulte que

$$(2) \qquad \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n \subset \hat{G}[A_n].$$

Les relations (1) et (2) donnent l'égalité

$$\hat{G}[A_n] = \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n.$$

Si $(\underset{\rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A$, on a évidemment $A \subset \hat{G}[A_n]$; on a donc, d'après 2.1, la proposition suivante :

2.2. *Si* $(\underset{\rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A$, *où* $A_n \subset X$ *pour tout* $n \in \Phi$, *alors*

$$A \subset \operatorname*{Li}_{n=\infty} A_n.$$

3. Convergence relative pseudo-uniforme et uniforme. — Considérons une suite d'ensembles non vides $\{A_n\}$, situés dans l'espace métrique X; nous donnons la définition suivante :

Définition B. — *On dit que la suite* $\{A_n\}$ *converge pseudo-uniformément vers* A, *relativement à* H, *si :*

(i) $(\underset{\rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A$;

(ii) *s'il existe un nombre* $\varepsilon > 0$ *et un indice* N, *tels qu'on ait*

$$|f(N)\hat{f}| < \varepsilon \qquad \textit{pour chaque} \quad f \in H.$$

[3] *Loc. cit.*, p. 241.

Si, de plus, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ *il existe un indice* $N(\varepsilon)$, *tel qu'on ait*

$$|f(n)\hat{f}| < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad n > N(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \textit{pour tout} \quad f \in H,$$

on dit que la suite $\{A_n\}$ *converge uniformément vers* A, *relativement à* H.

Il est évident que la convergence relative uniforme entraîne la convergence relative pseudo-uniforme, mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple. — Considérons comme espace X l'espace $R_2 = R_1 \times R_1$, où R_1 est l'ensemble de tous les nombres réels, métrisé par la formule

$$|z_1 z_2| = [\,|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2]^{\frac{1}{2}},$$

où $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in R_2$, et posons

$$z_n^t = \left(\frac{1}{n}, t\right) \qquad \text{et} \qquad z_n = \left(\frac{1}{n}, n\right)$$

pour tout $n \in \Phi$, et pour tout t satisfaisant à la double inégalité $0 \leqq t \leqq 1$; nous posons aussi

$$\begin{aligned} A_n &= \{z_n^t : 0 \leqq t \leqq 1\} \cup (z_n), \\ H_1 &= \{(z_1^t, z_2^t, \ldots, z_n^t, \ldots) : 0 \leqq t < 1\}, \\ H_2 &= \{(z_1, z_2, \ldots, z_p^t, z_{p+1}^t, \ldots) : p \in \Phi \text{ et } t = 1\}, \end{aligned}$$

et

$$H = H_1 \cup H_2.$$

Il est évident que, pour tout

$$f = (z_1^t, z_2^t, \ldots, z_n^t, \ldots) \in H_1,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} f(n) = (0, t);$$

on a, de même,

$$\lim_{n=\infty} f(n) = (0, 1)$$

pour tout

$$f = (z_1, z_2, \ldots, z_p^t, z_{p+1}^t, \ldots) \in H_2;$$

il en résulte que

$$H \subset G^{\rightarrow}[A_n].$$

D'autre part, on trouve aussitôt que

$$\bigcup_{f \in H} f(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

et, par suite,

$$(H) \lim_{\substack{\rightarrow \\ n=\infty}} A_n = A, \qquad \text{où} \quad A = \{(0, t) : 0 \leqq t \leqq 1\}.$$

Cette convergence relative n'est pas uniforme, car si $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel m, tel qu'on ait

$$\frac{1}{m^2} + (m-1)^2 > \varepsilon^2,$$

on a donc

$$\left|(0, 1)\left(\frac{1}{m}, m\right)\right| > \varepsilon$$

et, puisque

$$\left|(0, 1)\left(\frac{1}{n}, n\right)\right| < \left|(0, 1)\left(\frac{1}{n+1}, n+1\right)\right|$$

pour tout $n \in \Phi$, on tire

$$\left|(0, 1)\left(\frac{1}{n}, n\right)\right| > \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq m\,;$$

il en résulte que, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il n'existe aucun indice N, tel qu'on ait

$$|f(n)\hat{f}| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n > \mathrm{N} \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } f \in \mathrm{H},$$

c'est-à-dire la convergence relative considérée n'est pas uniforme.

Au contraire, cette convergence relative est pseudo-uniforme, car si l'on pose, par exemple, $\varepsilon = 1 + |(0, 1)\, z_3|$ et $\mathrm{N} = 3$, on prouve aussitôt que

$$|f(\mathrm{N})\hat{f}| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H}.$$

Cet exemple montre que la convergence relative pseudo-uniforme n'entraîne pas la convergence relative uniforme.

Nous donnons encore un exemple, par lequel on conclut que la notion de la convergence relative pseudo-uniforme est différente de la notion, qui est donnée par la définition A.

Exemple. — Nous posons

$$a_{mn} = \begin{cases} m & \text{si} \quad n \leqq m, \\ \dfrac{n+1}{n} & \text{si} \quad n > m, \end{cases}$$

où $m, n \in \Phi$; il est évident que

$$\lim_{n=\infty} a_{mn} = 1 \qquad \text{pour tout} \quad m \in \Phi$$

Considérons maintenant la suite $\{\mathrm{A}_n\}$, où

$$\mathrm{A}_n = \{a_{mn} : m = 1, 2, \ldots\}$$

et l'ensemble

$$\mathrm{H} = \{(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots) : m = 1, 2, \ldots\};$$

on prouve aussitôt que

$$(1) \qquad (\underset{\rightarrow}{\mathrm{H}}) \lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A},$$

où $\mathrm{A} = (1)$. Nous démontrerons maintenant que la convergence relative (1) n'est pas pseudo-uniforme.

En effet, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel $p > \varepsilon$; par suite, pour chaque $n \in \Phi$, on a

$$|a_{n+p+1,n} - 1| = n + p > \varepsilon;$$

il en résulte qu'il n'existe aucun indice N tel qu'on ait

$$|f(\mathrm{N})\hat{f}| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H}$$

et, par suite, la convergence relative considérée n'est pas pseudo-uniforme.

4. Suites d'ensembles, dont la limite relative est un ensemble borné. — Nous désignons par X^π la famille de tous les ensembles bornés, situés dans l'espace métrique X; d'après cette notation, nous démontrerons quelques propositions, qui sont de conditions nécessaires et suffisantes afin que la limite d'une suite d'ensembles, situés dans l'espace métrique X, soit un ensemble borné :

4.1. *Soit* $(\underset{\rightarrow}{\mathrm{H}}) \lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$, *où* $\mathrm{A}_n \in \mathrm{X}^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$; *afin que* $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$, *il faut et il suffit que la suite* $\{\mathrm{A}_n\}$ *converge pseudo-uniformément vers* A *relativement à* H.

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet, la suite $\{\mathrm{A}_n\}$ converge pseudo-uniformément vers A, relativement à H, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et un indice N, tels qu'on ait

$$|f(\mathrm{N})\hat{f}| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H}.$$

Il en résulte que

$$\hat{f} \in \mathrm{U}(f(\mathrm{N}), \varepsilon) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H},$$

par suite

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{U}(\mathrm{A}_\mathrm{N}, \varepsilon)$$

et, puisque A_N est borné, on a $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$.

(ii) La condition est nécessaire :

Soit A_N un ensemble quelconque de la suite $\{\mathrm{A}_n\}$; puisque $\mathrm{A}_\mathrm{N}, \mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$, le nombre

$$d(\mathrm{A}_\mathrm{N}, \mathrm{A}) = \sup\{|xy| : x \in \mathrm{A}_\mathrm{N}, y \in \mathrm{A}\}$$

est fini.

Si l'on prend maintenant un nombre ε supérieur à $d(\mathrm{A}_\mathrm{N}, \mathrm{A})$, on aura

$$|f(\mathrm{N})\hat{f}| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H};$$

il en résulte que la convergence relative $(\underset{\to}{\mathrm{H}}) \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ est pseudo-uniforme.

Dans la proposition précédente, nous avons supposé que $\mathrm{A}_n \in \mathrm{X}^\pi$ pour tout $n \in \Phi$, c'est-à-dire cette proposition donne une condition suffisante et nécessaire, afin qu'une suite d'ensembles *bornés* ait comme limite relative un ensemble borné; dans les propositions suivantes on ne suppose pas que les A_n sont bornés, c'est-à-dire elles sont de conditions nécessaires et suffisantes, afin qu'une suite d'ensembles, *bornés ou non*, ait comme limite relative un ensemble borné :

4.2. *Soit* $(\underset{\to}{\mathrm{H}}) \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$; *afin que* $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\mathrm{M} > 0$, *tel que pour chaque couple d'éléments* $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$ *existe un indice* $\mathrm{N}(f_1, f_2)$, *de façon qu'on ait*

$$|f_1(n) f_2(n)| \leqq \mathrm{M} \qquad \textit{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f_1, f_2).$$

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet,

$$|f_1(n) f_2(n)| \leqq \mathrm{M} \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f_1, f_2),$$

on a

$$|\hat{f}_1 \hat{f}_2| \leqq \mathrm{M}; \tag{1}$$

la relation (1) étant valable pour chaque couple d'éléments $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$, on prouve que

$$d(\mathrm{A}) \leqq \mathrm{M},$$

où $d(\mathrm{A})$ est le diamètre de A et, par suite, $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$.

(ii) La condition est nécessaire :

En effet, A étant borné, nous posons

$$\mathrm{M} = d(\mathrm{U}(\mathrm{A}, 1)).$$

Si f_1, f_2 sont deux éléments quelconques de H, il existe un indice $\mathrm{N}(f_1, f_2)$, tel qu'on ait

$$|f_1(n) \hat{f}_1| < 1 \qquad \text{et} \qquad |f_2(n) \hat{f}_2| < 1$$

ou bien

$$f_1(n) \in \mathrm{U}(\mathrm{A}, 1) \qquad \text{et} \qquad f_2(n) \in \mathrm{U}(\mathrm{A}, 1)$$

pour tout $n > \mathrm{N}(f_1, f_2)$; il en résulte que

$$|f_1(n) f_2(n)| \leqq \mathrm{M} \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f_1, f_2).$$

4.3. *Soit* $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})} \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$; *afin que* $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\mathrm{M} > 0$, *tel que pour chaque* $f \in \mathrm{H}$ *existe un indice* $\mathrm{N}(f)$, *de façon qu'on ait*

$$|x_0 f(n)| \leqq \mathrm{M} \qquad \textit{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f),$$

où x_0 *est un point fixe du* X.

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet,

$$|x_0 f(n)| \leqq \mathrm{M} \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathrm{N}(f),$$

on a

$$|x_0 \hat{f}| \leqq \mathrm{M}; \tag{1}$$

la relation (1) étant valable pour chaque $f \in \mathrm{H}$, il est évident que

$$d(x_0, \mathrm{A}) \leqq \mathrm{M}$$

et, par suite, $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$.

(ii) La condition est nécessaire :

En effet, A étant borné, nous posons

$$\mathrm{M} = d(x_0, \mathrm{U}(\mathrm{A}, 1)).$$

Si f est un élément quelconque de H, il existe un indice $\mathrm{N}(f)$, tel qu'on ait

$$|f(n) \hat{f}| < 1$$

ou bien

$$f(n) \in \mathrm{U}(\mathrm{A}, 1) \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f);$$

il en résulte que

$$|x_0 f(n)| \leqq \mathrm{M} \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f).$$

Si $f \in \mathrm{G}^{\rightarrow}[\mathrm{A}_n]$, nous désignons par $\mathrm{N}(f, h)$ le plus petit indice pour lequel on a

$$|f(n) \hat{f}| < h \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq \mathrm{N}(f, h),$$

où h est un nombre positif donné.

D'après cette notation, nous démontrerons les deux propositions suivantes :

4.4. *Soit* $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})} \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$; *afin que* $\mathrm{A} \in \mathrm{X}^\pi$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\mathrm{M} > 0$, *tel que pour chaque couple d'éléments* $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$ *existe au moins un couple d'indices* p, q, *où* $p \geqq \mathrm{N}(f_1, h)$ *et* $q \geqq \mathrm{N}(f_2, h)$ (*h étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* $f \in \mathrm{H}$), *de façon qu'on ait*

$$|f_1(p) f_2(q)| \leqq \mathrm{M}.$$

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet, $p \geqq N(f_1, h)$, $q \geqq N(f_2, h)$ et

$$|f_1(p) f_2(q)| \leqq M,$$

on a

$$|\hat{f}_1 \hat{f}_2| \leqq |f_1(p) \hat{f}_1| + |f_2(q) \hat{f}_2| + |f_1(p) f_2(q)|$$

ou bien

$$(1) \qquad |\hat{f}_1 \hat{f}_2| < 2h + M.$$

La relation (1) est valable pour tout couple d'éléments $f_1, f_2 \in H$, et puisque h est le même pour chaque $f \in H$, on prouve que

$$d(A) \leqq 2h + M$$

et, par suite, $A \in X^\pi$.

(ii) La condition est nécessaire :

En effet, A étant borné, nous posons

$$M = d(U(A, h)),$$

où h est un nombre positif quelconque.

Cela posé, il est évident que, pour tout couple d'éléments $f_1, f_2 \in H$, il existe au moins un couple d'indices p, q, où $p \geqq N(f_1, h)$ et $q \geqq N(f_2, h)$, de façon qu'on ait

$$|f_1(p) f_2(q)| \leqq M.$$

4.5. *Soit* $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A$; *afin que* $A \in X^\pi$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque* $f \in H$ *existe au moins un indice* $p \geqq N(f, h)$ (*h étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* $f \in H$), *de façon qu'on ait*

$$|x_0 f(p)| \leqq M,$$

où x_0 *est un point fixe du* X.

(i) La condition est suffisante :

En effet, puisque $p \geqq N(f, h)$ et

$$|x_0 f(p)| \leqq M,$$

on a

$$|x_0 \hat{f}| \leqq |f(p) \hat{f}| + |x_0 f(p)|$$

ou bien

$$(1) \qquad |x_0 \hat{f}| < h + M.$$

La relation (1) est valable pour chaque $f \in H$, et puisque h est le même pour tout $f \in H$, on a

$$d(x_0, A) \leqq h + M$$

et, par suite, $A \in X^\pi$.

(ii) La condition est nécessaire :

En effet, A étant borné, nous posons $M = d(x_0, U(A, h))$, où h est un nombre positif; cela posé, il est évident que, pour tout $f \in H$, il existe au moins un indice $p \geqq N(f, h)$, de façon qu'on ait

$$|x_0 f(p)| \leqq M.$$

5. Suites d'ensembles bornés qui convergent uniformément. — Si $(\underset{\rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A$ et si, de plus,

$$A_n = \{f(n) : f \in H\} \qquad \text{pour tout} \quad n \in \Phi,$$

on écrit

$$(\underset{\Rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A.$$

D'après cette notation, nous démontrerons que :

5.1. *Si* $A_n \in X^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$, $(\underset{\Rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A$, *et si cette convergence relative est uniforme, alors* (4)

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0.$$

Puisque la suite $\{A_n\}$ converge uniformément vers A, relativement à H, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un indice $N(\varepsilon)$, tel qu'on ait

$$|f(n)\hat{f}| < \varepsilon$$

ou bien

$$f(n) \in U(\hat{f}, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \hat{f} \in U(f(n), \varepsilon)$$

pour chaque $f \in H$ et pour tout $n > N(\varepsilon)$; il en résulte que

$$A_n \subset U(A, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad A \subset U(A_n, \varepsilon)$$

ou bien

$$\operatorname{dist}(A_n, A) < 2\varepsilon$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$ et, par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0.$$

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

5.2. *Si* $A_n \in 2^X$ *pour tout* $n \in \Phi$, *où* 2^X *est la famille de tous les ensembles fermés, bornés et non vides, situés dans l'espace métrique* X, $(\underset{\Rightarrow}{H}) \lim_{n=\infty} A_n = A$, *et si cette convergence relative est uniforme, alors*

$$\lim_{n=\infty} A_n = A,$$

(4) *Loc. cit.*, p. 106.

en convenant que

$$\left\{ \lim_{n=\infty} A_n = A \right\} \equiv \left\{ \lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0 \right\}.$$

Nous démontrerons maintenant que :

5.3. *Si* $A_n \in X^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$, $A \in X^\pi$ *et* $\lim\limits_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0$, *alors*

(i) $\lim\limits_{n=\infty} d(A_n) = d(A)$;

(ii) $\lim\limits_{n=\infty} d(x_0, A_n) = d(x_0, A)$,

pour tout $x_0 \in X$.

Puisque, en effet, $\lim\limits_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0$, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un indice $N(\varepsilon)$, tel qu'on ait

$$\operatorname{dist}(A_n, A) < \varepsilon$$

ou bien

$$(1) \qquad A_n \subset U(A, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad A \subset U(A_n, \varepsilon)$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$.

Les relations (1) donnent respectivement les relations

$$d(A_n) \leqq d(U(A, \varepsilon)) \qquad \text{et} \qquad d(A) \leqq d(U(A_n, \varepsilon))$$

ou bien

$$d(A_n) \leqq 2\varepsilon + d(A) \qquad \text{et} \qquad d(A) \leqq 2\varepsilon + d(A_n),$$

d'où l'on tire

$$|d(A) - d(A_n)| \leqq 2\varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n > N(\varepsilon);$$

il en résulte que

$$\lim_{n=\infty} |d(A) - d(A_n)| = 0$$

et, par suite,

$$\lim_{n=\infty} d(A_n) = d(A).$$

On sait que

$$d(x_0, A_n) = \operatorname{dist}(x_0, A_n) \qquad \text{et} \qquad d(x_0, A) = \operatorname{dist}(x_0, A);$$

il en résulte que

$$d(x_0, A_n) \leqq d(x_0, A) + \operatorname{dist}(A, A_n)$$

et

$$d(x_0, A) \leqq d(x_0, A_n) + \operatorname{dist}(A, A_n),$$

d'où l'on tire

$$|d(x_0, A_n) - d(x_0, A)| \leqq \operatorname{dist}(A_n, A),$$

et, puisque

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} | d(x_0, A_n) - d(x_0, A) | = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} d(x_0, A_n) = d(x_0, A).$$

A l'aide de cette proposition, on prouve que :

5.4. *Si* $A_n \in R_1^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$, $A \in R_1^\pi$, *où* R_1^π *est la famille de tous les ensembles bornés et non vides, situés dans l'ensemble* R_1 *de tous les nombres réels, et si* $\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0$, *alors :*

(i) $\lim_{n=\infty} \sup \{ x : x \in A_n \} = \sup \{ x : x \in A \}$;

(ii) $\lim_{n=\infty} \inf \{ x : x \in A_n \} = \inf \{ x : x \in A \}$.

On voit d'abord que

$$A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R_1^\pi;$$

car, si $x_0 \in X$, d'après 5.3, on a

$$\lim_{n=\infty} d(x_0, A_n) = d(x_0, A);$$

par suite, il existe un nombre $M > 0$, tel qu'on ait

$$d(x_0, A_n) \leqq M \qquad \text{pour tout} \quad n \in \Phi$$

ou bien

$$| x_0 x | \leqq M \qquad \text{pour tout} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

d'où l'on prouve que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R_1^\pi$ et, puisque $A \in R_1^\pi$, on a

$$A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R_1^\pi.$$

On prend maintenant deux nombres a, b, où a est inférieur à la borne inférieure de $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et b supérieur à la borne supérieure de $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; il est évident que

$$(1) \qquad \begin{cases} \sup \{ x : x \in A_n \} = d(a, A_n) + a, \\ \inf \{ x : x \in A_n \} = b - d(b, A_n), \end{cases}$$

pour tout $n \in \Phi$, et

$$(2) \qquad \begin{cases} \sup \{ x : x \in A \} = d(a, A) + a, \\ \inf \{ x : x \in A \} = b - d(b, A). \end{cases}$$

Mais, d'après 5.3,

(3) $$\lim_{n=\infty} d(a, A_n) = d(a, A) \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} d(b, A_n) = d(b, A);$$

les relations (1), (2) et (3) donnent les relations (i) et (ii).

Les deux propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions 5.1, 5.3 et 5.4 :

5.5. *Si* $A_n \in X^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$, *et si la convergence relative* $\underset{\Rightarrow}{(H)} \lim_{n=\infty} A_n = A$ *est uniforme, alors :*

(i) $\lim_{n=\infty} d(A_n) = d(A)$;

(ii) $\lim_{n=\infty} d(x_0, A_n) = d(x_0, A)$,

où x_0 *est un point quelconque du* X.

5.6. *Si* $A_n \in R_1^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$, *et si la convergence relative* $\underset{\Rightarrow}{(H)} \lim_{n=\infty} A_n = A$ *est uniforme, alors :*

(i) $\lim_{n=\infty} \sup \{ x : x \in A_n \} = \sup \{ x : x \in A \}$;

(ii) $\lim_{n=\infty} \inf \{ x : x \in A_n \} = \inf \{ x : x \in A \}$.

6. Convergence relative pseudo-continue. — Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que le produit cartésien

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} A_n,$$

où $\{ A_n \}$ est une suite d'ensembles non vides, situés dans l'espace métrique X, est aussi un ensemble métrique.

Définition C. — *On dit que la convergence relative* $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim_{n=\infty} A_n = A$ *est pseudocontinue au point* $f_0 \in H$, *si à tout nombre* $\varepsilon > 0$ *on peut faire correspondre un nombre* $\eta(\varepsilon) > 0$, *tel que pour chaque* $f \in U(f_0, \eta(\varepsilon)) \cap H$ *existe un indice* $N(f, \varepsilon)$, *de façon qu'on ait*

$$|f(n) f_0(n)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad n > N(f, \varepsilon).$$

On voit que l'ensemble

$$\left\{ (f, \hat{f}) : f \in G^{\rightarrow}[A_n], f \in \hat{G}[A_n], \lim_{n=\infty} f(n) = \hat{f} \right\}$$

définit sur $G^{\rightarrow}[A_n]$ une fonction $\Psi(f)$, telle qu'on ait

$$\Psi(f) = \hat{f} \quad \text{pour chaque} \quad f \in G^{\rightarrow}[A_n]$$

et

$$\Psi(G^{\rightarrow}[A_n]) = \hat{G}[A_n].$$

En particulier, si $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})} \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$, l'ensemble

$$\left\{ (f, \hat{f}) : f \in \mathrm{H}, \hat{f} \in \mathrm{A}, \lim_{n=\infty} f(n) = \hat{f} \right\}$$

définit sur H une fonction $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$, telle qu'on ait

$$\Psi_{\mathrm{H}}(f) = \hat{f} \qquad \text{pour chaque} \quad f \in \mathrm{H}.$$

et $\Psi_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}) = \mathrm{A}$; il est évident que

$$\Psi_{\mathrm{H}}(f) = \Psi(f) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{H}.$$

Nous démontrerons maintenant que :

6.1 *Soit* $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})} \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$; *afin que la fonction* $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$ *soit continue au point* $f_0 \in \mathrm{H}$, *il faut et il suffit que la convergence considérée soit pseudo-continue au point* $f_0 \in \mathrm{H}$.

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet, la convergence relative $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})} \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ est pseudo-continue au point $f_0 \in \mathrm{H}$, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta(\varepsilon) > 0$, tel que, pour tout $f \in \mathrm{U}(f_0, \eta(\varepsilon)) \cap \mathrm{H}$, il existe un indice $\mathrm{N}(f, \varepsilon)$ de façon qu'on ait

(1) $$|f(n)\, f_0(n)| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f, \varepsilon).$$

En vertu de (1), on prouve aussitôt que

$$|\hat{f} \cdot \hat{f}_0| < 2\varepsilon$$

ou bien

$$|\Psi_{\mathrm{H}}(f)\, \Psi_{\mathrm{H}}(f_0)| < 2\varepsilon$$

et, par suite, la fonction $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$ est continue au point $f_0 \in \mathrm{H}$.

(ii) La condition est nécessaire :

Puisque $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$ est continue au point $f_0 \in \mathrm{H}$, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta(\varepsilon) > 0$, tel qu'on ait

$$|\Psi_{\mathrm{H}}(f)\, \Psi_{\mathrm{H}}(f_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ou bien

(2) $$|\hat{f} \cdot \hat{f}_0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $f \in \mathrm{U}(f_0, \eta(\varepsilon)) \cap \mathrm{H}$.

D'autre part, il existe un indice $\mathrm{N}(f, \varepsilon)$, tel qu'on ait

(3) $$|f_0(n)\, \hat{f}_0| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad |f(n)\, \hat{f}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $n > \mathrm{N}(f, \varepsilon)$.

D'après (2) et (3), on tire

$$|f(n)\,f_0(n)| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f, \varepsilon);$$

il en résulte que la convergence relative $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})}\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ est pseudo-continue au point $f_0 \in \mathrm{H}$.

7. Convergence relative simple. — Nous dirons que la convergence relative

$$\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})}\lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$$

est *simple*, si la fonction $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$ est biunivoque.

On prouve facilement que :

7.1. *Afin que la convergence relative* $\underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})}\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ *soit simple, il faut et il suffit que, pour chaque couple de points* $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$, *il existe un nombre positif* $\varepsilon(f_1, f_2)$ *et un indice* $\mathrm{N}(f_1, f_2)$, *tels qu'on ait*

$$|f_1(n)\,f_2(n)| \geqq \varepsilon(f_1, f_2) \qquad \textit{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f_1, f_2).$$

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet,

$$|f_1(n)\,f_2(n)| \geqq \varepsilon(f_1, f_2) \qquad \text{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(f_1, f_2),$$

on a

$$|\hat{f}_1 \hat{f}_2| \geqq \varepsilon(f_1, f_2)$$

et, par suite,

$$\Psi_{\mathrm{H}}(f_1) \neq \Psi_{\mathrm{H}}(f_2);$$

il en résulte que la fonction $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$ est biunivoque et, par conséquent, la convergence relative considérée est simple.

(ii) La condition est nécessaire :

Puisque $\Psi_{\mathrm{H}}(f)$ est biunivoque, si f_1, f_2 est un couple quelconque d'éléments distincts du H, on a $\hat{f}_1 \neq \hat{f}_2$.

Nous posons

$$\varepsilon(f_1, f_2) = \frac{1}{3}|\hat{f}_1 \hat{f}_2|;$$

il est évident qu'il existe un indice $\mathrm{N}(f_1, f_2)$, tel qu'on ait

$$|f_1(n)\,\hat{f}_1| \leqq \varepsilon(f_1, f_2) \qquad \text{et} \qquad |f_2(n)\,\hat{f}_2| \leqq \varepsilon(f_1, f_2)$$

pour tout $n > \mathrm{N}(f_1, f_2)$; on a donc

$$|\hat{f}_1 \hat{f}_2| \leqq |f_1(n)\,\hat{f}_1| + |f_2(n)\,\hat{f}_2| + |f_1(n)\,f_2(n)$$

ou bien

$$3\varepsilon(f_1, f_2) \leqq 2\varepsilon(f_1, f_2) + |f_1(n) f_2(n)|,$$

c'est-à-dire

$$|f_1(n) f_2(n)| \geqq \varepsilon(f_1, f_2) \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq N(f_1, f_2).$$

Nous démontrerons encore la proposition suivante :

7.2. *Si* $(\underset{\rightarrow}{\mathrm{H}}) \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$, *il existe au moins une suite d'ensembles* $\{\mathrm{A}_n^\star\}$ *telle que :*

(i) $\mathrm{A}_n^\star \subset \mathrm{A}_n$ *pour tout* $n \in \Phi$;

(ii) $(\underset{\rightarrow}{\mathrm{H}^\star}) \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n^\star = \mathrm{A}$, *où* $\mathrm{H}^\star \subset \mathrm{H}$;

(iii) *la convergence relative* (ii) *soit simple.*

Si la convergence relative $(\underset{\rightarrow}{\mathrm{H}}) \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ est simple, la proposition est valable, car si l'on pose $\mathrm{A}^\star = \mathrm{A}$ et $\mathrm{H}^\star = \mathrm{H}$, on a les conditions (i), (ii) et (iii).

Supposons maintenant que cette convergence relative n'est pas simple; alors, il existe au moins un couple d'éléments $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$, tel qu'on ait $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$; dans ce cas, nous écrivons $f_1 \sim f_2$.

La relation $\sim$ étant réflexive, symétrique et transitive, c'est-à-dire une relation d'équivalence, il existe une famille $(\mathrm{H}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de sous-ensembles de H, telle qu'on ait :

a. $\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{H}_i = \mathrm{H}$;

b. $\{f_1, f_2 \in \mathrm{H}_i\} \equiv \{f_1 \sim f_2\}$ pour chaque $i \in \mathrm{I}$;

c. $\{f_1 \in \mathrm{H}_{i_1}, f_2 \in \mathrm{H}_{i_2}, i_1 \neq i_2\} \equiv \{f_1 \nsim f_2\}$, où

$$\{f_1 \nsim f_2\} \equiv \{\hat{f}_1 \neq \hat{f}_2\}.$$

Si maintenant, F est un élément quelconque du produit cartésien $\prod\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{H}_i$, nous posons

$$\mathrm{H}^\star = \mathrm{F}(\mathrm{I}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_n^\star = \left[\bigcup_{f \in \mathrm{H}^\star} f(\Phi)\right] \cap \mathrm{A}_n$$

pour tout $n \in \Phi$; il est évident que $\mathrm{A}_n^\star \subset \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \Phi$ et $\mathrm{H}^\star \subset \mathrm{H}$.

Puisque $\mathrm{H}^\star \subset \mathrm{H}$, on a $\mathrm{H}^\star \subset \mathrm{G}^{\rightarrow}[\mathrm{A}_n]$, c'est-à-dire la condition 1° de la définition A est valable. Mais

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n^\star = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left[\bigcup_{f \in \mathrm{H}^\star} f(\Phi)\right] \cap \mathrm{A}_n\right] = \left[\bigcup_{f \in \mathrm{H}^\star} f(\Phi)\right] \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right]$$
$$= \left[\bigcup_{f \in \mathrm{H}^\star} f(\Phi)\right] \cap \left[\bigcup_{f \in \mathrm{H}} f(\Phi)\right] = \bigcup_{f \in \mathrm{H}^\star} f(\Phi)$$

et, par suite, la condition 2° de la définition A est aussi valable.

Enfin, d'après a, b et c, il est évident que

$$\Psi_H(H) = \Psi_H(H^*)$$

ou bien

$$\{\hat{f} : f \in H^*\} = A$$

et, par suite, on a

$$(1) \qquad \underset{\rightarrow}{(H^*)} \lim_{n=\infty} A_n^* = A;$$

la convergence relative (1) est simple, car la fonction $\Psi_{H^*}(f)$ est biunivoque.

8. Limites relatives compactes, fermées et ouvertes. — Dans ce paragraphe, nous supposerons toujours que :

1° les ensembles A_n sont compacts;

2° le produit cartésien $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ devient métrique, de façon qu'on ait (5)

$$\left(\lim_{m=\infty} f_m = f\right) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{m=\infty} f_m(n) = f(n)\right);$$

3° la convergence relative

$$\underset{\longrightarrow}{\left(G^{\rightarrow}[A_n]\right)} \lim_{n=\infty} A_n = \hat{G}[A_n]$$

est pseudo-continue à tout point $f \in G^{\rightarrow}[A_n]$.

D'après 1° et 2°, il vient que le produit cartésien $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ est un ensemble compact. Mais $G^{\rightarrow}[A_n] \subset \prod_{n=1}^{\infty} A_n$; par suite, si $G^{\rightarrow}[A_n]$ est fermé, il sera nécessairement compact.

D'autre part, d'après 3° et 6.1, la fonction $\Psi(f)$ est continue dans $G^{\rightarrow}[A_n]$; il en résulte que, $G^{\rightarrow}[A_n]$ étant compact, l'ensemble $\hat{G}[A_n]$ est aussi compact.

En faisant, donc, toutes les hypothèses précédentes, on a la proposition :

8.1. *Les ensembles* $G^{\rightarrow}[A_n]$ *et* $\hat{G}[A_n]$ *sont compacts.*

D'après les mêmes hypothèses, on a la proposition :

8.2. *Soit* $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim_{n=\infty} A_n = A$; *afin que l'ensemble* A *soit compact il faut et il suffit que l'ensemble* H *soit compact.*

En effet, puisque $\Psi(f)$ est continue dans $G^{\rightarrow}[A_n]$ et H est compact, l'ensemble $A = \Psi(H)$ est aussi compact.

(5) *Loc. cit.*, p. 86.

Inversement, si A est compact, il sera fermé relativement à $\hat{G}[A_n]$, et puisque $\Psi(f)$ est continue dans $G^{\rightarrow}[A_n]$ et $\Psi(G^{\rightarrow}[A_n]) = \hat{G}[A_n]$, l'image inverse $\Psi^{-1}(A) = H$ sera fermée relativement à $G^{\rightarrow}[A_n]$; mais $G^{\rightarrow}[A_n]$ est compact; par suite, l'ensemble H est aussi compact.

Supposons maintenant que $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A$, et qu'il existe un ensemble compact $H^\star$, où $H \subset H^\star \subset G^{\rightarrow}[A_n]$, tel que :

(i) $\underset{\rightarrow}{(H^\star)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A^\star$;

(ii) la convergence relative (i) soit simple.

La fonction $\Psi(f)$ étant continue dans $G^{\rightarrow}[A_n]$, $\Psi_{H^\star}(f)$ est aussi continue dans $H^\star$, et puisque $H^\star$ est compact et $\Psi_{H^\star}(f)$ biunivoque, elle sera bicontinue dans $H^\star$, c'est-à-dire les ensembles $H^\star$ et $A^\star$ sont homéomorphes.

Mais $\Psi_{H^\star}(H) = A$, et par suite, on a la proposition :

8.3. *Si* $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A$, *et s'il existe un ensemble compact* $H^\star$, *où* $H \subset H^\star \subset G^{\rightarrow}[A_n]$, *tel que :*

(i) $\underset{\rightarrow}{(H^\star)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A^\star$;

(ii) *la convergence relative* (i) *soit simple,*

alors, en considérant comme espaces topologiques les ensembles $H^\star$ *et* $A^\star$, *les ensembles* H *et* A *ont les mêmes propriétés topologiques.*

En particulier, si $H^\star$ est ouvert relativement à $G^{\rightarrow}[A_n]$ et $A^\star$ ouvert relativement à $\hat{G}[A_n]$, on a la proposition suivante :

8.4. *Si* $\underset{\rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A$, *et s'il existe un ensemble compact* $H^\star$, *où* $H \subset H^\star \subset G^{\rightarrow}[A_n]$, *tel que :*

(i) $\underset{\rightarrow}{(H^\star)} \lim\limits_{n=\infty} A_n = A^\star$;

(ii) *la convergence relative* (i) *soit simple, alors :*

a. Afin que A *soit fermé, il faut et il suffit que l'ensemble* H *soit fermé.*

b. Afin que A *soit ouvert relativement à* $\hat{G}[A_n]$, *il faut et il suffit que l'ensemble* H *soit ouvert relativement à* $G^{\rightarrow}[A_n]$.

DEUXIÈME PARTIE.

Applications sur les suites des fonctions.

9. Suites de fonctions, dont la limite est une fonction bornée. — Considérons une suite de fonctions $\{F_n(x)\}$, définies sur un ensemble E, situé dans un espace métrique X, et dont les valeurs appartiennent à un espace métrique Y; nous supposons de plus que cette suite converge vers la fonction $F(x)$ dans E.

Cela posé, on a

$$\text{(I)} \qquad \underset{\rightarrow}{(\mathrm{H})} \lim_{n=\infty} \mathrm{F}_n(\mathrm{E}) = \mathrm{F}(\mathrm{E}),$$

où H est l'ensemble des éléments

$$(\mathrm{F}_1(x), \mathrm{F}_2(x), \ldots, \mathrm{F}_n(x), \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_n(\mathrm{E})$$

pour tous les points $x \in \mathrm{E}$ (*voir* § 1).

On dit que la suite $\{\mathrm{F}_n(x)\}$ converge pseudo-uniformément vers la fonction $\mathrm{F}(x)$, si la convergence relative (I) est pseudo-uniforme, c'est-à-dire on a la définition suivante :

Définition D. — *On dit que la suite* $\{\mathrm{F}_n(x)\}$ *converge pseudo-uniformément vers la fonction* $\mathrm{F}(x)$ *dans* E, *s'il existe un nombre* $\varepsilon > 0$ *et un indice* N, *tels qu'on ait*

$$|\mathrm{F}_{\mathrm{N}}(x)\ \mathrm{F}(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{E}.$$

D'après (4.1), on prouve aussitôt la proposition suivante, qui est une condition nécessaire et suffisante, afin qu'une suite de fonctions bornées ait comme limite une fonction bornée :

9.1. *Si toutes les fonctions* $\mathrm{F}(x)$ *sont bornées, alors, afin que* $\mathrm{F}(x)$ *soit bornée, il faut et il suffit que la suite* $\{\mathrm{F}_n(n)\}$ *converge pseudo-uniformément vers* $\mathrm{F}(x)$ *dans* E.

Les propositions suivantes, qui sont des conséquences immédiates des propositions 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 respectivement, donnent quatre conditions suffisantes et nécessaires, afin qu'une suite de fonctions, *bornées ou non*, ait comme limite une fonction bornée :

9.2. *Afin que* $\mathrm{F}(x)$ *soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\mathrm{M} > 0$, *tel que pour chaque couple de points* $x_1, x_2 \in \mathrm{E}$ *existe un indice* $\mathrm{N}(x_1, x_2)$, *de façon qu'on ait*

$$|\mathrm{F}_n(x_1)\ \mathrm{F}_n(x_2)| \leqq \mathrm{M} \qquad \textit{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(x_1, x_2).$$

9.3. *Afin que* $\mathrm{F}(x)$ *soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\mathrm{M} > 0$, *tel que pour chaque* $x \in \mathrm{E}$ *existe un indice* $\mathrm{N}(x)$, *de façon qu'on ait*

$$|y_0\ \mathrm{F}_n(x)| \leqq \mathrm{M} \qquad \textit{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(x),$$

où y_0 *est un point fixe du* Y.

Nous désignons par $\mathrm{N}(x; h)$ le plus petit indice pour lequel on a

$$|\mathrm{F}_n(x)\ \mathrm{F}(x)| < h \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq \mathrm{N}(x; h),$$

où h est un nombre positif donné.

9.4. *Afin que* $F(x)$ *soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque couple de points* $x_1, x_2 \in E$ *existe au moins un couple d'indices* p, q, *où* $p \geqq N(x_1, h)$ *et* $q \geqq N(x_2; h)$ (*h étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* $x \in E$), *de façon qu'on ait*

$$|F_p(x_1)\, F_q(x_2)| \leqq M.$$

9.5. *Afin que* $F(x)$ *soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque* $x \in E$ *existe au moins un indice* $p \geqq N(x; h)$ (*h étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* $x \in E$), *de façon qu'on ait*

$$|y_0\, F_p(x)| \leqq M,$$

où y_0 *est un point fixe du* Y.

10. Suites de fonctions bornées, qui convergent uniformément. — Nous dirons que la suite $\{F_n(x)\}$ converge uniformément vers la fonction $F(x)$, si la convergence relative

$$\underset{\rightarrow}{(H)} \lim_{n=\infty} F_n(E) = F(E),$$

que nous avons considérée au début du paragraphe précédent, est uniforme.

On voit aussitôt que la convergence uniforme entendue dans le sens précédent coïncide avec la convergence uniforme dans le sens habituel.

Les deux propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions 5.5 et 5.6 respectivement [6] :

10.1. *Si toutes les fonctions* $F_n(x)$ *sont bornées, et si la suite* $\{F_n(x)\}$ *converge uniformément vers la fonction* $F(x)$ *dans* E, *alors :*

(i) $\lim\limits_{n=\infty} d(F_n(E)) = d(F(E))$;

(ii) $\lim\limits_{n=\infty} d(y_0, F_n(E)) = d(y_0, F(E))$,

où y_0 *est un point quelconque du* Y.

10.2. *Si* $F_n(E) \in R_1^\pi$ *pour tout* $n \in \Phi$, *et si la suite* $\{F_n(x)\}$ *converge uniformément vers la fonction* $F(x)$ *dans* E, *alors :*

(i) $\lim\limits_{n=\infty} \sup\{F_n(x) : x \in E\} = \sup\{F(x) : x \in E\}$;

(ii) $\lim\limits_{n=\infty} \inf\{F_n(x) : x \in E\} = \inf\{F(x) : x \in E\}$.

11. Suites de fonctions, dont la limite satisfait a la condition de Lipschitz d'ordre p ($0 < p \leqq 1$). — Nous posons

$$E^{\sim 2} = \{(x, y) : x, y \in E,\ x \neq y\},$$

---

[6] On voit aussitôt que $\underset{\Rightarrow}{(H)} \lim\limits_{n=\infty} F_n(E) = F(E)$.

et supposons que le produit cartésien $E \times E$ devient métrique par la formule

$$|z_1 z_2| = [|x_1 x_2|^2 + |y_1 y_2|^2]^{\frac{1}{2}},$$

où $z_1 = (x_1, x_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ sont deux éléments quelconques du $E \times E$; nous posons aussi

$$J_p(F : x, y) = \frac{|F(x)\,F(y)|}{|xy|^p},$$

où $(x, y) \in E^{\sim 2}$ et $0 < p \leqq 1$, en supposant que $F(x)$ est une fonction quelconque, définie sur E, et dont les valeurs appartiennent à Y.

Il est évident que :

11.1. *Afin que la fonction* $F(x)$ *satisfasse à la condition de Lipschitz d'ordre* p, *en symbole :* $F(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$, *il faut et il suffit que la fonction* $J_p(F : x, y)$ *soit bornée dans* $E^{\sim 2}$.

Dans ce cas, nous désignons par $L_p(F, E)$ la borne supérieure de $J_p(F : x, y)$ dans $E^{\sim 2}$. On prouve facilement que :

11.2. *Si la suite* $\{F_n(x)\}$ *converge vers la fonction* $F(x)$ *dans* E, *alors la suite* $\{J_p(F_n : x, y)\}$ *converge vers* $J_p(F : x, y)$ *dans* $E^{\sim 2}$.

Soit, en effet, (x_1, y_1) un point quelconque du $E^{\sim 2}$; étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un indice $N(\varepsilon)$, tel qu'on ait

$$|F_n(x_1)\,F(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}|x_1 y_1|^p \quad \text{et} \quad F_n(y_1)\,F(y_1)| < \frac{\varepsilon}{2}|x_1 y_1|^p$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$. Donc, pour $n > N(\varepsilon)$, on a

$$|F_n(x_1)\,F_n(y_1)| \leqq |F_n(x_1)\,F(x_1)| + |F_n(y_1)\,F(y_1)| \\ + |F(x_1)\,F(y_1)| < \varepsilon |x_1 y_1|^p + |F(x_1)\,F(y_1)|$$

ou bien

(1) $$J_p(F_n : x_1, y_1) - J_p(F : x_1, y_1) < \varepsilon.$$

On prouve de même que

(2) $$J_p(F : x_1, y_1) - J_p(F_n : x_1, y_1) < \varepsilon$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$; les relations (1) et (2) donnent

$$|J_p(F_n : x_1, y_1) - J_p(F : x_1, y_1)| < \varepsilon$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$, et par suite,

(3) $$\lim_{n=\infty} J_p(F_n : x_1, y_1) = J_p(F : x_1, y_1).$$

---

(7) On pose $y_0 = 0$.

La relation (3) étant valable pour chaque point $(x_1, y_1) \in E^{\sim 2}$, on a démontré que la suite $\{ J_p(F_n : x, y) \}$ converge vers $J_p(F : x, y)$ dans $E^{\sim 2}$.

D'après 11.1, 11.2 et 9.1, on prouve aussitôt la proposition suivante :

11.3. *Si* $F_n(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$ *pour tout* $n \in \Phi$, *afin que* $F(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$, *il faut et il suffit que la suite* $\{ J_p(F_n : x, y) \}$ *converge pseudo-uniformément vers la fonction* $J_p(F : x, y)$ *dans* $E^{\sim 2}$.

Les propositions suivantes, qui sont des conséquences immédiates des propositions 11.1, 11.2 et des 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 respectivement, donnent quatre conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une suite de fonctions, *satisfaisant ou non* à la condition de Lipschitz d'ordre p, ait comme limite une fonction satisfaisant à cette condition :

11.4. *Afin que* $F(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque couple de points* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E^{\sim 2}$ *existe un indice* $N(x_1, y_1; x_2, y_2)$, *de façon qu'on ait*

$$| J_p(F_n : x_1, y_1) - J_p(F_n : x_2, y_2) | \leqq M \qquad \textit{pour tout} \quad n > N(x_1, y_1; x_2, y_2).$$

11.5. *Afin que* $F(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque point* $(x, y) \in E^{\sim 2}$ *existe un indice* $N(x, y)$, *de façon qu'on ait* ([7])

$$J_p(F_n : x, y) \leqq M \qquad \textit{pour tout} \quad n > N(x, y).$$

Nous désignons par $N(x, y; h)$ le plus petit indice pour lequel on a

$$| J_p(F_n : x, y) - J_p(F : x, y) | < h \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq N(x, y; h),$$

où h est un nombre positif donné.

11.6. *Afin que* $F(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque couple de points* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E^{\sim 2}$ *existe au moins un couple d'indices* q, s, *où* $q \geqq N(x_1, y_1; h)$ *et* $s \geqq N(x_2, y_2; h)$ (h *étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* $(x, y) \in E^{\sim 2}$), *de façon qu'on ait*

$$| J_p(F_q : x_1, y_1) - J_p(F_s : x_2, y_2) | \leqq M.$$

11.7. *Afin que* $F(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$, *tel que pour chaque point* $(x, y) \in E^{\sim 2}$ *existe au moins un indice* $q \geqq N(x, y; h)$ [h *étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* $(x, y) \in E^{\sim 2}$], *de façon qu'on ait*

$$J_p(F_q : x, y) \leqq M.$$

En supposant que $J_p(F_n : E^{\sim 2}) \in R_1^{\pi}$ pour tout $n \in \Phi$, d'après 10.2, si la suite $\{ J_p(F_n : x, y) \}$ converge uniformément vers la fonction $J_p(F : x, y)$ dans $E^{\sim 2}$, on a

$$\lim_{n=\infty} \sup \{ J_p(F_n : x, y) : (x, y) \in E^{\sim 2} \} = \sup \{ J_p(F : x, y) : (x, y) \in E^{\sim 2} \}.$$

Mais,

$$\sup\{J_p(F_n : x, y) : (x, y) \in E^{\sim 2}\} = L_p(F_n, E)$$

et

$$\sup\{J_p(F : x, y) : (x, y) \in E^{\sim 2}\} = L_p(F, E);$$

il en résulte que

$$\lim_{n=\infty} L_p(F_n, E) = L_p(F, E),$$

d'où la proposition :

11.8. *Si* $F_n(x) \in \mathrm{Lip}(E, p)$ *pour tout* $n \in \Phi$, *et si la suite* $\{J_p(F_n : x, y)\}$ *converge uniformément vers la fonction* $J_p(F : x, y)$ *dans* $E^{\sim 2}$, *alors*

$$\lim_{n=\infty} L_p(F_n, E) = L_p(F, E).$$

12. Nombres dérivés d'une suite de fonctions réelles. — Considérons une suite de fonctions réelles $\{f_n(x)\}$, définies sur un ensemble de nombres réels E, et supposons que cette suite converge vers la fonction $f(x)$ dans E.

Si $x_0 \in E \cap E'$, nous posons

$$E^+(x_0, \varepsilon) = E \cap (x_0, x_0 + \varepsilon), \qquad E^-(x_0, \varepsilon) = E \cap (x_0 - \varepsilon, x_0),$$

où ε est un nombre positif, et

$$I(f : x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pour chaque $x \in E$ différent de x_0, où $f(x)$ est une fonction réelle définie sur E.

On peut démontrer que :

12.1. *Afin que les nombres dérivés* $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$ [*resp. les nombres* $D^- f(x_0)$, $D_- f(x_0)$] *soient finis, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\varepsilon > 0$, *tel que la fonction* $I(f : x_0, x)$ *soit bornée dans* $E^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp. dans* $E^-(x_0, \varepsilon)$].

Nous démontrerons la proposition pour les nombres $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$; la démonstration pour les $D^- f(x_0)$, $D_- f(x_0)$ est pareille.

Il est évident que la condition est suffisante; il reste donc à démontrer qu'elle est nécessaire.

Supposons, au contraire, qu'elle n'est pas nécessaire, et considérons une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_n\}$, telle qu'on ait

$$\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} \quad \text{pour tout } n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

D'après notre hypothèse, la fonction $I(f : x_0, x)$ n'est pas bornée dans $E^+(x_0, \varepsilon)$ pour tout n, par suite, étant donné un nombre $M > 0$, il existe une suite partielle $\{G_{k_n}\}$ de la suite $\{G_n\}$, où

$$G_n = E(x_0, \varepsilon_n) - E(x_0, \varepsilon_{n+1}),$$

dont tous les termes contiennent au moins un point x, tel qu'on ait

$$|\mathrm{I}(f:x_0, x)| \geqq \mathrm{M}.$$

Il existe donc une suite $\{x_n\}$, telle que

$$x_n \in \mathrm{G}_{k_n} \quad \text{et} \quad |\mathrm{I}(f:x_0, x_n)| \geqq \mathrm{M} \quad \text{pour tout } n \in \Phi;$$

il en résulte que : ou bien il existe une suite partielle $\{x'_n\}$ de $\{x_n\}$ telle qu'on ait $\mathrm{I}(f:x_0, x'_n) \geqq \mathrm{M}$ pour tout n, ou bien une suite partielle $\{x''_n\}$ de $\{x_n\}$ telle qu'on ait $\mathrm{I}(f:x_0, x''_n) \leqq -\mathrm{M}$ pour tout n.

Dans le premier cas, on a

$$(1) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}}\, \mathrm{I}(f:x_0, x'_n) \geqq \mathrm{M};$$

mais, il est évident que $\lim\limits_{n=\infty} x'_n = x_0$ et, par suite,

$$(2) \qquad \mathrm{D}_+ f(x_0) \leqq \overline{\lim_{n=\infty}}\, \mathrm{I}(f:x_0, x_n) \leqq \mathrm{D}^+ f(x_0).$$

D'après (1) et (2), on trouve que $\mathrm{D}^+ f(x_0) \geqq \mathrm{M}$.

Dans le second cas, on trouve de même que $\mathrm{D}_+ f(x_0) \leqq -\mathrm{M}$; il en résulte donc que l'un au moins des nombres $\mathrm{D}^+ f(x_0)$, $\mathrm{D}_+ f(x_0)$ ne peut pas être fini, contrairement à l'hypothèse.

On vérifie facilement que :

12.2. *Si la suite* $\{f_n(x)\}$ *converge vers la fonction* $f(x)$ *dans* E, *alors la suite* $\{\mathrm{I}(f_n:x_0, x)\}$ *converge vers la fonction* $\mathrm{I}(f:x_0, x)$ *dans* $\mathrm{E}^+(x_0, \varepsilon) \cup \mathrm{E}^-(x_0, \varepsilon)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

D'après 12.1, 12.2 et 9.1, on a aussitôt la proposition suivante :

12.3. *S'il existe un nombre* $\varepsilon > 0$, *tel que la fonction* $\mathrm{I}(f_n:x_0, x)$, *pour tout n, soit bornée dans* $\mathrm{E}^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp. dans* $\mathrm{E}^-(x_0, \varepsilon)$], *alors, afin que les nombres dérivés* $\mathrm{D}^+ f(x_0)$, $\mathrm{D}_+ f(x_0)$ [*resp. les* $\mathrm{D}^- f(x_0)$, $\mathrm{D}_- f(x_0)$] *soient finis, il faut et il suffit que la suite* $\{\mathrm{I}(f_n:x_0, x)\}$ *converge pseudo-uniformément vers la fonction* $\mathrm{I}(f:x_0, x)$ *dans* $\mathrm{E}^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp. dans* $\mathrm{E}^-(x_0, \varepsilon)$].

Enfin, les propositions 12.1, 12.2 et 9.2, 9.3, 9.4, 9.5 donnent respectivement les propositions suivantes :

12.4. *Afin que les nombres dérivés* $\mathrm{D}^+ f(x_0)$, $\mathrm{D}_+ f(x_0)$ [*resp. les* $\mathrm{D}^- f(x_0)$, $\mathrm{D}_- f(x_0)$] *soient finis, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres* $\varepsilon > 0$ *et* $\mathrm{M} > 0$, *tels que pour chaque couple de points* $x_1, x_2 \in \mathrm{E}^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp.* $x_1, x_2 \in \mathrm{E}^-(x_0, \varepsilon)$] *existe un indice* $\mathrm{N}(x_1, x_2)$, *de façon qu'on ait*

$$|\mathrm{I}(f_n:x_0, x_1) - \mathrm{I}(f_n:x_0, x_2)| \leqq \mathrm{M} \qquad \textit{pour tout} \quad n > \mathrm{N}(x_1, x_2).$$

12.5. *Afin que les nombres* $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$ [*resp. les* $D^- f(x_0)$, $D_- f(x_0)$] *soient finis, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres* $\varepsilon > 0$ *et* $M > 0$, *tels que pour chaque* $x \in E^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp.* $x \in E^-(x_0, \varepsilon)$] *existe un indice* $N(x)$, *de façon qu'on ait*

$$|I(f_n : x_0, x)| \leqq M \qquad \textit{pour tout} \quad n > N(x).$$

Nous désignons par $N(x_0, x; h)$ le plus petit indice pour lequel on a

$$|I(f_n : x_0, x) - I(f : x_0, x)| < h \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq N(x_0, x; h),$$

où h est un nombre positif donné, et $x \in E^+(x_0, \varepsilon)$ [resp. $x \in E^-(x_0, \varepsilon)$].

12.6. *Afin que les nombres* $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$ [*resp. les* $D^- f(x_0)$, $D_- f(x_0)$] *soient finis, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres* $\varepsilon > 0$ *et* $M > 0$, *tels que pour chaque couple de points* $x_1, x_2 \in E^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp.* $x_1, x_2 \in E^-(x_0, \varepsilon)$] *existe au moins un couple d'indices* p, q, *où* $p \geqq N(x_0, x_1; h)$ *et* $q \geqq N(x_0, x_2; h)$ (*h étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* x), *de façon qu'on ait*

$$|I(f_p : x_0, x_1) - I(f_q : x_0, x_2)| \leqq M.$$

12.7. *Afin que les nombres* $D^+ f(x_0)$, $D_+ f(x_0)$ [*resp. les* $D^- f(x_0)$, $D_- f(x_0)$] *soient finis, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres* $\varepsilon > 0$ *et* $M > 0$, *tels que pour chaque* $x \in E^+(x_0, \varepsilon)$ [*resp.* $x \in E^-(x_0, \varepsilon)$] *existe au moins un indice* $p \geqq N(x_0, x; h)$ (*h étant un nombre positif quelconque, mais le même pour chaque* x), *de façon qu'on ait*

$$|I(f_p : x_0, x)| \leqq M.$$