

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE BLAMBERT

## Sur la notion de type de l'ordre d'une fonction entière

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 79, n° 4 (1962), p. 353-375

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1962\\_3\\_79\\_4\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_4_353_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LA NOTION DE TYPE DE L'ORDRE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR M. MAURICE BLAMBERT

## INTRODUCTION.

Dans ce travail, je développe et complète ma Note [II. 1]. M. Yu Chia Yung dans une Note [V. 1] et moi-même, dans celle que j'ai citée, avons utilisé, indépendamment et dans des buts différents, la notion de type de l'ordre au sens de J. F. Ritt pour une fonction entière somme d'une série de Dirichlet convergente dans le plan. Nous avons également formulé dans ces Notes, une généralisation du théorème de Lindelöf sur l'expression du type de l'ordre au sens classique. M. Yu Chia Yung a donné sa démonstration dans sa thèse [V, 2]. J'en donne ici une autre. M. S. Mandelbrojt avait introduit auparavant la notion d'ordre au sens de J. F. Ritt dans une bande du plan complexe et démontré un important théorème établissant que, sous des conditions convenables, l'ordre dans une bande horizontale du plan est égal à l'ordre dans le plan. Ce théorème complète celui de J. F. Ritt généralisant le théorème de Borel qui exprime l'ordre classique d'une fonction entière au moyen de la suite des coefficients de son développement taylorien à l'origine. Pour démontrer son théorème, M. S. Mandelbrojt a utilisé un de ses résultats antérieurs obtenus à l'aide d'une puissante méthode aux possibilités très intéressantes et variées [III. 1]. Dans le présent Mémoire, j'utilise cette notion de type de l'ordre au sens de J. F. Ritt pour reprendre, généraliser dans une certaine voie, et compléter quant au type, ce théorème relatif à l'ordre d'une fonction entière dans une bande.

Dans un premier chapitre, je rappelle des résultats classiques. Au chapitre II, j'énonce des définitions et démontre des propriétés, certaines élémentaires,

relativement aux notions d'ordre et de type de l'ordre d'une fonction entière. Au chapitre III, je démontre d'intéressantes propriétés qui, combinées avec les résultats du chapitre antérieur, me permettent, en utilisant des théorèmes classiques, de généraliser celui de M. S. Mandelbrojt. Ces théorèmes classiques sont d'une part celui de M. G. Pólya relatif à la répartition sur l'axe d'holomorphic des singularités des fonctions définies par des séries dont les suites d'exposants sont à *densité maximale* finie, et d'autre part celui de V. Bernstein sur l'utilisation de la notion d'*indice de condensation* de la suite des exposants d'une série pour la localisation de l'abscisse d'holomorphic. Ces théorèmes, exposés dans la monographie [I. 1] de cet auteur, sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les rappeler ici.

Une courte bibliographie termine ce travail.

## CHAPITRE I.

### RAPPEL DE DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS CLASSIQUES.

$\{\lambda_n\}$  étant une suite positive strictement croissante, non bornée supérieurement, on considère la série de Dirichlet générale

$$f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}, \quad \text{où } s = \sigma + i\tau \quad (\sigma \text{ et } \tau \text{ réels}).$$

Notant  $\sigma_c^f$  l'abscisse de convergence simple de cette série, on suppose  $\sigma_c^f = -\infty$ , c'est-à-dire que la série est supposée convergente en chaque point fini  $s$  du plan complexe. La fonction  $f(s)$ , somme de la série, est entière.

On note  $N(x)$  la *fonction de distribution de la suite*  $\{\lambda_n\}$  (appelée plus succinctement la *distribution* de la suite) qui est définie de la manière suivante :  $N(x)$  représente pour chaque  $x > 0$  le nombre des termes de la suite  $\{\lambda_n\}$  inférieurs à  $x$ . On a

$$\lambda_{N(x)} < x \leq \lambda_{N(x)+1};$$

$\lambda_1$  étant positif, on a  $N(x) = 0$  pour  $x \in ]0, \lambda_1]$ .

On pose  $D^* = \overline{\lim} \{N(x)/x\}$ , pour  $x \uparrow \infty$ . Il est évident que  $D^* \geq 0$ . Ce nombre  $D^*$  est appelé la *densité supérieure* de la suite  $\{\lambda_n\}$ . Puisque  $\sigma_c^f = -\infty$ , on remarquera que si  $D^* < \infty$ , on a aussi  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ . On pose, pour  $\sigma$  réel fini fixé quelconque :

$$M(\sigma) = \overline{\text{Borne}} |f(\sigma + i\tau)| \quad \text{pour } -\infty < \tau < \infty$$

et l'on considère le nombre  $\rho$  défini par la relation

$$\rho = \overline{\lim} [L_2 M(\sigma)/(-\sigma)] \quad \text{pour } \sigma \downarrow -\infty.$$

Ce nombre  $\rho$  est appelé *l'ordre au sens de Ritt* de la fonction entière  $f(s)$ , ou plus succinctement *l'ordre (R) de  $f(s)$* . Ultérieurement on le notera de préférence  $\rho_R$  pour le distinguer de l'ordre classique  $\rho$ . Pour une fonction entière  $f(s)$  (somme d'une série de Dirichlet générale, absolument convergente dans le plan complexe) en général  $\rho_R \neq \rho \geq 1$ .

Cependant : si la série de Dirichlet  $f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_c^f = -\infty$ , se réduit à une série de Taylor-D, alors l'ordre (R) de la fonction entière  $f(s)$  est égal à l'ordre ordinaire de la fonction entière  $\varphi(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ .

(On rappelle qu'une série de Taylor-D est une série de Dirichlet pour laquelle la suite  $\{\lambda_n\}$  est identique à la suite des entiers positifs ; c'est-à-dire que  $\lambda_n = n$ . Ajoutons que, pour l'objet du présent travail, il n'y a aucun inconvénient à omettre ainsi le terme constant  $a_0$  ou à le supposer nul.)

THÉORÈME DE J. F. RITT. —  $\alpha$  étant un nombre réel non négatif, si  $\underline{\lim}\{\lambda_n/Ln\} > 0$  et si  $\sigma_A^f = -\infty$ , alors une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction entière

$$f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$$

soit d'ordre (R) égal à  $\alpha$  est que

$$-1/\alpha = \overline{\lim} \{L | a_n | / (\lambda_n L \lambda_n)\} \quad \text{pour } n \uparrow \infty,$$

où l'on pose  $1/\alpha = \infty$  si  $\alpha = 0$ , et  $1/\alpha = 0$  si  $\alpha = \infty$ .

$\tau_0$  et  $R$  étant deux nombres positifs donnés, on représente par  $B(\tau_0; R)$  une bande horizontale du plan de la variable  $s$  dont l'axe est la droite  $\Im s = \tau_0$ , de largeur  $2R$ , c'est-à-dire l'ensemble des points finis  $s = \sigma + i\tau$  tels que  $|\tau - \tau_0| \leq R$ . Sans s'astreindre à supposer que la fonction  $f(s)$  est entière et somme d'une série de Dirichlet, en supposant seulement qu'elle est holomorphe sur  $B(\tau_0; R)$ , on pose pour chaque nombre fini réel  $\sigma$ ,

$$M_B(\sigma) = \text{Max} |f(\sigma + i\tau)| \quad \text{pour } |\tau - \tau_0| \leq R,$$

et l'on considère le nombre  $\rho_B$  défini par la relation

$$\rho_B = \overline{\lim} \{L_2 M_B(\sigma) / (-\sigma)\} \quad \text{pour } \sigma \downarrow -\infty.$$

Ce nombre  $\rho_B$  est appelé *l'ordre à gauche au sens de Ritt de la fonction  $f(s)$  dans la bande  $B(\tau_0; R)$* , ou plus succinctement *l'ordre (R) de  $f(s)$  dans la bande  $B(\tau_0; R)$* .

On remarquera que lorsqu'on considère l'ordre à gauche au sens de Ritt de la fonction entière  $f(s)$ , somme d'une série de Dirichlet, avec  $\sigma_A^f = -\infty$ , il n'y a pas lieu de préciser *ordre (R)* au lieu de *ordre (R)* puisque la fonction  $f(s)$  est

bornée dans chaque demi-plan  $\sigma > \sigma_0$  ( $\sigma_0$  étant une constante quelconque); tandis que, ci-dessus, n'ayant pas spécifié comment est définie la fonction  $f(s)$  dans la bande  $B(\tau_0; R)$  on a eu soin de préciser *ordre* ( $R$ ) pour tenir compte du fait que dans la définition du nombre  $\rho_B$  (défini comme limite supérieure d'une certaine fonction de  $\sigma$  lorsque  $\sigma \downarrow -\infty$ ) la définition et le comportement de  $f(s)$ , pour  $\sigma \rightarrow +\infty$  n'interviennent pas explicitement.

THÉOREME DE S. MANDELBROJT. — *Sous les conditions :*

1° la suite  $\{\lambda_n\}$  des exposants de la série  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ , vérifie la condition  $\underline{\lim}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \lambda > 0$ ;

2° l'ordre ( $R$ ) dans le plan de la fonction  $f(s)$  est positif, alors, quel que soit le nombre réel fini  $\tau_0$ , dans chaque bande horizontale  $B(\tau_0; R)$ , où  $R > \pi D^*$ , l'ordre ( $R$ ) de  $f(s)$  dans cette bande est égal à son ordre ( $R$ ) dans le plan.

Pour une série de Dirichlet, avec  $\sigma_\lambda^f < \infty$ , on sait que  $\sigma_\lambda^f - \sigma_c^f \leq L$ ; si  $\sigma_c^f = -\infty$ , et  $L < \infty$ , on a nécessairement  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ . Lorsque dans un énoncé figurera la condition  $L < \infty$  et si la série est convergente dans le plan, indistinctement alors on précisera l'une des deux conditions  $\sigma_c^f = -\infty$  ou  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ .

On rappelle que

$$L = \overline{\lim} \{ L_n / \lambda_n \}.$$

## CHAPITRE II.

1. Considérant la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ , on peut définir son ordre ( $R$ ) dans le plan de la variable  $s$ , ou dans une bande horizontale de ce plan, de la manière suivante, un peu différente dans sa forme de la manière antérieure (et mieux adaptée aux besoins de la technique utilisée dans ce travail).

On pose, au point fini  $s = \sigma + i\tau$ ,

$$\mathfrak{M}^f(s) = \overline{\text{Borne}} \left| \sum_1^r a_n e^{-s\lambda_n} \right| \quad (r \geq 1),$$

et pour  $\sigma$  réel quelconque fini,

$$\mathfrak{M}_b^f(\sigma) = \overline{\text{Borne}} \mathfrak{M}^f(s), \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Puisque  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ , il est évident que, quel que soit  $s$  fini, les nombres  $\mathfrak{M}^f(s)$  et  $\mathfrak{M}_b^f(\sigma)$  sont finis.

On considère le nombre  $\nu_R^f$  défini par la relation

$$\nu_R^f = \overline{\lim} \{ L_2 \mathfrak{M}_b^f(\sigma) / (-\sigma) \} \quad (\sigma \downarrow -\infty).$$

Sous la condition  $\overline{\lim} \{Ln/\lambda_n\} < \infty$ , il est facile de prouver que ce nombre  $\nu_R^f$  n'est autre que l'ordre (R) de  $f(s)$  dans le plan. En effet, considérant maintenant deux séries de Dirichlet générales :

$$f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n} \quad \text{avec } \sigma_\lambda^f < \infty$$

et

$$\varphi(s) = \sum b_n e^{-s\lambda_n} \quad \text{avec } \sigma_\lambda^\varphi < \infty,$$

dont la suite des exposants est la même, on sait que :

$$\psi(s) = \sum a_n b_n e^{-s\lambda_n} = \lim \left\{ \left( \frac{1}{y} \right) \int_{y_0}^y f(z) \varphi(s-z) dz \right\} \quad (y \uparrow \infty)$$

(les fonctions  $\psi, f, \varphi$  étant, aux points considérés, respectivement les sommes de leurs séries de définition), où  $z = c + iy$  ( $y$  et  $y_0$  réels) avec la constante  $c > \sigma_\lambda^f$  et  $\sigma > c + \sigma_\lambda^\varphi$ . Plus particulièrement, dans le cas étudié ici, on a  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ .

On pose  $b_n = 1$ ; on a donc  $\varphi(s) = \sum e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma > \sigma_\lambda^\varphi = L$  en supposant  $\overline{\lim} \{L_n/\lambda_n\} \equiv L < \infty$ .

$r$  étant un entier positif quelconque et  $x_\lambda^f = -\infty$ , où  $x \equiv Rz$ , on considère la relation légitime comme l'on sait :

$$\sum_1^r a_n e^{-s\lambda_n} = \lim \left\{ \left( \frac{1}{y} \right) \int_{y_0}^y f(z) \left( \sum_1^r e^{-\lambda_n(s-z)} \right) dz \right\} \quad (y \uparrow \infty),$$

avec  $z = c + iy$ , où  $y_0$  et  $c$  sont des constantes réelles finies quelconques. Puisque pour chaque  $s$  fini du demi-plan  $\sigma > c + \sigma_\lambda^\varphi$ , où  $\sigma_\lambda^\varphi = L$ ,

$$\Re^\varphi(s-z) \leq \sum_1^\infty e^{-\lambda_n(\sigma-c)} < \infty,$$

on a donc,

$$\Re^f(s) \leq \overline{\lim} \left\{ \left( \frac{1}{y} \right) \int_{y_0}^y |f(z)| \Re^\varphi(s-z) dy \right\} \quad (y \uparrow \infty),$$

et, posant  $M_b^f(\sigma) = \overline{\text{Borne}} |f(\sigma + i\tau)|$  pour  $-\infty < \tau < \infty$ , on a

$$\Re_b^f(\sigma) \leq M_b^f(c) \Re^\varphi(\sigma - c),$$

où

$$\Re^\varphi(\sigma - c) = \sum_1^\infty e^{-\lambda_n(\sigma-c)}.$$

$\varepsilon$  étant positif arbitraire, et posant  $\sigma - c = L + \varepsilon$ ,  $C_\varepsilon = \sum_1^\infty e^{-\lambda_n(L+\varepsilon)}$ , on a

$$\Re_b^f(\sigma) \leq C_\varepsilon M_b^f(\sigma - L - \varepsilon),$$

relation indépendante de la constante arbitraire  $c$  et valable, quelle que soit la valeur de la variable  $\sigma$  réelle finie.

Convenant de représenter dorénavant par  $\rho_R^f$  l'ordre (R) de  $f(s)$  dans le plan, il résulte de cette relation que  $\nu_R^f \leq \rho_R^f$ . D'autre part, il est évident que pour  $\sigma$  arbitraire fini, on a

$$M_b^f(\sigma) \leq \mathcal{N}_b^f(\sigma),$$

d'où résulte  $\rho_R^f \leq \nu_R^f$ .

En définitive, on a  $\nu_R^f = \rho_R^f$  pour les fonctions entières  $f(s)$ , avec  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ , dont la suite  $\{\lambda_n\}$  des exposants satisfait à la condition  $L < \infty$ .

2. A la notion d'ordre (R) dans le plan d'une fonction entière, notion due à J. F. Ritt, s'adjoint naturellement celle du type de cet ordre, pour cette fonction (due aussi à J. F. Ritt), que je définis de la manière suivante :

Si la fonction entière  $f(s)$ , avec  $\sigma_\lambda^f = -\infty$  est d'ordre  $\rho_R^f$ , avec  $0 < \rho_R^f < \infty$ , alors le type de l'ordre de  $f(s)$  est par définition le nombre

$$\tau_R^f = \overline{\lim} [L \mathcal{N}_b^f(\sigma) / e^{-\sigma \rho_R^f}] \quad (\sigma \downarrow -\infty).$$

On pose, avec J. F. Ritt,

$$\theta_R^f = \overline{\lim} [L M_b^f(\sigma) / e^{-\sigma \rho_R^f}] \quad (\sigma \downarrow -\infty).$$

On déduit de la relation  $\mathcal{N}_b^f(\sigma) \leq C_\varepsilon M_b^f(\sigma - L - \varepsilon)$  que

$$\tau_R^f \leq \theta_R^f e^{\rho_R^f (L + \varepsilon)},$$

et donc

$$\tau_R^f \leq \theta_R^f e^{\rho_R^f L},$$

puisque  $\varepsilon$  est positif arbitraire.

En outre, puisque  $M_b^f(\sigma) \leq \mathcal{N}_b^f(\sigma)$ , il est évident que  $\theta_R^f \leq \tau_R^f$ , et donc  $\theta_R^f \leq \tau_R^f \leq \theta_R^f e^{\rho_R^f L}$ .

Dans le cas  $\lim \{Ln/\lambda_n\} \equiv L = 0$ , alors  $\tau_R^f = \theta_R^f$ .

On convient de représenter par  $\rho_B^f$  l'ordre à gauche de la fonction  $f(s)$  dans la bande  $B(\tau_0; R)$  et qu'on définit aussi un peu différemment de la manière antérieure (chap. I), comme il suit, lorsque  $f(s)$  est la somme d'une série de Dirichlet (avec  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ ).

Posant pour  $\sigma$  réel fini,

$$\mathcal{N}_B^f(\sigma) = \overline{\text{Borne}} \mathcal{N}(\sigma + i\tau) \quad \text{pour } |\tau - \tau_0| \leq R,$$

le nombre  $\rho_B^f$  est défini par la relation

$$\rho_B^f = \overline{\lim} \{L_2 \mathcal{N}_B^f(\sigma) / (-\sigma)\} \quad (\sigma \downarrow -\infty).$$

Par analogie, le type  $\tau_B^f$  de l'ordre à gauche  $\rho_B^f$  (si  $0 < \rho_B^f < \infty$ ) de la fonction  $f(s)$  dans la bande  $B(\tau_0, R)$ , est, par définition,

$$\tau_B^f = \overline{\lim} \{ L \mathfrak{N}_B^f(\sigma) / e^{-\sigma \rho_B^f} \} \quad (\sigma \downarrow -\infty).$$

Comme pour la notion classique du type d'un ordre, on convient de dire que la fonction entière  $f(s) = \sum a_n e^{-s \lambda_n}$  est (avec  $0 < \rho_R^f < \infty$ ).

- du type minimal de son ordre, si  $\tau_R^f = 0$ ;
- du type moyen de son ordre, si  $0 < \tau_R^f < \infty$  (du type au plus moyen si  $0 \leq \tau_R^f < \infty$ ).
- du type maximal de son ordre, si  $\tau_R^f = \infty$ .

On énoncerait des définitions analogues dans le cas d'une bande.

*Remarque.* — Si  $f(s) = \sum a_n e^{-s \lambda_n}$ , avec  $\sigma_c^f = -\infty$ , alors notant  $a_{n_0}$  le premier terme non nul de la suite  $\{a_n\}$ , il est évident que  $\mathfrak{N}^f(s) \geq |a_{n_0}| e^{-\sigma \lambda_{n_0}}$ , quel que soit le point  $s$  fini; *a fortiori* on a  $\mathfrak{N}_B^f(\sigma) \geq |a_{n_0}| e^{-\sigma \lambda_{n_0}}$ , quel que soit  $\sigma$  réel fini, et quelle que soit la bande  $B(\tau_0, R)$  considérée. Il en résulte que les nombres  $\rho_R^f, \rho_B^f, \tau_R^f, \tau_B^f$  sont tous non négatifs.

3. LEMME II.3.1. — La fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s \lambda_n}$  étant entière, avec  $\sigma_c^f = -\infty$ , et  $n_0$  étant l'indice du coefficient non nul de plus petit indice de la série, alors pour tout  $\varepsilon > 0$  arbitraire fini on a

$$\mathfrak{N}^f(s) \leq \mathfrak{N}^f(s - \varepsilon) e^{-\varepsilon \lambda_{n_0}}.$$

On déduit immédiatement cette relation de l'identité d'Abel :

$$f_N(s) = f_N(s - \varepsilon) e^{-\varepsilon \lambda_N} + \sum_{r=n_0}^{N-1} f_r(s - \varepsilon) [e^{-\varepsilon \lambda_r} - e^{-\varepsilon \lambda_{r+1}}],$$

avec

$$f_r(s) = \sum_{n_0}^r a_n e^{-s \lambda_n}.$$

$\mathfrak{N}^f(s)$  est donc, sur chaque droite  $\Re s = \tau$ , une fonction décroissante de  $\tau$ , avec  $\lim \mathfrak{N}^f(s) = \infty$  pour  $\sigma \downarrow -\infty$ .

LEMME II.3.2. — Sous les conditions :

- 1° la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s \lambda_n}$  est entière avec  $\sigma_c^f = -\infty$  et  $L < \infty$ ;
- 2°  $\{b_n\}$  est une suite de constantes complexes telles que  $b_n = O(e^{c \lambda_n})$ ,  $n \uparrow \infty$ ,  $c$  étant une constante réelle finie.



Alors :

(1) l'ordre  $\rho_{\mathbb{R}}^{\circ}$  [ou  $\rho_{\mathbb{B}}^{\circ}$  dans une bande  $B(\tau_0; R)$ ] de la fonction  $\varphi(s) = \sum a_n b_n e^{-s\lambda_n}$  est au plus égal à l'ordre  $\rho_{\mathbb{R}}^f$  [ou  $\rho_{\mathbb{B}}^f$  dans  $B(\tau_0; R)$ ] de la fonction  $f(s)$ ;

(2) Si  $\rho_{\mathbb{R}}^{\circ} = \rho_{\mathbb{R}}^f$ , avec  $0 < \rho_{\mathbb{R}}^f < \infty$ , alors  $\tau_{\mathbb{R}}^{\circ} \leq \tau_{\mathbb{R}}^f e^{\rho_{\mathbb{R}}^f L'}$  (de même si  $\rho_{\mathbb{B}}^{\circ} = \rho_{\mathbb{B}}^f$ , avec  $0 < \rho_{\mathbb{B}}^f < \infty$ , on a alors  $\tau_{\mathbb{B}}^{\circ} \leq \tau_{\mathbb{B}}^f e^{\rho_{\mathbb{B}}^f L'}$ ) avec  $L' = c + L$ .

Comme on l'a déjà fait observer, les conditions  $\sigma_c^f = -\infty$  et  $L < \infty$ , entraînent  $\sigma_A^f = -\infty$ ; en outre, eu égard à la condition 2° il est évident que  $\sigma_A^{\circ} = -\infty$ . Les assertions (1) et (2) sont des conséquences immédiates de la relation  $\mathfrak{N}^{\circ}(s) \leq C_{\varepsilon} \mathfrak{N}^f(s - L' - \varepsilon)$  elle-même facilement déduite d'une identité d'Abel convenablement écrite à partir des polynomes sections dirichlétiens des séries  $\varphi$  et  $f$ ;  $C_{\varepsilon}$  étant une constante finie convenable qui peut être prise égale à  $2 \sum_1^{\infty} |b_n| e^{-(L'+\varepsilon)\lambda_n}$

LEMME II.3.3. — Posant  $f_{\Lambda}(s) = \sum |a_n| e^{-s\lambda_n}$ , si  $L < \infty$  et  $\sigma_c^f = -\infty$  alors  $\rho_{\mathbb{R}}^f = \rho_{\mathbb{R}}^{f_{\Lambda}}$ .

Ce lemme se déduit immédiatement du lemme II.3.2. En effet il est évident que  $\rho_{\mathbb{R}}^f \leq \rho_{\mathbb{R}}^{f_{\Lambda}}$  puisque  $\mathfrak{N}_{\mathbb{B}}^f(\sigma) \leq \mathfrak{N}^{f_{\Lambda}}(\sigma) = \mathfrak{N}_{\mathbb{B}}^{f_{\Lambda}}(\sigma)$  pour chaque  $\sigma$  réel fini. Il suffit alors de prouver que  $\rho_{\mathbb{R}}^{f_{\Lambda}} \leq \rho_{\mathbb{R}}^f$ . Pour cela on pose  $a_n = |a_n| e^{i\omega_n}$ , avec  $0 \leq \omega_n < 2\pi$  et l'on considère la suite  $\{b_n\}$  avec  $b_n = e^{-i\omega_n}$ . Il est évident que  $b_n = o(e^{c\lambda_n})$ , où  $c > 0$  est arbitraire. Eu égard au lemme rappelé, on a alors  $\sigma_A^{f_{\Lambda}} = -\infty$  et  $\rho_{\mathbb{R}}^{f_{\Lambda}} \leq \rho_{\mathbb{R}}^f$ .

On remarquera que ce lemme est évident si l'on se réfère au théorème de J. F. Ritt qui exprime l'ordre au moyen des  $|a_n|$  et  $\lambda_n$  (mais c'est là une voie bien détournée pour établir une propriété aussi élémentaire).

LEMME II.3.4. — Posant

$$f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}, \quad \text{avec } \sigma_c^f < \infty$$

et

$$f_{\alpha}(s) = \sum [a_n e^{-s\lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha\lambda_n)]$$

où  $\alpha$  est une constante positive :

- (1) la série de somme  $f_{\alpha}(s)$  admet  $\sigma_c^{f_{\alpha}} = -\infty$ ;
- (2) si  $L < \infty$  alors la fonction  $f_{\alpha}(s)$  possède l'ordre  $\rho_{\mathbb{R}}^{f_{\alpha}} \leq 1/\alpha$ ;
- (3) si  $-\infty < \sigma_c^f < \infty$  et  $L = 0$ , alors l'ordre  $\rho_{\mathbb{R}}^{f_{\alpha}} = 1/\alpha$ .

a. Pour établir la propriété (1) on peut, entre autres procédés, utiliser la formule due à Kojima donnant dans le cas général l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet. Cette formule est la suivante :

$$\sigma_c^f = \overline{\lim} \left\{ \left( L \left| \sum_{[x] \leq \lambda_n < x} a_n \right| \right) / x \right\} \quad \text{pour } x \uparrow \infty,$$

$[x]$  représentant la partie entière de  $x$ .

Soit un nombre réel fini  $\sigma > \sigma_c^f$ . On peut lui faire correspondre un nombre positif fini  $x_\sigma$  tel que :

$$\left| \sum_{[x] \leq \lambda_n < x} a_n \right| < e^{\sigma x} \quad \text{pour } x > x_\sigma.$$

Soit  $x$  suffisamment grand et tel qu'il existe au moins un élément de la suite  $\{\lambda_n\}$  appartenant à  $[[x], x[$ ; on a, compte tenu de l'identité d'Abel appliquée

à la somme  $\sum_{N([x]+1}^{N(x)} a_n \gamma_n$ , avec  $\gamma_n = 1/\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)$  :

$$\left| \sum_{N([x]+1}^{N(x)} a_n \gamma_n \right| < e^{\sigma x} \gamma_{N([x]+1)} \leq e^{\sigma x} / \Gamma(1 + \alpha [x]).$$

On en déduit immédiatement,  $\sigma_c^{f\alpha} = -\infty$ .

b. On pose  $E(s) = \sum_1^\infty \gamma_n e^{-s \lambda_n}$ , avec comme ci-dessus  $\gamma_n = 1/\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)$ . En égard à la propriété (1) et à la condition  $L < \infty$  on a  $\sigma_\lambda^E = -\infty$ . Considérant la constante finie  $c > \sigma_\lambda^f (\leq L + \sigma_c^f)$  et utilisant l'identité d'Abel appliquée à la somme

$$\sum_1^N u_n \gamma_n e^{-s \lambda_n} \equiv \sum_1^N \delta_n \gamma_n e^{-(s-c) \lambda_n}, \quad \text{avec } \delta_n = a_n e^{-c \lambda_n},$$

on obtient

$$\mathfrak{M}^{f\alpha}(s) \leq C \mathfrak{M}^E(s - c), \quad \text{avec } C = 2 \sum_1^\infty |\delta_n|.$$

Il est dès lors évident que  $\rho_R^{f\alpha} \leq \rho_R^E$ , avec  $\rho_R^E = 1/\alpha$  d'après le théorème de J. F. Ritt.

On pouvait aussi se borner à constater que l'assertion (2) résulte de l'assertion (1) du lemme II. 3. 2.

c. Sous la condition  $L = 0$ , on a  $\sigma_c^f = \sigma_\lambda^f = \overline{\lim} (L |a_n| / \lambda_n)$ . Mais en outre, puisque  $\sigma_\lambda^f$  est fini, on a alors évidemment  $\overline{\lim} [L |a_n| / (\lambda_n L \lambda_n)] = 0$ . Appliquant le théorème de J. F. Ritt à la fonction  $f_\alpha(s)$ , on a  $\rho_R^{f\alpha} = 1/\alpha$ .

4. Le théorème de Lindelöf précisant le type de l'ordre (lorsque celui-ci est fini positif) d'une fonction entière (au moyen de la suite des coefficients du développement taylorien à l'origine) s'étend à une classe de séries de Dirichlet générales dont les sommes sont des fonctions entières d'ordre (R) fini positif.

On énonce :

THÉORÈME DE LINDELÖF-R (II.4.1). —  $\alpha$  étant un certain nombre non négatif, une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction entière  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_{\lambda}^f = -\infty$  et  $L = 0$ , d'ordre  $\rho_{\mathbb{R}}^f$  positif fini soit du type de cet ordre égal à  $\alpha$  est que :

$$\alpha e \rho_{\mathbb{R}}^f = \overline{\lim} \{ \lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} \} \quad (n \uparrow \infty).$$

on remarquera qu'ici, puisque  $L = 0$ , on a  $\tau_{\mathbb{R}}^f = 0_{\mathbb{R}}^f$ .

A. La condition est nécessaire.

Puisque  $\sigma_{\lambda}^f = -\infty$ , pour chaque  $\sigma$  fini et chaque indice  $n \geq 1$  on a

$$a_n e^{-\sigma \lambda_n} = \lim \left\{ (1/\tau') \int_{\tau_0}^{\tau'} f(s) e^{i\tau \lambda_n} d\tau \right\} \quad (\tau' \uparrow \infty).$$

Il en résulte que pour chaque indice  $n \geq 1$  et chaque nombre réel  $\sigma$  fini, on a

$$L | a_n | \leq L M_{\mathbb{R}}^f(\sigma) + \sigma \lambda_n.$$

Au nombre  $\varepsilon > 0$  fini arbitraire on peut faire correspondre un nombre positif  $\sigma_{\varepsilon}$  tel que ( $\tau_{\mathbb{R}}^f = \alpha$  étant fini) :

$$L M_{\mathbb{R}}^f(\sigma) < (\tau_{\mathbb{R}}^f + \varepsilon) e^{-\sigma \rho_{\mathbb{R}}^f} \quad \text{pour } \sigma < -\sigma_{\varepsilon}.$$

Pour chaque indice  $n \geq 1$  et pour  $\sigma < -\sigma_{\varepsilon}$ , on a

$$L | a_n | < (\tau_{\mathbb{R}}^f + \varepsilon) e^{-\sigma \rho_{\mathbb{R}}^f} + \sigma \lambda_n.$$

Le second membre est une fonction de  $\sigma$  qui atteint son minimum au point

$$\sigma_n = (1/\rho_{\mathbb{R}}^f) L[\rho_{\mathbb{R}}^f(\tau_{\mathbb{R}}^f + \varepsilon)/\lambda_n].$$

On a

$$\text{Min} \{ (\tau_{\mathbb{R}}^f + \varepsilon) e^{-\sigma \rho_{\mathbb{R}}^f} + \sigma \lambda_n \} = (\lambda_n / \rho_{\mathbb{R}}^f) \{ 1 + L[\rho_{\mathbb{R}}^f(\tau_{\mathbb{R}}^f + \varepsilon)/\lambda_n] \}.$$

Il est évident que

$$\lim \sigma_n = -\infty \quad \text{pour } n \uparrow \infty.$$

Il en résulte qu'il existe un indice  $n_{\varepsilon}$  tel que

$$L | a_n | < (\lambda_n / \rho_{\mathbb{R}}^f) \{ 1 + L[\dots] \},$$

c'est-à-dire

$$\lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} < e \rho_{\mathbb{R}}^f (\tau_{\mathbb{R}}^f + \varepsilon) \quad \text{pour } n > n_\varepsilon.$$

On a donc

$$\overline{\lim} \lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} \leq e \rho_{\mathbb{R}}^f \tau_{\mathbb{R}}^f.$$

Si  $\tau_{\mathbb{R}}^f = \infty$ , la relation ci-dessus est triviale.

Si  $\tau_{\mathbb{R}}^f = 0$ , il est évident qu'alors  $\lim \lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} = 0$ . La condition nécessaire est donc établie dans ce cas.

Pour achever la démonstration de la condition nécessaire il suffit maintenant d'établir, pour  $0 < \tau_{\mathbb{R}}^f \leq \infty$ , la relation d'ordre opposée, au sens large, entre les deux membres ci-dessus. Si une telle relation était fautive, on aurait nécessairement

$$\overline{\lim} \lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} < e \rho_{\mathbb{R}}^f \tau_{\mathbb{R}}^f.$$

On pose

$$\overline{\lim} \lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} = e \tau_{\mathbb{R}}^f.$$

On a donc  $0 \leq \tau < \tau_{\mathbb{R}}^f$ . Le nombre  $\varepsilon > 0$  étant suffisamment petit de sorte que  $\tau + \varepsilon < \tau_{\mathbb{R}}^f$  et le nombre  $\varepsilon' > 0$  étant choisi vérifiant la condition  $\tau \varepsilon' < \varepsilon$ , on considère le nombre  $\tau' = (\tau + \varepsilon) / (1 + \varepsilon')$ . Il est évident que  $\tau < \tau' < \tau_{\mathbb{R}}^f$ . A ce nombre  $\tau'$  fini positif, on peut faire correspondre un entier positif  $n_{\tau'}$ , tel que

$$\lambda_n | a_n |^{\rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n} < e \tau' \rho_{\mathbb{R}}^f,$$

c'est-à-dire

$$| a_n | < [e \tau' \rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n]^{\lambda_n / \rho_{\mathbb{R}}^f} \quad \text{pour } n > n_{\tau'}.$$

Il résulte de cette dernière relation qu'on a aussi, quel que soit l'entier  $n \geq 1$

$$| a_n | < C [e \tau' \rho_{\mathbb{R}}^f / \lambda_n]^{\lambda_n / \rho_{\mathbb{R}}^f},$$

où C est une constante positive finie convenablement choisie.

Quel que soit  $\sigma$  réel fini on a

$$M_{\mathbb{R}}^f(\sigma) \leq \sum_1^\infty | a_n | e^{-\sigma \lambda_n} \leq C \sum_1^\infty e^{-\sigma \lambda_n + (\lambda_n / \rho_{\mathbb{R}}^f) [1 + L \rho_{\mathbb{R}}^f + L \tau' - L \lambda_n]}.$$

On pose  $\nu_n = \lambda_n / \rho_{\mathbb{R}}^f$ . On a, quel que soit  $\sigma$  réel fini,

$$M_{\mathbb{R}}^f(\sigma) \leq C \left( \sum e^{-\nu_n L (1 + \varepsilon')} \right) \overline{\text{Borne}}_{n \geq 1} \left\{ e^{\nu_n [1 - \sigma \rho_{\mathbb{R}}^f + L (\tau + \varepsilon) - L \nu_n]} \right\}$$

La série du second membre est évidemment convergente; il est évident en outre que la borne supérieure figurant au second membre est au plus égale à

$$\overline{\text{Borne}}_{x > 0} \left\{ e^{x [1 - \sigma \rho_{\mathbb{R}}^f + L (\tau + \varepsilon) - L x]} \right\}$$

on rappelle que  $\nu_1 > 0$  puisqu'on a supposé  $\lambda_1 > 0$ .

La fonction de  $x > 0$  :

$$e^{-xLx + x[1 - \sigma \rho_R^f + L(\tau + \varepsilon)]}$$

tend vers 0 avec  $1/x$  et atteint son maximum égal à  $e^{(\tau + \varepsilon)e^{-\sigma \rho_R^f}}$  sur la demi-droite  $x > 0$  au point  $(\tau + \varepsilon)e^{-\sigma \rho_R^f}$ .

Il en résulte que, quel que soit  $\sigma$  réel fini, on a

$$LM_B^f(\sigma) \leq (\tau + \varepsilon)e^{-\sigma \rho_R^f} + C_\varepsilon,$$

où  $C_\varepsilon$ , est une constante finie; par conséquent on aboutit à la contradiction

$$\tau_R^f = \overline{\lim} \{ LM_B^f(\sigma) / e^{-\sigma \rho_R^f} \} \leq \tau + \varepsilon < \tau_R^f.$$

B. La condition suffisante se démontre d'une manière analogue.

COROLLAIRE. — Si  $-\infty < \sigma_c^f < \infty$  et si  $L = 0$ , alors  $f_\alpha(s)$  est du type  $\tau_R^{f_\alpha} = e^{\sigma_c^f/\alpha}$  de l'ordre  $1/\alpha$ .

Eu égard à l'assertion (3) du lemme II.3.4, on a  $\rho_R^{f_\alpha} = 1/\alpha$ . Le théorème de Lindelöf-R donne immédiatement

$$1 + L\tau_R^{f_\alpha} = \overline{\lim} \{ L(\alpha\lambda_n) + L|a_n|/(\alpha\lambda_n) - L\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)/(\alpha\lambda_n) \};$$

d'où résulte (eu égard à une expression connue de  $\sigma_c^f$  quand  $L = 0$ ),  $\tau_R^{f_\alpha} = e^{\sigma_c^f/\alpha}$ .

5. Il est intéressant de comparer l'ordre classique,  $\rho^f$ , et l'ordre au sens de Ritt,  $\rho_R^f$ , d'une fonction entière  $f(s)$ . A ce sujet, il est à peine besoin de rappeler, en utilisant l'ordre  $\rho^{f^\wedge}$  de  $f_\wedge(s)$  les résultats triviaux suivants :

les ordres  $\rho^{f^\wedge}$  et  $\rho_R^{f^\wedge}$  pour la fonction entière  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_\wedge^f = -\infty$ , vérifient la relation  $\rho^{f^\wedge} \geq \rho_R^{f^\wedge}$ ; plus précisément, on a

$$1^\circ \quad \rho_R^f = \rho^{f^\wedge} \text{ si } \rho_R^f = \infty;$$

2° si  $\rho^{f^\wedge} < \infty$  alors on a  $\rho_R^f = 0$  (si la suite  $\{a_n\}$  est réelle non négative alors on a  $\rho^f \geq \rho_R^f$ ).

Si  $\rho_R^f = 0$  il peut être intéressant de déterminer  $\rho^f$ ; si  $\rho^f = \infty$  il est alors intéressant de déterminer  $\rho_R^f$ .

THÉORÈME II.5.2. — Si la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$  est entière, avec  $\sigma_\wedge^f = -\infty$ , alors la fonction  $f^*(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n^*}$ , avec  $\lambda_n^* = L\lambda_n$ , est entière et d'ordre  $\rho_R^{f^*} = 0$  (avec  $\overline{\lim} \{ Ln/\lambda_n^* \} < \infty$ ).

On suppose  $\lambda_1 > 1$ . On démontre facilement que la fonction  $f^*(s)$  est entière, avec  $\sigma_\wedge^{f^*} = -\infty$ . Envisageons d'abord le cas où les coefficients sont tous non

négatifs. Supposons fausse l'assertion du théorème; la fonction  $f^*(s)$  aurait alors un ordre

$$\rho_{\mathbb{R}}^{f^*} = \overline{\lim} \{ L_2 \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(\sigma) / (-\sigma) \} > 0.$$

En un point  $s$  fini quelconque, on a :

$$f(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \{ [(-1)^p s^p f^*(-p)] / \Gamma(p+1) \}.$$

Puisque  $a_n \geq 0$ , on a  $\mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(-p) = f^*(-p)$  et donc,

$$-1/\rho^f = \overline{\lim} \{ [L \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(-p) - L\Gamma(p+1)] / (pL_p) \} \quad (p \uparrow \infty).$$

Au nombre  $\varepsilon$  choisi tel que  $0 < \varepsilon < \rho_{\mathbb{R}}^{f^*}$ , on peut associer une suite infinie négative, strictement décroissante, non bornée inférieurement,  $\{\sigma_j\}$ , telle que

$$-(\rho_{\mathbb{R}}^{f^*} - \varepsilon) \sigma_j < L_2 \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(\sigma_j)$$

$\langle \sigma \rangle$  représentant la partie entière de  $|\sigma|$ , on a

$$\mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(\sigma_j) < \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(-\langle \sigma_j \rangle - 1) \quad \text{et} \quad (\rho_{\mathbb{R}}^{f^*} - \varepsilon) \langle \sigma_j \rangle < L_2 \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(-\langle \sigma_j \rangle - 1).$$

Il en résulte la contradiction

$$\begin{aligned} +\infty &= \lim \{ e^{(\rho_{\mathbb{R}}^{f^*} - \varepsilon) \langle \sigma_j \rangle} / [(\langle \sigma_j \rangle + 1) L(\langle \sigma_j \rangle + 1)] \} - 1 \\ &\leq \overline{\lim} \{ L \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(-p) / (pL_p) \} - 1 = -1/\rho^f, \quad \text{avec} \quad \rho^f \geq 0. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $a_n$  complexe. La fonction  $f_{\lambda}(s)$  admet évidemment  $\sigma_c^{f_{\lambda}} = -\infty$ . Le cas antérieur s'applique à cette fonction et par conséquent la fonction  $f_{\lambda}^*(s) = \sum |a_n| e^{-s\lambda_n^*}$  est entière, avec  $\sigma_c^{f_{\lambda}^*} = -\infty$  et d'ordre  $\rho_{\mathbb{R}}^{f_{\lambda}^*} = 0$ . En outre, il est évident que  $\mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f^*}(\sigma) \leq \mathfrak{N}_{\mathbb{b}}^{f_{\lambda}^*}(\sigma) = f_{\lambda}^*(\sigma)$ .

Par conséquent  $\rho_{\mathbb{R}}^{f^*} \leq \rho_{\mathbb{R}}^{f_{\lambda}^*}$ ; en définitive  $\rho_{\mathbb{R}}^{f^*} = \rho_{\mathbb{R}}^{f_{\lambda}^*} = 0$ .

*Remarque 1.* — La condition  $\lambda_1 > 1$  n'est pas restrictive. En effet, pour  $0 < \lambda_1 \leq 1$  il existe un entier positif fini  $n_0$  tel que  $\lambda_n^* > 0$  pour  $n > n_0$  et  $\lambda_n^* \leq 0$  pour  $n \leq n_0$ . Au lieu de sommer depuis  $n=1$ , on considère alors les deux séries

$$\sum_{n > n_0} a_n e^{-s\lambda_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n > n_0} a_n e^{-s\lambda_n^*}$$

dont les suites d'exposants sont positives. En outre, le polynôme dirichlétien,  $\sum_1^{n_0} a_n e^{-s\lambda_n^*}$ , est borné en module dans chaque demi-plan  $\sigma < \sigma_0$  avec  $\sigma_0$  fini. On peut donc se limiter à la considération de ces deux séries tronquées.

*Remarque 2.* — Dans un Mémoire antérieur [II.2] j'ai démontré, à l'aide de méthodes différentes de celle-ci, des propriétés plus fines qui contiennent le théorème II.5.2 comme cas particulier.

*Remarque 3.* — Omettant la Condition  $\overline{\lim} \{Ln/\lambda_n^*\} < \infty$ , le théorème reste vrai en substituant  $\rho_R^{f^*}$  à  $\rho_R^f$ .

6. LEMME II.6.1. — Si  $L < \infty$  et  $0 < \alpha < \infty$ , et si  $\{t_n\}$  est une suite de nombres complexes telle que la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s t_n}$ , avec  $a_n = t_n^{2\lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n)$ , est entière avec  $\sigma_A^f = -\infty$ , alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre  $\rho_R^f = 1/\alpha$  est que  $\overline{\lim} \{L |t_n| / L \lambda_n\} = 0$ .

LEMME II.6.2. —  $\beta$  étant un certain nombre non négatif, alors, sous les conditions antérieures,  $0 < \alpha < \infty$ ,  $a_n = t_n^{2\lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n)$ , et  $L = 0$  au lieu de seulement  $L < \infty$ , pour que la fonction entière  $f(s)$ , avec  $\sigma_A^f = -\infty$ , d'ordre  $1/\alpha$ , soit du type  $\tau_R^f = \beta$  de cet ordre, il est nécessaire et suffisant que  $\overline{\lim} |t_n| = \beta$ .

Ces lemmes résultent immédiatement des théorèmes de J. F. Ritt et de Lindelöf-R, compte tenu de la forme de  $a_n$ .

7. THÉORÈME II.7.1. — Si la fonction entière  $f(s) = \sum a_n e^{-s t_n}$ , avec  $L = 0$  et  $\sigma_A^f = -\infty$ , est d'ordre  $\rho_R^f$  positif, alors, étant donnés deux nombres finis positifs arbitraires  $\tau$  et  $\rho$  avec  $\rho < \rho_R^f$ , on peut toujours trouver une suite de constantes,  $\{b_n\}$ , telle que la série  $\sum |b_n|$  converge et que la fonction  $F(s) = \sum a_n b_n e^{-s t_n}$  soit entière, avec  $\sigma_A^F = -\infty$ , et du type moyen  $\tau$  de l'ordre  $\rho_R^F = \rho$ .

On se limitera pour la démonstration au cas où  $\rho_R^f$  est fini. (Le cas  $\rho_R^f = \infty$  se démontre, à des détails de technique près, d'une manière analogue.)  $\omega$  étant un nombre fini positif arbitraire, on peut poser  $\rho = \rho_R^f / (1 + \omega)$ . Les conditions du théorème de Ritt étant satisfaites pour la fonction  $f(s)$ , on pose  $\varepsilon_n = L |a_n| / (\lambda_n L \lambda_n)$ ; on a  $\overline{\lim} \varepsilon_n = -1/\rho_R^f$ , et l'on peut extraire de la suite  $\{\varepsilon_n\}$  une sous-suite infinie  $\{\varepsilon_{n_j}\}$  convergente vers  $-1/\rho_R^f$ . On considère une suite réelle  $\{\varepsilon_n^*\}$  telle que  $\varepsilon_n^* \geq \varepsilon_n$ , avec  $\varepsilon_{n_j}^* = \varepsilon_{n_j}$ , et convergente aussi vers  $-1/\rho_R^f$ .

On pose  $\tau' = \tau e \rho_R^f / (1 + \omega)$ .

On considère enfin la suite réelle  $\{\theta_n\}$ , où  $\theta_n$  est donné par la relation :

$$\theta_n = [-1 - \varepsilon_n^* \rho_R^f / (1 + \omega) + L \tau' / L \lambda_n] (1 + \omega) / \rho_R^f.$$

Il est évident que  $\lim \theta_n = -\omega / \rho_R^f$ .

On choisit une suite de constantes  $\{b_n\}$ , de sorte que pour chaque entier  $n \geq 1$  on ait

$$L |b_n| / (\lambda_n L \lambda_n) = \theta_n,$$

et l'on considère les fonctions

$$F(s) = \sum a_n b_n e^{-s\lambda_n} \quad \text{et} \quad \varphi(s) = \sum b_n e^{-s\lambda_n}.$$

Il est évident, avec le choix ci-dessus de la suite  $\{b_n\}$ , que  $\sigma_A^{\varphi} = -\infty$  et que  $\sigma_A^F = -\infty$ . En outre, on a

$$-1/\rho_R^F = -1/\rho_R^f + \lim \theta_n = -(1 + \omega)/\rho_R^f,$$

c'est-à-dire que, précisément,  $\rho_R^F = \rho_R^f / (1 + \omega)$ .

Les conditions du théorème de Lindelöf-R sont satisfaites pour la fonction  $F(s)$ , et l'on a

$$\begin{aligned} L\tau_R^F + 1 + L\rho_R^F &= \overline{\lim} \{ L\lambda_n + \rho_R^F(\varepsilon_n + \theta_n) L\lambda_n \} \\ &= \overline{\lim} \{ L\tau' + \rho_R^F(\varepsilon_n - \varepsilon_n^*) L\lambda_n \}. \end{aligned}$$

Puisque  $\varepsilon_{n_j}^* = \varepsilon_{n_j}$ , on a

$$L\tau_R^F \geq -1 - L\rho_R^F + L\tau' = L\tau.$$

La fonction  $F(s)$  ne peut donc pas être du type minimal de l'ordre  $\rho_R^F = \rho_R^f / (1 + \omega)$ . En outre, il est évident que

$$L\tau_R^F \leq -1 - L\rho_R^F + L\tau' = L\tau$$

puisque  $\varepsilon_n - \varepsilon_n^* \leq 0$ . On a donc  $\tau_R^F = \tau$ .

En définitive, pour la suite  $\{b_n\}$  choisie comme on l'a précisé ci-dessus, d'une part la série  $\sum |b_n|$  converge et d'autre part la fonction  $F(s)$  est entière du type fini positif  $\tau$  de l'ordre fini positif  $\rho_R^f / (1 + \omega)$ . On remarquera que le théorème est légitime quel que soit le type de l'ordre de la fonction  $f(s)$ . On remarquera, en outre, qu'il est évident qu'il n'est pas contradictoire que  $\tau_R^F$  puisse être supérieur à  $\tau_R^f$ .

Pour la suite  $\{b_n\}$  déterminée ci-dessus, la convergence de la série entraîne, comme on le prouve facilement :

**COROLLAIRE.** — Dans une bande quelconque  $B(\tau_0; R)$ , on a toujours  $\rho_B^F \leq \rho_B^f$ .

Le théorème antérieur est complété par le suivant :

**THÉORÈME II.7.2.** —  $\tau$  étant un nombre fini positif arbitrairement fixé, si la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $L = 0$  et  $\sigma_A^f = -\infty$ , est du type maximal de son ordre  $\rho_R^f$  (avec  $0 < \rho_R^f < \infty$ ), alors on peut toujours trouver une suite de constantes,  $\{b_n\}$ , telle que la fonction  $\varphi(s) = \sum b_n e^{-s\lambda_n}$  soit entière, avec  $\sigma_A^{\varphi} = -\infty$ , d'ordre  $\rho_R^{\varphi} = \infty$ , et en outre que la fonction  $F(s) = \sum a_n b_n e^{-s\lambda_n}$  soit entière, avec  $\sigma_A^F = -\infty$ , et du type  $\tau_R^F = \tau$  de l'ordre  $\rho_R^F = \rho_R^f$ .



On se propose de donner une méthode pour déterminer une telle suite  $\{b_n\}$ . On pose  $\rho_R^f = 1/\alpha$ . On peut écrire

$$f(s) = \sum \{ t_n^{\alpha \lambda_n} e^{-s \lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) \},$$

où  $\{t_n\}$  est une suite définie, pour chaque entier  $n \geq 1$ , par la relation

$$a_n = t_n^{\alpha \lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n).$$

(on ne diminue pas la généralité en supposant chaque  $a_n \neq 0$ ).

La suite  $\{t_n\}$  vérifie (eu égard au théorème de J. F. Ritt) la condition  $\overline{\lim}(L|t_n|/L\lambda_n) = 0$ , et (eu égard au théorème de Lindelöf-R) la condition  $\overline{\lim}|t_n| = \infty$ .

On considère la série

$$\psi_0(s) = \sum \{ \theta_n^{\alpha \lambda_n} e^{-s \lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) \},$$

où  $\{\theta_n\}$  est une suite vérifiant la condition,  $\lim|\theta_n| = \tau$ .

La fonction  $\psi_0(s)$  est entière, avec  $\sigma_\lambda^{\psi_0} = -\infty$ , du type  $\tau_R^{\psi_0} = \tau$  de l'ordre  $\rho_R^f$ , comme on le vérifie facilement. On pose  $\omega_n = L|t_n|/L\lambda_n$ . Puisque  $\overline{\lim}|t_n| = \infty$  et  $\overline{\lim}\omega_n = 0$ , on peut extraire de la suite  $\{t_n\}$  une sous-suite infinie  $\{t_{n_j}\}$  vérifiant les deux conditions,  $\lim|t_{n_j}| = \infty$  et  $\lim\omega_{n_j} = 0$ .

On considère, rapportée à un système d'axes rectangulaires, la ligne polygonale dont les sommets sont les  $M_{n_j}(L\lambda_{n_j}, L|t_{n_j}|)$  et constituée par l'ensemble des segments joignant pour chaque entier  $j$ , le point  $M_{n_j}$  au point  $M_{n_{j+1}}$ . Soit un entier positif quelconque  $n$ ; si le point  $M_n(L\lambda_n, L|t_n|)$  est au-dessous de cette ligne polygonale, on considère alors le point  $M_n^*(L\lambda_n, \nu_n)$ , d'abscisse  $L\lambda_n$ , et situé sur cette ligne (et dont on représente par  $\nu_n$  l'ordonnée). Si, par contre, le point  $M_n(L\lambda_n, L|t_n|)$  est situé au-dessus ou sur la ligne polygonale, on le note  $M_n^*(L\lambda_n, \nu_n)$ , où l'ordonnée  $\nu_n$  est égale à  $L|t_n|$ . Le point  $M_{n_j}^*(L\lambda_{n_j}, \nu_{n_j})$  n'est autre que le sommet  $M_{n_j}(L\lambda_{n_j}, L|t_{n_j}|)$ .

On pose  $t_n^* = e^{\nu_n}$ . La suite  $\{t_n^*\}$  ainsi définie vérifie les conditions,  $\lim t_n^* = \infty$  et  $\lim(Lt_n^*/L\lambda_n) = 0$ .

On pose  $b_n = (\theta_n/t_n^*)^{\alpha \lambda_n}$  et l'on considère la série  $\varphi(s) = \sum b_n e^{-s \lambda_n}$ . On a, comme il est évident,  $\sigma_\lambda^\varphi = -\infty$  et  $\rho_R^\varphi = \infty$ . Il est évident aussi que la série  $F(s) = \sum a_n b_n e^{-s \lambda_n}$  admet  $\sigma_\lambda^F = -\infty$ ,  $\rho_R^F = \rho_R^f$ , et  $\tau_R^F = \tau$ . Comme ci-dessus, la convergence de la série  $\sum |b_n|$  entraîne :

**COROLLAIRE 1.** — *Dans une bande quelconque  $B(\tau_0; R)$  on a toujours  $\rho_B^F \leq \rho_B^f$ . Compte tenu de  $\sigma_\lambda^\varphi = -\infty$  pour la fonction  $\varphi(s)$  déterminée ci-dessus, on montre facilement en utilisant une identité d'Abel convenable :*

COROLLAIRE 2. — *S'il existe une bande dans laquelle la fonction  $f(s)$  est du type  $\tau_B^f$  fini de l'ordre  $\rho_B^f$  et si en outre  $\rho_B^f = \rho_B^f$ , alors nécessairement  $\tau_B^f = 0$ .*

CHAPITRE III.

1. On rappelle le théorème de M. Riesz relatif à l'étoile rectiligne d'holomorphie d'une série de Dirichlet : l'abscisse  $\sigma_\tau$  du sommet de l'étoile rectiligne de la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_c^f < \infty$ , qui appartient à la droite  $\Im s = \tau$ , est donnée par la relation

$$\sigma_\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\omega \rightarrow +\infty} \{ \alpha L\omega^+ |f_\alpha(-\omega + i\tau)| - \omega \},$$

où

$$L^+ x = \begin{cases} Lx & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Empruntant à peu de chose près la terminologie à V. Bernstein et utilisant la technique qui conduit au théorème de M. Riesz, on démontre :

THÉORÈME III.1.1. — *Si la fonction  $f_\alpha(s) = \sum \{ a_n e^{-s\lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha\lambda_n) \}$  avec  $0 < \alpha < \infty$ , est dans une certaine bande  $B(\tau_0; R)$  du type  $\tau_B^{f_\alpha}$  au plus moyen de l'ordre  $1/\alpha$ , alors la fonction  $f(s)$  avec  $\sigma_c^f < \infty$  est holomorphe dans la demi-bande ensemble des points finis  $s = \sigma + i\tau$  tels que  $|\tau - \tau_0| \leq R$ ,  $\sigma > \alpha L \tau_B^{f_\alpha}$ ; si la fonction  $f_\alpha(s)$  est dans la bande  $B(\tau_0; R)$  d'ordre  $\rho_B^{f_\alpha} < 1/\alpha$ , alors la fonction  $f(s)$  est holomorphe dans cette bande.*

On pose  $e^s = z^\alpha$ .  $u$  étant réelle finie quelconque, on pose  $e^u = z\zeta$ . Il est évident que  $z$  et  $\zeta$  sont en général complexes. On déduit  $\zeta = \rho e^{-i\tau/\alpha}$ , avec  $\rho = e^u / |z|$ .

Lorsque  $u$  décrit la droite numérique, le point  $\zeta$  ( $\tau$  étant réel fixé) décrit la demi-droite  $\arg \zeta = -\tau/\alpha$ . On pose, avec  $\zeta (\neq 0)$ , quelconque et  $L\zeta$  représentant la détermination principale du logarithme de  $\zeta$ ,

$$\Phi_\alpha(\zeta) = f_\alpha(-\alpha L\zeta) = \sum_1^\infty \{ a_n \zeta^{\alpha\lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha\lambda_n) \}.$$

La série est convergente. La fonction  $\Phi_\alpha(\zeta)$  est holomorphe sur chaque demi-droite  $\arg \zeta = -\tau/\alpha$ ,  $0 < |\zeta| < \infty$ .

On sait que la représentation

$$f(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-e^u} f_\alpha(s - \alpha u) e^u du,$$

est légitime en chaque point fini  $s$  avec  $\sigma > \sigma_c^f$  (la fonction  $f(s)$  étant, au point  $s$ , la somme de la série  $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$ ).

On pose, pour  $z$  avec  $R(\alpha L z) > \sigma_c^f$ ,

$$F(z) = (1/z) f(\alpha L z).$$

La représentation ci-dessus devient

$$F(z) = \int_0^{\infty (\text{Arg} \zeta = -\tau/\alpha)} e^{-z\zeta} \Phi_\alpha(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi la fonction  $F(z)$  est la transformée de Laplace, calculée sur le rayon  $\arg \zeta = -\tau/\alpha$ , de la fonction  $\Phi_\alpha(\zeta)$ .

On pose

$$h_\alpha(\tau) = \overline{\lim} \{ L^+ |\Phi_\alpha(\rho e^{-i\tau/\alpha})| / \rho \} \quad \text{pour } \rho \uparrow \infty.$$

Puisque  $z = |z| e^{i\tau/\alpha}$ , on sait que l'intégrale de Laplace converge pour chaque  $z$  fini avec  $|z| > h_\alpha(\tau)$ , et diverge pour chaque  $z$  fini avec  $0 < |z| < h_\alpha(\tau)$ ; mais elle converge ou diverge en même temps que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-eu} f_\alpha(s - \alpha u) e^u du.$$

Ainsi cette dernière intégrale converge pour chaque  $s$  fini avec  $\sigma > \alpha L h_\alpha(\tau)$  et diverge pour chaque  $s$  avec  $\sigma < \alpha L h_\alpha(\tau)$ .

Ayant rappelé ces résultats connus, on considère la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\zeta) &= \sum \{ \alpha_n e^{z \lambda_n L \zeta} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) \} \\ &= \sum \alpha_n e^{-\lambda_n (L\tau - \alpha L \zeta)} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) \}, \end{aligned}$$

pour  $\tau$  satisfaisant à la condition  $|\tau - \tau_0| \leq R$ .

Or on a

$$|\Phi_\alpha(\zeta)| \leq \mathcal{N}_B^{f_\alpha}(-\alpha L \rho) \quad \text{pour } \rho > 0,$$

avec

$$\lim \mathcal{N}_B^{f_\alpha}(-\alpha L \rho) = \infty \quad \text{pour } \rho \uparrow \infty,$$

et quelle que soit  $\tau$  vérifiant la condition  $|\tau - \tau_0| \leq R$ , on a, pour  $\rho \uparrow \infty$ ,

$$h_\alpha(\tau) \leq \overline{\lim} \{ L \mathcal{N}_B^{f_\alpha}(-\alpha L \rho) / \rho \} = \tau_B^{f_\alpha}.$$

De la relation  $\overline{\text{Borné}} h_\alpha(\tau) \leq \tau_B^{f_\alpha}$ , pour  $|\tau - \tau_0| \leq R$ , résulte que  $f(s)$  est holomorphe dans la demi-bande  $|\tau - \tau_0| \leq R$ ,  $\sigma > \alpha L \tau_B^{f_\alpha}$ . Cette demi-bande devient la bande entière  $B(\tau_0; R)$  si la fonction  $f_\alpha(s)$  est du type minimal (de l'ordre  $1/\alpha$ ) c'est-à-dire si  $\tau_B^{f_\alpha} = 0$ . La première assertion du théorème est établie.

On considère maintenant le cas où, dans la bande  $B(\tau_0; R)$ , la fonction  $f_\alpha(s)$  possède un ordre  $\rho_B^{f_\alpha} < 1/\alpha$ . Soit le nombre positif  $\rho'$  satisfaisant à la condition  $\rho_B^{f_\alpha} < \rho' < 1/\alpha$ . Il existe un nombre positif  $\rho_0$  tel que pour  $\rho > \rho_0$  :

$$L \mathcal{N}_B^{f_\alpha}(-\alpha L\rho) < \rho^{1-\omega},$$

avec  $0 < \omega = 1 - \alpha\rho' < 1$ .

Il en résulte que pour  $\rho \uparrow \infty$  :

$$\lim \{ L \mathcal{N}_B^{f_\alpha}(-\alpha L\rho)/\rho \} = 0.$$

Ainsi, pour chaque  $\tau$  vérifiant la condition  $|\tau - \tau_0| \leq R$ , on a  $h_\alpha(\tau) = 0$ . La fonction  $f(s)$  est donc holomorphe dans la bande  $B(\tau_0; R)$ . La seconde assertion du théorème est établie. On peut énoncer :

**THÉORÈME III.4.2.** — *Une condition nécessaire pour que la fonction  $f_\alpha(s)$  soit dans une bande  $B(\tau_0; R)$  d'ordre  $\rho_B^{f_\alpha} < 1/\alpha$  est que la fonction  $f(s)$  soit holomorphe dans cette bande.*

*Une condition nécessaire pour que  $f_\alpha(s)$  soit dans cette bande du type  $\tau_B^{f_\alpha}$  de l'ordre  $1/\alpha$ , est que  $f(s)$  soit holomorphe dans la demi-bande  $|\tau - \tau_0| \leq R$ ,  $\sigma > \alpha L \tau_B^{f_\alpha}$  (on suppose  $0 < \alpha < \infty$  et  $\sigma_B^f < \infty$ ).*

De ce théorème on déduit immédiatement le corollaire :

**COROLLAIRE 1.** — *Si la droite  $\sigma = \sigma_B^f$  (avec  $-\infty < \sigma_B^f < \infty$ ) est une coupure pour la fonction  $f(s)$ , alors dans chaque bande horizontale de largeur finie :*

1° l'ordre de  $f_\alpha(s)$  est égal à  $1/\alpha$ ;

2° le type de cet ordre ne peut être inférieur à  $e^{\sigma_B^f/\alpha}$ .

Il est, en outre, évident que :

**COROLLAIRE 2.** — *Une condition nécessaire pour que la fonction  $f_\alpha(s)$  soit d'ordre  $\rho_B^{f_\alpha} < 1/\alpha$  est que  $f(s)$ , avec  $\sigma_c^f < \infty$ , soit une fonction entière.*

**THÉORÈME III.4.3.** — *Si la suite  $\{\lambda_n\}$  est à densité maximale  $D$  finie et si  $f(s)$  avec  $\sigma_c^f < \infty$ , n'est pas une fonction entière, alors il est impossible que la fonction entière  $f_\alpha(s)$  possède dans une bande  $B(\tau_0; R)$  un ordre  $\rho_B^{f_\alpha} < 1/\alpha$  ou un type  $\tau_B^{f_\alpha} < e^{\sigma_B^f/\alpha}$  de l'ordre  $1/\alpha$  si  $R > \pi D$ .*

En effet, s'il existait une telle bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $R > \pi D$ , dans laquelle la fonction  $f_\alpha(s)$  possède l'ordre  $\rho_B^{f_\alpha} < 1/\alpha$ , alors la fonction  $f(s)$  serait holomorphe dans cette bande. Il existerait donc sur l'axe d'holomorphie  $\sigma = \sigma_B^f$  [avec  $\sigma_B^f$  fini puisque  $f(s)$  n'est pas entière], un segment de longueur supérieure à  $2\pi D$  et ne contenant aucun point singulier pour  $f(s)$ . La contradiction avec un théorème classique dû à G. Pólya démontre la propriété. La seconde assertion se démontre de la même manière.

*Remarque.* — La première assertion du théorème ci-dessus n'est autre que le théorème de S. Mandelbrojt rappelé au chapitre I énoncé et démontré ici, et complété quant au type, pour une certaine classe de fonctions. Dans l'énoncé de S. Mandelbrojt, figure la condition,  $\underline{\lim}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ , beaucoup plus limitative que la condition ci-dessus sur  $\{\lambda_n\}$ .

2. Cette condition,  $\underline{\lim}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ , entraîne que la suite  $\{\lambda_n\}$  est à densité maximale finie, à indice de condensation égal à zéro, et que  $L = 0$ . On montre [III. 4] que si  $D^* < \infty$ , on a aussi  $D^* \leq D$ . On complète cette propriété en prouvant facilement que si  $D^* = \infty$  alors  $D = \infty$ , c'est-à-dire qu'on a toujours  $D^* \leq D$ . Il est alors évident que la condition  $D < \infty$  entraîne  $L = 0$ . Substituant la densité maximale à la densité supérieure, on est maintenant en mesure de démontrer très simplement le théorème de S. Mandelbrojt et de le compléter quant au type. A ce sujet, on énonce :

THÉOREME III. 2. 1. — *Sous les conditions :*

1° la suite  $\{\lambda_n\}$  est à densité maximale  $D$  finie et à indice de condensation  $\delta$  fini;

2°  $0 < \rho_R^f < \infty$ .

Alors dans chaque bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $\tau_0$  fini et  $R > \pi D$ , la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_A^f = -\infty$ , est de l'ordre  $\rho_B^f = \rho_R^f$  et du type  $\tau_B^f$  de cet ordre, avec  $\tau_R^f e^{-\delta \rho_R^f} \leq \tau_B^f \leq \tau_R^f = e^{\rho_R^f \sigma_C^f}$ , en posant

$$f^*(s) = \sum a_n \Gamma(1 + \lambda_n / \rho_R^f) e^{-s\lambda_n}.$$

Démontrons d'abord que  $\rho_B^f = \rho_R^f$ . A cet effet supposons fautive cette assertion, c'est-à-dire qu'on a  $0 \leq \rho_B^f < \rho_R^f$ . Soit un nombre  $\rho$  tel que  $\rho_B^f < \rho < \rho_R^f$ , et soit  $\tau$  un certain nombre positif fini. Eu égard au théorème II. 7. 1, on peut déterminer une suite  $\{b_n\}$  telle que la série  $\sum |b_n|$  converge et que la fonction

$$F(s) = \sum a_n b_n e^{-s\lambda_n}$$

soit entière, avec  $\sigma_A^F = -\infty$ , et du type moyen  $\tau$  de l'ordre  $\rho_R^F = \rho$ .

La fonction  $F^*(s) = \sum a_n b_n \Gamma(1 + \lambda_n / \rho) e^{-s\lambda_n}$  admet l'abscisse de convergence fini  $\sigma_C^{F^*} = \sigma_A^{F^*} = L\tau / \rho$ .

Eu égard à un théorème de V. Bernstein on a  $\sigma_C^{F^*} - \sigma_H^{F^*} \leq \delta < \infty$  et donc l'abscisse d'holomorphicité  $\sigma_H^{F^*}$  est finie.

Dans une bande  $B(\tau_0; R)$ , où  $\tau_0$  est fini et  $R > \pi D$ , la fonction  $F(s)$  ne peut pas posséder un ordre  $\rho_B^F < \rho_R^F = \rho$ . En effet, sinon eu égard au théorème III. 1. 1,

la fonction  $F^*(s)$  serait holomorphe dans cette bande, et par conséquent il existerait sur l'axe d'holomorphe  $\sigma = \sigma_H^{F^*}$  un segment de longueur supérieure à  $2\pi D$  sur lequel la fonction  $F^*(s)$  serait holomorphe. La contradiction avec le théorème déjà utilisé antérieurement de Pólya prouve que  $\rho_B^F = \rho_R^F$ .

Eu égard au corollaire du théorème II.7.1 on a  $\rho_B^F \leq \rho_R^f$ . En définitive, on aurait

$$\rho_B^F \leq \rho_B^f < \rho_R^F = \rho < \rho_R^f.$$

La contradiction établit la première assertion du théorème.

La seconde assertion du théorème est triviale si  $\tau_R^f = 0$ . Pour la démontrer dans le cas  $\tau_R^f > 0$ , supposons-la fautive, c'est-à-dire que  $0 \leq \tau_B^f < \tau_R^f e^{-\delta \rho_R^f}$  (ce qui implique  $\tau_B^f$  fini si  $\tau_R^f = \infty$ ).

Si  $\tau_R^f = \infty$ , on considère un nombre quelconque fini  $\tau_1 > \tau_B^f$ . On sait qu'on peut trouver une suite  $\{b_n\}$  telle que les fonctions  $\varphi(s) = \sum b_n e^{-s\lambda_n}$  et  $F(s) = \sum a_n b_n e^{-s\lambda_n}$  sont entières, avec  $\sigma_A^F = \sigma_A^f = -\infty$ ,  $\rho_R^F = \infty$ ,  $\rho_R^f = \rho_R^f$  et  $\tau_R^F = \tau_1$ . On considère alors la fonction

$$F^*(s) = \sum \{ a_n b_n \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) e^{-s\lambda_n} \}, \quad \text{avec } \alpha = 1/\rho_R^f.$$

Il est évident que  $\sigma_C^{F^*} = \sigma_A^{F^*} = L\tau_1/\rho_R^F$ . Comme antérieurement (eu égard à un théorème classique de V. Bernstein) on a  $\rho_C^{F^*} - \rho_H^{F^*} \leq \delta$ .  $\sigma_H^{F^*}$  est donc fini. La fonction  $F(s)$  est dans la bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $R > \pi D$ , du type  $\tau_B^F \geq \tau_1 e^{-\delta \rho_R^f} > 0$  (en effet, dans le cas contraire on aurait  $L\tau_B^F/\rho_R^f < \sigma_C^{F^*} - \delta \leq \sigma_H^{F^*}$ ; la fonction  $F^*(s)$  serait holomorphe dans la demi-bande ensemble des points finis  $s = \sigma + i\tau$  tels que  $|\tau - \tau_0| < R$ ,  $\sigma > L\tau_B^F/\rho_R^f$ , et il existerait un segment de longueur supérieure à  $2\pi D$  de l'axe  $\sigma = \sigma_H^{F^*}$  sur lequel  $F^*(s)$  serait holomorphe). Ce qui suit et achève l'étude du cas  $\tau_R^f = \infty$  n'est autre que la démonstration du corollaire 2 du théorème II.7.2. Considérant l'identité d'Abel

$$F_N(s) = f_N(s - c) \gamma_N = \sum_{r=1}^{N-1} f_r(s - c) [\gamma_r - \gamma_{r+1}],$$

avec  $\gamma_r = a_r e^{-c\lambda_r}$ , où  $c$  est une constante finie quelconque, on a

$$\mathfrak{M}^F(s) \leq C \mathfrak{M}^f(s - c),$$

où la constante  $C = 2 \sum |\gamma_r|$ .

Si dans une bande  $B(\tau_0; R)$  on a  $\rho_B^F = \rho_B^f$ , alors l'inégalité obtenue entraîne  $\tau_B^F \leq \tau_B^f e^{c\rho_B^f}$ . La constante  $c$  pouvant être choisie négative et de module arbitrairement grand, il en résulte que si  $\tau_B^f < \infty$  alors  $\tau_B^F = 0$ . Or pour  $R > \pi D$ , on a  $\tau_B^F > 0$  et donc nécessairement  $\tau_B^f = \infty$ .

Si  $0 < \tau_R^f < \infty$ , la démonstration est évidemment un peu plus simple. On considère la fonction  $f^*(s) = \sum a_n \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) e^{-s \lambda_n}$ , avec  $\alpha = 1/\rho_R^f$  on a évidemment  $-\infty < \sigma_H^f (\geq L \tau_R^f / \rho_R^f - \delta) < \infty$ . Si dans la bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $R > \pi D$ , la fonction  $f(s)$  possédait le type  $\tau_B^f < \tau_R^f e^{-\delta \rho_R^f}$  de l'ordre  $\rho_B^f$ , alors  $f^*(s)$  serait holomorphe dans la demi-bande  $|\tau - \tau_0| < R$ ,  $\sigma > L \tau_B^f / \rho_R^f < \sigma_H^f$  et, comme ci-dessus, il existerait sur la droite  $\sigma = \sigma_H^f$  un segment de longueur supérieure à  $2\pi D$  sur lequel la fonction  $f^*(s)$  serait holomorphe. On aboutit à une contradiction, et donc on a  $\tau_B^f \geq \tau_R^f e^{-\delta \rho_R^f}$ .

Pour les fonctions entières d'ordre infini, on complète le théorème antérieur par le suivant :

**THÉORÈME III.2.2.** — *Sous les conditions 1° du théorème antérieur, dans chaque bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $R > \pi D$ , la fonction  $f(s) = \sum a_n e^{-s \lambda_n}$ , avec  $\sigma_A^f = -\infty$ , est d'ordre  $\rho_B^f = \infty$  si  $\rho_R^f = \infty$ .*

$\alpha$  étant un nombre arbitraire fini positif, on considère la fonction  $f_\alpha(s)$ . Il est évident que  $\sigma_A^{f_\alpha} = -\infty$ , et que  $\rho_R^{f_\alpha} = 1/\alpha$ .

Utilisant l'identité d'Abel

$$f_{\alpha, N} = f_N(s) \gamma_N + \sum_{r=1}^{N-1} f_r(s) (\gamma_r - \gamma_{r+1}),$$

avec

$$f_{\alpha, N}(s) = \sum_1^N \{ a_n e^{-s \lambda_n} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) \} \quad \text{et} \quad \gamma_r = 1/\Gamma(1 + \alpha \lambda_r),$$

on montre immédiatement que dans une bande l'ordre  $\rho_B^{f_\alpha}$  de  $f_\alpha(s)$  vérifie la condition  $\rho_B^{f_\alpha} \leq \rho_B^f$ .

Supposons fausse l'assertion du théorème, c'est-à-dire supposons qu'il existe une certaine bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $R > \pi D$ , dans laquelle  $\rho_B^f < \infty$ . On choisit alors la constante ci-dessus  $\alpha$  telle que  $1/\alpha > \rho_B^f$ . Dans cette bande on aurait donc  $\rho_B^{f_\alpha} < \rho_R^{f_\alpha} = 1/\alpha$ . Le type  $\tau_R^{f_\alpha}$  de l'ordre  $\rho_R^{f_\alpha} = 1/\alpha$  de  $f_\alpha(s)$  est, eu égard au théorème de Lindelöf-R, donné par la relation

$$L \tau_R^{f_\alpha} = (1/\alpha) \overline{\lim} (L |a_n| / \lambda_n).$$

La fonction  $f_\alpha(s)$  est donc du type minimal de l'ordre  $1/\alpha$ . Or la propriété de S. Mandelbrojt est vraie, comme on l'a démontré au théorème III.2.1, pour cette fonction. On aboutit donc à une contradiction.

*Remarque.* — On pouvait démontrer ce théorème en utilisant explicitement le théorème II.7.1. La méthode ne diffère pas, quant au fond de la précédente. Rapprochant les résultats relatifs à l'ordre des deux théorèmes antérieurs, on peut énoncer :

THÉOREME III.2.3. — Si la suite  $\{\lambda_n\}$  est à densité maximale  $D$  finie, à indice de condensation  $\delta$  fini, alors dans chaque bande  $B(\tau_0; R)$ , avec  $R > \pi D$ , la fonction entière  $f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n}$ , avec  $\sigma_\lambda^f = -\infty$ , est d'ordre  $\rho_B^f = \rho_R^f$ .

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> juin 1961.)

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [I] V. BERNSTEIN.  
1. *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, 1933.
- [II] M. BLAMBERT.  
1. *Sur une généralisation de la notion de type d'une fonction entière définie par une série de Dirichlet et ses applications* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 338).  
2. *Sur la transformation de Mellin et les fonctions à dominante angulaire algébrico-logarithmique en un point* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 8, 1958).
- [III] S. MANDELBROJT.  
1. *Dirichlet series* (*Rice Institute Pamphlet*, vol. 31, 1944).
- [IV] J. F. RITT.  
1. *On certain points in the theory of Dirichlet series* (*Am. J. Math.*, vol. 50, 1928).
- [V] YU CHIA YUNG.  
1. *Quelques théorèmes dans la théorie des séries de Dirichlet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 641).  
2. *Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières* (*Ann. Scient. Éc. Norm. sup.*, t. 68, 1951).

