

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARIANNE GUILLEMOT-TEISSIER

Convolution des courants sur un groupe de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 79, n° 4 (1962), p. 321-352

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_4_321_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONVOLUTION DES COURANTS

SUR UN

GROUPE DE LIE

PAR M^{me} MARIANNE GUILLEMOT-TEISSIER.

La convolution des distributions est définie à partir de la structure de groupe additif de \mathbb{R}^n ⁽¹⁾; nous nous proposons ici de définir, à partir de la structure d'un groupe de Lie, la convolution des courants définis sur la variété de ce groupe et d'étudier certaines de ces propriétés.

Bien qu'aucune étude systématique de cette question ne semble avoir été faite jusqu'à présent, plusieurs auteurs ont utilisé la convolution des courants ou des distributions (courants de degré n) sur un groupe; citons M. F. Bruhat, dans sa thèse (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1956). M. R. Gode-ment, (*Séminaire de l'École Normale Supérieure*, 1958-1959).

Signalons des études récentes, qui définissent la convolution des courants dans des espaces plus généraux: celles de MM. Norguet (*Thèse; Annales de l'Institut Fourier*, 1960) et Braconnier (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1961).

1. RAPPEL. — *Transformation des formes et des courants par une application* ⁽²⁾. — Soient V et V' deux variétés C^∞ , et γ une application de V dans V' ; $\gamma(x) = x'$, $x \in V$, $x' \in V'$.

⁽¹⁾ Voir L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I et II, Hermann, Paris, 1957.

⁽²⁾ Pour les généralités sur les courants et les notations, voir DE RHAM, *Variétés différentiables* (Hermann, Paris). Nous n'utiliserons dans ce qui suit que des variétés orientées, des formes paires et des courants impairs.

A γ on peut faire correspondre l'application transposée γ^* qui transforme toute fonction f définie sur V' en une fonction γ^*f définie sur V par

$$(\gamma^*f)(x) = f(\gamma(x)).$$

Les coordonnées locales x'_1, \dots, x'_n de x' étant des fonctions des coordonnées locales x_1, \dots, x_n de x , $f(x'_1, \dots, x'_n)$ a pour transformée

$$(\gamma^*f)(x_1, \dots, x_n) = f(x'_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x'_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Si f est une fonction différentiable, et si l'application γ est différentiable (c'est-à-dire si les coordonnées locales de $x' = \gamma(x)$ sont des fonctions différentiables des coordonnées locales de x), on sait que γ^* se prolonge aux formes différentielles extérieures. En particulier, dans un système de coordonnées locales, si

$$\varphi = \sum a_{i_1 \dots i_p} dx'_{i_1} \wedge \dots \wedge dx'_{i_p} \quad (\varphi \text{ forme sur } V'),$$

on a

$$\gamma^*\varphi = \sum \gamma^*(a_{i_1 \dots i_p}) \gamma^*(dx'_{i_1}) \wedge \dots \wedge \gamma^*(dx'_{i_p}),$$

avec $\gamma^*(df) = d(\gamma^*f)$ si f est une fonction, c'est-à-dire ici

$$\gamma^*(dx'_i) = \sum \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Remarque. — L'application γ^* conserve le degré des formes. L'application γ est dite C^∞ si les coordonnées locales de $\gamma(x)$ sont des fonctions C^∞ de celles de x .

2. IMAGE D'UN COURANT. — Les variétés V et V' étant supposées orientées, soit S un courant sur V . Nous supposons que la *restriction de l'application γ au support de S est propre*, c'est-à-dire que l'image réciproque d'un compact de V' coupe le support de S suivant un compact.

Dans ces conditions, soit $\varphi \in \mathcal{D}_{V'}$; $\gamma^*\varphi$ est une forme C^∞ sur V et son support est contenu dans l'image réciproque dans V du support de φ dans V' . Le support de $\gamma^*\varphi$, image réciproque d'un compact, coupe donc le support de S suivant un compact; il en résulte que $\langle S, \gamma^*\varphi \rangle$ existe et permet de déterminer un courant γS sur V' par l'égalité

$$\langle S, \gamma^*\varphi \rangle = \langle \gamma S, \varphi \rangle.$$

On vérifie en effet que γS , défini par cette égalité, est un courant sur V' [voir de Rham ⁽²⁾, chap. III, § 11].

Degré du courant image. — Nous n'envisageons ici que des formes et des courants homogènes ⁽³⁾ et nous supposons que γS existe, c'est-à-dire que la restriction de γ au support de S est propre.

⁽³⁾ D'une façon générale, pour toutes les questions où intervient le degré, nous supposons toujours qu'il s'agit d'une forme ou d'un courant homogène.

Soient n et n' les dimensions respectives des variétés V et V' , p le degré du courant S ; γS , s'il n'est pas nul, est un courant de degré $p + n' - n$.

En effet, si γS n'est pas nul, il existe une forme φ telle que $\langle \gamma S, \varphi \rangle \neq 0$; donc $\langle S, \gamma^* \varphi \rangle \neq 0$ et $\gamma^* \varphi$ est nécessairement une forme de degré $n - p$. L'application γ conservant le degré des formes, φ est de degré $n - p$, et γS est par conséquent de degré $n' - (n - p) = p + n' - n$. Si γS n'est pas nul, on a donc nécessairement $p + n' - n \geq 0$. Si $p + n' - n = 0$, γS est nul.

Remarque. — L'application γ conserve la dimension des courants. (La dimension d'un courant de degré p sur une variété de dimension n étant égale à $n - p$).

Support de γS . — Le courant γS (que nous supposons exister) a un support dans V' contenu dans $\gamma(A)$, image par γ du support A de S dans V .

Pour le prouver, il suffit de montrer que $\langle \gamma S, \varphi \rangle$ est nul si φ est une forme dont le support est contenu dans le complémentaire dans V' de $\gamma(A)$. Soit Ω' ce complémentaire; or $\langle \gamma S, \varphi \rangle = \langle S, \gamma^* \varphi \rangle$ et φ est une forme dans V dont le support est contenu dans $\gamma^{-1}(\Omega')$, image réciproque de Ω' . Ce support n'a donc aucun point commun avec le support A de S , et $\langle S, \gamma^* \varphi \rangle = 0$, donc $\langle \gamma S, \varphi \rangle = 0$.

3. TRANSITIVITÉ DES APPLICATIONS DE VARIÉTÉS. — Soient V, V', V'' des variétés C^∞ , γ une application C^∞ de V sur V' , γ' une application C^∞ de V' sur V'' . Il est immédiat que l'application résultante $\gamma' \gamma$ de V sur V'' est C^∞ .

Soit γ^* l'application transposée de γ définie au paragraphe 1 et γ'^* l'application transposée de γ' ; $\gamma^* \gamma'^*$ est alors l'application transposée de $\gamma' \gamma$.

Les images des courants étant définies comme au paragraphe 2, nous avons, moyennant l'existence des trois produits scalaires ci-dessous, respectivement sur V, V', V'' :

$$\langle S, \gamma^* \gamma'^* \varphi \rangle = \langle \gamma S, \gamma'^* \varphi \rangle = \langle \gamma' \gamma S, \varphi \rangle.$$

S étant un courant défini sur V et φ une forme à support compact définie sur V'' .

Pour que ces trois produits scalaires existent, il suffit que la restriction au support de S de l'application résultante $\gamma' \gamma$ de V dans V'' soit propre. En effet, dans ces conditions, φ ayant pour support A'' , ensemble compact de V'' , et S pour support B dans V , $\gamma^* \gamma'^* \varphi$ a son support dans V contenu dans

$$(\gamma' \gamma)^{-1} A'' = \gamma^{-1} \gamma'^{-1} A''$$

et $B \cap \gamma^{-1} \gamma'^{-1} A''$ est compact. Son image par γ , $\gamma B \cap \gamma'^{-1} A''$ est donc un ensemble compact de V' qui contient l'intersection des supports de γS et $\gamma'^* \varphi$. Il en résulte que les trois produits scalaires existent et sont égaux.

4. PRODUIT DIRECT DE DEUX VARIÉTÉS. — V et W étant deux variétés C^∞ , de dimensions respectives m et n , on définit sur $V \times W$ une structure de variété C^∞ , de dimension $m + n$, de la façon suivante : On sait que pour tout $x \in V$

(resp. $y \in W$) il existe un voisinage U de x dans V (resp. un voisinage U' de y dans W) et un homéomorphisme γ de U dans \mathbb{R}^m (resp. γ' de U' dans \mathbb{R}^n),

Au point $(x, y) \in V \times W$ on associe le voisinage $U \times U'$ de ce point, et une application de $U \times U'$ dans \mathbb{R}^{m+n} , désignée par $\gamma \times \gamma'$, et définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } \gamma(x) &= (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m & \text{et } \gamma'(y) &= (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \gamma \times \gamma'(x, y) &= (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}. \end{aligned}$$

Il est immédiat que $\gamma \times \gamma'$ est un homéomorphisme.

D'autre part, si (x, y) appartient à l'intersection de deux domaines de coordonnées $U \times U'$ et $U_1 \times U'_1$ dans $V \times W$, x et y appartiennent chacun à l'intersection de deux domaines de coordonnées dans leurs variétés respectives, et les coordonnées de chacun de ces points dans l'un des systèmes sont des fonctions C^∞ des coordonnées de ce même point dans l'autre système. Il en est donc de même pour (x, y) . $V \times W$ admet donc une structure de variété C^∞ .

Orientation de $V \times W$. — Si V et W sont orientées, $V \times W$ est orientée.

En effet si V est orientée au moyen des coordonnées locales x_1, \dots, x_m et si W est orientée au moyen des coordonnées locales y_1, \dots, y_n , $V \times W$ peut évidemment être orientée par les coordonnées locales $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$.

Formes différentielles sur $V \times W$. — On considère la projection Π_V de $V \times W$ sur V , définie par $\Pi_V(x, y) = x$. Il lui correspond l'application transposée Π_V^* de l'ensemble des fonctions définies sur V dans l'ensemble des fonctions définies sur $V \times W$. Par définition, si f est une fonction sur V :

$$\Pi_V^* f(x, y) = f(\Pi_V(x, y)) = f(x).$$

L'application Π_V est évidemment C^∞ ; Π_V^* se prolonge donc aux différentielles et aux formes différentielles extérieures (voir § 1). \mathcal{E}_V étant l'espace vectoriel des formes C^∞ sur V , $\Pi_V^* \mathcal{E}_V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_{V \times W}$.

La restriction à un système de coordonnées locales $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ de (x, y) d'une forme $\Pi_V^* \varphi \in \Pi_V^* \mathcal{E}_V$ s'exprime à l'aide des seules coordonnées locales x_1, \dots, x_m de x dans V , et son expression est identique à celle de $\varphi \in \mathcal{E}_V$. On désignera souvent, par la suite, une telle forme par φ_V ou φ_x ou $\varphi(x)$. On définit de la même manière la projection Π_W de $V \times W$ sur W [$\Pi_W(x, y) = y$] et l'application transposée Π_W^* .

THÉORÈME D'APPROXIMATION. — *Le sous-espace vectoriel $\Pi_V^* \mathcal{O}_V \wedge \Pi_W^* \mathcal{O}_W$ est dense dans $\mathcal{O}_{V \times W}$.*

Autrement dit : *chaque forme C^∞ à support compact dans $V \times W$ est la limite, suivant la topologie de $\mathcal{O}_{V \times W}$, d'une suite de sommes finies de produits extérieurs $\Pi_V^* \varphi \wedge \Pi_W^* \psi$, $\varphi \in \mathcal{O}_V$, $\psi \in \mathcal{O}_W$.*

Soit Φ une forme de $\mathcal{O}_{V \times W}$; effectuons une partition de l'unité de façon à exprimer Φ comme une somme de formes Φ_i , dont chacune a son support con-

tenu dans un domaine de coordonnées locales. Φ ayant un support compact, les formes Φ_i sont en nombre fini, de sorte qu'on est ramené à démontrer le théorème dans le cas où Φ a son support contenu dans un domaine de coordonnées locales.

Dans ce domaine $U \times U'$, Φ s'écrit :

$$\Phi = \sum a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}$$

A cause de l'homéomorphisme de $U \times U'$ dans R^{m+n} , on est aisément ramené à démontrer cette propriété pour R^{m+n} . Il suffit alors évidemment de démontrer que $a(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, fonction C^∞ à support compact dans R^{m+n} , est la limite dans \mathcal{O} d'une suite de sommes finies de produits $\alpha(x_1, \dots, x_m) \beta(y_1, \dots, y_n)$, α et β étant des fonctions C^∞ à support compact.

Cette propriété a été démontrée [Schwartz (¹), I, p. 107-108].

5. PRODUIT TENSORIEL DE DEUX COURANTS. — Les variétés V et W sont supposées orientées.

Étant donné deux courants $S \in \mathcal{O}'_V$, $T \in \mathcal{O}'_W$, nous allons montrer qu'on peut définir sur $V \times W$ un courant, qu'on appellera produit tensoriel de S et T et notera $S \otimes T$.

Soit φ une forme de \mathcal{O}_V , ψ une forme de \mathcal{O}_W ; $\Pi_V^* \varphi \wedge \Pi_W^* \psi$ (qu'on pourra noter plus simplement $\varphi_V \wedge \psi_W$) est une forme de $\mathcal{O}_{V \times W}$. (C'est en effet une forme de $\mathcal{E}_{V \times W}$ ayant un support compact, puisque contenu dans

$$(A \times W) \cap (V \times B) = A \times B,$$

A support de φ , B support de ψ .)

Par définition, le courant $S \otimes T$ devra vérifier la relation

$$(5.1) \quad \langle S \otimes T, \varphi_V \wedge \psi_W \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle.$$

Comme les combinaisons linéaires finies des formes $\varphi_V \wedge \psi_W$ forment un ensemble dense dans $\mathcal{O}_{V \times W}$ et comme, d'autre part, un courant est une fonctionnelle linéaire et continue sur \mathcal{O} , un courant qui vérifie la relation (5.1), s'il existe, est unique.

Nous allons montrer qu'il existe un courant sur $V \times W$ vérifiant la relation (5.1). En même temps nous définirons une application linéaire continue f_S (resp. f_T) de $\mathcal{O}_{V \times W}$ dans \mathcal{O}_W (resp. \mathcal{O}_V) qui, pour toute forme

$$\varphi_V \wedge \psi_W \in \Pi_V^* \mathcal{O}_V \wedge \Pi_W^* \mathcal{O}_W,$$

vérifie

$$(5.2) \quad f_S(\varphi_V \wedge \psi_W) = \langle S, \varphi_V \rangle \psi_W \quad [\text{resp. } f_T(\varphi_V \wedge \psi_W) = \langle T, \psi_W \rangle \varphi_V]$$

On aura alors nécessairement

$$\langle S \otimes T, \Phi \rangle = \langle T, f_S \Phi \rangle = \langle S, f_T \Phi \rangle \quad \text{pour tout } \Phi \in \mathcal{O}_{V \times W}.$$

Existence du produit tensoriel. — Soit φ une forme $\in \mathcal{O}_{V \times W}$. Pour nous ramener au cas où le support de φ est contenu dans un domaine de coordonnées locales, effectuons une partition de l'unité de façon à exprimer φ comme une somme finie de formes φ_i , dont chacune a son support contenu dans un domaine de coordonnées locales. A cause de la linéarité des courants, on a nécessairement

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \sum_i \langle S \otimes T, \varphi_i \rangle.$$

Soit donc, dans un domaine de coordonnées locales :

$$\varphi = \sum a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}.$$

Par définition nous posons

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \sum_i \langle T_y, \langle S_x, a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q} \rangle.$$

Cette expression a un sens :

En effet $a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, quelles que soient y_1, \dots, y_n constantes, est une forme C^∞ en x_1, \dots, x_m , à support compact dans R^m .

Donc $\langle S_x, a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle$ existe; c'est une fonction C^∞ de y_1, \dots, y_n , à support compact dans R^n .

Posons

$$\langle S_x, a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q} = f_s \varphi.$$

$f_s \varphi$ est une forme $\in \mathcal{O}_V$ et l'application f_s ainsi définie possède bien les propriétés envisagées au paragraphe précédent; elle est linéaire, continue [pour la démonstration de la continuité, voir de Rham ⁽²⁾, p. 59] et vérifie (5.2).

Il en résulte que $\langle S \otimes T, \varphi \rangle$ existe et est égal à $\langle T, f_s \varphi \rangle$, $S \otimes T$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{O}_{V \times W}$ [pour la démonstration, voir Schwartz ⁽¹⁾, I, p. 108 ou de Rham ⁽²⁾, p. 59].

L'égalité (5.1) est bien vérifiée.

A cause de l'unicité du produit tensoriel, on a également

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \sum_i \langle S_x, \langle T_y, a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q} \rangle dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle$$

ou

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \langle S, f_T \varphi \rangle$$

(nous écrirons parfois $\langle S_x, \varphi(x, y) \rangle$ au lieu de $f_s \varphi$ et $\langle T_y, \varphi(x, y) \rangle$ au lieu de $f_T \varphi$).

Le *support* du produit tensoriel est le produit cartésien des supports.

Degré du produit tensoriel. — Soit la formule (5.1)

$$\langle S \otimes T, \varphi_V \wedge \psi_W \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle.$$

Appelons p, p', q, q' les degrés respectifs de S, φ, T, ψ que nous supposons homogènes. La formule (5.1) montre que le premier membre est nul si $p' \neq m - p$ ou si $q' \neq n - q$, donc si le degré de $\varphi_V \wedge \psi_W$, soit $p' + q'$, est différent de $m + n - (p + q)$. La dimension de la variété $V \times W$ étant $m + n$, il en résulte que le courant $S \otimes T$ est de degré $p + q$.

Remarques. — 1. La définition du produit de variétés et du produit tensoriel des courants s'étend à un nombre fini quelconque de variétés. La relation (5.1) et le théorème d'approximation du paragraphe 4 montrent que le produit tensoriel est associatif.

2. Si S et T sont des formes ($S = \alpha_x, T = \beta_y$), la formule montre que les courants $\alpha \otimes \beta$ et $\alpha \wedge \beta$ sont différents.

En effet

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, \varphi \wedge \psi \rangle &= \int \alpha \wedge \beta \wedge \varphi \wedge \psi = (-1)^{q(m-p)} \int \alpha \wedge \varphi \wedge \beta \wedge \psi \\ &= (-1)^{q(m-p)} \langle \alpha \otimes \beta, \varphi \wedge \psi \rangle \quad (q = \text{degré de } \beta, m - p = \text{degré de } \varphi). \end{aligned}$$

3. Dans les formules (5.2), si le courant T est une forme β de degré q à support dans W , on a

$$f_\beta(\varphi_V \wedge \psi_W) = \langle \beta, \psi \rangle_{\varphi_V} = \varphi_V \int \beta \wedge \psi.$$

Nous définissons une application linéaire continue $\Phi \rightarrow \int_W \Phi$ de $\mathcal{O}_{V \times W}$ dans \mathcal{O}_V , qui vérifie

$$\int_W \chi_V \wedge \eta_W = \chi_V \int_W \eta \quad \text{pour } \chi_V \wedge \eta_W \in \Pi_W^* \mathcal{O}_V \wedge \Pi_W^* \mathcal{O}_W.$$

Il résulte de cette définition que

$$f_\beta(\varphi_V \wedge \psi_W) = (-1)^{qp'} \int_W \beta_W \wedge \varphi_V \wedge \psi_W \quad (p' \text{ degré de } \varphi).$$

Nous sommes amenés ainsi à définir, pour $\Phi \in \mathcal{O}_{V \times W}$:

$$\int_W \beta_W \wedge \Phi = (-1)^{qp'} f_\beta \Phi \quad (\text{si } \Phi \text{ est une forme homogène de degré } n - q + p').$$

Considérons un automorphisme de $V \times W$, qui applique $(x, z) \in V \times W$ en $(x, y) \in V \times W$, l'application $z \rightarrow y(x, z)$ (x fixe) étant un automorphisme de W conservant l'orientation de la variété.

Il en résulte

$$\int_W \chi_V \wedge \eta_W = \int_Y \chi(x) \wedge \eta(y) = \chi(x) \int_V \eta(y) = \chi(x) \int_Z \eta(y(x, z)),$$

d'où, pour φ quelconque $\in \mathcal{O}_{V \times W}$:

$$\int_Y \varphi(x, y) = \int_Z \varphi(x, y(x, z)).$$

Si le courant S est une forme à support dans V :

$$f_\alpha(\varphi_V \wedge \psi_W) = \langle \alpha, \varphi \rangle \psi_W = \psi_W \int_V \alpha \wedge \varphi,$$

on définit l'application linéaire continue $\Phi \rightarrow \int_V \Phi$ de $\mathcal{O}_{V \times W}$ dans \mathcal{O}_W comme devant vérifier

$$\int_V \chi_V \wedge \eta_W = \eta_W \int_V \chi \quad \text{pour} \quad \chi_V \wedge \eta_W \in \Pi_V^* \mathcal{O}_V \wedge \Pi_W^* \mathcal{O}_W$$

d'où

$$f_\alpha(\varphi_V \wedge \psi_W) = \int_V \alpha_V \wedge \varphi_V \wedge \psi_W,$$

d'où la définition

$$\int_V \alpha_V \wedge \Phi = f_\alpha \Phi \quad \text{pour} \quad \Phi \in \mathcal{O}_{V \times W}.$$

En considérant l'automorphisme de $V \times W$ qui applique (z, y) en (x, y) , l'application $z \rightarrow x(z, y)$ (y fixe) étant un automorphisme de W conservant l'orientation de la variété, on montre comme ci-dessus que

$$\int_x \varphi(x, y) = \int_z \varphi(x(z, y), y).$$

6. CAS D'UN GROUPE DE LIE ORIENTÉ : LE PRODUIT DE CONVOLUTION. — Soit G un groupe de Lie orienté de dimension n .

Nous allons étudier l'application γ de $G \times G$ dans G , définie par la multiplication du groupe de Lie. Nous notons $\gamma(x, y) = xy$ le produit de x et de y dans le groupe.

γ est une application C^∞ . A toute forme $\varphi \in \mathcal{O}_G$, l'application transposée fait correspondre la forme $\gamma^* \varphi$ sur $G \times G$, définie par

$$(\gamma^* \varphi)(x, y) = (\varphi(\gamma(x, y))) = \varphi(xy).$$

Soient S et T deux courants sur G , $S \otimes T$ est un courant sur $G \times G$.

Supposons que la restriction au support de $S \otimes T$ de l'application γ soit propre [γ définie par $\gamma(x, y) = xy$]. D'après les résultats rappelés au paragraphe 2, il existe sur G un courant noté $\gamma(S \otimes T) = S \star T$, qui vérifie

$$\langle S \otimes T, \gamma^* \varphi \rangle = \langle S \star T, \varphi \rangle.$$

$S \star T$ est appelé *produit de convolution* des courants S et T . On notera symboliquement :

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = \langle S(x) \otimes T(y), \varphi(xy) \rangle.$$

Cas particulier. — Si le support d'un des courants S ou T est compact, $S \star T$ existe (autrement dit, la restriction de γ au support de $S \otimes T$ est propre). Même démonstration que pour les distributions dans R^n .

Degré du produit de convolution. — Soient S et T deux courants homogènes de degré p et q sur le groupe G de dimension n . D'après ce que nous avons vu, $S \otimes T$ est un courant de degré $p + q$ sur $G \times G$, l'égalité

$$\gamma(S \otimes T) = S \star T$$

et la formule sur le degré du courant image montrent que $S \star T$, s'il existe, a pour degré

$$p + q + n - 2n = p + q - n \quad \text{si } p + q \geq n,$$

et que $S \star T$ est nul si $p + q < n$.

Si l'on envisage les *dimensions* des courants S et T , respectivement $n - p = p'$ et $n - q = q'$, la dimension de $S \star T$ est $p' + q'$ comme celle de $S \otimes T$. (Nous avons vu en effet que γ conserve la dimension des courants.)

Deux courants de degrés respectifs n et p ont un produit de convolution de degré p . Deux courants de degré n ont un produit de convolution de degré n .

Support du produit de convolution. — Soient A et B les supports respectifs de S et T dans G . Le courant $S \otimes T$ a pour support $A \times B$ (produit direct de A et B) dans $G \times G$. D'après ce que nous vu au paragraphe 2, $S \star T = \gamma(S \otimes T)$ a son support dans G contenu dans $\gamma(A \times B) = AB$ (c'est-à-dire dans l'ensemble des points xy , $x \in A$, $y \in B$),

7. TRANSLATION. COURANT DE DIRAC. — a étant un élément de G , on appelle δ_a le courant de degré n défini par $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$, valeur de la fonction φ au point a .

Pour $a = e$, élément neutre du groupe, on écrit δ au lieu de δ_e . δ est le *courant de Dirac*.

Convolution avec δ_a . — Soit T un courant quelconque de degré p : $T \star \delta_a$ est un courant de degré p . φ étant une forme $\in \mathcal{O}_a$ de degré $n - p$, considérons

$$\langle T \star \delta_a, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes \delta_a(y), \varphi(xy) \rangle = \langle T(x), \langle \delta_a(y), \varphi(xy) \rangle \rangle.$$

En coordonnées locales $\varphi(xy)$ est une forme par rapport aux coordonnées x_1, \dots, x_n de x et aux coordonnées y_1, \dots, y_n de y ; $\varphi(xy)$ est une somme de termes dont l'un (que nous appellerons φ_0) est de degré zéro par rapport aux coordonnées de y ; donc

$$\langle \delta_a(y), \varphi(xy) \rangle = \langle \delta_a(y), \varphi_0 \rangle.$$

Or φ_0 se déduit de $\varphi(x)$ par la translation $x \rightarrow xy$. Il en résulte que

$$\langle \delta_a(y), \varphi(xy) \rangle = \langle \delta_a(y), \varphi_0 \rangle = \varphi(xa) = \varphi(\tau_a^d(x)),$$

$\tau_a^d(x)$ étant l'image de x par la translation à droite $x \rightarrow xa$ (multiplication à droite par a dans le groupe). Donc

$$\langle \delta_a(y), \varphi(xy) \rangle = \varphi(\tau_a^d(x)) = (\tau_a^{d*} \varphi)(x) = (\tau_{a^{-1}}^d \varphi)(x)$$

et

$$\langle T \star \delta_a, \varphi \rangle = \langle T(x), (\tau_a^{d*} \varphi)(x) \rangle = \langle \tau_a^d T, \varphi \rangle.$$

Le produit de convolution à droite d'un courant par δ_a est le transformé de ce courant par la translation à droite τ_a^d . (Démonstration et résultats analogues pour translation et convolution à gauche.) On a

$$\delta_a \star T = \tau_a^g T.$$

En particulier, pour $a = e$:

$$T \star \delta = \delta \star T = T$$

Notons également la relation

$$\delta_a \star \delta_b = \delta_{ab}.$$

8. ASSOCIATIVITÉ DU PRODUIT DE CONVOLUTION. — *Lemme : produit d'application de variétés.* — On considère les variétés $C^z V, W, V', W'$ et l'on suppose qu'il existe une application C^z, γ_1 de V sur V' et une application C^z, γ_2 de W sur W' .

1° Il existe une application C^z de la variété-produit $V \times W$ dans la variété-produit $V' \times W'$, notée $\gamma_1 \times \gamma_2$, et définie par

$$(\gamma_1 \times \gamma_2)(v, w) = (\gamma_1(v), \gamma_2(w)) \quad (v \in V \text{ et } w \in W),$$

il est immédiat que l'application ainsi définie est C^z .

2° (a) Si S et T sont deux courants définis respectivement sur V et W , tels que les restrictions de γ_1 et γ_2 aux supports respectifs de S et T sont propres, la restriction de $\gamma_1 \times \gamma_2$ au support de $S \otimes T$ est propre. Donc si les courants $\gamma_1 S, \gamma_2 T$ existent, $(\gamma_1 \times \gamma_2)(S \otimes T)$ existe et ces courants vérifient

$$(8.1) \quad (\gamma_1 \times \gamma_2)(S \otimes T) = \gamma_1 S \otimes \gamma_2 T.$$

(b) Inversement si la restriction de $\gamma_1 \times \gamma_2$ au support de $S \otimes T$ est propre, $\gamma_1 S$ et $\gamma_2 T$ existent et vérifient l'égalité ci-dessus.

Soient A et B les supports de S et T, $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ les restrictions de γ_1 et γ_2 à ces supports; $A \times B$ est le support de $S \otimes T$, $\bar{\gamma}_1 \times \bar{\gamma}_2$ la restriction de $\gamma_1 \times \gamma_2$ à ce support.

Démonstration de (a). — Soit Γ un compact de $V' \times W'$; nous voulons montrer que $(\bar{\gamma}_1 \times \bar{\gamma}_2)^{-1}(\Gamma)$ [c'est-à-dire $(\gamma_1 \times \gamma_2)^{-1}(\Gamma) \cap (A \times B)$] est un compact.

Or $\Gamma \subset \Pi_V \Gamma \times \Pi_W \Gamma$; $\Pi_V \Gamma$ et $\Pi_W \Gamma$ étant les projections respectives de Γ dans V' et W' , ce sont des compacts, donc

$$(\bar{\gamma}_1 \times \bar{\gamma}_2)^{-1}(\Gamma) \subset (\bar{\gamma}_1 \times \bar{\gamma}_2)^{-1}(\Pi_V \Gamma \times \Pi_W \Gamma) = \bar{\gamma}_1^{-1}(\Pi_V \Gamma) \times \bar{\gamma}_2^{-1}(\Pi_W \Gamma).$$

$\bar{\gamma}_1^{-1}(\Pi_V \Gamma)$ et $\bar{\gamma}_2^{-1}(\Pi_W \Gamma)$ sont des compacts d'après l'hypothèse de (a); donc leur produit cartésien est un compact et $(\bar{\gamma}_1 \times \bar{\gamma}_2)^{-1} \Gamma$, sous-ensemble fermé de ce produit, est un compact.

Démonstration de (b). — Soit C un compact de V' ; C peut être considéré comme la projection dans V' du compact $C \times D$ de $V' \times W'$; $\bar{\gamma}_1^{-1} C$ est la projection dans V de $(\bar{\gamma}_1 \times \bar{\gamma}_2)^{-1}(C \times D)$ qui est un compact d'après l'hypothèse de (b); donc $\bar{\gamma}_1^{-1} C$ est un compact et $\gamma_1 S$ existe. Même démonstration pour $\gamma_2 T$.

Démontrons l'égalité (8. 1), les conditions d'existence de $\gamma_1 S$, $\gamma_2 T$, $(\gamma_1 \times \gamma_2)(S \otimes T)$ étant supposées vérifiées; il suffit de montrer que l'égalité

$$\langle (\gamma_1 \times \gamma_2)(S \otimes T), \Phi \rangle = \langle \gamma_1 S \otimes \gamma_2 T, \Phi \rangle$$

est vérifiée lorsque Φ appartient à un ensemble dense dans $\mathcal{O}_{V' \times W'}$; soit

$$\Phi \in \Pi_V^* \mathcal{O}_{V'} \wedge \Pi_W^* \mathcal{O}_{W'}.$$

Posons donc

$$\Phi = \varphi_{V'} \wedge \psi_{W'},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \langle (\gamma_1 \times \gamma_2)(S \otimes T), \Phi(x', y') \rangle &= \langle S \otimes T, \Phi(\gamma_1 \times \gamma_2)(x, y) \rangle = \langle S \otimes T, \Phi(\gamma_1(x), \gamma_2(y)) \rangle \\ &= \langle S \otimes T, \varphi(\gamma_1(x)) \wedge \psi(\gamma_2(y)) \rangle = \langle S, \varphi(\gamma_1(x)) \rangle \langle T, \psi(\gamma_2(y)) \rangle \\ &= \langle \gamma_1 S, \varphi \rangle \langle \gamma_2 T, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Cas du groupe de Lie. — En utilisant ce lemme et la transitivité des applications (§ 3) on étudie une application de $G \times G \times G$ sur G .

1° On applique $G \times G \times G$ sur $G \times G$. Utilisons les résultats du lemme dans le cas où $V = G \times G$, $W = G$, $V' = G$, $W' = G$; γ_1 , application de $G \times G$ sur G est la multiplication γ du groupe de Lie, et γ_2 est l'application identique I de G sur lui-même :

$$\gamma(x, y) = xy, \quad I(z) = z.$$

$\gamma \times I$ est ainsi une application de $G \times G \times G$ sur $G \times G$ et l'on a, d'après le lemme

$$(\gamma \times I)(x, y, z) = \gamma(x, y) \times I(z) = (xy, z).$$

S, T, U étant trois courants sur G , $S \otimes T$ est un courant sur $G \times G$. D'après le lemme, si la restriction de $\gamma \times I$ au support de $S \otimes T \otimes U$ est propre, ou si la restriction de γ au support de $S \otimes T$ est propre, on a

$$(\gamma \times I)(S \otimes T \otimes U) = \gamma(S \otimes T) \otimes I(U) = (S \star T) \otimes U.$$

2° On applique l'ensemble obtenu $G \times G = (\gamma \times I)(G \times G \times G)$ sur G au moyen de la multiplication γ du groupe de Lie. On obtient

$$\gamma(\gamma \times I)(x, y, z) = (xy, z) = (xy)z$$

et pour les courants, si la restriction de $\gamma(\gamma \times I)$ au support de $S \otimes T \otimes U$ est propre :

$$\gamma(\gamma \times I)(S \otimes T \otimes U) = \gamma((S \star T) \otimes U) = (S \star T) \star U.$$

Appliquons maintenant le lemme du paragraphe 8 au cas où

$$V = G, \quad W = G \times G, \quad V' = G, \quad W' = G, \quad \gamma_1 = I, \quad \gamma_2 = \gamma.$$

I et γ étant définies comme précédemment, on obtient de façon analogue :

$$\begin{aligned} (I \times \gamma)(x, y, z) &= (x, yz), \\ \gamma(I \times \gamma)(x, y, z) &= x(yz) \end{aligned}$$

et si la restriction de $\gamma(I \times \gamma)$ au support de $S \otimes T \otimes U$ est propre, on a

$$\gamma(I \times \gamma)(S \otimes T \otimes U) = \gamma(S \otimes (T \star U)) = S \star (T \star U).$$

Or la multiplication du groupe de Lie étant associative on a, quels que soient x, y, z :

$$\gamma(I \times \gamma)(x, y, z) = \gamma(\gamma \times I)(x, y, z) = xyz.$$

Donc les deux applications $\gamma(I \times \gamma)$ et $\gamma(\gamma \times I)$ de $G \times G \times G$ dans G sont identiques. Si la restriction de l'une d'elles au support de $S \otimes T \otimes U$ est propre, il en est de même pour l'autre. Cette condition étant vérifiée, $(S \star T) \star U$ et $S \star (T \star U)$ sont les images de $S \otimes T \otimes U$ par une même application, donc

$$(S \star T) \star U = S \star (T \star U).$$

9. COMMUTATIVITÉ. — Considérons l'application σ de $G \times G$ sur lui-même définie par $\sigma(x, y) = (y, x)$ (symétrie par rapport à la diagonale de $G \times G$), soit σ^* l'application transposée de σ :

$$\sigma^* \Phi(x, y) = \Phi(\sigma(x, y)) = \Phi(y, x).$$

(Dans un système de coordonnées locales données sur $G \times G$, $\sigma^* \Phi$ se déduit de Φ en échangeant les coordonnées x_1, \dots, x_n de x respectivement avec celles y_1, \dots, y_n de y .)

L'application correspondante des courants est définie par

$$\langle S \otimes T, \sigma^* \Phi \rangle = \langle \sigma(S \otimes T), \Phi \rangle.$$

(Il est immédiat que l'application σ , qui est involutive, est propre.) Utilisant le théorème d'approximation (§ 4) et les propriétés des courants, on se ramène au cas où

$$\Phi(x, y) = \varphi_x \wedge \psi_y.$$

Dans ces conditions ;

$$\sigma^* \Phi(x, y) = \Phi(y, x) = \varphi_y \wedge \psi_x = (-1)^{p'q'} \psi_x \wedge \varphi_y,$$

p' et q' étant les degrés respectifs des formes homogènes φ et ψ :

$$\begin{aligned} \langle S \otimes T, \sigma^* \Phi(x, y) \rangle \\ &= (-1)^{p'q'} \langle S \otimes T, \psi_x \wedge \varphi_y \rangle = (-1)^{p'q'} \langle S, \psi \rangle \langle T, \varphi \rangle \\ &= (-1)^{p'q'} \langle T \otimes S, \varphi \wedge \psi \rangle = (-1)^{p'q'} \langle T \otimes S, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

S et T étant des courants homogènes de degrés respectifs p et q , les produits scalaires ci-dessus ne sont $\neq 0$ que pour $p' = n - q$, $q' = n - p$.

Il résulte de ces égalités et de la définition de $\sigma(S \otimes T)$ que

$$\sigma(S \otimes T) = (-1)^{(n-p)(n-q)} (T \otimes S).$$

Considérons maintenant l'application γ , multiplication du groupe de Lie, de $G \times G$ sur G , on a

$$\gamma(x, y) = xy \quad \text{et} \quad \gamma\sigma(x, y) = \gamma(y, x) = yx.$$

Si le groupe G est commutatif, $xy = yx$, donc $\gamma\sigma(x, y) = \gamma(x, y)$ pour tout $(x, y) \in G \times G$.

Il en résulte que, quels que soient les courants S et T pour lesquels $S \star T$ existe :

$$S \star T = \gamma(S \otimes T) = \gamma\sigma(S \otimes T) = (-1)^{(n-p)(n-q)} \gamma(T \otimes S) = (-1)^{(n-p)(n-q)} T \star S.$$

Si le groupe G n'est pas commutatif, il n'existe pas de relation simple entre $S \star T$ et $T \star S$.

Cas particulier. — Si G est commutatif et si S ou T est de degré n ,

$$S \star T = T \star S.$$

10. DIFFÉRENTIELLE DU PRODUIT DE CONVOLUTION. — On rappelle que, par définition, S étant un courant de degré p :

$$\langle dS, \varphi \rangle = (-1)^{p+1} \langle S, d\varphi \rangle$$

et que, γ étant une application de la variété V sur la variété V' telle que le courant γS (de degré \bar{p}) existe :

$$\begin{aligned} \langle d\gamma S, \Phi \rangle &= (-1)^{\bar{p}+1} \langle \gamma S, d\Phi \rangle = (-1)^{\bar{p}+1} \langle S, \gamma^* d\Phi \rangle \\ &= (-1)^{\bar{p}+1} \langle S, d\gamma^* \Phi \rangle = (-1)^{\bar{p}+p} \langle dS, \gamma^* \Phi \rangle = (-1)^{\bar{p}+p} \langle \gamma dS, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

donc

$$d\gamma S = (-1)^{\bar{p}+p} \gamma dS.$$

L'application γ^* ne modifiant pas le degré des formes, si V et V' ont pour dimensions respectives n et n' , $n - p = n' - \bar{p}$, d'où

$$d\gamma S = (-1)^{n+n'} \gamma dS.$$

Avec les notations utilisées précédemment, on a donc

$$d(S \star T) = d\gamma(S \otimes T) = (-1)^n \gamma(d(S \otimes T)).$$

Calcul de $d(S \otimes T)$. — Par définition •

$$\langle d(S \otimes T), \Phi \rangle = (-1)^{p+q+1} \langle S \otimes T, d\Phi \rangle.$$

Il est possible, comme cela a été fait dans les paragraphes précédents, de se ramener au cas où Φ peut s'écrire

$$\Phi = \varphi(x) \wedge \psi(y),$$

or

$$d\Phi = d\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge d\psi \quad (r \text{ étant le degré de } \varphi),$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle S \otimes T, d\Phi \rangle &= \langle S \otimes T, d\varphi \wedge \psi \rangle + (-1)^r \langle S \otimes T, \varphi \wedge d\psi \rangle \\ &= \langle S, d\varphi \rangle \langle T, \psi \rangle + (-1)^r \langle S, \varphi \rangle \langle T, d\psi \rangle \\ &= (-1)^p \langle dS, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle + (-1)^{r+q} \langle S, \varphi \rangle \langle dT, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Or le dernier terme n'est différent de zéro que si $r = n - p$, d'où

$$\langle S \otimes T, d\Phi \rangle = \langle (-1)^p dS \otimes T + (-1)^{n-p+q} S \otimes dT, \varphi \wedge \psi \rangle$$

et comme

$$\begin{aligned} \langle d(S \otimes T), \Phi \rangle &= (-1)^{p+q} \langle S \otimes T, d\Phi \rangle, \\ d(S \otimes T) &= (-1)^q dS \otimes T + (-1)^p S \otimes dT \end{aligned}$$

et

$$d(S \star T) = (-1)^{n+q} dS \star T + S \star dT.$$

Cas où l'un des courants est de degré n . — Si S est de degré n , $dS = 0$, donc

$$d(S \star T) = S \star dT.$$

Si T est de degré n ,

$$dT = 0, \quad (-1)^{n+q} = (-1)^{2n} = 1,$$

donc

$$d(S \star T) = dS \star T.$$

11. DÉRIVATIONS. — Soit V une variété orientée de dimension n .

Une dérivation $\overset{n}{X}_a$ en un point a de V est un courant de degré n , de support ponctuel a , qui vérifie la relation

$$\langle \overset{n}{X}_a, fg \rangle = \langle \overset{n}{X}_a, f \rangle g(a) + f(a) \langle \overset{n}{X}_a, g \rangle$$

f et g étant des fonctions différentiables.

A cette dérivation nous pouvons faire correspondre un autre courant, de degré $n - 1$, de support a , que nous désignerons par $\overset{n-1}{X}_a$, et tel que pour toute forme φ de degré 1, $\langle \overset{n-1}{X}_a, \varphi \rangle$ est le produit scalaire du covecteur $\varphi(a)$ et du vecteur $\overset{n-1}{X}_a$. Si φ est la différentielle d'une fonction f , on a

$$\langle \overset{n-1}{X}_a, df \rangle = \langle \overset{n}{X}_a, f \rangle$$

il en résulte que

$$\overset{n}{X}_a = (-1)^n d(\overset{n-1}{X}_a),$$

$\overset{n}{X}_a$ et $\overset{n-1}{X}_a$ sont appelés respectivement courant de degré n et de degré $n - 1$ associés au vecteur tangent X_a (ou à la dérivation X_a).

Remarques. — 1. — Dans un système de coordonnées locales, on a

$$\langle \overset{n}{X}_a, f \rangle = \langle \overset{n-1}{X}_a, df \rangle = \sum \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (x = a),$$

les λ_i étant des scalaires (composantes du vecteur tangent X_a dans le système de coordonnées). Les dérivations en a forment un espace vectoriel de dimension n .

2. Le courant $\overset{n}{X}_a$ étant connu, $\overset{n-1}{X}_a$ peut être caractérisé comme courant de degré $n - 1$, de support a , vérifiant la relation

$$\langle \overset{n-1}{X}_a, g df \rangle = g(a) \langle \overset{n}{X}_a, f \rangle.$$

f et g étant des fonctions, f étant différentiable.

12. PRODUIT INTÉRIEUR. — Soit X_a un multivecteur de dimension q défini au point a , φ une forme de degré p ; le produit intérieur de φ par X_a est la forme $i(X_a)\varphi$, de degré $p - q$, définie au point a par la relation

$$(12.1) \quad \langle X_a \wedge Y, \varphi \rangle = \langle Y, i(X_a)\varphi \rangle \quad (Y, \text{ multivecteur en } a).$$

D'après cette définition, $i(X \wedge Y)_a = i(Y_a) i(X_a)$, X et Y étant deux multivecteurs définis en a .

Produit intérieur par un vecteur (dimension 1). — Si X_a est un vecteur et φ une forme de degré 1 en a , d'après la définition ci-dessus :

$$i(X_a)\varphi = \langle \overset{n-1}{X}_a, \varphi \rangle.$$

Si φ est une forme quelconque, on rappelle que l'application $\varphi \rightarrow i(X_a)\varphi$ de l'ensemble des formes définies au point a dans lui-même, est une antidérivation :

$$i(X_a)(\alpha \wedge \beta) = i(X_a)\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(X_a)\beta,$$

p étant le degré de α ; cette application abaisse le degré des formes d'une unité.

On rappelle que si $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$, les φ_i de degré 1, on a

$$i(X_a)\varphi = \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k+1} \langle X_a, \varphi_k \rangle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_k \wedge \dots \wedge \varphi_p.$$

Le signe $\hat{}$ indiquant que le terme situé au-dessous doit être supprimé.

13. CHAMP DE VECTEURS OU DE DÉRIVATIONS. — En chaque point x de la variété V , définissons un vecteur tangent que nous appellerons X (au lieu de X_x) pour simplifier les notations. Nous obtenons un *champ de vecteurs* que nous supposons différentiable. Soient $\overset{n}{X}$ et $\overset{n-1}{X}$ les courants de degré n et $n - 1$ associés au vecteur tangent X en chaque point.

Le champ de vecteurs détermine deux applications de \mathcal{O}_V dans lui-même :

la *dérivation* $\varphi \rightarrow \theta(X)\varphi$, qui conserve le degré des formes; c'est une application linéaire, déterminée par les propriétés suivantes :

- (a) $\theta(X)f = \langle \overset{n}{X}, f \rangle$ si f est une fonction (degré 0);
- (b) $\theta(X)(d\varphi) = d(\theta(X)\varphi)$ pour toute forme φ
- (c) $\theta(X)(\alpha \wedge \beta) = \theta(X)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \theta(X)\beta$.

le *produit intérieur* $\varphi \rightarrow i(X)\varphi$ (défini au paragraphe précédent) qui abaisse le degré des formes d'une unité.

On a alors la relation connue :

$$(13.1) \quad \theta(X)\varphi = i(X)d\varphi + d(i(X)\varphi).$$

Dérivation des courants. — Si φ est une forme de degré n à support compact, il résulte de la relation précédente que

$$\theta(X)\varphi = d(i(X)\varphi)$$

en intégrant sur la variété V , on obtient

$$\int_V \theta(X)\varphi = \int_V d(i(X)\varphi) = 0.$$

D'où, si α et β sont des formes de degrés respectifs p et $n - p$ dont l'une a un support compact

$$\int \theta(X)\alpha \wedge \beta = - \int \alpha \wedge \theta(X)\beta \quad \text{car} \quad \int \theta(X)(\alpha \wedge \beta) = 0,$$

ce qui conduit à la définition de la dérivation des courants

$$(13.2) \quad \langle \theta(X)T, \varphi \rangle = - \langle T, \theta(X)\varphi \rangle.$$

Produit intérieur d'un courant par un champ de vecteurs. — Si α et β sont deux formes de degrés respectifs p et $n - p + 1$, on a

$$i(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(X)\beta = i(X)(\alpha \wedge \beta) = 0$$

(car degré $\alpha +$ degré $\beta = n + 1$, donc $\alpha \wedge \beta = 0$), donc

$$i(X)\alpha \wedge \beta = (-1)^{p+1} \alpha \wedge i(X)\beta.$$

Ce qui conduit à la définition de $i(X)T$, T étant un courant homogène de degré p :

$$(13.3) \quad \langle i(X)T, \varphi \rangle = (-1)^{p+1} \langle T, i(X)\varphi \rangle.$$

La formule (13.1) reste vérifiée lorsqu'on remplace la forme φ par un courant (vérification immédiate).

14. CAS D'UN GROUPE DE LIE. DÉRIVATION ET CONVOLUTION. — La variété étant celle d'un groupe de Lie G , nous désignerons maintenant par X (au lieu de X_e) un vecteur tangent à l'origine e du groupe; soit $\overset{n}{X}$ le courant de degré n associé à X . a étant un élément quelconque du groupe, $\overset{n}{X} \star \delta_a$ est un courant de support ponctuel a , déduit de $\overset{n}{X}$ par la translation à droite τ_a^d .

Considérons la transformation qui à une fonction différentiable quelconque f fait correspondre $\langle \overset{n}{X} \star \delta_a, f \rangle$, c'est-à-dire $\langle \overset{n}{X}, f(xa) \rangle$. D'après la définition même des champs invariants, cette transformation n'est autre que la *dérivation* au point a définie par le champ de vecteurs invariant à droite, déterminé par sa valeur X à l'origine e du groupe.

Si $\overset{n-1}{X}$ est le courant de degré $n - 1$ associé au courant de degré n , $\overset{n}{X}$ (c'est-à-dire au vecteur tangent X), $\overset{n-1}{X} \star \delta_a$ est le courant de degré $n - 1$ associé au courant de degré n , $\overset{n}{X} \star \delta_a$.

Pour le montrer, il suffit de vérifier (cf. § 11, remarque 2)

$$\langle \overset{n-1}{X} \star \delta_a, df \rangle = \langle \overset{n}{X} \star \delta_a, f \rangle$$

et

$$\langle \overset{n-1}{X} \star \delta_a, g df \rangle = g(a) \langle \overset{n-1}{X} \star \delta_a, df \rangle \quad (g \text{ et } f, \text{ fonctions}),$$

on a en effet

$$d(\overset{n-1}{X} \star \delta_a) = d\overset{n-1}{X} \star \delta_a = (-1)^n \overset{n}{X} \star \delta_a$$

et

$$\begin{aligned} \langle \overset{n-1}{X} \star \delta_a, g df \rangle &= \langle \overset{n-1}{X}(x) \otimes \delta_a(y), g(xy) df(xy) \rangle \\ &= \langle \overset{n-1}{X}(x), g(xa) df(xa) \rangle = g(a) \langle \overset{n-1}{X}(x), df(xa) \rangle \end{aligned}$$

(X étant un courant de degré $n - 1$ dont le support est l'origine)

$$= g(a) \langle \overset{n-1}{X} \star \delta_a, df \rangle.$$

C. Q. F. D.

Dérivation et convolution. — Soit T un courant ; l'application $T \rightarrow \overset{n}{X} \star T$ de \mathcal{O}'_c dans lui-même, conservant le degré, détermine l'application transposée que nous noterons provisoirement \bar{X} , de \mathcal{O}_c dans lui-même, par la relation

$$\langle \overset{n}{X} \star T, \varphi \rangle = \langle T, \bar{X}\varphi \rangle.$$

Étude de \bar{X} . — On a

$$\langle \overset{n}{X} \star T, \varphi \rangle = \langle T, \langle \overset{n}{X}(x), \varphi(xy) \rangle \rangle.$$

Donc, par définition :

$$\bar{X}\varphi(y) = \langle \overset{n}{X}(x), \varphi(xy) \rangle.$$

a. Si φ est une fonction (degré 0) cette formule montre que l'application $\varphi \rightarrow \bar{X}\varphi$ coïncide avec la dérivation associée au champ de vecteurs invariant à droite, défini par sa valeur X pour $y = e$.

b. Quelle que soit la forme φ , on a

$$\bar{X}(d\varphi) = d(\bar{X}\varphi).$$

en effet, pour tout courant T :

$$\begin{aligned} \langle T, \bar{X}d\varphi \rangle &= \langle \overset{n}{X} \star T, d\varphi \rangle = (-1)^p \langle d(\overset{n}{X} \star T), \varphi \rangle \quad (p \text{ degré de } T) \\ &= (-1)^p \langle \overset{n}{X} \star dT, \varphi \rangle = (-1)^p \langle dT, \bar{X}\varphi \rangle = \langle T, d(\bar{X}\varphi) \rangle. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

c. Montrons que

$$\bar{X}(\alpha \wedge \beta) = (\bar{X}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\bar{X}\beta).$$

Considérons $\bar{X}\alpha(y) = \langle \overset{n}{X}(x), \alpha(xy) \rangle$; en coordonnées locales, $\alpha(xy)$ est une forme par rapport aux coordonnées de x et de y ; c'est une somme de termes dont, seuls, ceux qui sont de degré zéro par rapport aux coordonnées de x ont un produit scalaire non nul avec $\overset{n}{X}(x)$. Nous écrirons symboliquement :

$$\langle \overset{n}{X}(x), \alpha(xy) \rangle = \left\langle \overset{n}{X}(x), \sum A^i dy^i \right\rangle = \sum \langle \overset{n}{X}(x), A^i \rangle dy^i,$$

où A^i est une fonction de coordonnées de x et de y , et dy^i une expression de la forme $dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$,

$$\langle \overset{n}{X}(x), \beta(xy) \rangle = \left\langle \overset{n}{X}(x), \sum B^j dy^j \right\rangle = \sum \langle \overset{n}{X}(x), B^j \rangle dy^j,$$

d'où

$$\langle \overset{n}{X}(x), (\alpha \wedge \beta)(xy) \rangle = \left\langle \overset{n}{X}(x), \sum A^i B^j dy^i \wedge dy^j \right\rangle = \sum \langle \overset{n}{X}(x), A^i B^j \rangle dy^i \wedge dy^j,$$

où, les A^i, B^j étant des fonctions, d'après les propriétés des dérivations à l'origine

$$\sum^{i,j} \langle \overset{n}{X}(x), A^i B^j \rangle = \sum^{i,j} \langle \overset{n}{X}(x), A^i \rangle \overset{.}{B}^j + \overset{.}{A}^i \langle \overset{n}{X}(x), B^j \rangle$$

$\overset{.}{B}^j$ (resp. $\overset{.}{A}^i$) désignant l'expression de B^j (resp. A^i) pour $x = e$, on a alors

$$\langle \overset{n}{X}(x), (\alpha \wedge \beta)(xy) \rangle = \sum^{i,j} \langle \overset{n}{X}(x), A^i \rangle dy^i \wedge \overset{.}{B}^j dy^j + \sum^{i,j} \overset{.}{A}^i dy^i \wedge \langle \overset{n}{X}(x), B^j \rangle dy^j$$

or, d'après les propriétés des formes définies sur les groupes, $\overset{.}{B}^j dy^j$ n'est autre que $\beta(y)$; de même $\overset{.}{A}^i dy^i = \alpha(y)$, d'où

$$\langle \overset{n}{X}(x), (\alpha \wedge \beta)(xy) \rangle = \bar{X}(\alpha \wedge \beta) = (\bar{X}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\bar{X}\beta)$$

(formes par rapport aux coordonnées de y).

(a), (b) et (c) montrent (voir § 13) que l'opérateur \bar{X} (qui est évidemment linéaire) est la dérivation associée au champ invariant à droite, défini par sa valeur \bar{X} pour $x = e$. Nous appellerons $\theta_u(\bar{X})$ cette dérivation.

Donc

$$\langle \overset{n}{X} \star T, \varphi \rangle = \langle T, \theta_u(\bar{X})\varphi \rangle$$

et, d'après la définition de la dérivation des courants (13.2)

$$\overset{n}{X} \star T = -\theta_u(\bar{X})T.$$

15. CONVOLUTION ET PRODUIT INTÉRIEUR. — Considérons maintenant le produit de convolution d'un courant T par le courant de degré $n - 1$, $\overset{n-1}{X}$ associé au vecteur tangent à l'origine X .

Nous allons montrer que

$$(15.1) \quad \overset{n-1}{X} \star T = (-1)^{p+1} i_u(X)T, \quad (p \text{ degré de } T)$$

où $i_u(X)T$ désigne le produit intérieur du courant T par le champ de vecteurs invariant à droite déterminé par sa valeur X à l'origine.

Si l'on pose

$$\langle \overset{n-1}{X} \star T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{X}\varphi \rangle,$$

avec

$$\tilde{X}\varphi(y) = \langle \overset{n-1}{X}(x), \varphi(xy) \rangle,$$

il suffit alors de montrer [d'après (13.3)] que l'opérateur \tilde{X} (qui est linéaire sur \mathcal{O}) coïncide avec le produit intérieur $i_u(X)$.

a. Si φ est de degré 1, on a

$$\tilde{X}\varphi(y) = \langle \overset{n-1}{X}(x), \varphi(xy) \rangle = \langle \overset{n-1}{X}(x) \otimes \partial_y(y), \varphi(xy) \rangle = \langle \overset{n-1}{X} \star \partial_y, \varphi \rangle;$$

$\overset{n-1}{X} \star \partial_y$ est le courant de degré $n - 1$ associé à la dérivation $\overset{n}{X} \star \partial_y$ (voir § 14);

quand y varie, l'ensemble des $\overset{n}{X} \star \delta_y$ décrit un champ invariant à droite; $\langle \overset{n-1}{X} \star \delta_y, \varphi \rangle$ est alors le produit intérieur $i_d(X)\varphi$ de φ par le champ invariant à droite déterminé par sa valeur $\overset{n-1}{X}$ à l'origine.

b. Si φ est de degré supérieur à 1, montrons que

$$\tilde{X}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p) = \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k+1} \tilde{X}(\varphi_k) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_k \wedge \dots \wedge \varphi_p$$

(avec les notations du paragraphe 12).

En coordonnées locales, on a en effet

$$\tilde{X}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p)(y) = \langle \overset{n-1}{X}(x), \varphi_1(xy) \wedge \dots \wedge \varphi_p(xy) \rangle,$$

or $\varphi_i(xy)$ est égale à la somme de deux formes que nous désignerons par $\varphi_{i(x)}$ et $\varphi_{i(y)}$; $\varphi_{i(x)}$ (resp. $\varphi_{i(y)}$) étant de degré 1 par rapport aux coordonnées de x (resp. de y) et de degré zéro par rapport aux coordonnées de y (resp. de x). D'autre part, pour $x=e$, on a

$$\varphi_{i(y)} = \varphi_i(y).$$

Remarquons de plus que $\varphi_1(xy) \wedge \dots \wedge \varphi_p(xy)$ est une somme de termes dont seuls ont un produit scalaire non nul avec $\overset{n-1}{X}(x)$ ceux qui sont de degré 1 par rapport aux coordonnées de x . D'où

$$\begin{aligned} & \langle \overset{n-1}{X}(x), \varphi_1(xy) \wedge \dots \wedge \varphi_p(xy) \rangle \\ &= \left\langle \overset{n-1}{X}(x), \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k+1} \varphi_k(xy) \wedge \varphi_1(y) \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_k \wedge \dots \wedge \varphi_p(y) \right\rangle; \end{aligned}$$

d'où en utilisant (a) du paragraphe 15 et en tenant compte du fait que $\overset{n-1}{X}$ a pour support l'origine :

$$\langle \overset{n-1}{X}(x), \varphi_1(xy) \wedge \dots \wedge \varphi_p(xy) \rangle = \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k+1} \tilde{X}(\varphi_k) \varphi_1(y) \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_k \wedge \dots \wedge \varphi_p(y).$$

(a) et (b) montrent que \tilde{X} coïncide avec le produit intérieur $i_d(X)$.

Remarque. — T étant un courant quelconque de degré p :

$$\begin{aligned} d(i_d(X)T) &= (-1)^{p+1} d(\overset{n-1}{X} \star T) = (-1)^{p+1} d\overset{n-1}{X} \star T + (-1)^{p+1} \overset{n-1}{X} \star dT \\ &= -\overset{n}{X} \star T + (-1)^{p+1} \overset{n-1}{X} \star dT = 0_d(X)T - i_d(X)(dT) \end{aligned}$$

puisque dT est un courant de degré $p+1$. Nous retrouvons la formule

$$0 = i.d + d.i$$

dans le cas particulier d'un champ invariant à droite.

Convolution à droite et champs invariants à gauche. — Nous avons vu que $\overset{n}{X} \star T = -\theta_d(X)T$. On montre de même que $T \star \overset{n}{X} = -\theta_g(X)T$; $\theta_g(X)$ désignant la dérivation associée au champ invariant à gauche défini par sa valeur X à l'origine.

Nous avons vu que $\overset{n-1}{X} \star T = (-1)^{p+1} i_d(X)T$; pour la convolution à droite, nous avons

$$T \star \overset{n-1}{X} = (-1)^{n+1} i_g(X) T;$$

$i_g(X)T$ désignant le produit intérieur de T pour le champ invariant à gauche défini par sa valeur X à l'origine.

La démonstration suit le même chemin que celle que nous avons vue pour la convolution à gauche; on a

$$\langle T \star \overset{n-1}{X}, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle \overset{n-1}{X}(y), \varphi(xy) \rangle \rangle$$

et il suffit de montrer que

$$\langle \overset{n-1}{X}(y), \varphi(xy) \rangle = (-1)^{n-p} i_g(X) \varphi(x) = (-1)^{q+1} i_g(X) \varphi(x),$$

p étant le degré de T ; q celui de φ ; $n = p + q + 1$.

Cette formule est vraie pour $q = 1$. Si $q > 1$, nous avons (en tenant compte de l'orientation de $G \times G$):

$$\begin{aligned} & \langle \overset{n-1}{X}(y), (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p)(xy) \rangle \\ &= \left\langle \overset{n-1}{X}(y), \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{n-k+1} \varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_k \wedge \dots \wedge \varphi_n(x) \wedge \varphi_k(xy) \right\rangle \end{aligned}$$

ce qui entraîne la relation annoncée (même démonstration que pour la convolution à gauche).

Cas où T est un multivecteur et à l'origine. — Si T est un multivecteur à l'origine Y , de dimension q (de degré $n - q$), et X un vecteur à l'origine (dimension 1), nous avons d'après (15.1):

$$X \star Y = (-1)^{n-q+1} i_d(X)Y,$$

φ étant une forme de degré $q + 1$, on a, d'après (13.3)

$$\langle i_d(X)Y, \varphi \rangle = (-1)^{n-q+1} \langle Y, i_d(X)\varphi \rangle,$$

$\langle Y, i_d(X)\varphi \rangle$ est le produit scalaire du q -vecteur Y par le q -covecteur $i_d(X)\varphi(e)$. Or $i_d(X)\varphi(e)$ coïncide avec le produit intérieur du $(q + 1)$ -covecteur $\varphi(e)$ par le vecteur X ; nous pouvons désigner ce produit par $i(X)\varphi(e)$ et nous avons, d'après (12.1)

$$\langle Y, i_d(X)\varphi \rangle = \langle X \wedge Y, \varphi \rangle, \quad \text{d'où} \quad X \star Y = X \wedge Y$$

pour tout couple de vecteurs à l'origine, X de dimension 1, Y de dimension quelconque. En utilisant les propriétés d'associativité et de linéarité du produit extérieur et du produit de convolution, on voit que cette formule est vraie quand X et Y sont des vecteurs de dimensions quelconques.

L'algèbre de convolution des multivecteurs à l'origine coïncide avec l'algèbre extérieure de ces multivecteurs.

16. PRODUIT INTÉRIEUR D'UN COURANT PAR UN CHAMP DE MULTIVECTEURS. — X étant un multivecteur à l'origine de dimension q, T un courant de degré p, nous allons montrer la relation

$$(16.1) \quad X \star T = (-1)^{q(p+1)} i_d(X) T$$

par récurrence sur la dimension de X, dans le cas particulier des multivecteurs décomposables; elle sera alors vraie pour les multivecteurs quelconques.

Nous supposons la formule vraie pour le degré q - 1; soit Y un multivecteur de dimension de q - 1, Z un vecteur de dimension 1, on a

$$\begin{aligned} i_d(Z \wedge Y) T &= i_d(Y) i_d(Z) T = i_d(Y) ((-1)^{p+1} Z \star T) \\ &= (-1)^{p+1+(q-1)p} Y \star Z \star T \quad \left(\begin{array}{l} \text{puisque Y est de dimension } q-1 \\ \text{et } Z \star T \text{ de degré } p-1 \end{array} \right) \\ &= (-1)^{p+1+(q-1)p} (Y \wedge Z) \star T \\ &= (-1)^{p+1+(q-1)p+q-1} (Z \wedge Y) \star T = (-1)^{q(p+1)} (Z \wedge Y) \star T, \end{aligned}$$

on démontre de même que

$$T \star X = (-1)^{q(p+1)} i_g(X) T.$$

17. CONVOLUTION ET ALGÈBRE DE LIE. — Nous avons vu que

$$T \star \overset{n}{X} = -\theta_g(X) T \quad \overset{n}{X} \star T = -\theta_d(X) T.$$

Le cas particulier T = δ nous montre que

$$\overset{n}{X} = -\theta_g(X) \delta = -\theta_d(X) \delta.$$

Il en résulte que

$$\overset{n}{X} \star \overset{n}{Y} = \theta_g(Y) \theta_g(X) \delta$$

et

$$\overset{n}{X} \star \overset{n}{Y} - \overset{n}{Y} \star \overset{n}{X} = -(\theta_g(X) \theta_g(Y) - \theta_g(Y) \theta_g(X)) \delta = -\theta_g[X, Y] \delta$$

d'après la définition du crochet de Lie, d'où

$$\overset{n}{X} \star \overset{n}{Y} - \overset{n}{Y} \star \overset{n}{X} = [X, \overset{n}{Y}].$$

Remarque. — Cette formule justifie le choix des champs invariants à gauche pour définir le crochet de Lie; si nous avons choisi des champs invariants à droite, nous aurions obtenu

$$\overset{n}{X} \star \overset{n}{Y} - \overset{n}{Y} \star \overset{n}{X} = -[X, \overset{n}{Y}].$$

Des formules

$$T \star \overset{n-1}{X} = (-1)^{n+1} i_g(X) T, \quad \overset{n-1}{X} \star T = (-1)^{p+1} i_d(X) T$$

on déduit, en prenant $T = \delta$:

$$\overset{n-1}{X} = (-1)^{n+1} i_g(X) \delta = (-1)^{n+1} i_d(X) \delta,$$

il en résulte que

$$\overset{n}{X} \star \overset{n-1}{Y} = (-1)^{n+1} i_g(Y) \overset{n}{X} = (-1)^n i_g(Y) \theta_g(X) \delta$$

et

$$\overset{n-1}{Y} \star \overset{n}{X} = -\theta_g(X) \overset{n-1}{Y} = (-1)^n \theta_g(X) i_g(Y) \delta,$$

d'où

$$\begin{aligned} \overset{n}{X} \star \overset{n-1}{Y} - \overset{n-1}{Y} \star \overset{n}{X} &= (-1)^{n+1} (\theta_g(X) i_g(Y) - i_g(Y) \theta_g(X)) \delta \\ &= (-1)^{n+1} i_g[X, Y] \delta \text{ d'après une formule connue,} \end{aligned}$$

d'où

$$\overset{n}{X} \star \overset{n-1}{Y} - \overset{n-1}{Y} \star \overset{n}{X} = [X, Y].$$

On vérifie que

$$d[X, Y] = (-1)^n (\overset{n}{X} \star \overset{n}{Y} - \overset{n}{Y} \star \overset{n}{X}) = (-1)^n [X, Y].$$

On montrerait par un raisonnement analogue, ou en tenant compte de l'antisymétrie du crochet de Lie :

$$\overset{n-1}{X} \star \overset{n}{Y} - \overset{n}{Y} \star \overset{n-1}{X} = [X, Y].$$

18. RÉGULARISATION. — Soit S un courant de degré p , β une forme $\in \mathcal{O}_G$ de degré q ; nous allons étudier le courant $S \star \beta$.

φ étant une forme $\in \mathcal{O}_G$ de degré $2n - p - q$, on a

$$\langle S \star \beta, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes \beta_y, \varphi(xy) \rangle = \langle S_x, \beta_y, \varphi(xy) \rangle$$

$\langle \beta_y, \varphi(xy) \rangle$ est une forme $\in \mathcal{O}_x$ (notation définie au paragraphe 5); $\varphi(xy)$ est une somme de termes dont seuls ont un produit scalaire non nul avec $S_x \otimes \beta_y$ ceux qui sont de degré $n - p$ par rapport aux coordonnées de x et $n - q$ par rapport aux coordonnées de y . Il en résulte (d'après les notations définies au paragraphe 5, remarque 3) :

$$\langle S \star \beta, \varphi \rangle = (-1)^{q(n-p)} \left\langle S_x, \int_y \beta(y) \wedge \varphi(xy) \right\rangle.$$

Considérons l'automorphisme de $G \times G$ qui transforme (x, z) en (x, y) avec $y = x^{-1}z$; $z \rightarrow y$ est un automorphisme de G conservant l'orientation du groupe. On a

$$\beta(y) \wedge \varphi(xy) = \beta(x^{-1}z) \wedge \varphi(z),$$

d'où

$$\int_y \beta(y) \wedge \varphi(xy) = \int_z \beta(x^{-1}z) \wedge \varphi(z),$$

d'où

$$\langle S \star \beta, \varphi \rangle = (-1)^{q(n-p)} \left\langle S_x, \int_z \beta(x^{-1}z) \wedge \varphi(z) \right\rangle,$$

L'application $(x, z) \rightarrow (x, y)$ étant un automorphisme de $G \times G$ conservant l'orientation, pour calculer ce dernier produit scalaire on peut calculer $\langle S_x, \beta(x^{-1}z) \rangle$ qui est une forme C^∞ , en se ramenant à un domaine de coordonnées locales, on a alors

$$\langle S \star \beta, \varphi \rangle = (-1)^{q(n-p)} \langle \langle S_x, \beta(x^{-1}z) \rangle, \varphi(z) \rangle,$$

d'où

$$(S \star \beta)(z) = (-1)^{q(n-p)} \langle S_x, \beta(x^{-1}z) \rangle.$$

Considérons maintenant le courant $\alpha \star T$, $\alpha \in \mathcal{O}_G$ de degré p , T courant de degré q , on a

$$\langle \alpha \star T, \varphi \rangle = \langle \alpha_x \otimes T_y, \varphi(xy) \rangle = \langle T_y, \langle \alpha_x, \varphi(xy) \rangle \rangle = \left\langle T_y, \int_x \alpha(x) \wedge \varphi(xy) \right\rangle$$

avec les notations définies au paragraphe 5.

Considérons l'automorphisme de $G \times G$ qui transforme (z, y) en (x, y) avec $x = zy^{-1}$, $z \rightarrow y$ est un automorphisme de G conservant l'orientation du groupe.

On a

$$\alpha(x) \wedge \varphi(xy) = \alpha(zy^{-1}) \wedge \varphi(z),$$

d'où

$$\int_y \alpha(y) \wedge \varphi(xy) = \int_z \alpha(zy^{-1}) \wedge \varphi(z)$$

et

$$\langle \alpha \star T, \varphi \rangle = \left\langle T_y, \int_z \alpha(zy^{-1}) \wedge \varphi(z) \right\rangle,$$

L'application $(x, z) \rightarrow (x, y)$ étant un automorphisme de $G \times G$ conservant l'orientation. Pour calculer ce dernier produit scalaire, on se ramène à un domaine de coordonnées locales; on peut calculer la forme $C^\infty \langle T_y, \alpha(zy^{-1}) \rangle$; on remarque que $\alpha(zy^{-1})$ est une somme de termes dont seuls donnent un produit scalaire $\neq 0$, ceux qui sont de degré $n - q$ par rapport aux coordonnées de y . φ étant de degré $2n - p - q$, en tenant compte de l'orientation de $G \times G$:

$$\left\langle T_y, \int_z \alpha(zy^{-1}) \wedge \varphi(z) \right\rangle = (-1)^{(n-q)(p+q)} \langle \langle T_y, \alpha(zy^{-1}) \rangle, \varphi(z) \rangle,$$

d'où

$$(\alpha \star T)(z) = (-1)^{(n-q)(p+q)} \langle T_y, \alpha(zy^{-1}) \rangle.$$

Dans le cas particulier où β est une forme φ de degré $n - p$, $S \star \varphi$ est une fonction C^∞ , et l'on a

$$\text{Tr}(S \star \varphi) = (S \star \varphi)(e) = (-1)^{n-p} \langle S(x), \varphi(x^{-1}) \rangle$$

ou, en posant $\varphi(x^{-1}) = \check{\varphi}(x)$,

$$\text{Tr}(S \star \varphi) = (-1)^{n-p} \langle S, \check{\varphi} \rangle.$$

19. OPÉRATION DE SYMÉTRIE. — Nous voulons définir la transformation $T \rightarrow \check{T}$ de l'ensemble des courants dans lui-même, qui, lorsque le courant est une forme α , vérifie

$$\check{\alpha}(x) = \alpha(x^{-1}).$$

Or, nous remarquons que le changement de variable $x \rightarrow x^{-1}$ multiplie l'orientation des formes de degré n par $(-1)^n$; donc nous sommes amenés à définir \check{T} par la relation

$$(19.1) \quad \langle \check{T}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

Il en résulte, en particulier, que

$$(\partial_a)^\vee = (-1)^n \partial_{a^{-1}}.$$

Remarque. — Sur la variété $G \times G$ on a, d'après la définition du produit tensoriel,

$$\langle S_x \otimes T_y, \Phi(x, y) \rangle = \langle \check{S}_x \otimes \check{T}_y, \Phi(x^{-1}, y^{-1}) \rangle$$

[vrai dans le cas $\Phi = \varphi(x) \wedge \psi(y)$, donc dans tous les cas].

On rappelle la formule, démontrée au paragraphe 9 :

$$\langle S_x \otimes T_y, \Phi(x, y) \rangle = (-1)^{(n-p)(n-q)} \langle T_x \otimes S_y, \Phi(y, x) \rangle.$$

Symétrie du produit de convolution. — Nous supposons dans ce qui suit que $S \star T$ existe, et que $\varphi \in \mathcal{O}_G$.

Par définition

$$\begin{aligned} \langle (S \star T)^\vee, \varphi \rangle &= \langle S \star T, \check{\varphi} \rangle (-1)^n \\ &= \langle S_x \otimes T_y, \check{\varphi}(xy) \rangle (-1)^n = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(y^{-1}x^{-1}) \rangle (-1)^n \\ &= \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x^{-1}y^{-1}) \rangle (-1)^{(p+q)n+pq} \\ &= \langle \check{T}_x \otimes \check{S}_y, \varphi(xy) \rangle (-1)^{(p+q)n+pq} = \langle \check{T} \star \check{S}, \varphi \rangle (-1)^{(p+q)n+pq}, \end{aligned}$$

d'où

$$(19.2) \quad (S \star T)^\vee = \check{T} \star \check{S} (-1)^{(p+q)n+pq}$$

(l'existence de $S \star T$ entraînant celle de $\check{T} \star \check{S}$).

Opération transposée de la convolution. — Nous avons vu que

$$\langle S, \varphi \rangle = (-1)^{n-p} \text{Tr}(S \star \check{\varphi}),$$

S étant de degré p , φ de degré $q = n - p$, $(-1)^{(p+q)n+pq} = (-1)^{n+p+n p}$:

$$(S \star \check{\varphi})^\vee = (-1)^{n+p+n p} \varphi \star S$$

et

$$(19.3) \quad \langle S, \varphi \rangle = (-1)^{n-p} \text{Tr}(S \star \check{\varphi}) = (-1)^{np} \text{Tr}(\varphi \star \check{S}),$$

S étant de degré p , T de degré q , φ de degré $2n - p - q$:

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = \text{Tr}(S \star T \star \check{\varphi}) (-1)^{p+q} = \langle S, (T \star \check{\varphi})^\vee \rangle (-1)^{n+q},$$

$(T \star \check{\varphi})^\vee$ est une forme C^∞ telle que le produit scalaire $\langle S, (T \star \check{\varphi})^\vee \rangle$ existe. T de degré q , φ de degré $h = 2n - p - q$, on a

$$(-1)^{(q+h)n+qh} = (-1)^{(2n-p)n+q(2n-p-q)} = (-1)^{np+(p+1)q},$$

d'où

$$(T \star \check{\varphi})^\vee = (\varphi \star \check{T}) (-1)^{np+(p+1)q},$$

d'où

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \star \check{T} \rangle (-1)^{n-q+np+(p+1)q}$$

ou

$$(19.4) \quad \langle S \star T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \star \check{T} \rangle (-1)^{n(p+1)+pq},$$

on a

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle (S \star T)^\vee, \check{\varphi} \rangle = (-1)^{n+n(p+q)+pq} \langle \check{T} \star \check{S}, \check{\varphi} \rangle,$$

en appliquant le résultat précédent [formule (19.4)]

$$\langle \check{T} \star \check{S}, \check{\varphi} \rangle = \langle \check{T}, \check{\varphi} \star S \rangle (-1)^{n(q+1)+pq},$$

d'où (en comparant les deux dernières formules)

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = \langle \check{T}, \check{\varphi} \star S \rangle (-1)^{np} = \langle T, (\check{\varphi} \star S)^\vee \rangle (-1)^{n(p+1)},$$

or

$$(\check{\varphi} \star S)^\vee = (\check{S} \star \varphi) (-1)^{nq+(q+1)p},$$

d'où

$$(19.5) \quad \langle S \star T, \varphi \rangle = \langle T, \check{S} \star \varphi \rangle (-1)^{n(p+q+1)+(q+1)p}.$$

Application aux multivecteurs. — D'après les formules (19.3), dans le cas où S est un multivecteur Y de dimension q (degré $n - q$), de support l'origine, et φ une forme de degré q , on a

$$\langle Y, \varphi \rangle = (-1)^q \text{Tr}(Y \star \check{\varphi}),$$

mais d'après la formule (16.1) :

$$Y \star \check{\varphi} = (-1)^{q(q+1)} i_{i'}(Y) \check{\varphi} = i_{i'}(Y) \check{\varphi},$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Y \star \check{\varphi}) &= \text{Tr}(i_{i'}(Y) \check{\varphi}) = i_{i'}(Y) \check{\varphi}(e) \quad (X \text{ ayant pour support } e), \\ &= \langle Y, \check{\varphi} \rangle, \end{aligned}$$

d'après la définition du produit intérieur, d'où

$$\langle Y, \varphi \rangle = (-1)^q \langle Y, \check{\varphi} \rangle.$$

Dans le cas où φ est de degré 1, Y de dimension 1 :

$$\langle Y, \varphi \rangle = -\langle Y, \check{\varphi} \rangle,$$

on retrouve une propriété connue des dérivations.

D'après la formule (19.1), on a

$$\langle \check{Y}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle Y, \check{\varphi} \rangle = (-1)^{n-1} \langle Y, \varphi \rangle,$$

d'où

$$\check{Y} = (-1)^{n-1} Y;$$

si Y est de dimension 1,

$$\check{Y} = (-1)^{n-1} Y.$$

Cas où S est une dérivation $\overset{n}{X}$ (degré n) à l'origine. — La formule (19.3) donne ($\overset{n}{X}$ degré n , φ degré 0)

$$\langle \overset{n}{X}, \varphi \rangle = \text{Tr}(\overset{n}{X} \star \check{\varphi}) = \text{Tr}(-\theta_a(X)\check{\varphi}) = -\theta(X)\check{\varphi}(e)$$

X ayant pour support e , d'où

$$\langle \overset{n}{X}, \varphi \rangle = -\langle \overset{n}{X}, \check{\varphi} \rangle$$

d'après la définition de $\overset{n}{X}$. Il en résulte que

$$(19.6) \quad \overset{n}{X}^\vee = (-1)^{n-1} \overset{n}{X}.$$

20. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS ET COURANTS DE SUPPORT PONCTUEL. — Considérons, sur le groupe G , un opérateur différentiel C^∞ que nous noterons D . Il définit un champ C^∞ de courants ponctuels de degré n , le courant D_a de support a étant défini par $\langle D_a, \varphi \rangle = (D\varphi)(a)$ pour toute fonction $C^\infty \varphi$.

Réciproquement un champ C^∞ de courants ponctuels de degré n , définit un opérateur différentiel C^∞ .

Soit en effet $a \in G$; le courant T_a de support a transforme une fonction $C^\infty \varphi$ en $\langle T_a, \varphi \rangle = T\varphi(a)$ qui est un scalaire; le champ étant C^∞ , l'application $a \rightarrow T\varphi(a)$ est une fonction C^∞ sur G . Considérons un voisinage compact du point a contenu dans un domaine de coordonnées locales, et une carte locale appliquant a sur l'origine O de \mathbb{R}^n . Nous sommes ramenés à un problème sur les distributions dans \mathbb{R}^n ; l'ensemble B des distributions T_a qui ont leur support en un point du voisinage compact K de O , forme un ensemble borné, car pour $\varphi \in \mathcal{D}$, $|\langle T_a, \varphi \rangle|$ est borné quel que soit $T_a \in B$. Donc les $T_a \in B$ sont des distributions d'ordre fini borné, et il existe un opérateur différentiel D tel que $\langle T_a, \varphi \rangle = D\varphi(a)$ pour tout point a (*); D est C^∞ puisque le champ est C^∞ . Si le champ est invariant à droite, D est invariant à droite.

(*) Cf. L. SCHWARTZ, *Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 85.

Considérons alors l'application $D \rightarrow D_e$ de l'espace Δ^d des opérateurs différentiels invariants à droite dans l'espace \mathcal{E}'_e des courants de support l'origine. Cette application est linéaire. Elle est *injective* : en effet si $D_e = 0$, $D_a = \tau_a^d D_e = 0$ quel que soit a . Elle est *surjective* : soit $A \in \mathcal{E}'_e$; l'application $a \rightarrow \tau_a^d A$ détermine un champ C^∞ de courants ponctuels, donc un opérateur différentiel C^∞ qui est invariant à droite d'après ce qui précède.

Considérons maintenant l'application qui à $D \in \Delta^d$ fait correspondre $(-1)^n D_e \in \mathcal{E}'_e$. Nous allons montrer que cette application est un *homomorphisme d'algèbres* (donc un isomorphisme, d'après ce qui précède) pour la composition des opérateurs différentiels et la convolution dans \mathcal{E}'_e .

Soit $A \in \mathcal{E}'_e$, D défini par $D_a = \tau_a^d A$, d'où $D_e = A$,

$$\begin{aligned} (D\varphi)(a) &= \langle D_a, \varphi \rangle = \langle \tau_a^d A, \varphi \rangle = \langle \Lambda \star \delta_a, \varphi \rangle \\ &= (-1)^n \langle \delta_a, \check{\Lambda} \star \varphi \rangle = (-1)^n (\check{\Lambda} \star \varphi)(a) \quad [\text{d'après (19.5)}]; \end{aligned}$$

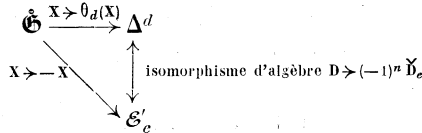
d'où $D\varphi = (-1)^n \check{D}_e \star \varphi$, ce qui donne immédiatement le résultat.

Considérons maintenant l'ensemble des opérateurs différentiels invariants à droite d'ordre 1; ce sont les opérateurs $\theta_d(X)$ vus plus haut. Ils forment une algèbre de Lie $\check{\mathfrak{G}}$ opposée à l'algèbre de Lie \mathfrak{G} de G , car

$$\theta_d(X) \theta_d(Y) - \theta_d(Y) \theta_d(X) = -\theta_d[X, Y].$$

Il existe une injection canonique $X \rightarrow \theta_d(X)$ de \mathfrak{G} dans Δ^d et un isomorphisme d'algèbre entre Δ^d et \mathcal{E}'_e , tel qu'à D correspond $(-1)^n \check{D}_e$; donc il existe une application de \mathfrak{G} dans Δ^d , qui à X fait correspondre $(-1)^n \check{X} = -X$ [formule (19.6)].

Ces résultats sont schématisés dans le tableau suivant :



Dans l'application $X \rightarrow -X$ de \mathfrak{G} dans \mathcal{E}'_e nous avons

$$[X, Y] \rightarrow -[X, Y] = Y \star X - X \star Y.$$

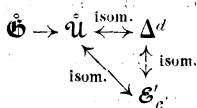
C'est donc une linéarisation; par conséquent elle se factorise en une injection de \mathfrak{G} dans son algèbre enveloppante universelle $\hat{\mathfrak{U}}$ et un isomorphisme de $\hat{\mathfrak{U}}$ dans \mathcal{E}'_e .

Mais d'autre part on sait qu'il existe un isomorphisme entre $\hat{\mathfrak{U}}$ et Δ^d ⁽⁵⁾.

Il en résulte que les algèbres $\hat{\mathfrak{U}}$, Δ^d et \mathcal{E}'_e sont isomorphes.

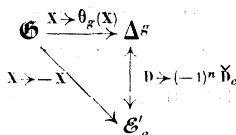
⁽⁵⁾ Résultat dû à M. L. Schwartz (voir par exemple la démonstration de HARISH-CHANDRA, *Transactions*, vol. 83, 1956, p. 111).

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :



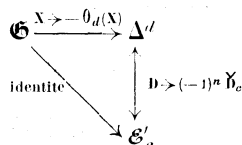
En envisageant les opérateurs invariants à gauche qui forment l'algèbre de Lie \mathfrak{G} de G , nous obtenons des résultats analogues [en remplaçant \mathfrak{G} par \mathfrak{G} , \mathfrak{U} par \mathfrak{U} et la convolution sur G par la loi opposée à la convolution $(S, T) \rightarrow T \star S$].

Ces résultats sont résumés dans le tableau

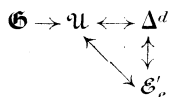


\mathfrak{E}'_e est muni de la loi opposée à la convolution $(S, T) \rightarrow T \star S$.

On peut envisager également l'injection $X \rightarrow -\theta_d(X)$ de \mathfrak{G} dans Δ^d , d'où le tableau



On en déduit, comme précédemment, l'isomorphisme de \mathfrak{U} , Δ^d et \mathfrak{E}'_e :



21. CHAÎNES. — Un élément de chaîne C de dimension p sur une variété V est défini par un polyèdre Π de dimension p , une application π de Π dans V , une orientation ε de R_p [cf. de Rham ⁽²⁾, p. 27]

$$C = (\Pi \subset R^p, \pi, \text{orientation de } R^p)$$

et par définition :

$$\int_C \varphi = \int \varepsilon f \pi^* \varphi,$$

f , fonction caractéristique de Π dans R_p .

Produit tensoriel de deux chaînes. — Par définition :

$$\langle C_1(x) \otimes C_2(y), \varphi(x) \wedge \psi(y) \rangle = \langle C_1, \varphi \rangle \langle C_2, \psi \rangle,$$

il en résulte immédiatement que si

$$C_1 = (\Pi_1 \subset R^p, \pi_1, \varepsilon_1) \quad \text{et} \quad C_2 = (\Pi_2 \subset R^q, \pi_2, \varepsilon_2),$$

on a

$$C_1 \otimes C_2 = (\Pi_1 \times \Pi_2 \subset R^{p+q}, \pi_1 \times \pi_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

Étudions $C_1 \star C_2 = \gamma(C_1 \otimes C_2)$. D'une façon générale, γ étant une application d'une variété V dans une variété W, on a

$$\int_{\gamma C} \varphi = \int_C \gamma^* \varphi,$$

d'où

$$\int_{C_1 \star C_2} \varphi = \int_{\gamma(C_1 \otimes C_2)} \varphi = \int_{C_1 \otimes C_2} \gamma^* \varphi = \int \varepsilon_1 \varepsilon_2 f(\pi_1 \times \pi_2)^* \gamma^* \varphi,$$

f , fonction caractéristique de $\Pi_1 \times \Pi_2$ dans R^{p+q} , est le produit $f_1 f_2$ des fonctions caractéristiques f_1 de Π_1 dans R^p , et f_2 de Π_2 dans R^q , d'où

$$C_1 \star C_2 = (\Pi_1 \times \Pi_2 \subset R^{p+q}, \gamma(\pi_1 \times \pi_2), \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

RÉSUMÉ DES PRINCIPAUX RÉSULTATS ET FORMULES CONTENUS DANS CET ARTICLE. — Dans ce qui suit, G est un groupe de Lie orienté de dimension n ; S et T sont des courants impairs homogènes de degrés respectifs p et q , et $\varphi \in \mathcal{O}_G$.

Produit tensoriel de deux courants sur le produit $V \times W$ de deux variétés orientées :

$$\langle S \otimes T, \varphi_V \wedge \psi_W \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle.$$

Produit de convolution : existe si la restriction de l'application $(x, y) \rightarrow xy$ de $G \times G$ dans G au support de $S \otimes T$ est propre :

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(xy) \rangle.$$

Degré. — $S \star T$ est de degré $p + q - n$. La dimension de $S \star T$ est la somme des dimensions de S et de T.

Translation :

$$\begin{aligned} \partial_a \star T &= \text{translaté à gauche } \tau_a^s T, \\ T \star \partial_a &= \text{translaté à droite } \tau_a^d T, \\ \partial_a \star \partial_b &= \partial_{ab}. \end{aligned}$$

Associativité. — Si la restriction de l'application $(x, y, z) \rightarrow xyz$ de $G \times G \times G$ dans G au support de $S \otimes T \otimes U$ est propre, on a

$$(S \star T) \star U = S \star (T \star U).$$

Si G est commutatif :

$$S \star T = (-1)^{(n-p)(n-q)} T \star S.$$

Si S ou T de degré n,

$$S \star T = T \star S.$$

Différentielle :

$$\begin{aligned} d(S \otimes T) &= (-1)^p dS \otimes T + (-1)^n S \otimes dT, \\ d(S \star T) &= (-1)^{p+q} dS \star T + S \star dT. \end{aligned}$$

Si S de degré n ,

$$d(S \star T) = S \star dT;$$

si T de degré n

$$d(S \star T) = dS \star T.$$

Vecteurs tangents sur une variété V orientée (dimension n). — Un vecteur X_a tangent au point a détermine deux courants de support a : la dérivation $\overset{n}{X}$ de degré n , et $\overset{n-1}{X}_a$ de degré $n-1$, on a

$$\overset{n}{X}_a = (-1)^n d \overset{n-1}{X}_a.$$

Un champ de vecteurs différentiable X détermine deux applications de \mathcal{E}_V dans lui-même; la dérivation $\theta(X)$ et le produit intérieur $i(X)$. Pour les courants on définit

$$\langle \theta(X)S, \varphi \rangle = -\langle S, \theta(X)\varphi \rangle, \quad \langle i(X)S, \varphi \rangle = (-1)^{p+1} \langle S, i(X)\varphi \rangle.$$

Champs invariants sur un groupe. — En appelant $\theta_d(X)$ et $i_d(X)$ [resp. $\theta_g(X)$ et $i_g(X)$] la dérivation et le produit intérieur par le champ invariant à droite (resp. à gauche) déterminé par sa valeur X à l'origine, on a

$$\begin{aligned} \overset{n}{X} \star S &= -\theta_d(X)S, & \overset{n-1}{X} \star S &= (-1)^{p+1} i_d(X)S, \\ S \star \overset{n}{X} &= -\theta_g(X)S, & S \star \overset{n-1}{X} &= (-1)^{n+1} i_g(X)S. \end{aligned}$$

Si X et Y sont des multivecteurs à l'origine, de dimensions quelconques :

$$X \star Y = X \wedge Y.$$

Si Y est un multivecteur à l'origine, de dimension q (degré $n-q$)

$$Y \star S = (-1)^{q(p+1)} i_d(Y)S, \quad S \star Y = (-1)^{q(n+1)} i_g(Y)S.$$

Algèbre de Lie :

$$\begin{aligned} \overset{n}{X} \star \overset{n}{Y} - \overset{n}{Y} \star \overset{n}{X} &= [X, Y], \\ \overset{n}{X} \star \overset{n-1}{Y} - \overset{n-1}{Y} \star \overset{n}{X} &= \overset{n-1}{X} \star \overset{n-1}{Y} - \overset{n-1}{Y} \star \overset{n-1}{X} = [\overset{n-1}{X}, \overset{n-1}{Y}]. \end{aligned}$$

Régularisation. — Si $\beta \in \mathcal{O}_G$ de degré q , $S \star \beta$ et $\beta \star S$ sont des formes C^∞ vérifiant

$$\begin{aligned} (S \star \beta)(z) &= (-1)^{q(n-p)} \langle S_x, \beta(x^{-1}z) \rangle, \\ (\beta \star S)(z) &= (-1)^{(p+q)(n-p)} \langle S_y, \beta(zy^{-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Opération de symétrie. — α étant une forme, par définition $\check{\alpha}(x) = \alpha(x^{-1})$. Pour un courant, on pose

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \check{\varphi} \rangle,$$

on a

$$\begin{aligned} (S \star T)^\vee &= \check{T} \star \check{S} (-1)^{(p+q)n+pq}, \\ \langle S, \varphi \rangle &= (-1)^{n-p} \text{Tr}(S \star \check{\varphi}) = (-1)^{np} \text{Tr}(\varphi \star \check{S}), \\ \langle S \star T, \varphi \rangle &= \langle S, \varphi \star \check{T} \rangle (-1)^{n(p+1)+pq} = \langle T, \check{S} \star \varphi \rangle (-1)^{n(p+q+1)+(q+1)p}, \end{aligned}$$

Y étant un multivecteur à l'origine de dimension q ,

$$\check{Y} = (-1)^{n-q} Y,$$

$\overset{u}{X}$ étant une dérivation (degré n) à l'origine

$$\overset{u}{X} = (-1)^{n-1} \overset{u}{X}.$$

Opérateurs invariants et courants ponctuels. — L'algèbre Δ^d des opérateurs différentiels invariants à droite, l'algèbre \mathcal{E}'_e des courants de support l'origine et l'algèbre enveloppante universelle \mathcal{U} de l'algèbre de Lie de G sont isomorphes. L'application $D \rightarrow - (1)^n \check{D}_e$ de Δ^d sur \mathcal{E}'_e est un isomorphisme d'algèbres pour la composition des opérateurs différentiels et la convolution dans \mathcal{E}'_e .

Chaînes. — Si

$$C_1 = (\Pi_1 \subset \mathbb{R}^p, \pi_1, \varepsilon_1) \quad \text{et} \quad C_2 = (\Pi_2 \subset \mathbb{R}^q, \pi_2, \varepsilon_2),$$

on a

$$C_1 \star C_2 = (\Pi_1 \times \Pi_2 \subset \mathbb{R}^{p+q}, \gamma(\pi_1 \times \pi_2), \varepsilon_1 \varepsilon_2),$$

γ étant l'application de $G \times G$ dans G définie par $\gamma(x, y) = xy$.

