

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL VINCENSINI

Sur le problème des transformations équivalentes infinitésimales d'une surface, et ses relations avec la théorie des congruences de sphères

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 79, n° 4 (1962), p. 299-319

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_4_299_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE PROBLÈME
DES TRANSFORMATIONS ÉQUIVALENTES
INFINITÉSIMALES D'UNE SURFACE,
ET SES RELATIONS
AVEC LA THÉORIE
DES CONGRUENCES DE SPHÈRES**

PAR M. PAUL VINCENSINI.

1. — Introduction.

Dans un travail récent consacré aux transformations infinitésimales d'une surface de l'espace euclidien ordinaire, M. R. Boudet [1] (*voir aussi* [2]) a, entre autres problèmes, envisagé celui des transformations infinitésimales d'une surface quelconque S à *dilatation superficielle nulle*, qu'il a, de façon ingénieuse, rattaché à la donnée de la transformation infinitésimale la plus générale de S .

Je me propose ici de revenir sur cette question et de montrer comment la solution du problème de la recherche des transformations infinitésimales à dilatation superficielle nulle d'une surface (que nous appellerons dans la suite *transformations équivalentes infinitésimales* de la surface) peut, grâce à l'emploi de certains opérateurs, être présentée sous une forme invariante, liant, de façon assez inattendue, le problème envisagé à la théorie générale des congruences de sphères.

Les opérateurs en question sont, d'une part le paramètre différentiel mixte Δ de Beltrami écrit, soit pour deux vecteurs $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Psi}$:

$$(1) \quad \Delta(\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) = \frac{G \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u} - F \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial v} + \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u} \right) + E \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial v}}{H^2},$$

soit pour un scalaire α et un vecteur $\vec{\Phi}$:

$$(2) \quad \Delta(\alpha, \vec{\Phi}) = \frac{G \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} - F \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \right) + E \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}}{H^2},$$

où les vecteurs $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Psi}$ sont, ainsi que α , des fonctions continues et dérivables du point courant $M(u, v)$ d'une surface quelconque S dont le ds^2 a la forme générale ($ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$), les produits $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u}$, ... étant des produits scalaires, et d'autre part,

$$(3) \quad \Theta(\alpha, \vec{\Phi}) = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}}{H},$$

H représentant la quantité $\sqrt{EG - F^2}$.

Si l'on prend pour $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Psi}$ respectivement le vecteur de position du point courant M de S ($\vec{\Phi} = \vec{M}$) et le vecteur normal unitaire \vec{N} de S en M ($\vec{\Psi} = \vec{N}$), on déduit aisément de l'expression (1) de $\Delta(\vec{\Phi}, \vec{\Psi})$ qu'on a, pour toute surface

$$\Delta(\vec{M}, \vec{N}) = \mathcal{K};$$

de même, si l'on prend $\vec{\Phi} = \vec{\Psi} = \vec{N}$, on a

$$\Delta(\vec{N}, \vec{N}) = \mathcal{K}^2 - 2K,$$

et si $\vec{\Phi} = \vec{\Psi} = \vec{M}$:

$$\Delta(\vec{M}, \vec{M}) = 2,$$

\mathcal{K} et K étant respectivement les courbures moyenne $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ et totale $\frac{1}{R_1 R_2}$ de la surface S au point M .

En outre, si α et β sont deux fonctions scalaires quelconques de u et v , les (1) et (2) donnent aussitôt

$$(4) \quad \Delta(\alpha \vec{\Phi}, \beta \vec{\Psi}) = \Delta(\alpha, \beta) (\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) + \beta \vec{\Phi} \cdot \Delta(\alpha, \vec{\Psi}) + \alpha \vec{\Psi} \cdot \Delta(\beta, \vec{\Phi}) + \alpha \beta \Delta(\vec{\Phi}, \vec{\Psi}),$$

où les points indiquent des produits scalaires.

II. — L'équation invariante du problème
de la transformation équivalente infinitésimale d'une surface.

La transformation infinitésimale la plus générale de la surface $S[M(u, v)]$ peut être définie par la donnée du champ des vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{MM_1} = \varepsilon \overrightarrow{V}$ représentant les déplacements des différents points M de S , ε étant une constante infinitésimale dont les puissances supérieures à 1 seront négligées, et \overrightarrow{V} un vecteur fonction arbitraire continue et dérivable des variables u et v qui peut être regardé comme le vecteur de position, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM'}$ (O étant un point fixe de l'espace), d'une surface $S'[M'(u, v)]$, image (ou hodographe) de la transformation, surface qui peut éventuellement se réduire à une courbe ou à un point. La variation δ (dilatation superficielle) de l'aire d'un élément de surface infinitésimal $d\sigma$ de S , lorsque S est soumise à la transformation $\overrightarrow{MM_1} = \varepsilon \overrightarrow{V}$, s'obtient sans difficulté.

Soit

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right| du dv$$

l'élément d'aire de S , et

$$d\sigma_1 = \left| \frac{\partial \overrightarrow{M_1}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M_1}}{\partial v} \right| du dv$$

celui de l'élément transformé sur la surface S' infiniment voisine de S , lieu du point

$$\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{M} + \varepsilon \overrightarrow{V}.$$

On a

$$\delta = d\sigma_1 - d\sigma,$$

soit en remplaçant dans l'expression de $d\sigma_1$, M_1 par son expression ci-dessus

$$\delta = \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}, \overrightarrow{N} \right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial v}, \overrightarrow{N} \right) \right] du dv,$$

où les parenthèses représentent des produits mixtes, et la condition pour que la transformation envisagée soit une transformation équivalente infinitésimale de S , qu'on obtient en exprimant que δ est identiquement nulle sur S , peut s'écrire

$$(5) \quad \left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}, \overrightarrow{N} \right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial v}, \overrightarrow{N} \right) = 0.$$

Si, dans les deux produits mixtes du premier membre de (5), on remplace \vec{N} par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$, et si l'on tient compte de (1), on constate aussitôt que la

condition pour que \vec{V} définisse une transformation équivalente infinitésimale de S peut se mettre sous la forme remarquable

$$(6) \quad \Delta(\vec{M}, \vec{V}) = 0.$$

III. — Étude de l'équation (6).

Proposons-nous maintenant de résoudre l'équation (6), c'est-à-dire d'explicitier les champs des vecteurs \vec{V} définissant les différentes transformations équivalentes infinitésimales d'une surface. A cet effet, α, β, γ représentant les composantes du vecteur $\vec{V}(u, v)$ issu du point M de S dans le repère local constitué par les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ et \vec{N} , posons

$$(7) \quad \vec{V} = \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} + \gamma \vec{N}.$$

Il s'agit de déterminer les fonctions α, β, γ de u et v pour que le vecteur (7) vérifie (6), c'est-à-dire pour qu'on ait

$$\Delta\left(\vec{M}, \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} + \gamma \vec{N}\right) = 0,$$

soit

$$(8) \quad \Delta\left(\vec{M}, \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right) + \Delta\left(\vec{M}, \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right) + \Delta(\vec{M}, \gamma \vec{N}) = 0,$$

Si l'on tient compte de la relation (4) du paragraphe I où l'on remplace les quantités $(\alpha, \beta, \vec{\Phi}, \vec{\Psi})$ qui y figurent successivement par les trois quadruples

$$\left(1, \alpha, \vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right), \quad \left(1, \beta, \vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right), \quad \left(1, \gamma, \vec{M}, \vec{N}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\left(\vec{M}, \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right) &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \Delta(\alpha, \vec{M}) + \alpha \Delta\left(\vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right), \\ \Delta\left(\vec{M}, \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right) &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \Delta(\beta, \vec{M}) + \beta \Delta\left(\vec{M}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right), \\ \Delta(\vec{N}, \gamma \vec{N}) &= \vec{N} \cdot \Delta(\gamma, \vec{M}) + \gamma \Delta(\vec{M}, \vec{N}). \end{aligned}$$

Si l'on remplace, aux seconds membres des trois relations précédentes, le premier et le second des Δ qui y figurent par leurs expressions données par les formules (2) et (1) du paragraphe I, et si l'on tient compte de ce que, comme on l'a dit au paragraphe I, $\Delta(\vec{M}, \vec{N}) = \mathcal{X}$, on trouve, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \Delta\left(\vec{M}, \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right) &= \frac{1}{H} \frac{\partial(\alpha H)}{\partial u}, \\ \Delta\left(\vec{M}, \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right) &= \frac{1}{H} \frac{\partial(\beta H)}{\partial v}, \\ \Delta(\vec{M}, \gamma \vec{N}) &= \gamma \mathcal{X}, \\ \left(H = \sqrt{EG - F^2}, \mathcal{X} = \text{courbure moyenne de } S = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \end{aligned}$$

et (8) devient ainsi

$$(9) \quad \frac{\partial(\alpha H)}{\partial u} + \frac{\partial(\beta H)}{\partial v} + (\gamma H) \mathcal{X} = 0.$$

Telle est l'équation définissant les trois fonctions α , β , γ qui, portées dans (7), déterminent les déplacements infinitésimaux $\varepsilon \vec{V}$ à appliquer aux différents points M de la surface S pour obtenir la transformation équivalente infinitésimale la plus générale de S.

On voit que la solution du problème envisagé n'exige aucune quadrature, mais simplement deux dérivations (en plus des dérivations intervenant dans le calcul de la courbure moyenne \mathcal{X} de S).

Laissant de côté pour le moment le cas où S est *minimale* ($\mathcal{X} \neq 0$), il suffit, pour avoir cette solution, de se donner arbitrairement les deux fonctions α et β des deux variables u et v , et de calculer γ par la formule

$$(10) \quad \gamma = - \frac{\frac{\partial(\alpha H)}{\partial u} + \frac{\partial(\beta H)}{\partial v}}{H \cdot \mathcal{X}}.$$

On obtient ainsi pour l'expression du déplacement infinitésimal

$$\vec{MM}_1 = \delta \vec{M} = \varepsilon \vec{V}$$

du point M de S dans la transformation équivalente infinitésimale de S la plus générale

$$(11) \quad \delta \vec{M} = \varepsilon \left[\alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} - \frac{\frac{\partial(\alpha H)}{\partial u} + \frac{\partial(\beta H)}{\partial v}}{H \cdot \mathcal{X}} \vec{N} \right],$$

où α et β sont, comme il a été dit, des fonctions arbitraires des variables u et v .

L'équation (9) montre que, mis à part le cas où S est minimale ($\mathcal{H} = 0$), on ne peut pas avoir identiquement $\alpha = \beta = 0$. Le champ des vecteurs \vec{V} définissant une transformation équivalente infinitésimale de S ne saurait donc être normal à S, et si dès lors on prend pour courbes u ($v = \text{Cte}$), sur S, les courbes tangentes en chaque point M à la projection orthogonale (sur le plan tangent) de la direction du déplacement infinitésimal de M, les courbes v étant les trajectoires orthogonales des courbes u ($ds^2 = E du^2 + G dv^2$), on a $\beta = 0$, et l'expression (11) de $\delta\vec{M}$ prend la forme simple

$$(12) \quad \delta\vec{M} = \varepsilon \vec{V} = \varepsilon \left[\alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} - \frac{\alpha}{\mathcal{H}} \frac{\partial \log(\alpha H)}{\partial u} \vec{N} \right].$$

Si J est l'extrémité du vecteur $\vec{V} = \vec{MJ}$ définissant le déplacement de M, la perpendiculaire D menée de J au plan tangent en M à S perce ce plan au point I de la tangente en M à la courbe u tel que

$$(13) \quad \vec{MI} = \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u},$$

\vec{IJ} ayant pour expression

$$(14) \quad \vec{IJ} = - \frac{\alpha}{\mathcal{H}} \frac{\partial \log(\alpha H)}{\partial u} \vec{N} \quad (H = \sqrt{EG}).$$

L'angle θ que fait avec \vec{MI} la direction \vec{MJ} du déplacement du point M dans la transformation infinitésimale équivalente de S envisagée est défini par

$$(15) \quad \text{tg } \theta = \frac{|\vec{IJ}|}{|\vec{MI}|} = - \frac{1}{\mathcal{H} \sqrt{E}} \frac{\partial \log(\alpha H)}{\partial u}.$$

(15) montre que si l'on se donne *a priori* le champ des directions des déplacements des points d'une surface S dans une transformation équivalente infinitésimale de celle-ci, il existe une infinité de transformations du type considéré pour lesquelles les déplacements des différents points de S ont lieu dans les directions voulues. Les courbes orthogonales u , v étant choisies comme il a été expliqué plus haut, $\text{tg } \theta$ est alors en effet une fonction *déterminée* $f(u, v)$ des variables u et v , et l'on obtient les expressions de la fonction α définissant, par (12), les déplacements des points de S dans les différentes transformations en question, en intégrant l'équation (15), ce qui donne pour α la forme générale

$$(16) \quad \alpha = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{EG}} e^{-\int \mathcal{H} \sqrt{E} f(u, v) du},$$

où \mathcal{V} est une fonction arbitraire de la seule variable v , et de là résulte en particulier que si l'on considère les courbes intégrales du champ des projections des

vecteurs \vec{V} définissant une transformation équivalente infinitésimale quelconque de S , on obtient toutes les transformations analogues s'effectuant dans les mêmes directions que dans la transformation envisagée, en multipliant par un nombre fixe les vecteurs \vec{V} issus des points d'une même courbe intégrale, ce nombre variant arbitrairement avec la courbe intégrale considérée.

Autotransformations équivalentes infinitésimales d'une surface. — Si $f(u, v) = 0$, les déplacements infinitésimaux des différents points M de S s'effectuent tangentiellement à S (autotransformations infinitésimales de S). Toute surface S est donc, comme l'on voit, susceptible d'une infinité d'autotransformations équivalentes infinitésimales, la famille des courbes de S (courbes u) sur lesquelles s'effectuent les déplacements infinitésimaux pouvant être choisie arbitrairement.

Si $ds^2 = E du^2 + G dv^2$ est le carré de l'élément linéaire de S rapportée aux courbes u et à leurs trajectoires orthogonales, il suffit, pour avoir une déformation infinitésimale équivalente de S suivant la famille de courbes u envisagée, d'imprimer à chaque point M , le long de la courbe u correspondante, le déplacement infinitésimal $\delta\vec{M} = \varepsilon\alpha \frac{\partial\vec{M}}{\partial u}$, où α a la valeur obtenue en annulant $f(u, v)$, soit

$$\alpha = \frac{\varphi}{\sqrt{EG}} \quad (\varphi, \text{ fonction arbitraire de } v).$$

Le module de ce déplacement infinitésimal, $\varepsilon\alpha \left| \frac{\partial\vec{M}}{\partial u} \right|$, a, comme l'on voit, pour expression

$$\left| \delta\vec{M} \right| = \frac{\varepsilon\varphi}{\sqrt{G}}.$$

Pour une transformation infinitésimale, équivalente de S déterminée (pour une fonction φ fixée), ce module varie, en général, avec la courbe u considérée et avec la position du point M sur cette courbe. Si G est fonction de v seul, c'est-à-dire si les courbes u suivant lesquelles ont lieu les déplacements infinitésimaux sont *géodésiquement parallèles* (sont les trajectoires orthogonales d'une famille, v , de géodésiques), les modules des déplacements infinitésimaux sont les mêmes pour tous les points d'une même courbe (u), leur valeur variant avec la courbe (u) envisagée. Si, toujours dans le cas où les courbes (u) suivant lesquelles s'effectuent les déplacements constituent une famille de courbes géodésiquement parallèles de S ($[G = f(v)]$), on choisit $\varphi = \sqrt{G}$, on obtient une autotransformation équivalente infinitésimale particulière pour laquelle les modules des déplacements infinitésimaux *sont les mêmes en tout point de la surface* S .

Au lieu de nous donner *a priori*, comme nous l'avons fait, la famille des courbes d'une surface S tangentes en chacun de leurs points à la direction du déplacement infinitésimal de ce point dans une autotransformation équivalente infinitésimale de S , supposons S rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes (u, v) , et (le cas des surfaces minimales étant toujours réservé) cherchons l'expression de l'autotransformation équivalente infinitésimale la plus générale de S .

Le vecteur \vec{V} , définissant par $\delta\vec{M} = \varepsilon\vec{V}$ le déplacement infinitésimal du point courant M de S dans une telle autotransformation, est donné par l'expression (7) où γ [liée à α et β par la relation (9)] est identiquement nulle.

La nullité de γ , qui d'après (10) s'exprime par

$$\frac{\partial(\alpha H)}{\partial u} + \frac{\partial(\beta H)}{\partial v} = 0,$$

exige qu'on ait

$$(17) \quad \alpha = \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \beta = -\frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

où φ est une fonction arbitraire des variables u et v .

De là résulte l'expression du déplacement infinitésimal du point M dans l'autotransformation la plus générale du type envisagé, qui est défini, d'après (9), par le vecteur infinitésimal

$$(18) \quad \delta\vec{M} = \varepsilon\vec{V} = \varepsilon \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}}{H} = \varepsilon \Theta(\varphi, \vec{M}),$$

dont le module a , comme on le voit aussitôt, l'expression remarquable

$$(19) \quad |\delta\vec{M}| = \varepsilon \sqrt{\Delta\varphi},$$

où $\Delta\varphi$ est le paramètre différentiel ordinaire du premier ordre de Beltrami relatif au ds^2 de S .

Les autotransformations équivalentes infinitésimales de S pour lesquelles le module du déplacement infinitésimal est le même pour tous les points de la surface (dont les *images*, au sens du paragraphe II, sont sphériques), sont définies par les fonctions $\varphi(u, v)$ solutions de l'équation

$$\Delta\varphi = c = \text{Cte.}$$

Si φ est l'une quelconque de ces solutions, la famille des courbes $\varphi(u, v) = \text{Cte}$ est formée de courbes géodésiquement parallèles. La tangente à celle de ces courbes passant par le point $M(u, v)$ est définie par des accroissements du, dv de u et v vérifiant

$$\frac{du}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} = \frac{dv}{-\frac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

et (18) montre alors que les déplacements infinitésimaux $\vec{\delta M}$ sont portés par les tangentes à une famille de courbes géodésiquement parallèles de S.

IV. — Rapprochement avec la théorie des congruences de sphères.

Les autotransformations équivalentes infinitésimales d'une surface quelconque S sont intimement liées aux congruences de sphères (Σ) centrées sur S. Si $R(u, v)$ est le rayon de la sphère Σ d'une telle congruence centrée au point $M(u, v)$ de S, et si l'on pose $R^2 = 2\varphi$, les deux points M_1, M_2 où Σ touche les deux nappes de son enveloppe, symétriques comme l'on sait par rapport au plan tangent en M à S, sont définis (1) par les expressions vectorielles

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \vec{M} - \Delta(\varphi, \vec{M}) - \sqrt{2\varphi - \Delta\varphi} \cdot \vec{N}, \\ \vec{M}_2 &= \vec{M} - \Delta(\varphi, \vec{M}) + \sqrt{2\varphi - \Delta\varphi} \cdot \vec{N}, \end{aligned}$$

$\Delta\varphi$ étant le paramètre différentiel ordinaire de Beltrami relatif au ds^2 de S, et $\Delta(\varphi, \vec{M})$ ayant l'expression (2) du paragraphe I où φ et \vec{M} sont mis à la place de α et $\vec{\Phi}$.

La corde des contacts $D \equiv (M_1 M_2)$ perce le plan tangent en M à S au point I (milieu du segment $M_1 M_2$) tel que

$$(20) \quad \vec{MI} = -\Delta(\varphi, \vec{M}),$$

et l'on a

$$(21) \quad |\vec{MI}| = \sqrt{\Delta\varphi}.$$

Mais la même fonction $\varphi(u, v)$ peut être interprétée comme définissant, moyennant la formule (18), le déplacement du point M dans l'autotransformation équivalente infinitésimale la plus générale de la surface S, et alors $\varepsilon |\vec{MI}| = \varepsilon \sqrt{\Delta\varphi}$ n'est pas autre chose, comme on l'a vu au paragraphe III [formule (19)], que le module $|\vec{\delta M}|$ du déplacement infinitésimal du point M dans cette autotransformation.

Le vecteur $\varepsilon \vec{MI}$ bien qu'ayant le même module que le vecteur $\vec{\delta M}$ n'est pas identique à ce vecteur, mais il lui est rattaché d'une façon simple. La multiplication scalaire du vecteur \vec{V} définissant d'après (18) le déplacement infinitésimal de M, et du vecteur \vec{MI} d'expression (20), montre qu'on a $\vec{MI} \cdot \vec{V} = 0$, et que par suite ces deux vecteurs sont orthogonaux. De là résulte qu'on obtient

(1) Voir par exemple : P. VINCENSINI, *Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères* (Ann. Éc. Norm. Sup., t. 61, 1944, p. 119).

l'autotransformation équivalente infinitésimale la plus générale de S , en envisageant une congruence quelconque de sphères (Σ) centrées sur S , en faisant tourner, d'un angle droit, autour du point générique M de S et dans le plan tangent en M , le vecteur \vec{MI} dont l'extrémité I est le point où la corde des contacts D de la sphère Σ centrée en M perce le plan tangent (ce qui amène \vec{MI} en $\vec{V} = \vec{N} \wedge \vec{MI}$), et en faisant subir au point M le déplacement infinitésimal $\vec{\delta M} = \varepsilon \vec{V}$.

Les autotransformations équivalentes infinitésimales de module constant envisagées au paragraphe III, par exemple, proviennent des congruences de sphères pour lesquelles la distance du centre de la sphère Σ à la corde de contact correspondante est constante.

Il y a lieu de faire une remarque intéressante se rattachant à la définition qui vient d'être donnée des autotransformations équivalentes infinitésimales d'une surface S à partir des congruences de sphères centrées sur S .

Si l'on fait subir aux vecteurs infinitésimaux $\vec{\delta M}$ définissant une telle autotransformation, dans les plans tangents, des rotations d'un angle droit (dans un sens déterminé, d'ailleurs arbitraire) autour des points M correspondants, on obtient une nouvelle autotransformation infinitésimale de S , qui n'est plus en général une équivalence superficielle, mais pour laquelle [1] la *rotation moyenne* en tout point M de S (valeur moyenne des rotations subies au cours de l'autotransformation en question, dans le plan tangent en M , par les différents éléments linéaires de S issus de M) est *nulle*.

Réciproquement d'ailleurs, des rotations d'un angle droit appliquées aux vecteurs définissant une autotransformation infinitésimale de S à rotation moyenne nulle, transforment celle-ci en une autotransformation équivalente infinitésimale de S .

Dès lors, puisque, comme on l'a vu, en faisant tourner d'un angle droit les vecteurs \vec{MI} déterminés par un point quelconque M d'une surface S , et par le point I où la corde des contacts de la sphère Σ de centre M d'une congruence quelconque (Σ) de déférente S perce le plan tangent en M , on obtient un champ de vecteurs \vec{V} tangents à S définissant les déplacements infinitésimaux ($\vec{\delta M} = \varepsilon \vec{V}$) de l'autotransformation équivalente infinitésimale la plus générale de S , c'est que les vecteurs $\varepsilon \vec{MI}$ eux-mêmes *définissent la transformation infinitésimale à rotation moyenne nulle la plus générale de S* .

Si l'on désigne par \mathfrak{C} l'opération qui substitue à une autotransformation quelconque de S l'autotransformation obtenue en faisant tourner d'un angle droit, autour de leurs points d'application, les déplacements infinitésimaux des différents points M de S , il résulte de ce qui précède que pour qu'une autotransformation infinitésimale de S réalise à la fois l'équivalence superficielle et la

nullité de la rotation moyenne, il faut et il suffit que cette autotransformation, supposée posséder l'une quelconque de ces deux propriétés, conserve cette même propriété si on la soumet à l'opération \mathfrak{C} .

La détermination des autotransformations infinitésimales possédant les deux propriétés indiquées a été faite analytiquement par M. R. Boudet en [1]. Du point de vue de la théorie des congruences de sphères auquel nous nous plaçons ici, ces autotransformations seront définies, conformément à ce qu'on vient de voir, et *selon qu'on les considère comme jouissant de la propriété d'équivalence superficielle ou bien de la propriété de nullité de la rotation moyenne*, par deux congruences de sphères *distinctes*, $\Sigma(R^2 = 2\varphi)$ et $\Sigma'(R'^2 = 2\varphi')$, les deux autotransformations infinitésimales de S caractérisées respectivement par les déplacements infinitésimaux $\varepsilon \vec{MI}$ et $\varepsilon \vec{MI}'$ (où I et I' sont les points où les cordes de contact des sphères Σ et Σ' centrées au même point M de S percent le plan tangent) se déduisant l'une de l'autre par l'opération \mathfrak{C} .

On obtiendra les fonctions φ et φ' de u et v définissant respectivement les rayons R et R' des sphères Σ et Σ' relatives aux deux autotransformations qui nous intéressent, en exprimant, conformément à la définition de l'opération \mathfrak{C} , l'égalité des modules des vecteurs \vec{MI} et \vec{MI}' et leur orthogonalité, soit d'après (20) et (21)

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta\varphi = \Delta\varphi' \\ \Delta(\varphi, \vec{M}) \cdot \Delta(\varphi', \vec{M}) = \Delta(\varphi, \varphi') = 0. \end{cases}$$

Les relations (22) expriment, comme on le voit aussitôt, que $\varphi + i\varphi'$ (ou $\varphi - i\varphi'$) est une fonction analytique de la variable complexe $u + iv$, u et v étant les paramètres isométriques sur S supposée rapportée à un système orthogonal isotherme quelconque [$ds^2 = E(du^2 + dv^2)$].

La congruence de sphères (Σ) déterminée par la fonction harmonique φ définit l'autotransformation équivalente à rotation moyenne nulle la plus générale de S; la congruence (Σ') déterminée par la fonction harmonique conjuguée φ' définit l'autotransformation du même type déduite de la précédente par l'opération \mathfrak{C} , et les déplacements infinitésimaux relatifs à ces deux autotransformations ($\varepsilon \vec{MI}$, $\varepsilon \vec{MI}'$), de module commun $\sqrt{\Delta\varphi} = \sqrt{\Delta\varphi'}$, sont respectivement tangents aux courbes du réseau *orthogonal isotherme* constitué par les courbes $\varphi = \text{Cte}$, $\varphi' = \text{Cte}$ de S.

On peut remarquer que si S est une sphère de centre O, les congruences (D) et (D') des cordes de contact des sphères Σ et Σ' sont normales (comme, d'après un résultat bien connu, les congruences des cordes de contact de toutes les congruences de sphères à déférente sphérique [3]), (D') se déduisant de (D) par rotation des rayons de cette dernière congruence d'un angle droit autour de leurs parallèles respectives issues du point fixe O.

La conservation de la normalité d'une congruence rectiligne par l'opération précédente caractérise comme l'on sait [4] les congruences normales (d'Appell) admettant pour *enveloppée moyenne* (enveloppe des plans médiateurs des segments focaux) le point fixe O. Si H est la projection sur le rayon générateur D d'une telle congruence (H est donc le milieu du segment focal de D), et si M est l'un ou l'autre des deux points de S où la normale est parallèle à D, l'application à M du déplacement infinitésimal tangent défini par $\vec{\delta}\vec{M} = \varepsilon\vec{OH}$ fournit l'autotransformation équivalente infinitésimale de S à rotation moyenne nulle la plus générale.

**V. — Les transformations équivalentes infinitésimales
les plus générales d'une surface,
rattachées aux autotransformations infinitésimales équivalentes.**

Rappelons tout d'abord le résultat suivant établi en [1].

Soient $\vec{V}(u, v)$ et $\vec{V}'(u, v)$ deux vecteurs issus du point courant M d'une surface quelconque S, dont les extrémités respectives sont sur une même parallèle à la normale en M à la distance $l(u, v)$ l'une de l'autre : $\vec{V} = \vec{V}' + l\vec{N}$.

Si δ et δ' sont les dilatations superficielles de l'élément d'aire de S entourant le point M (que pour simplifier l'écriture nous supposerons rapportées à l'unité d'aire), on a, \mathcal{K} étant la courbure moyenne de S en M :

$$(23) \quad \delta - \delta' = l\mathcal{K}.$$

Cela étant, supposons que les deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' envisagés soient, respectivement, le vecteur définissant la transformation infinitésimale la plus générale de S et sa projection orthogonale sur le plan tangent en M à S. Comme le vecteur \vec{MI} déterminé par la formule (20) $[\vec{MI} = -\Delta(\varphi, \vec{M})]$, où I est le point d'intersection avec le plan tangent de la corde des contacts d'une enveloppe quelconque de sphères $\Sigma(R^2 = 2\rho)$ centrées sur S, peut avoir une direction arbitraire dans le plan tangent, et qu'il en est de même du vecteur

$$\vec{N} \wedge \vec{MI} = -\vec{N} \wedge \Delta(\varphi, \vec{M})$$

qui définit, comme on l'a vu, l'autotransformation équivalente infinitésimale la plus générale de S, on peut donner au vecteur \vec{V} ci-dessus la forme

$$\vec{V} = \lambda \vec{N} \wedge \Delta(\varphi, \vec{M}) \quad [\lambda = f(u, v)],$$

et un calcul facile montre alors que

$$\delta' = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial\lambda}{\partial u}}{H} = \frac{1}{H} \frac{D(\varphi, \lambda)}{D(u, v)} = \Theta(\varphi, \lambda),$$

d'où l'expression de δ sous la forme invariante

$$\delta = \Theta(\varphi, \lambda) - l\mathcal{E},$$

Les transformations équivalentes infinitésimales de S s'obtiennent en choisissant l pour que $\delta = 0$:

$$l = \frac{\Theta(\varphi, \lambda)}{\mathcal{E}},$$

et sont données par le vecteur \vec{V} défini par la formule invariante

$$(24) \quad \vec{V} = \vec{V}' + l\vec{N} = \lambda\vec{N} \wedge \Delta(\varphi, \vec{M}) + \frac{\Theta(\varphi, \lambda)}{\mathcal{E}}\vec{N},$$

où φ et λ sont deux fonctions arbitraires des variables u et v .

On voit que si l'on prend pour λ une fonction quelconque de φ , $\Theta(\varphi, \lambda) = 0$, et la transformation équivalente infinitésimale définie par (24) est une auto-transformation équivalente infinitésimale de S, ce qui correspond au fait que si, dans une congruence de sphères, on remplace le rayon de la sphère génératrice par une fonction déterminée quelconque de ce rayon, les cordes de contact relatives aux sphères centrées en un même point M de S dans les différentes congruences ainsi obtenues sont toutes situées dans un même plan normal à S.

Si S est une sphère (qu'on peut supposer de rayon 1) on a, dans la formule (24), $\vec{M} = \vec{N}$, $\mathcal{E} = 2$. Si dès lors on mène par un point fixe O de l'espace le vecteur \vec{OJ} équipollent à \vec{V} , puis par J la parallèle D à la normale en M à la sphère, la quantité $\frac{1}{2}\Theta(\varphi, \lambda)$ intervenant dans (24) n'est autre chose, conformément d'ailleurs à un résultat établi en [1], que l'abscisse \vec{IJ} comptée à partir de la projection orthogonale I de O sur D, du point central (milieu du segment focal) de D dans la congruence (D) (qui est la congruence rectiligne la plus générale de l'espace), et l'on obtient par suite la transformation équivalente infinitésimale la plus générale de la sphère, en se donnant *une congruence rectiligne arbitraire* (D), et en menant, par le point M de S, image du rayon D dans la représentation sphérique de (D) sur S, le vecteur \vec{V} équipollent au vecteur \vec{OI} déterminé par un point fixe O et le point central I de D. Le déplacement infinitésimal du point M de S dans une telle transformation est $\delta\vec{M} = \varepsilon\vec{V}$.

La construction précédente ramène, par exemple, la construction des transformations infinitésimales équivalentes d'une sphère S pour lesquelles les déplacements des différents points sont parallèles à un même plan fixe (π) à *celle des congruences à surface moyenne plane*, le plan moyen étant le plan diamétral de S parallèle à (π).

Si S est minimale, \mathcal{H} étant nul la formule générale (24) perd sa signification. Si alors on se reporte à l'équation (9) définissant le déplacement

$$\delta\vec{M} = \alpha \frac{\partial\vec{M}}{\partial u} + \beta \frac{\partial\vec{M}}{\partial v} + \gamma\vec{N}$$

dans la transformation équivalente infinitésimale la plus générale de S , on voit que l'expression de $\delta\vec{M}$ est indépendante de γ , ce qui [1] signifie qu'on ne modifie pas le caractère d'une transformation équivalente infinitésimale de S en déplaçant arbitrairement (mais continûment) les extrémités des vecteurs \vec{V} qui la définissent normalement aux plans tangents de S aux points M correspondants.

Le problème de la détermination des transformations équivalentes infinitésimales des surfaces *minimales* n'est pas, comme l'on voit, distinct de celui de la détermination des autotransformations équivalentes infinitésimales de ces mêmes surfaces, car en déplaçant les extrémités des déplacements des différents points M d'une surface minimale dans la transformation équivalente infinitésimale la plus générale de celle-ci normalement aux plans tangents correspondants, on peut toujours se ramener à la considération d'une transformation infinitésimale tangentielle, c'est-à-dire d'une autotransformation.

De là, et conformément à la construction générale des autotransformations équivalentes d'une surface quelconque obtenue au paragraphe IV, il suffira, pour avoir la transformation équivalente infinitésimale la plus générale d'une surface minimale quelconque S , d'envisager la congruence des sphères (Σ) la plus générale de déférente S , de faire tourner la corde des contacts D de la sphère centrée au point courant M de S d'un angle droit (dans un sens déterminé, quelconque d'ailleurs) autour de la normale en M à S , puis de prendre sur la droite D ainsi obtenue un point M' , la distribution des points M' sur les différentes droites D' étant fixée par une loi continue *arbitrairement choisie*. La transformation équivalente infinitésimale la plus générale de S est définie par le champ des vecteurs infinitésimaux $\delta\vec{M} = \varepsilon\vec{MM}'$.

Si les sphères Σ ont toutes le même rayon, leurs cordes de contact se réduisent aux normales de S , d'où le résultat suivant lequel *tout champ de vecteurs infinitésimaux issus des différents points d'une surface minimale normalement à la surface définit une transformation équivalente infinitésimale de celle-ci*.

L'existence de champs de déplacements normaux infinitésimaux réalisant une transformation équivalente infinitésimale d'une surface S est *caractéristique* des surfaces minimales, ainsi que cela résulte des premiers principes du calcul des variations, et comme le montre d'ailleurs la remarque faite au paragraphe III suivant laquelle *aucune transformation équivalente infinitésimale normale n'est possible pour les surfaces non minimales*.

VI. — Sur quelques transformations équivalentes infinitésimales particulières.

Au paragraphe III nous avons fait allusion au problème de la recherche des déformations équivalentes infinitésimales d'une surface donnée S pour un champ de déplacements infinitésimaux de directions données, c'est-à-dire lorsqu'on se donne *a priori* la congruence des droites issues des différents points de S suivant lesquelles doivent se déplacer ces points.

Ce problème admet une infinité de solutions dont la généralité est celle d'une fonction arbitraire d'un argument. Il est impossible ou indéterminé pour les directions de déplacements *normales* à S, l'indétermination ayant lieu pour les surfaces minimales et l'impossibilité pour toutes les autres (*voir* § V).

Je voudrais revenir sur la question pour en examiner en détail certains aspects suggérés par les relations, précédemment signalées, que le sujet présente avec la théorie des congruences de sphères.

Envisageons la forme invariante

$$(6) \quad \Delta(\vec{M}, \vec{V}) = \sigma$$

sous laquelle, au paragraphe II, nous avons mis l'équation du problème général des transformations équivalentes infinitésimales d'une surface quelconque S, $\vec{V}(u, v)$ étant le vecteur définissant le déplacement infinitésimal $\delta\vec{M} = \epsilon\vec{V}$ du point M(u, v) de S.

Nous pouvons nous donner un champ de directions issues des différents points M de S en nous donnant un champ de vecteurs $\vec{W}(u, v)$ issus de ces points, le module du vecteur \vec{W} étant une fonction continue arbitraire de la position de son support.

La recherche des déplacements infinitésimaux $\delta\vec{M} = \epsilon\vec{V}$ à appliquer aux différents points M dans les directions \vec{W} pour que la transformation infinitésimale de S qui en résulte soit une équivalence superficielle, revient alors, après avoir posé $\vec{V} = \lambda\vec{W}$, à celle des scalaires $\lambda(u, v)$ vérifiant l'équation

$$\Delta(\vec{M}, \lambda\vec{W}) = 0,$$

soit, d'après la relation (4) du paragraphe I ;

$$(25) \quad \vec{W} \cdot \Delta(\lambda, \vec{M}) + \lambda \Delta(\vec{M}, \vec{W}) = 0,$$

équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre en λ , dont le caractère invariant permettra l'introduction du paramétrage de S le mieux adapté.

Si l'on connaît *a priori* une solution du problème envisagé, et si l'on choisit pour \vec{W} le vecteur définissant (par $\partial\vec{M} = \varepsilon\vec{W}$) cette solution particulière, on aura $\Delta(\vec{M}, \vec{W}) = 0$, et (25) se réduira à

$$(26) \quad \vec{W} \cdot \Delta(\lambda, \vec{M}) = 0,$$

équation qui en interprétant (*voir* § IV) l'extrémité du vecteur $\vec{M}\vec{I} = -\Delta(\lambda, \vec{M})$ comme le point où la corde des contacts (M_1M_2) de la sphère Σ de centre M et de rayon $R = \sqrt{2\lambda}$ perce le plan tangent en M à S, exprime que $\vec{M}\vec{I}$ est orthogonal à \vec{W} , ou, ce qui revient au même, à la projection orthogonale de \vec{W} sur le plan tangent.

Les directions de ces dernières projections enveloppent, sur S, une famille de ∞^1 courbes (Γ). Lorsque M décrit une courbe Γ quelconque, les rayons MM_1 , MM_2 de Σ restent orthogonaux à Γ , et cette orthogonalité entraîne l'invariance du rayon R de Σ (et par suite de λ) tout le long de la courbe Γ envisagée.

Et de là résulte à nouveau la proposition établie au paragraphe III où le problème qui nous occupe a été complètement résolu en rapportant la surface S aux courbes Γ qui viennent d'être définies et à leurs trajectoires orthogonales, suivant laquelle, à partir d'une solution particulière du problème supposée connue, on obtient la solution la plus générale en multipliant, par un même nombre fixe quelconque, les vecteurs définissant la transformation infinitésimale connue relatifs aux points M situés sur une même courbe Γ , ce nombre fixe variant d'une façon arbitraire lorsqu'on passe d'une courbe Γ à toutes les autres.

Transformations cylindriques. — Comme premier exemple simple, envisageons les transformations équivalentes infinitésimales d'une surface S pour lesquelles les déplacements infinitésimaux sont parallèles à un vecteur fixe \vec{A} (transformations *cylindriques*). Une solution particulière évidente du problème de la recherche de ces transformations est fourni par les translations infinitésimales $\varepsilon\vec{A}$ appliquées aux points M de S, qui déplacent infiniment peu S parallèlement à \vec{A} . Si \vec{A} a la direction de l'axe Oz du trièdre $Oxyz$ auquel S est supposée rapportée, les courbes Γ enveloppées sur S par les projections, sur les plans tangents, des vecteurs \vec{A} issus des différents points M de S, sont les *lignes de pente* (relatives au plan xOy) de S, et il résulte de ce qui précède que, pour avoir la transformation cylindrique équivalente infinitésimale parallèle à Oz la plus générale de S, il suffit de soumettre chaque ligne de pente (relative au plan xOy) de S à une translation infinitésimale parallèle à Oz, l'amplitude de cette translation variant arbitrairement (et continûment) avec la ligne de pente envisagée.

Le cas où S est plane (et réduite par exemple au plan xOy) offre une vérification immédiate de ce dernier résultat. Les lignes de pente de S sont alors indéterminées, et toute transformation infinitésimale de S pour laquelle les déplacements $\vec{\delta M}$ sont normaux à S est une équivalence, résultat en accord avec celui, bien connu, suivant lequel toute transformation infinitésimale de S de l'espèce indiquée est une isométrie infinitésimale.

Transformations coniques. — Considérons de même le problème des transformations coniques équivalentes infinitésimales d'une surface S. Les déplacements infinitésimaux des différents points M de S sont portés par des droites issues d'un point fixe O, et nous pouvons définir la direction du déplacement du point M par le vecteur $\vec{W} = \vec{OM} = \vec{M}$.

L'équation générale (25) s'écrit ici

$$\vec{M} \cdot \Delta(\lambda, \vec{M}) + \lambda \Delta(\vec{M}, \vec{M}) = 0,$$

soit, en tenant compte de ce que, comme on l'a vu au paragraphe I, $\Delta(\vec{M}, \vec{M}) = 2$:

$$\vec{M} \cdot \Delta(\lambda, \vec{M}) + 2\lambda = 0,$$

ou, encore, en désignant par I la projection orthogonale du point fixe O sur le plan tangent en M à S, et en posant $\xi = \log \sqrt{\lambda}$:

$$\vec{MI} \cdot \Delta(\xi, \vec{M}) = 1.$$

Or, si l'on envisage la congruence des sphères centrées aux points M de S et passant par le point fixe O, OI est la corde des contacts de la sphère générique avec les deux nappes de son enveloppe (dont l'une est réduite au point O), et par suite, si l'on désigne par ρ le scalaire défini par $2\rho = R^2$ ($R = OM$ étant le rayon de cette sphère générique), on a $\vec{MI} = -\Delta(\rho, \vec{M})$, et l'équation précédente s'écrit

$$\Delta(\rho, \vec{M}) \cdot \Delta(\xi, \vec{M}) = -1,$$

ou encore

$$(27) \quad \Delta(\rho, \xi) = -1,$$

Δ étant le paramètre mixte ordinaire du premier ordre de Beltrami.

Telle est la forme remarquable qu'affecte l'équation définissant les déplacements des points M d'une surface quelconque S dans une transformation conique équivalente infinitésimale de celle-ci. Toute solution ξ de (27) donne une transformation conique infinitésimale du type envisagé, le déplacement infinitésimal du point générique M de S étant défini par $\vec{\delta M} = \varepsilon \lambda \vec{OM}$, où, d'après la définition de la fonction ξ , $\lambda = e^{2\xi}$.

Les courbes intégrales Γ du champ des directions des projections, sur le plan tangent en M à S , des déplacements infinitésimaux des différents points M , sont ici, comme il est géométriquement évident, les trajectoires orthogonales des courbes sphériques sections de S par les différentes sphères de centre O . Si l'on prend comme courbes coordonnées (u) les courbes Γ , comme courbes (v) leurs trajectoires orthogonales sphériques, et si l'on choisit le paramètre u égal à $\rho = \frac{\overline{OM}^2}{2}$, le ds^2 de S aura la forme $ds^2 = E du^2 + G dv^2$, et l'équation (27) prendra la forme explicite

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -E \quad (\xi = \log \sqrt{\lambda}),$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = \varrho e^{-2 \int E du} \quad (\varrho, \text{ fonction arbitraire de } v),$$

et par suite l'expression

$$\delta \vec{M} = \varepsilon \varrho e^{-2 \int E du} \cdot \vec{OM}$$

du déplacement infinitésimal de M dans la déformation conique équivalente infinitésimale la plus générale de S .

Transformations conoïdales. — Cherchons enfin les transformations équivalentes infinitésimales de S pour lesquelles les déplacements des différents points M ont lieu suivant les rayons de la congruence des perpendiculaires à une droite fixe (l'axe Oz par exemple).

H étant la projection orthogonale de M sur Oz , le déplacement de M dans la transformation infinitésimale la plus générale du type conoïdal envisagé sera de la forme $\delta \vec{M} = \varepsilon \lambda \vec{W} = \varepsilon \lambda \vec{HM}$, et l'équation générale (25) s'écrira ici

$$(28) \quad \vec{HM} \cdot \Delta(\lambda, \vec{M}) + \lambda \Delta(\vec{M}, \vec{HM}) = 0.$$

Si l'on considère la congruence des sphères (Σ) centrées aux différents points M de S et de rayons MH , H apparaît comme l'un des deux points de contact de la sphère générique Σ avec son enveloppe, et par suite, si \vec{MI} est la projection orthogonale de \vec{MH} sur le plan tangent en M à S , \vec{MI} aura la forme

$$\vec{MI} = -\Delta(\rho, \vec{M}),$$

ρ étant égal à $\frac{\overline{MH}^2}{2}$.

En remplaçant, au premier membre de (28), dans le produit scalaire $\vec{HM} \cdot \Delta(\lambda, \vec{M})$, \vec{HM} par sa projection orthogonale \vec{IM} sur le plan tangent en M à S , (28) pourra se mettre sous la forme

$$\Delta(\rho, \vec{M}) \cdot \Delta(\lambda, \vec{M}) + \lambda (\vec{M}, \vec{HM}) = 0,$$

soit, après avoir posé $\lambda = e^\xi$,

$$(29) \quad \Delta(\rho, \xi) + \Delta(\vec{M}, \vec{HM}) = 0 \quad \left(\rho = \frac{\overline{HM}^2}{2} \right).$$

(29) est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre en ξ , dont l'intégration fera connaître ξ , et par suite $\lambda = e^\xi$.

Le déplacement infinitésimal du point M de S dans la transformation conoïdale équivalente infinitésimale d'axe Oz la plus générale est alors

$$(30) \quad \delta\vec{M} = \varepsilon e^\xi \cdot \vec{HM}.$$

Si, à titre de vérification, on forme l'équation (29) correspondant aux transformations équivalentes infinitésimales conoïdales d'axe Oz de la sphère S, de centre O et de rayon 1, rapportée aux coordonnées géographiques ordinaires (u , colatitude; v , longitude), on a, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} étant les vecteurs unitaires de Ox, Oy, Oz :

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + \sin^2 u dv^2, \\ \vec{M} &= \vec{i} \sin u \cos v + \vec{j} \sin u \sin v + \vec{k} \cos u, \\ \vec{HM} &= \vec{i} \sin u \cos v + \vec{j} \sin u \sin v, \\ \rho &= \frac{\overline{HM}^2}{2} = \frac{\sin^2 u}{2}, \end{aligned}$$

et (29) prend la forme explicite

$$\sin u \cos u \frac{\partial \xi}{\partial u} + 1 + \cos^2 u = 0,$$

dont l'intégration donne

$$\lambda = e^\xi = \varphi \frac{\cos u}{\sin^2 u} \quad (\varphi, \text{ fonction de } v),$$

et par suite

$$\delta\vec{M} = \varepsilon \varphi \frac{\cos u}{\sin^2 u} \vec{HM}.$$

En prenant $\varphi = 1$, on constate aussitôt que les extrémités des vecteurs $\delta\vec{M}$ définissant les déplacements infinitésimaux des différents points de S, sont situés sur la sphère S' (inscrite comme S dans le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon 1) obtenue en soumettant S à la translation infinitésimale d'amplitude ε le long de Oz.

Ce résultat est conforme à la propriété bien connue suivant laquelle, deux cloisons quelconques de S et S' en projection conoïdale d'axe Oz l'une sur l'autre ont même aire, cette aire étant celle de leur projection commune sur le cylindre circonscrit d'axe Oz.

Si l'on mène par O le vecteur $\vec{V} = \vec{OI} = \varrho \frac{\cos u}{\sin^2 u} \vec{HM}$ définissant le déplacement d'un point quelconque M dans la transformation conoïdale équivalente infinitésimale d'axe Oz de la sphère S la plus générale, et si, par I , on mène la parallèle D au rayon OM de S , on voit immédiatement que la congruence des droites D est la congruence à surface moyenne plane (xOy) la plus générale dont l'une des deux nappes focales est l'axe Oz , l'autre nappe admettant alors pour sections par les plans issus de Oz des paraboles d'axe Oz et de sommet O , le paramètre de la parabole située dans le plan issu de Oz de longitude ν étant une fonction arbitraire de ν , et cela conformément à la construction générale dont il a été question au paragraphe V, qui ramène la détermination des transformations équivalentes infinitésimales d'une sphère S à celle des congruences rectilignes admettant pour surface moyenne un plan diamétral de S .

Transformations infinitésimales dont les supports des déplacements appartiennent à une congruence normale. — Les trois types de transformations équivalentes infinitésimales d'une surface S qui viennent d'être envisagés (cylindriques, coniques, conoïdales) sont tels que les droites portant les déplacements infinitésimaux des différents points M de S forment des congruences normales particulières. Il se trouve, comme nous allons le voir, que le problème de la transformation équivalente la plus générale d'une surface S , pour laquelle les déplacements infinitésimaux des différents points M de S sont portés par une congruence normale quelconque, peut, tout comme le problème particulier de la recherche des transformations équivalentes infinitésimales du type conoïdal, être ramené à l'intégration d'une équation de la forme générale (29).

Donnons-nous une congruence normale quelconque (D) , dont les rayons D sont issus des différents points $M(u, \nu)$ de S , et cherchons les transformations équivalentes infinitésimales de S pour lesquelles les déplacements des points M ont les directions des droites D correspondantes.

Soient, Ω une surface quelconque normale aux rayons de (D) , et H le point de Ω situé sur le rayon D issu du point M de S . Les sphères Σ centrées aux différents points M et ayant pour rayons les segments MH correspondants forment une congruence (Σ) , et H est évidemment l'un des points où la sphère Σ centrée en M touche l'une des deux nappes (Ω) de son enveloppe.

Si dès lors I est le pied de la perpendiculaire abaissée de H sur le plan tangent en M à S , on a, comme on l'a vu, $\vec{MI} = -\Delta(\varrho, \vec{M})$, ϱ représentant $\frac{\overline{MH}^2}{2}$, et l'opérateur Δ étant construit à partir du ds^2 de S .

Le déplacement infinitésimal du point M dans l'une quelconque des transformations infinitésimales de S envisagées aura la forme $\delta\vec{M} = \varepsilon\lambda(u, \nu)\vec{HM}$, et, en raisonnant comme on l'a fait dans le cas des transformations conoïdales, on

constate que l'équation générale $\Delta(\vec{M}, \vec{V}) = 0$ (où $\vec{V} = \lambda \overrightarrow{HM}$) peut se mettre sous la forme (29) précédemment obtenue

$$(29) \quad \Delta(\rho, \zeta) + \Delta(\vec{M}, \overrightarrow{HM}) = 0.$$

Ici les courbes intégrales (Γ) du champ des directions \overrightarrow{MI} des projections des vecteurs \overrightarrow{MH} sur les plans tangents aux points M de S , qui étaient des lignes de pente de S dans le cas des transformations cylindriques, ou les trajectoires orthogonales des sections de S par les sphères de centre O dans le cas des transformations coniques (de sommet O), sont les trajectoires orthogonales de la famille des sections de S par les ∞^1 surfaces (parallèles à Ω) normales aux rayons de (D).

Cette dernière famille de courbes n'existe que si S n'est pas parallèle à Ω , c'est-à-dire si les déplacements des différents points M de S ne sont pas normaux à S , et cela conformément au résultat signalé au paragraphe V sur l'inexistence (mis à part le cas singulier présenté par les surfaces *minimales*) de transformations équivalentes infinitésimales d'une surface S dans un champ de directions normales à S .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] R. BOUDET, *Sur quelques propriétés géométriques des transformations infinitésimales des surfaces* (Thèse, Marseille, 1961).
- [2] H. PAILLOUX, *Contribution à l'étude des systèmes déformables* (Thèse, Paris, 1937). *Mouvements fluides entraînant une famille de surfaces inextensibles* (Bull. Sc. Math., 1939, p. 329-353).
- [3] P. VINCENSINI, *Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 61, 1944, p. 119-147).
- [4] P. VINCENSINI, *Sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes* (Bull. Sc. math., t. 63, 1941, p. 155-186).

