G. GLAESER

Multiplicateurs rugueux des fonctions différentiables et synthèse spectrale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 3 (1962), p. 243-261
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_3_243_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 243 à 261.

MULTIPLICATEURS RUGUEUX DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES ET SYNTHÈSE SPECTRALE

PAR M. G. GLAESER.

CHAPITRE I.

Le présent travail concerne l'espace $\mathcal{D}^m(\mathrm{K}; \mathcal{B})$ des fonctions m-fois continûment différentiables sur un ensemble convexe et compact K d'un espace affine à n dimensions $\mathcal{E}$, et prenant leurs valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$.

Nous dirons qu'une fonction f est *rugueuse* en un point A de K si elle n'est pas m-fois continûment dérivable au voisinage de A. Le *support de rugosité* d'une fonction est l'ensemble (fermé) des points où cette fonction est rugueuse.

La remarque suivante contient l'idée essentielle de cet article :

« Il peut arriver que le *produit* de deux fonctions *rugueuses* soit *m-fois continûment dérivable.* »

Exemples :

1° Cela se produit lorsque chaque facteur s'annule sur un voisinage du support de rugosité de l'autre.

2° Le produit de la fonction numérique rugueuse $x \sin \frac{1}{x}$ par x^{m+1} est m-fois continûment dérivable.

3° M. H. Whitney a consacré un article (*cf.* [2]) à l'étude de cette situation pour des fonctions d'une variable réelle dont le support de rugosité se réduit à un seul point.

4° Nous sommes parvenu à construire une fonction de deux variables $f(x, y)$ rugueuse à l'origine et qui devient deux fois continûment dérivable lorsqu'on la multiplie par $x.y$; mais cette fonction reste rugueuse après multiplication par x^2 ou par y^2 (*cf.* Glaeser [4].

L'ensemble des multiplicateurs d'un champ de vecteurs $\mathbf{V} \in \mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions numériques qui multipliées par $\mathbf{V}$ donne un produit appartenant à $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ forme un module par rapport à $\mathcal{D}^m(K) = \mathcal{D}^m(K; R)$.

Parmi les nombreux problèmes qui se posent à ce propos, nous nous sommes particulièrement intéressé à l'étude des multiplicateurs λ tels que le produit $\lambda.\mathbf{V}$ appartienne au sous-module fermé engendré par $\mathbf{V}$ (*cf.* la proposition 4 ci-dessous).

M. H. Whitney a démontré en 1948 (*cf.* Whitney [1]) le théorème de synthèse spectrale des idéaux fermés de $\mathcal{D}^m(K)$: « Tout idéal fermé de $\mathcal{D}^m(K)$ est l'intersection de ses idéaux ponctuels ».

C'est à l'élaboration d'une nouvelle démonstration de ce théorème que nous appliquons l'étude des multiplicateurs rugueux, développée au chapitre III.

En fait, nous profitons de cette rédaction pour établir une généralisation du théorème spectral aux sous-modules de $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ dans le cas où $\mathcal{B}$ est de dimension finie : le passage des idéaux aux modules ne présente que des difficultés de rédaction d'ailleurs minimes.

Notre démonstration prétend éclaircir les raisons qui ont permis le succès de certains procédés utilisés par M. Whitney. Par exemple, pourquoi cet auteur doit-il recourir (*loc. cit.*, p. 648) à une interpolation sur un ensemble dénombrable? Y-a-t-il un lien entre le théorème de synthèse spectrale et le théorème du prolongement? (*cf.* Whitney [3] et Glaeser [1]). Cette dernière référence sera désignée par [AT] dans toute la suite.

A cet égard, le *théorème de densité* démontré au paragraphe 3 nous semble être au cœur de la question.

Nous avons tenu à répartir notre démonstration en une douzaine de propositions et théorèmes : nous sommes convaincu que certains de ces résultats peuvent être utiles dans d'autres questions relatives à $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ et à la théorie des distributions.

Ainsi le maniement de l'outil que représentent les *opérateurs de prolongements* mérite d'être répandu : nous avons essayé de rédiger un « mode d'emploi » pratique, accompagné d'une liste de majorations usuelles.

Le chapitre II représente un « fascicule de résultats » destiné, non seulement aux lecteurs du présent article, mais aussi à tous les usagers du Calcul Taylorien (les références à ce chapitre sont précédées par [CT]).

Ce chapitre se réfère fréquemment à [AT]; mais il est rédigé de telle sorte que [AT] puisse être *consulté*, sans qu'une lecture systématique en soit rendue nécessaire.

CHAPITRE II.

FONCTIONS CONTINÛMENT DÉRIVABLES.

(Notations et résultats de Calcul Taylorien.)

1. Produits tensoriels symétriques.

Soit K un corps convexe (¹) compact d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ à n dimensions (E est l'espace vectoriel associé).

E est muni d'une norme (par exemple euclidienne) et $\mathcal{E}$ de la métrique correspondante.

$\overset{i}{\odot} E$ est la $i^{\text{ième}}$ puissance tensorielle symétrique de E (*cf.* AT, p. 9, ou Glaeser [3]).

On pose

$$\overset{0}{\odot} E = R, \qquad \overset{i}{\odot} E = E,$$

$\overset{i}{\odot} E$ sera muni d'une norme telle que $\left\| \overset{i}{\odot} \mathbf{V} \right\| = \| \mathbf{V} \|^i$ (²).

$\mathcal{B}$ est un espace de Banach. Si $\mathcal{B}$ est une algèbre, on suppose qu'il existe une constante K telle que

$$\text{CT (1)} \qquad \| xy \| \leq K \| x \| . \| y \| .$$

(on dira que $\mathcal{B}$ est une algèbre *multiplicativement* normée si $K = 1$). $\mathcal{L}\left(\overset{i}{\odot} E, \mathcal{B}\right)$ espace des applications linéaires de $\overset{i}{\odot} E$, dans $\mathcal{B}$ sera muni de sa norme canonique. $\mathcal{L}\left(\overset{0}{\odot} E, \mathcal{B}\right)$ est identifié à $\mathcal{B}$.

Étant donné deux espaces vectoriels E et F et $L \in \mathcal{L}(E, F)$, la valeur que prend L pour le vecteur $\mathbf{V} \in E$ se note $L[\mathbf{V}]$.

Dans la suite le *crochet* [ ] *est exclusivement* réservé à désigner des variables qui rentrent *linéairement* dans une formule.

(¹) Dans la démonstration de la formule de Taylor, on joint les deux points de K qui y interviennent par un segment : c'est pourquoi nous supposons K convexe.

Les résultats que nous obtenons peuvent sans difficultés être repris dans le cadre d'un ensemble K convenable, situé dans une variété différentiable.

(²) L'existence de telles normes est classique dans les produits tensoriels d'espaces normés (Schatten, Grothendieck). C'est la convention que nous adoptons dans [AT].

Mais lorsqu'on veut faire intervenir d'une façon essentielle une structure euclidienne sur E, il convient de faire intervenir la structure euclidienne canonique associée sur $\odot E$ (*cf.* Glaeser [3]). La norme qu'on adopte alors satisfait à

$$\left\| \overset{i}{\odot} \mathbf{V} \right\| = \frac{\| \mathbf{V} \|^i}{i\,!}.$$

Pour tout $T \in \overset{i}{\odot} E$ et $S \in \overset{j}{\odot} E$, il existe une « *multiplication* » *tensorielle* symétrique canonique telle que $T \odot S \in \overset{i+j}{\odot} E$ (*cf.* par exemple Glaeser [3]). Si $L \in \mathcal{L}(\overset{m}{\odot} E, \mathcal{B})$ et $T \in \overset{i}{\odot} E$ (avec $i \leqq m$), $L[T]$ désigne l'élément de $\mathcal{L}(\overset{m-i}{\odot} E, \mathcal{B})$ qui applique $S \in \overset{m-i}{\odot} E$ sur $L[T \odot S]$. Donc,

$$(L[T])[S] = L[T \odot S].$$

Étant donné $L \in \mathcal{L}(\overset{m}{\odot} E, \mathcal{B})$ et $M \in \mathcal{L}(\overset{n}{\odot} E, \mathcal{B})$, il existe un élément et un seul de $\mathcal{L}(\overset{n+m}{\odot} E, \mathcal{B})$, noté $L \odot M$, qui satisfait à

CT (2) $$(L \odot M)\left[\overset{n+m}{\odot} \mathbf{V}\right] = L\left[\overset{m}{\odot} \mathbf{V}\right].M\left[\overset{n}{\odot} \mathbf{V}\right] \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{V} \in E.$$

Avec la norme canonique, $\| L \odot M \| \leqq \| L \| . \| M \|$ (*cf.* Grothendieck [1], p. 323).

2. Fonctions m-fois continûment dérivables.

$\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ est l'espace des fonctions m-fois continûment dérivables définies sur K et à valeurs dans $\mathcal{B}$.

En chaque point $M \in K$, $f \in \mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ possède $m + 1$ « dérivées totales »

$$D_M^i f \in \mathcal{L}(\overset{i}{\odot} E, \mathcal{B}) \qquad (i = 0, 1, \ldots m).$$

Lorsqu'on utilise une base affine d'origine M dans $\mathcal{E}$, $D_M^i f\left[\overset{i}{\odot} V\right]$ représente le polynome homogène de degré $\leqq i$ par rapport aux coordonnées de **V** dont les coefficients sont les dérivées partielles de f affectés de certains facteurs binomiaux. C'est ce qu'on appelle parfois la « puissance symbolique $i^{\text{ième}}$ de $\sum_{a \leqq n} \frac{\partial^a f}{\partial x_a} X_a$ » où les X_a représentent les coordonnées de **V**. (Cette locution curieuse semble ignorer que *toutes* les expressions utilisées en Mathématiques sont « symboliques » !)

On pose $f(M) = D_M^0 f$.

La fonction $M \to D_M^i f$ appartient à $\mathcal{D}^{m-i}(K, \mathcal{L}(\overset{i}{\odot} E, \mathcal{B}))$.

Le polynome de Taylor d'ordre m, de f, au point A est

$$T_A f(M) = \sum_{i=0}^{i=m} D_A^i f\left[\frac{\overset{i}{\odot} \mathbf{AM}}{i!}\right].$$

CT(3). — Lorsqu'il sera question du polynome de Taylor d'ordre $k \leqq m$ $\left(\text{avec une sommation } \sum_{i=0}^{i=k}\right)$ on mettra l'indice k entre parenthèse $T_A^{(k)} f(.M)$.

Ainsi $T_A f(M)$ devrait s'écrire $T_A^{(m)} f(M)$ lorsqu'une confusion risquerait de se produire.

Par contre le polynome dérivée-$k^{\text{ième}}$ de $T_A f(M)$ sera noté (sans parenthèse)

$$T_A^k f(M) = \sum_{i=0}^{i=m-k} D_A^{k+i} f\left[\frac{\overset{i}{\odot}\,\mathbf{AM}}{i!}\right].$$

Si $F \subseteq K$ est un ensemble fermé

$$\|f\|_F^m = \operatorname*{Max}_{0\leq i\leq m}\left(\operatorname*{Max}_{M\in F}\|D_M^i f\|\right)$$

est une semi norme sur $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ [c'est même une norme si $K = F$, $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ est complet pour cette norme].

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre multiplicativement normée, on a

CT (4) $$\|fg\|_K^m \leq 2^m . \|f\|_K^m . \|g\|_K^m$$

[$\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ est donc une algèbre (non multiplicativement) normée (car on tolère la présence du facteur 2^m) ([3])].

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre multiplicativement normée et $\mathcal{B}$ un $\mathcal{A}$-module, tel que $\|\alpha x\|_{\mathcal{B}} \leq \|\alpha\|_{\mathcal{A}} . \|x\|_{\mathcal{B}}$, la même inégalité, montre que $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ est un $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{A})$-module topologique.

Tout ceci résulte immédiatement de la formule de Leibniz,

CT (5) $$D_A^k \alpha . x = \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} . D_A^p \alpha \odot D_A^{k-p} x \qquad (cf.\ [AT],\ p.\ 20).$$

Le produit qui figure au second membre est un produit tensoriel symétrique d'opérateurs [tel qu'il se trouve défini en CT (2)].

Un *module de continuité* α est une fonction numérique continue croissante, *concave* définie sur l'ensemble des nombres réels ≥ 0 et telle que $\alpha(0) = 0$. Pour tout $f \in \mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})$ il existe des modules de continuité α tels que

CT (6) $$\|f(M) - T_A f(M)\| \leq \frac{\|\mathbf{AM}\|^m}{m!} . \alpha(\|\mathbf{AM}\|).$$

On dit que α est un *m-module de continuité pour f*.

([3]) D'autres normes sont usuelles sur $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$. Par exemple :

$$\operatorname*{Max}_{M\in K}\left(\sum_{i=0}^{i=m}\frac{\|D_M^i f\|}{i!}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{i=m}\left(\operatorname*{Max}_{M\in K}\frac{\|D_M^i f\|}{i!}\right).$$

Ces normes ont l'avantage de ne pas nécessiter de facteur 2^m dans l'inégalité correspondante. Mais elles nous paraissent moins commodes à manier.

Lorsque l désigne le diamètre de K, et qu'on se réserve le droit de faire varier K en cours d'étude, il est utile d'envisager la norme $\operatorname*{Max}_{0\leq i\leq m}\left(l^i \operatorname*{Max}_{M\in F}\|D_M^i f\|\right)$, qui est *invariante par homothétie*. Mais dans la suite, nous supposerons que le diamètre de K est ≤ 1 (pour des raisons de commodité).

Dans cette inégalité, on peut prendre pour α n'importe quel module de continuité de la fonction $M \rightarrow D_M^m f$ (*cf.* [AT], p. 14, prop. 1). Avec un tel choix, si l désigne le diamètre de K, on obtient

$$\alpha(l) \leqq 2 \operatorname*{Max}_{M \in K} \| D_M^m f \| \leqq 2 \| f \|_K^m$$

On a parfois intérêt à utiliser un « module de continuité normalisé »

$$\text{CT (7)} \qquad \beta = \frac{\alpha}{2} \| f \|_K^m.$$

Ainsi

$$\| f(M) - T_A f(M) \| \leqq \frac{\| AM \|^m}{m!} \| f \|_K^m \beta(\| AM \|)$$

3. Fonctions k-plates.

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ est k-plate au point A, si $D_A^i f$ est nul pour $0 \leqq i \leqq k$.

On désigne par $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{k}{F}; \mathcal{B}\right)$ le sous-espace de $\mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})$ formé des fonctions qui sont k-plates en tout point de $F \subseteq K$.

Lorsque $\mathcal{B}$ est une algèbre (resp. un $\mathfrak{A}$-module), $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{k}{F}; \mathcal{B}\right)$ est un *idéal* fermé [resp. un $\mathcal{D}^m(K, \mathfrak{A})$-*sous module* fermé] de $\mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})$. $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{m}{F}; \mathcal{B}\right)$ est l'adhérence, dans $\mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})$, de l'espace des fonctions qui s'annulent au voisinage de F. (*cf.* théorème de Silov ci-dessous). Désignons par $\delta(M, F)$ la distance de $M \in K$ à F.

En appliquant la formule de Taylor d'ordre k, en un point $A \in F$ tel que $\| AM \| = \delta(M, F)$ on trouve que pour toute fonction $f \in \mathcal{J}^m\left(K, \overset{k}{F}; \mathcal{B}\right)$

$$\text{CT (8)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \| f(M) \| \leqq \frac{\delta(M, F)^k}{k!} \cdot \| f \|_K^m \cdot \beta(\delta(M, F)) \\ & \| D_M^i f \| \leqq \frac{\delta(M, F)^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \| f \|_K^m \cdot \beta(\delta(M, F)) \qquad \text{pour } 0 \leqq i \leqq k. \end{aligned} \right.$$

4. Champs W-Tayloriens.

Une application définie sur F et à valeurs dans un espace de polynome (à valeur vectorielle) (de degré $\leqq m$) s'appelle un *champ Taylorien d'ordre m*. Par exemple, si $f \in \mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})$, l'application $M \rightarrow T_M f$ est un champ Taylorien d'ordre m (défini sur K, ou par restriction, sur F). On dit que c'est le champ

Taylorien *induit* sur F par la fonction f. Le *théorème du prolongement de H. Whitney* ([3]), caractérise les champs Tayloriens qui sont ainsi induits sur F par une fonction $f \in \mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ Taylorien $M \to P_M$ défini sur F puisse être induit par une fonction f est qu'il existe un module de continuité α tel que, $\forall A, B \in F$ et $M \in K$,

$$\| P_A(M) - P_B(M) \| \leq \left(\frac{\| AM \| + \| BM \|}{m\,!} \right)^m . \alpha(\| AB \|) \quad (^4) \qquad (cf.\ \text{AT, chap. I}).$$

Les inégalités (W) suivantes, au nombre de $(m+1)$ constituent une condition équivalente à la précédente

$$\text{(W)} \qquad \| P^i_M(M) - P^i_A(M) \| \leq \frac{\| AM \|^{m-i}}{(m-i)\,!} . \alpha(\| AM \|) \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq m.$$

Un champ Taylorien qui satisfait à l'une ou l'autre de ces conditions s'appelle un *champ* W-*Taylorien*.

L'espace $\mathcal{W}^m(F, \mathcal{B})$ des champs W-Tayloriens d'ordre m, défini sur F est isomorphe au quotient $\dfrac{\mathcal{D}^m(K, \mathcal{B})}{\mathcal{J}^m\left(K, \overset{m}{F}; \mathcal{B}\right)}$. $\| \quad \|^m_F$ est une *norme* pour cet espace. Mais $\mathcal{W}^m(F, \mathcal{B})$ n'est, en général, pas complet pour celle-ci. Par contre le maximum de $\|f\|^m_F$ et de

$$\text{CT (10)} \qquad \sup_{M \in K \text{ A et } B \in F} \left(\frac{\| T_A f(M) - T_B f(M) \|}{(\| AM \| + \| BM \|)^m} \right)$$

est une norme d'espace de Banach (resp. d'algèbre ou de module de Banach) pour $\mathcal{W}^m(F, \mathcal{B})$ (*cf.* AT, chap. III). Cette norme se note $|||\, f \,|||^m_F$.

5. Opérateurs de prolongement.

Étant donné $f \in \mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$, et $F \subseteq K$, en prolongeant (grâce au procédé de H. Whitney) le champ W-taylorien induit par f sur F, on obtient une fonction $\mathcal{X}^m_F f \in \mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$, telle que $f - \mathcal{X}^m_F f \in J\left(K, \overset{m}{F}; \mathcal{B}\right)$. L'opérateur *linéaire* $\mathcal{X}^m_F$ de $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ dans $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ possède les propriétés suivantes :

a. C'est un projecteur dont $J^m\left(K, \overset{m}{F} : \mathcal{D}\right)$ est le noyau.

---

(4) Une conséquence de l'inégalité du triangle, est que (quitte à choisir un module de continuité multiple du précédent) l'on peut remplacer

$$\{ \| AM \| + \| BM \| \}^m \quad \text{par } \{ \| AM \|^m + \| BM \|^m \} \quad \text{ou par } \{ \| AB \| + \| AM \| \}^m.$$

b. Il existe des constantes Γ' et Γ *indépendantes de* F *et de* f ([5]) mais dépendant de n (dimension de K), m et aussi du diamètre l de K [*cf.* note ([3])], telle que

CT (11) $$\| \mathcal{T}_F^m f \|_K^m \leqq \Gamma' \||f\||_F^m \leqq \Gamma \|f\|_K^m.$$

c. Si f admet un m-module de continuité α, $\mathcal{T}_F^m f$ admet le m-module de continuité $\Gamma.\alpha$ ([6]).

d. $\mathcal{T}_F^m f$ est indéfiniment dérivable dans K — F ([7]).

e. Les fonctions $M \to (\delta(M, F))^k . D_M^{m+k}(\mathcal{T}_F^m f)$ définies dans K — F tendent vers o lorsque M tend vers un point de F. Plus précisément, il existe des constantes Γ_k telles que

$$(\delta(M, F))^k . \| D_M^{m+k}(\mathcal{T}_F^m f) \| \leqq \Gamma_k . \beta(\delta(M, F)) . \|f\|_K^m$$

(où β désigne un m-module de continuité normalisé de f) [*cf.* AT, p. 31, note ([8])].

Remarque. — Si l'on applique un opérateur $\mathcal{T}_F^m$ a une fonction f $m+k$-fois continûment dérivable ($k > 0$), la fonction $\mathcal{T}_F^m f$ n'est *que* m fois continûment dérivable, en général ([8]).

CT (12) Il n'y a qu'un cas où ce phénomène n'a pas lieu : c'est lorsque F est fini : $\mathcal{T}_F^m f$ est alors indéfiniment dérivable dans K et *ses dérivées* $m+k^{\text{ième}}$ *s'annulent toutes en tout point de* F.

([5]) Par la suite, il sera fréquemment question de *constantes*. Il s'agira toujours de nombres positifs pouvant dépendre de n, m et du diamètre l de K (que nous prendrons d'ailleurs égal à 1 pour des raisons de commodités). Ces nombres ne dépendent pas de la *forme géométrique de* F, et du *choix des fonctions f*.

Pour désigner ces constantes nous utiliserons les lettres Γ, K ou C (affectées éventuellement d'accents divers). Dans le cours d'un même développement, nous utiliserons des lettres diverses pour des constantes diverses. Mais d'un paragraphe à l'autre nous ne nous astreignons pas à garder la même signification à une même lettre : Cette pratique exige les mêmes précautions que l'emploi des symboles O et o de Hardy et du $2k\pi$ en trigonométrie.

([6]) Les résultats (*b*), (*c*), (*d*) qui permettent de comparer des prolongements effectués sur des F différents, constituent l'outil principal qui sera utilisé dans ce mémoire.

Dans Glaeser ([2]) nous avons déjà utilisé ces résultats pour « intégrer » des formes différentielles le long de certaines courbes irrégulières. En fait, on intégrait sur une ligne polygonale voisine : les résultats (*b*), (*c*) permettaient alors les majorations et les passages à la limite.

([7]) Tout champ W-Taylorien, admet même un prolongement qui est *analytique* dans le complémentaire de F (*cf.* Whitney [3]).

Mais un tel prolongement s'obtient par « approximations successives ». Il ne peut pas s'obtenir, en général, par un opérateur linéaire de prolongement.

([8]) Il est possible de montrer que les seuls F pour lesquels tous les $\mathcal{T}_F^m$ (construits à la manière de H. Whitney, avec une partition différentiable de l'unité) conservent la classe $m+k$, sont les ensembles finis. Les opérateurs $\mathcal{T}_F^m$ ont un certain « pouvoir de régularisation » puisque les $\mathcal{T}_F^m f$ satisfont aux conditions (*b*), (*c*), (*d*), (*e*). Mais par contre les $\mathcal{T}_F^m$ détruisent en général les classes de dérivabilité qui dépassent m.

C'est cette circonstance qui explique la nécessité de faire intervenir une interpolation (sur un ensemble fini) dans l'étude des idéaux de fonctions différentiables (*cf.* Whitney [3], ainsi que le théorème de densité du présent Mémoire).

CT(13) Un lemme classique. — *Il existe des constantes* C_k *telles que pour tout couple d'ensemble fermés disjoints* F_1 *et* F_0 *dont la distance est* ρ, *il existe une fonction* α *indéfiniment dérivable, égale à* 1 *sur* F_1, *à* 0 *sur* F_0 *et satisfaisant aux inégalités*

$$\| D_M^k \alpha \| \leq \frac{C_k}{\rho^k}.$$

Ce lemme est démontré dans L. Schwartz ([1], p. 94) à l'aide de la régularisation. Mais, c'est également une conséquence immédiate du théorème de prolongement (on constate que les C_k ne dépendent pas de F_0 et F_1). En effet, le champ W-taylorien $\{\dot{\alpha}\}$ défini sur $F_0 \cup F_1$, égal à 0 sur F_0 et à 1 sur F_1 appartient à $\mathcal{W}^m(F_0 \cup F_1)$ quel que soit m. La formule CT(10) montre que $|||\dot{\alpha}|||^m_{F_0\cup F_1} = \frac{1}{\rho^m}$.

Le lemme résulte alors de CT(11)(*b*) appliqué successivement pour chaque entier m.

CT(14) *Applications.* — Ce lemme permet de démontrer le Théorème (Silov) :

L'espace $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{m}{F}; \mathcal{B}\right)$ *est l'adhérence de l'ensemble des champs de vecteurs, qui s'annulent sur un voisinage de* F.

Car tout champ de vecteurs $\mathbf{V} \in \mathcal{J}^m\left(K, \overset{m}{F}; \mathcal{B}\right)$ est limite d'une suite de champ $\alpha.\mathbf{V}$, où α est une fonction $\in \mathcal{D}^m(K)$ nulle sur un voisinage de F et égale à 1 hors du ρ-voisinage de ce voisinage de F.

Rappelons que le ρ-*voisinage ouvert* (resp. *fermé*) de F est l'ensemble des points $M \in K$ tel que $\delta(M, K) < \rho$ (resp. $\leq \rho$).

Remarque. — Une telle suite de fonctions α est « une unité approximative » de $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{m}{F}; \mathcal{B}\right)$ au sens de Ditkin.

CHAPITRE III.

Espaces de multiplicateurs $\mathcal{D}^{k,m}(K, F)$.

Soit F un ensemble compact $\subset$ K. Rappelons que $\delta(M, F)$ désigne la distance euclidienne de $M \in K$ à F. Le diamètre de K sera supposé ≤ 1.

Définition. — $\mathcal{D}^{k,m}(K, F)$ est l'espace des fonctions f qui satisfont aux trois conditions suivantes :

a. Elles sont k-fois continûment dérivables sur K.

b. Elles sont m-fois continûment dérivables dans K-F.

c. Pour tout entier i tel que $1 \leqq i \leqq m-k$, la fonction numérique qui est égale à 0 sur F et à $\{\delta(M, F)\}^i.\|D_M^{k+i}f\|$ en tout point $M \in K - F$ est continue sur K.

Remarque. — Par abus de langage, il nous arrivera de parler de la fonction $M \to \{\delta(M, F)\}^i.D_M^{k+i}f$, sans rappeler que cette fonction (non définie sur F) doit être prolongée par la valeur 0 sur F.

Proposition 1. — *$\mathcal{D}^{k,m}(K, F)$ est une algèbre de Banach lorsqu'on la munit de la norme suivante* :

$$\|f\|_{K;F}^{k;m} = \underset{0 \leqq i \leqq m}{\mathrm{Max}}\left[\underset{M \in K}{\mathrm{Max}}\left(\{\delta(M, F)\}^{|i-k|^+}.\|D_M^i f\|\right)\right]$$

(*où* $|i-k|^+$ *signifie* $\mathrm{Sup}(i-k, 0)$).

Les injections canoniques $\mathcal{D}^m(K) \subset \mathcal{D}^{k,m}(K, F) \subset \mathcal{D}^k(K)$ sont continues et $\mathcal{D}^{k,m}(K, F)$ est un $\mathcal{D}^m(K)$-module topologique.

Le fait que l'espace étudié soit complet résulte immédiatement du fait que toute suite de Cauchy converge aussi au sens de $\mathcal{D}^k(K)$ et au sens de $\mathcal{D}^m(K-F)$ (sur tout compact) (Démonstration standart).

Pour majorer la norme d'un produit, nous utiliserons la formule de Leibniz, et l'inégalité $|j-k|^+ \geqq |\alpha - k|^+ + |j - \alpha - k|^+$.

Alors (puisque $\delta(M, F) < 1$),

$$\begin{aligned}&\{\delta(M, F)\}^{|j-k|^+}.\|D_M^j fg\| \\ &\leqq \sum_{\alpha=0}^{\alpha=j}\binom{j}{\alpha}\{\delta(M, F)\}^{|\alpha-k|^+}.\|D_M^\alpha f\|.\{\delta(M, F)\}^{|j-\alpha-k|^+}.\|D_M^{j-\alpha}g\|.\end{aligned}$$

En ajoutant les coefficients du binome, on obtient $2^j \leqq 2^m$ et

$$\|fg\|_{K;F}^{k;m} \leqq 2^m \|f\|_{K;F}^{k;m}.\|g\|_{K;F}^{k;m}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{D}^{k,m}(K, F)$ et tout $g \in \mathcal{D}^m(K)$ on a $\|f\|_K^k < \|f\|_{K,F}^{k,m}$ et $\|g\|_{K,F}^{k,m} \leqq \|g\|_K^m$ [à cause de l'inégalité $\delta(M, K) \leqq 1$].

Il en résulte que

$$\|fg\|_{K;F}^{k;m} \leqq 2^m.\|f\|_{K;F}^{k;m}.\|g\|_K^m.$$

Remarque. — Ce qui précède se généralise aisément à l'étude des espaces $\mathcal{D}^{k,m}(K, F; \mathcal{B})$ formés de champs de vecteurs à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$.

Définition. — Nous dirons qu'α est un *k, m-module de continuité normalisé* pour f par rapport à F, si c'est un k-module, de continuité normalisé pour f, et si

$$\{\delta(M, F)\}^i.\|D_M^{k+i}f\| \leqq \alpha(\delta(M, F)).\|f\|_{K;F}^{k;m}$$

pour tout $i \leqq m-k$ et tout $M \in K - F$.

PROPOSITION 2. — *Les opérateurs de prolongement* $\mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{k}$ *sont des applications linéaires continues de* $\mathcal{D}^{k}(\mathrm{K}; \mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{D}^{k,m}(\mathrm{K}, \mathrm{F}; \mathcal{B})$ *pour tout* $m \geqq k$. *Les normes de ces opérateurs sont majorées indépendamment de la forme de* F, *par une constante.*

Il existe une constante Γ *telle que si* α *est un k-module de continuité de* f, $\mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{k} f$ *admette* $\Gamma . \alpha$ *comme k-m module de continuité* ([9]).

Cette proposition n'est qu'une paraphrase de CT(11) :

PROPOSITION 3. — *Le produit d'une fonction* $f \in \mathcal{D}^{k,m}(\mathrm{K}, \mathrm{F})$ *par un champ de vecteurs* $\mathbf{V} \in \mathcal{J}^{m}\left(\mathrm{K}, \frac{m-k}{\mathrm{F}}; \mathcal{B}\right)$ *appartient à* $\mathcal{J}^{m}\left(\mathrm{K}, \frac{m-k}{\mathrm{F}}; \mathcal{B}\right)$. *La multiplication ainsi définie est une application bilinéaire continue.*

On sait déjà que $f . \mathbf{V}$ est k-fois continûment dérivable, et m fois dans $\mathrm{K}-\mathrm{F}$. Appliquons la formule de Leibniz :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j} f \mathbf{V} = \sum_{i=j} \binom{i}{j} \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \odot \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j-i} \mathbf{V}.$$

Pour étudier $\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \odot \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j-i} \mathbf{V}$ distinguons deux cas :

1[er] *cas* : $i \leqq k$. — Chacun des facteurs est alors défini et continu sur K.

$$\| \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \odot \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j-i} \mathbf{V} \| \leqq \| \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \| . \| \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j-i} \mathbf{V} \| \leqq \| f \|_{\mathrm{K}}^{k} . \| \mathbf{V} \|_{\mathrm{K}}^{m} \leqq \| f \|_{\mathrm{K},\mathrm{F}}^{k,m} . \| \mathbf{V} \|_{\mathrm{K}}^{m}.$$

Remarquons que si $j \leqq m-k$, on a *a fortiori* $j-i \leqq m-k$, et comme $\mathbf{V}$ est $m-k$-plat sur F, le produit $\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \odot \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j-i} \mathbf{V}$ s'annule sur F.

2[e] *cas* : $i > k$. — $\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f$ n'est défini que pour $\mathrm{M} \in \mathrm{K}-\mathrm{F}$. En un tel point M, grâce à la définition de $\mathcal{D}^{k,m}(\mathrm{K}, \mathrm{F})$, à

$$m-k-j+i = (i-k) + (m-j) \geqq i-k = |i-k|^{+}$$

et aux formules CT(2) et CT(8) on obtient

$$\begin{aligned} \| \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \odot \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{j-i} \mathbf{V} \| &\leqq \frac{(\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F}))^{m-k-j+i}}{(m-k-j+i)!} . \| \mathbf{V} \|_{\mathrm{K}}^{m} . \alpha(\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F})) . \| \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \| \\ &\leqq (\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F}))^{|i-k|^{+}} . \| \mathrm{D}_{\mathrm{M}}^{i} f \| . \| \mathbf{V} \|_{\mathrm{K}}^{m} . \alpha(\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F})) \leqq \| f \|_{\mathrm{K},\mathrm{F}}^{k,m} . \| \mathbf{V} \|_{\mathrm{K}}^{m} . \alpha(\delta(\mathrm{M})). \end{aligned}$$

On en déduit que ce produit se prolonge par continuité à K, en le posant égal à o sur F.

([9]) Cette proposition est une généralisation de la formule de Taylor : Lorsque F se réduit au point $\{\mathrm{A}\}$ on trouve $\mathfrak{T}_{\mathrm{A}}^{k} f = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{k} f$.

C'est dans l'esprit de la formule de Taylor que nous utiliserons $\mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{m} : f = \mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{m} f + (f - \mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{m} f)$.

$\mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{m} f$ n'est plus un polynome mais appartient cependant à un « bon espace » : $\mathcal{D}^{m,\infty}(\mathrm{K}, \mathrm{F}; \mathcal{B})$.

Quant au *reste* $f - \mathfrak{T}_{\mathrm{F}}^{m} f$ qui est m-plat sur F, il possède de « bonnes majorations » [*cf.* CT(8)].

En tenant compte de ces deux cas, et en effectuant la sommation de la formule de Leibniz, on trouve

$$\| f.\mathbf{V} \|_K^m \leq 2^m \| f_{K;F}^{k;m} \| . \| \mathbf{V} \|_K^m$$

et l'on constate que $f.\mathbf{V}$ est $m-k$ plat sur F.

Remarques. — 1° Cette proposition est une généralisation du résultat de M. Whitney [2] ([10]).

2° La proposition 3 (jointe à la proposition 2) fournit une nouvelle démonstration de la proposition 8 de [AT] (chap. I) : cette proposition signifie qu'en multipliant certains champs tayloriens rugueux, par un W-champ taylorien suffisamment plat on obtient des W-champs m fois continûment dérivables : on se ramène à la proposition 3 en prolongeant ces W-champs à K.

Le théorème de densité. — *L'ensemble* $\mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ *est dense dans* $\mathcal{D}^{k,m}(K, F; \mathcal{B})$.

Nous allons construire une fonction $h \in \mathcal{D}^m(K; \mathcal{B})$ qui approche une fonction $f \in \mathcal{D}^{k,m}(K, F; \mathcal{B})$ donnée, à ε près.

Considérons une longueur $\rho < 1$ que nous nous réserverons de choisir suffisamment petite, en fin de démonstration.

Il existe un ensemble *fini* $F_1 \subseteq F$ tel que le ρ-voisinage de F_1 soit aussi un voisinage de F. Appliquons à $f \in \mathcal{D}^k(K; \mathcal{B})$ un opérateur de prolongement $\mathcal{Z}_{F_1}^k f$. La fonction $g = \mathcal{Z}_{F_1}^k f$ possède les propriétés suivantes : g est *indéfiniment dérivable*, car F_1 est *fini* [*cf.* CT (12)]. En vertu de l'inégalité $\delta(M, F) \leq \delta(M, F_1)$ et de la proposition 2,

$$\| g \|_{K;F}^{k;m} \leq \| g \|_{K;F_1}^{k;m} \leq C \| f \|_K^k \leq C \| f \|_{K;F}^{k;m}.$$

La fonction $f-g$ est k-plate sur F_1, et si β est un k, m-module de continuité normalisé pour f, $C_1.\beta$ est un k, m-module de continuité normalisé pour $f-g$. (C_1 étant une certaine constante).

Il en résulte que pour $i \leq k$ [d'après CT (8)],

$$\| D_M^i(f-g) \| \leq C'.\| f \|_{K;F}^{k;m}.(\delta(M, F_1))^{k-i}.\beta(\delta(M, F_1))$$

alors que pour $i > k$ et $M \in K - F$ (car f et $g \in \mathcal{D}^{k,m}(K, F; \mathcal{B})$)

$$\| D_M^i(f-g) \| \leq C'' \| f \|_{K;F}^{k;m}.(\delta(M, F))^{k-i}.\beta(\delta(M, F)).$$

Considérons maintenant une fonction α_ρ nulle sur un ρ-voisinage de F_1 et égale à 1 sur le complémentaire d'un 2ρ-voisinage de F_1 et satisfaisant aux conditions de (CT 13) (la distance des deux ensembles de définition est exactement ρ).

La fonction h que nous cherchons est $h = g + \alpha_\rho.(f-g)$. C'est bien une fonction m-fois continûment dérivable, car α_ρ s'annule sur un voisinage du support de rugosité de f.

([10]) M. Whitney a lui-même signalé (cf. *Annals of Math.* t. 62, 1955, p. 410) que le lemme p. 156 de [2] est incorrect. [Contre-exemple : $\Phi(x) = | x |$].

Il nous reste à majorer l'erreur $\|f-h\|_{\mathrm{K,F}}^{k,m}$.

Or $f-h=(f-g)(1-\alpha_\rho)$ est nulle en dehors du 2ρ-voisinage de F_1. Nous allons donc étudier $(\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F}))^{|i-k|^+}.\|\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^i(f-h)\|$ en des points M satisfaisant à $\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F})\leqq\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F}_1)\leqq 2\rho$.

En tenant compte des propriétés de $f-g$ et de α_ρ, on trouve

$$(\delta(\mathrm{M}, \mathrm{F}))^{|i-k|^+}.\|\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^i(f-h)\|\leqq\Gamma.(2\rho)^{|i-k|^+}.\|f\|_{\mathrm{K,F}}^{k,m}\left\{\sum_{0\leqq j\leqq i}\binom{i}{j}\frac{(2\rho)^{k-j}}{(2\rho)^{i-j}}.\beta(2\rho)\right\}$$
$$\leqq\Gamma''.(2\rho)^h.\|f\|_{\mathrm{K,F}}^{k,m}.\beta(2\rho)$$

où

$$h=|i-k|^+-(i-k)\geqq 0.$$

Finalement, $\|f-h\|_{\mathrm{K,F}}^{k,m}\leqq\Gamma.\|f\|_{\mathrm{K,F}}^{k,m}.\beta(2\rho)$.

Cette erreur peut être rendue arbitrairement petite, par un choix convenable de ρ.

Remarques. — 1° L'intervention d'un ensemble fini F_1 dans cette démonstration est essentielle : elle seule permet d'obtenir g m-fois continûment dérivable. C'est pour cette raison qu'un artifice d'interpolation apparaît dans la plupart des travaux portant sur des questions analogues (*cf.* Whitney [1], p. 648) (sans parler de la démonstration du théorème de prolongement).

2° Dans les questions concernant la restriction d'une « bonne fonction » à un compact F arbitraire, il est commode de substituer à F une suite de « bons » compacts » tendant vers F. (*cf.* par exemple Glaeser [2]). On ne peut y parvenir que si l'on dispose de majorations où n'interviennent que des « constantes » indépendantes de la forme de F.

Proposition 4. — *Soient* $\mathbf{V}\in\mathcal{J}^m\left(\mathrm{K}, \overset{m-k}{\mathrm{F}}; \mathcal{B}\right)$ *et* $f\in\mathcal{D}^{k,m}(\mathrm{K}, \mathrm{F})$: *le produit* $f.\mathbf{V}$ *appartient au sous-module fermé engendré dans* $\mathcal{D}^m(\mathrm{K}; \mathcal{B})$ *par* $\mathbf{V}$.

Il existe une suite de fonctions $f_p\in\mathcal{D}^m(\mathrm{K}; \mathcal{B})$ qui convergent vers f (au sens de $\mathcal{D}^{k,m}(\mathrm{K}, \mathrm{F})$) (théorème de densité).

Les produits $f_p.\mathbf{V}$ appartiennent au sous-module étudié, et convergent vers $f.\mathbf{V}$ au sens de $\mathcal{D}^m(\mathrm{K}; \mathcal{B})$ (proposition 3).

Proposition 5. — *Soient* $\mathbf{W}$ *et* $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_p$ *des champs de vecteurs* $\in\mathcal{D}^m(\mathrm{K};\mathcal{B})$. *Supposons qu'en tout point* M *d'un ensemble fermé* $\mathrm{F}\subseteq\mathrm{K}$ *les vecteurs* $\mathbf{V}_i(\mathrm{M})$ *constituent un système libre, et qu'en chaque point* $\mathrm{M}\in\mathrm{F}$ $\mathbf{W}$ *dépende linéairement des* $\mathbf{V}_i$. *Il existe alors des fonctions* $\lambda_i\in\mathcal{D}^m(\mathrm{K})$ *telles que le champ de vecteurs* $\mathbf{W}-\sum_i\lambda_i.\mathbf{V}_i$ *s'annule sur* F.

Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{F}$ et $\mathcal{B}'$ le sous-espace à p dimensions engendré par les vecteurs $\mathbf{V}_i(\mathrm{A})$. Soit Π un projecteur continu de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$.

En chaque point $M \in F$ l'existence et l'unicité des scalaires $\lambda_i(M)$ tels que $\mathbf{W}(M) - \sum_i \lambda_i(M).\mathbf{V}_i(M) = 0$ résultent des hypothèses. Par projection

$$\Pi \mathbf{W}(M) = \sum \lambda_i(M).(\Pi \mathbf{V}_i(M)) \qquad \text{pour} \quad M \in F. \tag{1}$$

Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A dans K, tel qu'en chaque point $M \in \mathcal{V}$ les $\Pi V_i(M)$ constituent un « repère mobile » de $\mathcal{B}'$.

En chaque point $M \in \mathcal{V}$, la formule de Cramer permet de calculer des $\lambda_i(M)$ satisfaisant à l'égalité (1). Les valeurs trouvées concordent sur $F \cap \mathcal{V}$ avec celles que nous cherchons. Et les $\lambda_i(M)$ sont m-fois continûment dérivables dans $\mathcal{V}$.

Grâce à une partition de l'unité, on peut « recoller les morceaux » et définir globalement des λ_i répondant aux conditions du lemme.

Proposition 6. — *Soient* $\mathbf{W}$ *et* $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_p$ *des champs de vecteurs* $\in \mathcal{J}^m\left(K, \overset{k-1}{F}; \mathcal{B}\right)$ *et tels qu'en chaque point* $M \in F$, *les* $D_M^k \mathbf{V}_i$ *forment un système libre de* $\mathcal{L}\left(\overset{k}{\odot} E; \mathcal{B}\right)$. *Si en chaque point* $M \in F$, $\mathcal{D}_M^k \mathbf{W}$ *dépend linéairement des* $D_M^k \mathbf{V}_i$, *il existe des fonctions* $\lambda_i \in \mathcal{D}^{m-k, m}(K, F) \subset \mathcal{D}^{m-k-1, m}(K, F)$ *telles que le champ de vecteurs* $\left(\mathbf{W} - \sum_i \lambda_i . \mathbf{V}_i\right) \in \mathcal{J}^m\left(K, \overset{k}{F}; \mathcal{B}\right)$.

Appliquons le lemme précédent aux champs de vecteurs $D_M^k \mathbf{W}$ et $D_M^k \mathbf{V}_i$ qui appartiennent à $\mathcal{D}^{m-k}\left(K; \mathcal{L}\left(\overset{k}{\odot} E; \mathcal{B}\right)\right)$. Nous pouvons supposer que les fonctions λ_i obtenues appartiennent à $\mathcal{D}^{m-k, m}(K, F)$: s'il n'en était pas ainsi, il suffirait de substituer aux anciennes fonctions $\lambda_i \in \mathcal{D}^{m-k}(K)$ leurs transformées par un opérateur $\mathcal{T}_F^{m-k}$ (prop. 2). Comme $\mathcal{D}^{m-k, m}(K, F) \subset \mathcal{D}^{m-k-1, m}(K, F)$ les champs $\lambda_i . \mathbf{V}_i$ appartiennent à $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{k-1}{F}; \mathcal{B}\right)$ (prop. 3).

Mais le champ $\mathbf{W} - \sum_i \lambda_i \mathbf{V}_i$ est même k-plat sur F. En effet, en développant $D_M^k\left(\mathbf{W} - \sum_i \lambda_i \mathbf{V}_i\right)$ en utilisant la formule de Leibniz, on constate que tous les termes s'annulent sur F, soit à cause de la « $k-1$ platitude » des $\mathbf{V}_i$, soit par construction des λ_i.

CHAPITRE IV.

Analyse et synthèse spectrale des sous-modules fermés.

Dorénavant $\mathcal{B}$ sera un espace vectoriel de *dimension finie* r sur le corps R. $\mathcal{T}^k(E)$ désigne l'espace des polynômes de degré $\leq k$ définis sur E (*cf.* [AT], p. 10 et Glaeser [3]). C'est un espace à $\binom{k+n}{n}$ dimensions. $\mathcal{T}^k(E; \mathcal{B})$ est l'espace des polynomes de degré $\leqq k$ définis sur E à valeurs dans $\mathcal{B}$. Cet espace, isomorphe à $\mathfrak{P}^k(\mathrm{E})\otimes\mathcal{B}$, est à $\binom{k+n}{n}\cdot r$ dimensions. Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{K}$. La formule de Taylor d'ordre k associe à chaque champ de vecteurs $\mathbf{V}\in\mathcal{D}^m(\mathrm{K};\mathcal{B})$ son polynôme de Taylor $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathbf{V}$. On définit ainsi pour $k\leqq m$ une application linéaire continue de $\mathcal{D}^m(\mathrm{K};\mathcal{B})$ sur $\mathfrak{P}^k(\mathrm{E};\mathcal{B})$. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-module fermé de $\mathcal{D}^m(\mathrm{K};\mathcal{B})$. L'image de $\mathfrak{M}$ par l'application $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{P}^k(\mathrm{E};\mathcal{B})$. Soit $a_k(\mathrm{A})$ la *dimension* de $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathfrak{M}$.

Comme $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathfrak{M}$ est de dimension finie, $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{-1\,(k)}(\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathfrak{M})=\mathfrak{M}+\mathcal{J}^m\left(\mathrm{K},\overset{k}{\mathrm{A}};\mathcal{B}\right)$ est un sous-module *fermé* de $\mathcal{D}^m(\mathrm{K};\mathcal{B})$.

Le sous-module fermé $\mathfrak{M}+\mathcal{J}^m\left(\mathrm{K},\overset{m}{\mathrm{A}};\mathcal{B}\right)$ s'appelle le *sous-module ponctuel* en A de $\mathfrak{M}$.

Repères « préparés ». — *Définition.* — Un système de $a_m(\mathrm{A})$ champs de vecteurs $\mathbf{V}_i\in\mathfrak{M}$ rangés dans un certain ordre s'appelle un *repère* de $\mathfrak{M}$ *préparé* en A, si pour tout $k(0\leqq k\leqq m)$.

a. Les $a_k(\mathrm{A})$ premiers vecteurs $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathbf{V}_i$ forment une base de $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathfrak{M}$.

b. Les $a_m(\mathrm{A})-a_k(\mathrm{A})$ derniers $\mathbf{V}_i$ sont k-plats en A.

Le théorème d'échange permet aisément de construire de tels repères.

Remarque. — Les $a_k(\mathrm{A})$ premiers vecteurs $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(m)}\mathbf{V}_i$ engendrent dans $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(m)}\mathfrak{M}$ un supplémentaire de $\mathfrak{M}\cap\mathcal{J}^m\left(\mathrm{K},\overset{k}{\{\mathrm{A}\}};\mathcal{B}\right)$. On en déduit qu'on obtient un repère préparé en A de $\mathfrak{M}\cap\mathcal{J}^m\left(\mathrm{K},\overset{k}{\{\mathrm{A}\}};\mathcal{B}\right)$ en supprimant les $a_k(\mathrm{A})$ premiers champs de vecteurs $\mathbf{V}_i$.

En associant à chaque point $\mathrm{A}\in\mathrm{K}$ le sous-espace $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{(k)}\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{P}^k(\mathrm{E};\mathcal{B})$ on définit un *champ d'éléments de contact* possédant la *semi-continuité inférieure d'inclusion* (*cf.* AT, p. 38 et 39). La dimension $a_k(\mathrm{A})$ est une *fonction semi-continue inférieurement* de A ne prenant que des valeurs entières comprises entre 0 et $r\binom{k+n}{n}$.

Soit $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ une suite de $m+1$ entiers positifs.

La semi-continuité que nous venons de signaler montre que l'ensemble K_α des points $\mathrm{M}\in\mathrm{K}$ tels que $a_k(\mathrm{M})\leqq\alpha_k$ pour tous les indices $k(0\leqq k\leqq m)$ est *fermé* dans K.

Suivant l'usage $\alpha\leqq\beta$ signifie que pour tout $k\,\alpha_k\leqq\beta_k$; $\alpha<\beta$ exprime qu'en outre l'une au moins de ces $m+1$ inégalités est stricte. Ainsi $\alpha\leqq\beta$ implique que $\mathrm{K}_\alpha\subset\mathrm{K}_\beta$.

L'ensemble F_α défini par les $m+1$ *égalités* $a_k(\mathrm{M})=\alpha_k$ est la différence entre K_α et la réunion des K_β correspondant à tous les β tels que $\beta<\alpha$.

L'ensemble $\mathrm{F}_0=\mathrm{K}_0$ (où $0=(0,0,\ldots,0)$) est compact, mais il peut être vide. Il existe certainement des F_α compacts et non vides : notamment ceux pour lesquels $F_\alpha = K_\alpha$. Tous les F_α sont localement compacts (en tant que différence de compacts).

Proposition 7. — *A tout point* $A \in F_\alpha$ *on peut associer un système de* α_m *champs de vecteurs* $\in \mathfrak{M}$, *qui constituent un repère de* $\mathfrak{M}$ *préparé* en tout point d'un voisinage $\mathcal{V}$ *de* A *dans* F_α.

a. Le cas où $\alpha = 0$ étant sans intérêt (il suffit de prendre alors le repère vide), nous appellerons p le plus petit entier tel que $\alpha_p \neq 0$. Partons d'un repère $\{\mathbf{U}_i\}$ de $\mathfrak{M}$ préparé en A. Nous allons montrer que l'on peut choisir ce repère en sorte que les $\alpha_m - \alpha_p$ *derniers* $\mathbf{U}_i$ *soient p-plats en tout point d'un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* A *dans* F_α.

En effet les α_p premiers $\mathbf{U}_i$ étant linéairement indépendants (modulo $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{p}{\underset{A}{}}; \mathcal{B}\right)$) sont encore linéairement indépendants (modulo $\mathcal{J}^m\left(K, \overset{p}{\underset{M}{}}; \mathcal{B}\right)$) en tout point M d'un voisinage $\mathcal{V}$ de A dans K. Et comme $a_p(M)$ reste constant sur F_α les $T_M^{(p)}\mathbf{U}_i$ forment une base de $T_M^{(p)}\mathfrak{M}$ pour tout $M \in \mathcal{V} \wedge F_\alpha$. Nous supposerons $\mathcal{V} \wedge F_\alpha$ compact.

Nous allons appliquer la proposition 6 : les $\mathbf{V}_i$ dont il est question dans l'énoncé de cette proposition seront les α_p premiers $\mathbf{U}_i$ et nous prendrons successivement pour $\mathbf{W}$ chacun des derniers $\alpha_m - \alpha_p$ champs de vecteurs $\mathbf{U}_i$. En substituant, si nécessaire, à chacun de ces $\mathbf{W}$ la combinaison $\mathbf{W} - \sum \lambda_i . \mathbf{V}_i$ dont la proposition 6 affirme l'existence, nous obtenons un nouveau repère ayant la propriété annoncée.

Définition. — Pour désigner brièvement l'opération que nous venons d'accomplir, nous dirons que *nous avons p-aplati* sur $\mathcal{V}$ les $\alpha_m - \alpha_p$ derniers champs de vecteurs $\mathbf{U}_i$.

b. Ces $(\alpha_m - \alpha_p)\mathbf{U}_i$ appartiennent par construction à $\mathfrak{M} \cap \mathcal{J}^m\left(K, \overset{p}{\underset{V}{}}; \mathcal{B}\right)$ qui est inclus dans $\mathfrak{M} \cap \mathcal{J}^m\left(K, \overset{p}{\underset{\{A\}}{}}; \mathcal{B}\right)$. Comme ils forment un repère préparé en A pour ce dernier sous-module (*cf.* remarque précédente) il s'ensuit, par comparaison de dimension, que les $\alpha_m - \alpha_p$ derniers U_i forment un *repère préparé en* A *pour le sous-module* $\mathfrak{M} \cap \mathcal{J}^m\left(K, \overset{p}{\underset{\mathcal{V}}{}}; \mathcal{B}\right)$.

c. Nous pouvons refaire sur $\mathfrak{M} \cap \mathcal{J}^m\left(K, \overset{p}{\underset{\mathcal{V}}{}}; \mathcal{B}\right)$ le raisonnement que nous avons fait en (*a*) sur $\mathfrak{M}$: Nous allons $p+1$-aplatir sur un voisinage compact de A situé dans $\mathcal{V}$ les $\alpha_m - \alpha_{p+1}$ derniers $\mathbf{U}_i$.

En recommençant ces opérations on aboutit finalement au repère « localement préparé » sur un voisinage de A dans $\mathcal{F}_\alpha$ qu'annonçait la proposition 7.

Remarque. — Chacun des F_α admet un recouvrement ouvert $\mathcal{R}_\alpha$ (en général dénombrable) tel qu'à chaque $O \in \mathcal{R}_\alpha$ corresponde un repère de $\mathfrak{M}$, préparé en tout point de $\overline{O}$. (O est un ouvert *relativement* à F_α : $\overline{O}$ est compact). Soit $\mathcal{R}$ la réunion des $\mathcal{R}_\alpha$; les multi-indices α correspondant à des F_α non vides sont en nombre fini $\left[\text{ce nombre est d'ailleurs inférieur à } (m+1)r\binom{m+n}{n}\right]$.

L'ensemble de tous les champs de vecteurs appartenant à un repère associé à l'un au moins des $O \in \mathcal{R}$ s'appellera le *stock préparé* de champs de vecteurs de $\mathcal{M}$ [11].

SYNTHÈSE SPECTRALE. — *Définition.* — On dit qu'un champ de vecteurs $\mathbf{W}$ appartient *ponctuellement* à $\mathcal{M}$ en A si $\mathbf{W}$ appartient au sous-module ponctuel $\mathcal{M} + \mathcal{J}^m\left(K, \overset{m}{\{A\}}; \mathcal{B}\right)$. Le théorème de synthèse spectrale de Whitney (généralisé aux champs de vecteurs) peut s'énoncer :

THÉORÈME. — *Pour qu'un champ de vecteurs* $\mathbf{W}$ *appartienne au sous-module* fermé, $\mathcal{M}$, *il faut et il suffit qu'il appartienne* ponctuellement *à* $\mathcal{M}$ *en tout point de* K.

Nous désignerons par $\hat{\mathcal{M}}$ le sous-module *fermé*, intersection des sous-modules ponctuels de $\mathcal{M}$ en chaque point de K. Il s'agit de prouver que $\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}}$. Il est évident que $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$.

Pour établir que $\mathbf{W} \in \hat{\mathcal{M}}$ appartient à $\mathcal{M}$ nous allons essayer de m-aplatir $\mathbf{W}$ sur tous les $O \in \mathcal{R}$.

a. m-aplatissement sur un F_α *compact.* — Nous pouvons supposer que $\mathcal{R}_\alpha$ ne comporte qu'un nombre fini d'élément O_j que nous numérotons.

Il est facile de m-aplatir $\mathbf{W}$ sur $\overline{O}_1$: la technique de démonstration de la proposition 7 s'applique et permet de trouver des multiplicateurs λ_i tels que $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W} - \sum \lambda_i . \mathbf{V}_i$ soit m-plat sur $\overline{O}_1$. (Les $\mathbf{V}_i$ appartiennent au repère préparé sur $\overline{O}_1$).

Puis nous essayerons de m-aplatir $\mathbf{W}$ sur $\overline{O}_1 \cup \overline{O}_2$ et pour cela, on peut songer à m-aplatir $\mathbf{W}_1$ sur $\overline{O}_2$. Mais une difficulté se présente : en m-applatissant $\mathbf{W}_1$ sur $\overline{O}_2$, on n'est pas assuré d'obtenir un champ de vecteurs m-plat sur $\overline{O}_1$.

Pour éviter de détruire au cours des opérations ultérieures les m-aplatissements déjà acquis, nous nous contenterons de m- aplatissements *approximatifs* grâce au lemme suivant.

LEMME. — *Étant donné* $\mathbf{W} \in \hat{\mathcal{M}}$ *et un nombre* $\varepsilon > 0$, *à tout compact* F *réunion d'un nombre fini de* $\overline{O}_j$ *(avec* $O_j \in \mathcal{R}$*) on peut trouver* $\mathbf{W}' \in \hat{\mathcal{M}}$ *telque* $\| \mathbf{W} - \mathbf{W}' \|_K^m < \varepsilon$ *et que* $\mathbf{W}'$ *puisse être m-aplati sur* F.

[11] Il est possible de construire un stock préparé *fini*. (On utilise le théorème 4.1 de Mostow [1]; puis une partition de $\mathcal{R}_\alpha$ en un nombre fini d'ensembles de parties mutuellement disjointes.)

Supposons le lemme établi pour un fermé F, et démontrons le pour le fermé $F \cup \overline{O}$ (où $O \in \mathcal{R}$).

(*) L'hypothèse de récurrence signifie qu'il existe $\mathbf{W}' \in \mathfrak{M}$ et des λ_i en nombre fini tel que $\|\mathbf{W} - \mathbf{W}'\|_K^m < \varepsilon$ et que $\mathbf{W}' - \sum \lambda_i . \mathbf{V}_i = \mathbf{W}_1$ soit m-plat sur F.

Il existe une fonction α_ρ nulle sur un ρ-voisinage de F (où ρ doit être choisi suffisamment petit) telle que

$$\|\mathbf{W}_1 - \alpha_\rho . \mathbf{W}_1\|_K^m + \|\mathbf{W} - \mathbf{W}'\|_K^m < \varepsilon \text{ (théorème de Silov) (*).}$$

On peut m-aplatir $\mathbf{W}_1$ sur $\overline{O}$, c'est-à-dire trouver des λ_i tels que $\mathbf{W}_1 - \sum \lambda'_i . \mathbf{V}'_i$ soit m-plat sur $\overline{O}$.

En posant $\mathbf{W}'' = \mathbf{W}' - \mathbf{W}_1 + \alpha_\rho . \mathbf{W}_1$ on trouve que

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{W}''\|_K^m < \varepsilon \quad \text{et que} \qquad \mathbf{W}'' - \sum \lambda_i . \mathbf{V}_i - \sum \alpha_\rho . \lambda'_i . \mathbf{V}'_i = \alpha_\rho . (\mathbf{W}_1 - \lambda'_i . \mathbf{V}'_i)$$

Ce dernier champ est un produit de deux facteurs dont l'un est m-plat sur $\overline{O}$ et l'autre sur F. $\mathbf{W}''$ peut donc être m-aplati sur $F \cup \overline{O}$, ce que nous voulions prouver.

Ce lemme permet, en particulier le m-aplatissement approximatif de $\mathbf{W}$ sur tout F_α compact.

b. m-aplatissement sur un F_α *non compact.* Supposons que $F_\alpha = K_\alpha - F$ et qu'un m-aplatissement approximatif de $\mathbf{W}$ ait déjà été obtenu sur F. Toute la partie du raisonnement précédent écrite entre les astérisques s'applique ici. Remarquons que le complémentaire par rapport à K_α du ρ-voisinage ouvert de F est un *compact*. K_α est donc réunion de ρ-voisinage fermé de F et d'un nombre *fini* de $\overline{O}_j$ (où $O_j \in \mathcal{R}_\alpha$). Comme $\alpha_\rho . \mathbf{W}_1$ est m-plat sur le ρ-voisinage fermé de F, le lemme précédent permet de m-aplatir $\alpha_\rho . \mathbf{W}_1$ approximativement sur K_α.

Le point essentiel ici est de noter qu'à chaque étape l'aplatissement approximatif de $\mathbf{W}$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de $\lambda_i . \mathbf{V}_i$; et que, bien que le recouvrement $\mathcal{R}_\alpha$ soit en général dénombrable, seul un nombre fini des éléments de $\mathcal{R}_\alpha$ interviennent. On poursuit ainsi le m-aplatissement approximatif de $\mathbf{W}$ d'abord sur les F_α compacts, puis sur les K_α tels que pour $\alpha > \beta$ le m-aplatissement approximatif sur K_β ait déjà été obtenu. Finalement on obtient un champ de vecteurs $\mathbf{W}'$ tel que $\|\mathbf{W} - \mathbf{W}_1\|_K^m < \varepsilon$ et que $\mathbf{W}'$ puisse être m-aplati sur K.

Mais si $\mathbf{W}' - \sum \lambda_i . \mathbf{V}_i$ est m-plat en tout point de K, *il est nul*. Ainsi $\mathbf{W} = (\mathbf{W} = \mathbf{W}') + \sum \lambda_i . \mathbf{V}_i$.

Comme chacun des $\lambda_i . \mathbf{V}_i$ de cette somme finie appartient à $\mathfrak{M}$ (prop. 4) et que ε est arbitrairement petit, $W \in \mathfrak{M}$ (qui est fermé par hypothèse). Le théorème spectral est ainsi complètement établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Whitney, *On ideals of différentiable fonctions* (*Amer. J. of Math.*, vol. LXX, 1948, p. 635-658).

[2] H. Whitney, *Differentiability of the reminder term of Taylor Formula* (*Duke Math., J.*, vol. 10, 1943, p. 153).

[3] H. Whitney, *Analytic extension of differentiable functions* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, 1934).

[1] L. Schwartz, *Theorie des distributions* (Hermann, 1950).

[1] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm* (*Bull. Soc. Math. France*, t. **84**, (1956, p. 319-324).

[1] G. Glaeser, *Étude de certaines algèbres tayloriennes* (*Thèse*, Nancy, 1957). (*Journal d'Analyse Mathématique de Jérusalem*, 1958, p. 1-124). (Cette référence est désignée par [AT] dans tout l'article).

[2] G. Glaeser, *Intégration d'une forme différentielle le long de certaines courbes non rectifiables* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **93**, 1959, p. 169-183).

[3] G. Glaeser, *Théorie intrinsèque des polynomes et dualité. Bull. des Sciences Math.* 2e série 85, 1961, p. 17-28.

[4] G. Glaeser, *Un quotient singulier de fonctions différentiables. Bull. de la Soc. Sc. de Bretagne*. t. XXXV, 1960, p. 181-185.

[1] G. Mostow, *Equivariant embeddings in euclidean space* (*Annals of Math.*, vol. 65, 1957, p. 438).

INDEX TERMINOLOGIQUE

(Les termes qui ne se trouvent pas dans la liste ci-dessous sont définis au chapitre II).