Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jean-Pierre Kahane

Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 2 (1962), p. 93-150

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_2_93_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 93 à 150.

PSEUDO-PÉRIODICITÉ ET SÉRIES DE FOURIER LACUNAIRES

PAR M. JEAN-PIERRE KAHANE.

INTRODUCTION.

Parmi les nombreuses généralisations de la notion de périodicité, la pseudo-périodicité, introduite par Paley et Wiener dans leur fameux livre [8], est sans doute l'une des moins connues et des moins étudiées. C'est pourtant la plus proche, et celle dont la théorie générale est la plus facile. C'est aussi celle qui, appliquée aux séries de Fourier ordinaires apporte immédiatement le plus de résultats intéressants. Le lecteur de cet article pourra se persuader qu'elle suggère également des problèmes.

Selon Paley et Wiener, une fonction f de variable réelle est pseudo-périodique si elle est localement de carré sommable, et si pour deux intervalles I et J assez grands, il y a équivalence des normes dans $L^2(I)$ et $L^2(J)$ des combinaisons linéaires des translatées de f. Le théorème fondamental est le suivant : f est pseudo-périodique si et seulement si elle est presque périodique à la Stepanoff, et de spectre régulier (c'est-à-dire ne contenant pas d'éléments arbitrairement voisins). La borne inférieure des longueurs des intervalles I et J ne dépend que du spectre $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_{n+1} > \lambda_n)$: soit $l(\{\lambda_n\})$. Paley et Wiener l'appellent pseudo-période et montrent que $l(\{\lambda_n\}) \leq 8\pi\delta^{-1}$, si $\delta = \inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. Une remarquable inégalité d'Ingham ([5], [12]$_{\text{I}}$, p. 222) sur des polynomes trigonométriques permet d'améliorer ce résultat en prouvant que $l(\{\lambda_n\}) \leq 2\pi\delta^{-1}$; la constante du second membre est visiblement la meilleure possible.

La relation entre $\{\lambda_n\}$ et $l(\{\lambda_n\})$ peut s'exprimer ainsi : $\pi l(\{\lambda_n\})$ est la borne inférieure des $\tau > 0$ tels que toute suite $\{b(\lambda_n)\}$ de carré sommable soit interpolable par une fonction entière, de type exponentiel $\leq \tau$, et de carré sommable sur la droite réelle. La technique des fonctions entières d'une variable (produits canoniques) permet, sans même recourir aux calculs d'Ingham, de calculer exactement $l(\{\lambda_n\})$ [5] :

— si $\{\lambda_n\}$ n'est pas régulière, $l(\{\lambda_n\}) = \infty$;

— si $\{\lambda_n\}$ est régulière, $l(\{\lambda_n\}) = 2\pi\Delta(\{\lambda_n\})$,

où $\Delta(\{\lambda_n\})$ est la densité supérieure de répartition de $\{\lambda_n\}$, définie de l'une des manières équivalentes qui suivent :

a. $\Delta(\{\lambda_n\})$ est la borne inférieure des densités des suites bien réparties qui contiennent $\{\lambda_n\}$.

(On dit que $\{\mu_n\}$ est bien répartie et de densité D si $\mu_n - \frac{D}{n} = O(1)$)

b.
$$\Delta(\{\lambda_n\}) = \lim_{t\to\infty} \overline{\lim_{|r|\to\infty}} \frac{n(r, r+t)}{t},$$

$n(r, r+t)$ désignant le nombre de points λ_n portés par $[r, r+t]$.

c.
$$\Delta(\{\lambda_n\}) = \lim_{t\to\infty} \sup_{r} \frac{n(r, r+t)}{t}.$$

D'autre part, la relation entre $\{\lambda_n\}$ et $l(\{\lambda_n\})$ répond à un type de problèmes proposés par Mandelbrojt [7] : indiquer des propriétés (P), des suites d'entiers $\{\lambda_n\}$, des longueurs l, telles que toute fonction (périodique) de spectre $\{\lambda_n\}$, satisfaisant (P) sur un intervalle de longueur supérieure à l, satisfasse (P) partout. Si $l = l(\{\lambda_n\})$, on peut prendre pour (P) l'appartenance à L^2, l'appartenance locale à $\mathcal{F}(l^1)$, l'appartenance à C^∞, l'analyticité, etc. [6].

Nous exposons ici tous les résultats connus sur les fonctions pseudo-périodiques d'une variable, en nous plaçant dans le cadre plus général des fonctions de plusieurs variables. La majeure partie de notre travail est néanmoins constituée par des résultats qui sont nouveaux, même dans le cas d'une variable. Le contenu des chapitres I à V a été partiellement exposé au colloque sur les espaces linéaires tenu à Jérusalem (Israël) en juillet 1960.

Le chapitre I expose la théorie de Paley et Wiener, identifiant les fonctions pseudo-périodiques et les fonctions presque-périodiques à la Stepanoff (I.5.1, I.6.1). On donne deux démonstrations (Paley-Wiener, Ingham) du résultat essentiel (I, 6, 3) : à toute suite régulière Λ dans R^p on peut associer des domaines $G \subset R^p$ tels que, quel que soit le domaine $G' \supset G$, on ait équivalence des normes dans $L^2(G)$ et $L^2(G')$ des fonctions dont le spectre est contenu dans Λ.

G sera alors dit associé à Λ. Le chapitre II donne diverses caractérisations (II.2.4, II.3.1, II.3.2, II.3.3) des domaines associés à une suite, ainsi que divers critères utilisés au chapitre III.

On ne trouve qu'à la fin du chapitre III (III.6.1, III.7.1) l'analogue du calcul de la pseudo-période. Au lieu de la technique des fonctions entières d'une variable, il faut ici combiner la méthode d'Ingham et l'étude (III.3.1) des domaines associés à la réunion de deux suites. On montre également (III.2.1) que deux suites assez voisines ont les mêmes domaines associés. Quelques problèmes ouverts sont indiqués à la fin du chapitre.

Les domaines associés jouent un rôle important relativement au problème suivant, étudié en détail au chapitre IV : la suite régulière Λ étant donnée dans R^p, définir des classes A et B telles que toute suite $\{a(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de la classe A soit interpolable par une fonction entière du type exponentiel appartenant à la classe B.

Dans le chapitre V, consacré au problème de Mandelbrojt, on refait la théorie de la pseudo-périodicité en remplaçant $L^2(G)$ par d'autres espaces fonctionnels, de fonctions ou de distributions définies sur G. On montre (V.7.1, V.7.2) que pour certaines propriétés (P) (par exemple l'appartenance locale à la classe A de Wiener), la solution du problème dépend étroitement de la considération des domaines associés.

Le dernier chapitre est relatif au problème suivant : définir des compacts K de mesure nulle mais néanmoins assez épais, et des suites Λ assez rares, pour que le comportement sur K d'une fonction continue dont le spectre est contenu dans Λ permette de déterminer son comportement global. Pour préciser le problème, et apporter des éléments de solution, on a recours à deux techniques : l'une consiste à considérer des mesures associées, et à généraliser les résultats des chapitres I et II; l'autre, que nous avons explicitée seulement sur la droite, consiste en des calculs élémentaires. Réciproquement, nous construisons sur la droite des compacts K et des suites Λ lacunaires tels qu'il existe des fonctions de spectre contenu dans Λ, non identiquement nulles, mais s'annulant sur K; les compacts K construits sont des ensembles d'unicité du type de Rajchman ou de Pyateski-Shapiro (par exemple l'ensemble classique de Cantor).

Les notations utilisées sont classiques ;

— R est la droite réelle, R^p l'espace réel à p dimensions;

— Z est l'ensemble des entiers $\gtrless 0$, et l'on considérera Z^p comme plongé dans R^p;

— Pour tout $x \in R^p$, les coordonnées sont notées $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et l'on pose

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

— Pour tout couple $x, u \in R^p$, on pose

$$ux = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_p x_p;$$

— On appellera *domaine* dans R^p la fermeture d'un ouvert borné;

— Pour la commodité du langage, on appellera *suite* dans R^p tout ensemble dénombrable;

— Le cube unité de R^p est défini par $-\frac{1}{2} \leq x_j \leq \frac{1}{2} (j = 1, 2, \ldots, p)$;

— Pour toute fonction f à valeurs complexes définie sur R^p, ou sur un domaine G de R^p, et intégrable, on pose

$$\int f = \int f(x)\, dx = \iint \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p,$$

le domaine d'intégration étant indiqué en indice si ce n'est pas R^p entier;

— On note $L^\alpha(G)$, resp. $L^\alpha(R^p)$ ou simplement L^α, $(1 \leq \alpha < \infty)$ l'ensemble des fonctions de $\alpha^{\text{ième}}$ puissance sommable sur G, resp. R^p, et $L^\infty(G)$, resp. $L^\infty(R^p)$ ou L^∞, l'ensemble des fonctions mesurables bornées sur G, resp. R^p;

— Si $f \in L^1(R^p)$, on note $F = \mathcal{F}(f)$ si

$$F(u) = \int e^{iux} f(x)\, dx \qquad (u \in R^p);$$

— Pour une fonction f définie sur un compact K de R^p et intégrable par rapport à une mesure $d\mu$, on note :

$$\int_K f\, d\mu = \int_K f(x)\, d\mu(x) = \int \cdots \int_K f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, d\mu(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

CHAPITRE I.

Théorie générale des fonctions pseudo-périodiques.

1. Définissons d'abord les principaux espaces fonctionnels qui interviendront dans ce chapitre.

On désignera par $E^2 = E^2(R^p)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes, définies sur R^p, localement de carré sommable. La topologie de E^2 est définie par les semi-normes

$$\|f\|_G = \left(\int_G |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int \cdots \int_G |f(x_1, \ldots, x_p)|^2\, dx_1 \ldots dx_p\right)^{\frac{1}{2}},$$

G étant un domaine arbitraire de R^p (c'est-à-dire la fermeture d'un ouvert borné).

Soit $f \in E^2$ et $t \in R^p$. On notera $f_{(t)}$ la « translatée » de f définie par

$$f_{(t)}(x) = f(x - t).$$

On dira que $f \in E^2$ est E^2-bornée si, pour un domaine $G \subset R^p$, les normes $\|f_{(t)}\|_G$ sont uniformément bornées par rapport à $t \in R^p$; il en est alors de même pour tout domaine $G \subset R^p$. Les fonctions f E^2-bornées forment un espace vectoriel normé $BE^2 = BE^2(R^p)$, la norme étant

$$\|f\| = \sup_{t \in R^p} \|f_{(t)}\|_{\mathfrak{U}} \qquad (\mathfrak{U}, \text{ cube unité de } R^p).$$

Enfin on notera $L^2(G)$ l'espace de Hilbert formé des fonctions f de carré sommable dans G, avec la norme $\|f\|_G$.

2. Rappelons quelques définitions et résultats concernant les fonctions presque-périodiques à la Stepanoff (fonctions p.-p. Stepanoff) [1].

Une fonction f est dite p.-p. Stepanoff si $f \in BE^2$ et si l'ensemble des $f_{(t)} (t \in R^p)$ est relativement compact dans BE^2.

Le spectre de f est alors l'ensemble des $\lambda \in R^p$ tels que $e^{i\lambda.x}$ soit approchable dans BE^2 par des combinaisons linéaires de $f_{(t)}$. Les coefficients de Fourier de f sont les

$$a(\lambda) = \lim_{\xi \to \infty} \left(\xi^{-p} \int_{\xi \mathfrak{U}} f(x)\, e^{-i\lambda.x}\, dx \right).$$

Ils diffèrent de zéro si et seulement si $\lambda \in$ spectre de f. La série de Fourier de f est $\sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda.x}$. Dans BE^2, f est limite d'une suite de polynomes trigonométriques (combinaisons linéaires finies d'exponentielles) $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_j(\lambda)\, e^{i\lambda.x}$, telles que, pour chaque λ, $a_j(\lambda)$ tende vers $a(\lambda)$. Inversement, toute limite dans BE^2 d'une suite de polynomes trigonométriques est une fonction p.-p. Stepanoff.

3. Nous allons maintenant introduire la notion de pseudo-périodicité.

Une *famille pseudo-périodique* dans E^2 (en bref, famille ps.-p.) est un sous-espace fermé de E^2, invariant par translation, et contenu dans BE^2.

Une *fonction pseudo-périodique* dans E^2 (en bref, fonction ps.-p.) est un élément d'une famille ps.-p.; autrement dit, c'est une fonction f telle que le sous-espace fermé de E^2 engendré par ses translatées, soit $\tau(f)$, ne contienne que des fonctions E^2-bornées.

Le *spectre d'une famille ps.-p.* F est l'ensemble $\Lambda(F)$ des $\lambda \in R^p$ tels que $e^{i\lambda.x} \in F$. Le *spectre d'une fonction ps.-p.* f est $\Lambda(\tau(f))$.

Le problème de l'analyse harmonique est la recherche de $\Lambda(F)$ quand on connaît F, celui de la synthèse harmonique, la recherche de F quand on connaît $\Lambda(F)$.

4. On désigne toujours par G un domaine dans R^p. Soit F une famille ps.-p. C'est un espace vectoriel normé pour chacune des normes $\|f\|_G$ et $\|f\|$. Rappelons que, pour un espace vectoriel, deux normes sont dites équivalentes si le rapport des normes des vecteurs reste compris entre deux nombres positifs.

PROPOSITION I.4.1. — *Il existe des domaines* G *tels que les normes* $\|f\|_G$ *et* $\|f\|$ *soient équivalentes sur* F.

Démonstration. — Si G est recouvert par k cubes translatés du cube unité $\mathfrak{U}$, $\|f\|_G \leq \sqrt{k}\|f\|$. Reste à montrer l'existence d'un G tel que $\sup_{f\in F} \frac{\|f\|}{\|f\|_G} < \infty$. Si G n'existait pas, on pourrait construire une suite d'entiers $\xi_n \to \infty$, et une suite de $f_n \in F$, telles que

$$\|f_n\|_{\xi_n\mathfrak{U}} < 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \|f_n\|_{\xi_{n+1}\mathfrak{U}} > \xi_{n+1}^p(n + \|f_{n-1}\| + \|f_{n-2}\| + \ldots).$$

Alors $f = \sum f_n \in F$, mais $\|f\| \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}(\xi_n^{-p}\|f\|_{\xi_n\mathfrak{U}}) = \infty$, ce qui est impossible.

Remarque. — La démonstration de I.4.1 ne fait pas usage du fait que F est invariant par translation. On peut encore l'exprimer ainsi, en faisant appel à un théorème de Banach ([o], p. 41) : F, étant fermé dans E^2 et contenu dans BE^2, est fermé dans BE^2 ; F admet donc une structure d'espace de Fréchet (comme sous espace de E^2) et une structure d'espace de Banach (comme sous-espace de BE^2) plus fine ; d'après Banach, ces deux structures sont équivalentes ; si l'on définit la topologie de E^2 par une suite croissante de semi-normes $\|f\|_{G_i}(G_{i+1} \supset G_i)$, il existe donc un i tel que les normes $\|x\|$ et $\|f\|_{G_i}$ soient équivalentes.

Définition. — Un domaine G satisfaisant I.4.1 sera dit *associé* à la famille ps.-p. F. Si $F = \tau(f)$, on dira encore que G est *associé* à f.

Convenons de dire qu'une suite, ou un ensemble de points de R^p, sont *réguliers* si la distance de deux de leurs éléments (distincts) est bornée inférieurement par un nombre positif.

Proposition I.4.2. — *Le spectre* $\Lambda(F)$ *est régulier.*

Démonstration. — Sinon, il existerait une suite de fonctions

$$f_n = e^{i\lambda_n x} - e^{i\lambda'_n x} \in F,$$

telle que $|\lambda_n - \lambda'_n|$ tende vers zéro, et l'on aurait, pour tout domaine G,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_G} = \infty,$$

en contradiction avec I.4.1.

Pour toute suite Λ régulière, la borne supérieure des distances de deux points distincts de Λ sera appelée le *pas* de Λ.

5. Le théorème suivant résout l'analyse et la synthèse harmoniques pour les fonctions ps.-p., compte tenu des propriétés rappelées au paragraphe 2.

Théorème I.5.1. — *Toute fonction ps.-p. est p.-p. Stepanoff. Elle a alors le même spectre, qu'elle soit considérée comme ps.-p. ou comme p.-p. Stepanoff, et ce spectre est régulier.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soit g une fonction définie sur* R^p, *indéfiniment différentiable, bornée dans* $E^2(R^p)$ *ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres. Alors* $\sup_{x\in R^p} |g(x)| < \infty$.

Preuve du lemme. — Soit h une fonction indéfiniment différentiable, nulle en dehors du cube unité U, égale à 1 en 0. Les normes dans $L^2(U)$ de $g_{(t)}h$ ou d'une quelconque de ses dérivées partielles (d'ordre ≥ 1) sont uniformément bornées par rapport à $t\in R^p$; il en est donc ainsi des normes dans $L^2(R^p)$ de leurs transformées de Fourier, soit $\mathcal{F}(g_{(t)}h)$ et les produits de $\mathcal{F}(g_{(t)}h)$ par des monomes. En particulier, le produit de $\mathcal{F}(g_{(t)}h)$ par le polynome $(1+x_1^2+\ldots+x_p^2)^p$ a une norme dans $L^2(R^p)$ uniformément bornée; donc, par l'inégalité de Schwarz, il en est de même de la norme de $\mathcal{F}(g_{(t)}h)$ dans $L^1(R^p)$, donc encore de $(g_{(t)}h)(0)=g(-t)$.

Revenons au théorème : soit f une fonction ps.-p., et ε une fonction indéfiniment différentiable dans R^p à support compact. Le produit de composition $f\star\varepsilon$ appartient à $\tau(f)$, ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres. En particulier, ces fonctions sont E^2-bornées. Il résulte du lemme que $f\star\varepsilon$ et les dérivées partielles du premier ordre sont uniformément bornées (au sens usuel), donc que les translatées de $f\star\varepsilon$ forment une famille équicontinue bornée, c'est-à-dire relativement compacte pour la convergence uniforme sur tout compact de R^p. Soit G un domaine associé à f; les translatées de $f\star\varepsilon$ forment un ensemble relativement compact dans $L^2(G)$, donc (proposition I.4.1.) dans BE^2; donc (§ 2) $f\star\varepsilon$ est p.-p. Stepanoff. Comme on peut approcher f par des $f\star\varepsilon$ dans $L^2(G)$, on le peut aussi (proposition I.4.1) dans BE^2, donc (§ 2) f est p.-p. Stepanoff. D'après les définitions (§ 2 et 3), il est évident que le spectre de f comme fonction p.-p. Stepanoff est contenu dans le spectre de f comme fonction ps.-p.; compte tenu de la proposition I.4.1, ils sont identiques, car l'approximation de $e^{i\lambda x}$ par des combinaisons linéaires de translatées de f dans $L^2(G)$ entraîne l'approximation dans BE^2; enfin, d'après I.4.2., ce spectre est régulier.

6. Le théorème I.5.1. admet une réciproque.

THÉORÈME I.6.1. — *Toute fonction p.-p. Stepanoff à spectre régulier est ps.-p.*

Comme corollaire de ces deux théorèmes, on a la caractérisation suivante des familles ps.-p.

THÉORÈME I.6.2. — *Toute famille ps.-p.* F *est identifiable au sous-espace fermé de* E^2 *resp.* BE^2 *engendré par une suite d'exponentielles* $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$, *où* Λ *est une suite régulière, et réciproquement tout sous-espace ainsi engendré est une famille ps.-p.*; Λ *est le spectre de* F.

Dans la suite, on notera alors $F = F_\Lambda$.

L'ensemble des théorèmes I.5.1 et I.6.1 permet d'identifier les fonctions ps.-p. et les fonctions p.-p. Stepanoff à spectre régulier.

Le théorème I.6.1 résulte à simple lecture du théorème suivant que nous allons démontrer.

Théorème I.6.3. — *A toute suite régulière* Λ *correspondent des domaines* $G \subset R^p$ *tels que, pour les polynomes trigonométriques* $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda.x}$, *les trois expressions*

$$\|s\| = \sup_{t \in R^p} \left(\int_{\mathfrak{U}} |s(x-t)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|s\|_G = \left(\int_G |s(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left(\sum |a(\lambda)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

constituent des normes équivalentes.

Démonstration. — Si G peut être recouvert par la réunion de k translatés de $\mathfrak{U}$, on a $\|s\|_G < \sqrt{k}\, \|s\|$. L'équivalence des normes résultera de l'existence, qui reste à prouver, de domaines G et de constantes $\varkappa$ et $\varkappa'$, ne dépendant que de Λ et G, telles que

$$(1) \qquad \|s\|^2 < \varkappa \sum |a(\lambda)|^2,$$

$$(2) \qquad \sum |a(\lambda)|^2 \leq \varkappa' \|s\|_G^2.$$

Nous allons donner de ce fait deux démonstrations, également intéressantes.

7. Première démonstration (Paley et Wiener).

Il existe un domaine Ω tel que les domaines translatés $\lambda + \Omega$ $(\lambda \in \Lambda)$ soient disjoints deux à deux. Soit φ une fonction de carré sommable à support dans Ω et

$$\Phi(x) = \int_\Omega e^{iu.x} \varphi(u) \, du, \qquad \text{soit} \quad \Phi = \mathcal{F}(\varphi).$$

On a

$$s(x)\,\Phi(x) = \int \sum a(\lambda)\, e^{i(\lambda+u).x} \varphi(u) \, du$$
$$= \int \left(\sum a(\lambda)\, \varphi(u-\lambda) \right) e^{iu.x} \, du,$$

donc (Parseval)

$$(3) \qquad \int |s\Phi|^2 = (2\pi)^p \sum |a(\lambda)|^2 \int |\varphi|^2.$$

Soit D un domaine, et D_i $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite de translatés de D recouvrant R^p; quitte à restreindre cette suite, on peut supposer que le nombre de D_i contenus dans la boule $|x| < r$ est $O(r^p)$. On peut choisir φ, D et les D_i de façon que

$$m = \inf_{x \in D} |\Phi(x)| > 0,$$

$$\sum_1^\infty M_i^2 < \infty \qquad \text{avec} \quad M_i = \sup_{x \in D_i} |\Phi(x)|.$$

Choisissons alors i_0 de façon que $\sum_{i=i_0}^{\infty} M_i^2 < m^2$, et prenons pour G un domaine contenant $\bigcup_{i<i_0} D_i$. L'inégalité

$$m^2 \int_D |s|^2 \leqq \int |s\Phi|^2$$

jointe à (3), montre qu'on a

$$(4) \qquad m^2 \int_D |s_{(t)}|^2 \leqq (2\pi)^p \sum |a(\lambda)|^2 \int |\varphi|^2 \qquad \text{pour tout} \quad t \in \mathrm{R}^p$$

d'où (1), pour un $\varkappa$ assez grand. L'inégalité

$$\int |s\Phi|^2 \leqq M^2 \int_G |s|^2 + \sum_{i=i_0}^{\infty} M_i^2 \int_{D_i} |s|^2$$

jointe à (3) et (4) $\left(\text{où l'on peut remplacer le premier membre par } m^2 \int_{D_i} |s|^2\right)$ entraîne

$$(2\pi)^p \sum |a(\lambda)|^2 \int |\varphi|^2 \left(1 - m^{-2} \sum_{i=i_0}^{\infty} M_i^2\right) \leqq M^2 \int_G |s|^2$$

d'où (2), pour un $\varkappa'$ assez grand.

8. Seconde démonstration (Ingham).

(1) et (2), avec $\varkappa$ et $\varkappa'$ fonctions de Λ et de G, résultent de l'existence d'une fonction ψ positive continue à support dans G, telle que

$$(5) \qquad \varkappa^{-1} \sum |a(\lambda)|^2 \leqq \int \psi |s|^2 \leqq \varkappa \sum |a(\lambda)|^2$$

avec $\varkappa = \varkappa(\Lambda, \psi)$; (2) découle immédiatement de la première inégalité, et (1) se déduit de la seconde quand on remplace s par $s_{(t)}$, et qu'on minore $\int \psi |s|^2$ par $m \int_D |s|^2$, le domaine D étant choisi de façon que $m = \inf_{x \in D} \psi(x) > 0$. Si nous posons

$$\Psi(u) = \int e^{ixu} \psi(x)\, dx, \qquad \text{soit} \quad \Psi = \mathcal{F}(\psi),$$

(5) s'écrit

$$(6) \qquad \varkappa^{-1} \sum |a(\lambda)|^2 \leqq \sum_{\lambda, \lambda'} a(\lambda) \overline{a(\lambda')} \Psi(\lambda - \lambda') \leqq \varkappa \sum |a(\lambda)|^2.$$

Compte tenu de l'inégalité $|a(\lambda) \overline{a(\lambda')}| \leqq \frac{1}{2}(|a(\lambda)|^2 + |a(\lambda')|^2)$, on a

$$\left| \sum_{\lambda, \lambda'} a(\lambda) \overline{a(\lambda')} \Psi(\lambda - \lambda') - \sum |a(\lambda)|^2 \Psi(0) \right|$$
$$\leqq \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda \mid \lambda \neq \lambda'} (|a(\lambda)|^2 + |a(\lambda')|^2) |\Psi(\lambda - \lambda')|.$$

Ainsi (6) a bien lieu dès que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda' \mid \lambda' \neq \lambda} (|\Psi(\lambda - \lambda')| + |\Psi(\lambda' - \lambda)|) \leqq |\Psi(0)| - \alpha \tag{7}$$

avec $\alpha > 0$ indépendant de λ. Le premier membre de (7) est uniformément borné en λ si l'on prend pour ψ la fonction « pyramide » construite sur le cube $2\nu\mathfrak{U}$, dont la transformée de Fourier est $\Psi_\nu(u) = \frac{\sin^2 \nu u_1}{(\nu u_1)^2} \cdots \frac{\sin^2 \nu u_p}{(\nu u_p)^2}$; en effet, puisque Λ est régulière, le nombre des λ' qui se trouvent dans le cube $\lambda + (n+1)\mathfrak{U}$ et en dehors du cube $\lambda + n\mathfrak{U}$ est $O(n^{p-1})$ uniformément par rapport à λ, donc la somme (7), restreinte à ces λ', est uniformément $O(n^{-p-1})$. Quand $\nu \to \infty$, le premier membre de (7) tend uniformément vers zéro, tandis que $\Psi_\nu(0) = 1$; on peut donc réaliser (7) avec un $\alpha > 0$, dès que $\Psi = \Psi_\nu$ avec ν assez grand. On peut alors choisir $G = 2\nu\mathfrak{U}$.

Remarque. — Pour démontrer la seule inégalité (2), on n'a pas besoin que ψ soit positive ni continue, mais seulement qu'elle soit bornée, et à support dans G.

9. Le but du prochain chapitre est d'étudier la relation entre Λ et G. A simple lecture des démonstrations (surtout de la première), on a déjà le résultat suivant (le « pas » est défini en I.4).

PROPOSITION I.9.1. — *Si le pas de* Λ *est* $\geqq d > 0$, *il existe des ouverts* G *ne dépendant que de* d, *et des constantes* $\varkappa$ *et* $\varkappa'$ *ne dépendant que de* d *et* G, *telles qu'on ait* (1) *et* (2) *pour tous les polynomes trigonométriques* $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$.

CHAPITRE II.

DOMAINES ASSOCIÉS A UNE SUITE.

1. Dans ce chapitre, nous aurons à utiliser de nouveaux espaces fonctionnels. Λ sera toujours une suite régulière, et G un domaine dans R^p. Nous désignerons par :

F_Λ, le sous-espace fermé de BE^2 engendré par $\{e^{i\lambda x}\}$ $(\lambda \in \Lambda)$;
$L^2_\Lambda(G)$, le sous-espace fermé de $L^2(G)$ engendré par $\{e^{i\lambda x}\}$ $(\lambda \in \Lambda)$;
l^2_Λ, l'espace des suites $\{a(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de carré sommable, avec norme

$$\| \{a(\lambda)\} \| = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$\exp^2 G$, l'espace des transformées de Fourier des fonctions $\in L^2(G)$, prolongées par o hors de G :

$$\Phi(u) = \int_G \varphi(x) e^{iu.x} dx, \qquad \Phi = \mathcal{F}(\varphi),$$

avec norme

$$\| \Phi \|_{R^p} = \left(\int_{R^p} | \Phi |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{p}{2}} \| \varphi \|_G.$$

Sauf avis contraire, lorsque nous parlerons d'isomorphisme, etc., nous considérerons tous ces espaces comme espaces de Banach.

Le théorème I.6.2 exprime que F_Λ est la famille ps.-p. de spectre Λ.

Définition. — Un domaine G *satisfaisant* I.6.3 *sera dit associé à* Λ.

Il revient donc au même de dire que G est associé à Λ, ou associé à F_Λ suivant la définition donnée en I.4. Nous donnerons dans ce chapitre diverses définitions équivalentes, et des critères pour que G soit associé à Λ.

Exemple. — Si Λ est constituée des points à coordonnées entières dans R^p, un domaine associé à Λ est un domaine tel que ses translatés, par les translations dont les composantes sont multiples de 2π, recouvrent R^p : autrement dit, c'est un domaine qui contient un domaine fondamental (non nécessairement connexe) relatif au groupe desdites translations. Dans ce cas particulier, toutes les propriétés d'une $f \in F_\Lambda$ sont en évidence quand on connaît f sur un domaine associé à Λ.

2. Voici des conséquences immédiates du théorème I.6.3.

Proposition II.2.1. — F_Λ *et* l^2_Λ *sont isomorphes dans l'application qui, à* $f \in F_\Lambda$, *fait correspondre la suite de ses coefficients de Fourier.*

En particulier, à chaque suite $\{a(\lambda)\}$ de carré sommable, on peut faire correspondre une $f \in F_\Lambda$ l'admettant pour suite de coefficients de Fourier.

Proposition II.2.2. — *Quel que soit le domaine* G, *l'application*

$$\{ a(\lambda) \} \to \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda.x}$$

est continue de l^2_Λ *dans* $L^2(G)$.

Car l'application canonique de F_Λ dans $L^2(G)$ est évidemment continue (on a noté $\sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda.x}$ la restriction à G de la fonction ps.-p. représentée par cette série).

PROPOSITION II.2.3. — *Quel que soit le domaine* G, *l'application* $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}$ *est continue de* $\exp^2 G$ *dans* l^2_Λ.

En effet, considérons un polynome trigonométrique $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$, et $\Phi = \mathcal{F}(\varphi)$. L'inégalité $\| s \|_G < \varkappa \| \{a(\lambda)\} \|$ entraîne

$$\left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, \Phi(\lambda) \right| = \left| \int_G s\varphi \right| \leqq \| s \|_G \, \| \varphi \|_G \leqq (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \varkappa \, \| \{a(\lambda)\} \| . \| \Phi \|_{R^p},$$

d'où

$$\| \{\Phi(\lambda)\} \| \leqq (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \varkappa \, \| \Phi \|_{R^p}.$$

Remarquons que les trois propositions précédentes résultent de la partie la plus facile du théorème I.6.3, à savoir l'inégalité (1) de I.6. La proposition suivante donne différentes définitions équivalentes des domaines associés à Λ, que nous exploiterons dans la suite.

PROPOSITION II.2.4. — *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a. G *est un domaine associé à* Λ;

b. F_Λ *et* $L^2_\Lambda(G)$ *sont isomorphes dans l'application canonique (qui, à tout* $f \in F_\Lambda$, *fait correspondre sa restriction à* G);

c. $L^2_\Lambda(G)$ *admet* $\{e^{i\lambda x}\}(\lambda \in \Lambda)$ *pour base, et est isomorphe à* l^2_Λ *dans l'application* $f \to \{a_f(\lambda)\}$ *(qui, à tout* $f \in L^2_\Lambda(G)$, *fait correspondre la suite de ses composantes suivant* $\{e^{i\lambda x}\}$);

d. L'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}$ *est un homomorphisme de* $\exp^2 G$ *sur* l^2_Λ. *Autrement dit, l'application est continue, et toute* $\{b(\lambda)\} \in l^2_\Lambda$ *est l'image d'au moins une* Φ *telle que* $\| \Phi \|_{R^p} \leqq \varkappa \| \{b(\lambda)\} \|$ $(\varkappa = \varkappa(\Lambda, G))$.

En effet, en nous référant aux notations de I.6.3, *b* exprime l'équivalence des normes $\| s \|$ et $\| s \|_G$, et *c* l'équivalence des normes $\| s \|_G$ et $\| \{a(\lambda)\} \|$. On passe de *c* à *d* par dualité et transformation de Fourier : une forme linéaire sur l^2_Λ s'écrit $\{a(\lambda)\} \to \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) b(\lambda)$, et sa norme est $\| \{b(\lambda)\} \|$; la forme linéaire correspondante sur $L^2_\Lambda(G)$ s'écrit

$$f \to \int_G f\varphi \quad \text{avec} \quad \varphi \in L^2(G) \qquad \text{et} \qquad \int_G e^{i\lambda x} \varphi(x)\, dx = b(\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

et sa norme est la borne inférieure des normes $\| \varphi \|_G$ des φ satisfaisant cette condition; autrement dit, c'est, au facteur $(2\pi)^{\frac{p}{2}}$ près, la borne inférieure des normes $\| \Phi \|_{R^p}$ des $\Phi \in \exp^2 G$ telles que $\Phi(\lambda) = b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

On peut encore dire, suivant la terminologie de Duffin et Schaeffer [3], que G est un domaine associé à Λ si et seulement si $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ est un « cadre abstrait » (abstract frame) de l'espace de Hilbert quotient de $L^2(G)$ (considéré comme espace de Hilbert) par l'orthogonal de $L^2_\Lambda(G)$. A la théorie des cadres abstraits peut se rattacher la proposition II.4.1, dont nous donnerons cependant la démonstration *in extenso*.

3. Nous allons transcrire la proposition II.2.4 à l'aide des propositions précédentes et du théorème de Banach selon lequel, pour qu'une application linéaire d'un espace de Banach dans un espace de Banach définisse un isomorphisme, il fau tet suffit qu'elle soit continue, biunivoque et surjective ([o], p. 41).

THÉORÈME II.3.1. — *Dire que* G *est associé à* Λ, *c'est dire que :*

b'. toute $f \in L^2_\Lambda(G)$ *est prolongeable, de manière unique, sur* R^p, *en une fonction* $\in F_\Lambda$.

En effet, l'application canonique de F_Λ dans $L^2_\Lambda(G)$ est évidemment continue; elle définit un isomorphisme si et seulement si elle est biunivoque et surjective, donc $b \Leftrightarrow b'$.

THÉORÈME II.3.2. — *Dire que* G *est associé à* Λ, *c'est dire que :*

c' $\{e^{i\lambda x}\}(\lambda \in \Lambda)$ *constitue une base de* $L^2_\Lambda(G)$ *et, pour toute* $f \in L^2_\Lambda(G)$, *les composantes de* f *suivant cette base forment une suite de carré sommable.*

En effet, $c \Rightarrow c'$ de manière évidente. D'autre part, c' entraîne que l'application $f \to \{a_f(\lambda)\}$ est surjective de $L^2_\Lambda(G)$ sur l^2_Λ; d'après II.2.2, elle est biunivoque, et son inverse est continue; donc $c' \Rightarrow c$.

THÉORÈME II.3.3. — *Dire que* G *est associé à* Λ, *c'est dire que :*

d'. à toute suite $\{b(\lambda)\} \in l^2_\Lambda$ *correspond au moins une* $\Phi \in \exp^2 G$ *telle que* $\Phi(\lambda) = b(\lambda)\ (\lambda \in \Lambda)$.

En effet, $d \Rightarrow d'$. D'autre part, soit $\frac{\exp^2 G}{(\Lambda)}$ l'espace quotient de $\exp^2 G$ par le noyau de l'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}$, et $\frac{\Phi}{(\Lambda)}$ la classe contenant Φ; l'application $\frac{\Phi}{(\Lambda)} \to \{\Phi(\lambda)\}$ est biunivoque; d'après II.2.3 elle est continue; enfin d' exprime qu'elle est surjective sur l^2_Λ; donc $d' \Rightarrow d$.

Les théorèmes II.3.1 et II.3.3 montrent le rôle important joué par les domaines associés à une suite dans les problèmes de prolongement pour les fonctions ps.-p., et d'interpolation pour les fonctions entières de type exponentiel. Nous reviendrons sur ces problèmes aux chapitres IV et V.

4. Nous allons tirer de II.3.3 des critères pour qu'un domaine soit associé à Λ, qui seront utilisés au chapitre suivant.

PROPOSITION II.4.1. — *Supposons qu'à chaque* $\{b(\lambda)\} \in l^2_\Lambda$ *on puisse faire correspondre une* $\Phi \in \exp^2 G$, *telle que*

$$\|\Phi\|_{R^p} \leq \varkappa \|\{b(\lambda)\}\| \quad \text{et} \quad \|\{\Phi(\lambda) - b(\lambda)\}\| < (1 - \eta)\|\{b(\lambda)\}\|,$$

$\varkappa$ *et* η *étant des constantes positives ne dépendant que de* Λ *et* G. *Alors* G *est associé à* Λ.

En effet, on peut écrire

$$\{b(\lambda)\} = \{b_0(\lambda)\} = \{\Phi_0(\lambda)\} + \{b_1(\lambda)\},$$
$$\{b_n(\lambda)\} = \{\Phi_n(\lambda)\} + \{b_{n+1}(\lambda)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

avec

$$\Phi_n \in \exp^2 G, \; \|\Phi_n\|_{R^p} < \varkappa \,\|\{b_n(\lambda)\}\| \qquad \text{et} \qquad \|\{b_{n+1}(\lambda)\}\| < (1-\eta)\,\|\{b_n(\lambda)\}\|$$
$$(n = 0, 1, \ldots).$$

Alors $\sum_0^\infty \Phi_n \in \exp^2 G$ et sa restriction à Λ est $\{b(\lambda)\}$. On conclut d'après II.3.3.

Proposition II.4.2. — *Supposons que, pour chaque* $\mu \in \Lambda$, *il existe une* $\Phi_\mu \in \exp^2 G$, *égale à* 1 *en* μ, *nulle sur* $\Lambda - \mu$, *de telle sorte que* $\Phi_\mu(u)$ *soit uniformément borné par rapport à* μ *et* u ($\mu \in \Lambda$, $u \in R^p$). *Alors tout domaine* G′ *dont l'intérieur contient* G *est associé à* Λ.

Démonstration. — Soit ε une fonction « pyramide » (comme en I.8) construite sur un homothétique du cube unité, de sorte que sa transformée de Fourier $E = \mathcal{F}(\varepsilon)$ ne prenne que des valeurs $\geqq 0$, et $E(0) = \int \varepsilon = 1$. Prenons le support de ε assez voisin de 0 pour que le support de $\varphi \star \varepsilon$ soit contenu dans G′ chaque fois que φ a son support dans G. Étant donné une suite $\{b(\lambda)\} \in l^2_\Lambda$ à support fini, c'est-à-dire nulle sauf en un nombre fini de points, considérons

$$\Phi(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} b(\lambda)\, \Phi_\lambda(u)\, E(u - \lambda).$$

On a

$$\int |\Phi|^2 \leqq \sup_{\lambda, u} |\Phi_\lambda(u)|^2 \int \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} |b(\lambda)|\, E(u - \lambda) \Big)^2 du.$$

Or, d'après la formule de Parseval,

$$\int \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} |b(\lambda)|\, E(u-\lambda) \Big)^2 du = (2\pi)^p \int \Big| \sum |b(\lambda)|\, e^{-i\lambda x} \varepsilon(x) \Big|^2 dx$$

et, d'après II.3.2, le second membre ne dépasse pas $\varkappa \sum_\lambda |b(\lambda)|^2$ avec $\varkappa = \varkappa(\Lambda, \varepsilon)$.

Ainsi, $\Phi \in \exp^2 G'$, $\Phi(\lambda) = b(\lambda)\,(\lambda \in \Lambda)$, et $\|\Phi\|_{R^p} \leqq \varkappa_1 \|\{b(\lambda)\}\|$, $\varkappa_1$ ne dépendant pas de la suite $\{b(\lambda)\}$. Le même résultat vaut, si l'on donne $\{b(\lambda)\} \in l^2_\Lambda$ sans restriction concernant le support : il suffit d'approcher $\{b(\lambda)\}$ dans l^2_Λ par des suites à support fini, et de définir Φ par passage à la limite dans $\exp^2 G'$. II.3.3 (ou aussi bien II.2.4) permet de conclure.

5. La proposition suivante jouera un rôle important dans l'étude géométrique des domaines associés à une suite Λ. Elle montre immédiatement que ces domaines changent peu, si l'on ajoute à Λ un nombre fini de points.

PROPOSITION II.5.1. — *Soit* G *un domaine associé à* Λ, μ *un point à une distance* $\geqq d > 0$ *de* Λ, *et* G' *un domaine dont l'intérieur contient* G. *Alors la distance (dans* $L^2(G')$*) de* $e^{i\mu.x}$ *à* $L^2_\Lambda(G')$ *est bornée inférieurement par un* $\varkappa = \varkappa(\Lambda, G', d) > 0$. *Autrement dit, il existe une* $\Phi_\mu \in \exp^2 G'$, *égale à* 1 *en* μ, *nulle sur* Λ, *et dont la norme dans* $\exp^2 G'$ *est majorée par une constante ne dépendant que de* Λ, G', d.

Démonstration. — On passe immédiatement par dualité d'un énoncé à l'autre. Désignons par Λ_1 la partie de Λ extérieure à une boule de centre μ et de rayon d_1 donné; montrons d'abord que, si d_1 est assez grand, $e^{i\mu.x}$ est à une distance de $L^2_{\Lambda_1}(G)$ supérieure à $\varkappa_1 = \varkappa_1(\Lambda, G, d_1) > 0$.

Soit $g \sim \sum_{\lambda\in\Lambda_1} \alpha(\lambda) e^{i\lambda.x}$ la projection de $e^{i\mu.x}$ sur $L^2_{\Lambda_1}(G)$. Il suffit de montrer qu'il existe une $\varphi \in L^2(G)$, de norme $\|\varphi\|_G = 1$, et telle que $\int_G (e^{i\mu.x} - g)\varphi > \varkappa_1$; autrement dit, qu'il existe une $\Phi \in \exp^2 G$, de norme $(2\pi)^{\frac{p}{2}}$, telle que

$$\left|\Phi(\mu) - \sum_{\lambda\in\Lambda_1} \alpha(\lambda)\Phi(\lambda)\right| > K_1.$$

Comme G est associé à Λ, on a

$$\|\{\alpha(\lambda)\}\| < \varkappa \|g\|_G \leqq \varkappa \text{ mes. } G$$

$\varkappa$ ne dépendant que de Λ et G. Choisissons une fonction « pyramide » θ (comme en I.8) à support dans G, multipliée par une constante convenable pour que $\|\theta\|_G = 1$, et posons $\Theta = \mathcal{F}(\theta)$; quitte à translater G, on peut supposer qu'il contient l'origine à son intérieur, et l'on peut prendre Θ de la forme

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \frac{\sin^2 \eta u_1}{\eta^2 u_1^2} \frac{\sin^2 \eta u_2}{\eta^2 u_2^2} \cdots \frac{\sin^2 \eta u_p}{\eta^2 u_p^2}$$

Soit h le pas de Λ, c'est-à-dire la borne inférieure des distances de deux points distints de Λ. Pour toutes les suites $\Lambda^\star$ de pas $\geqq h$ (en particulier pour toutes les suites translatées de Λ), les sommes $\sum |\Theta(\lambda^\star)|^2$, étendues aux $\lambda^\star \in \Lambda^\star$ qui sont dans le cube $(n+1)\mathfrak{U}$ et en dehors du cube $n\mathfrak{U}$, sont uniformément $O(n^{-p-1})$ (calcul immédiat); il existe donc un $l = l(h)$ tel que, pour toutes les suites $\Lambda^\star$,

$$\Theta(0) > \varkappa \text{ mes. } G \left(\sum_{\lambda^\star\in\Lambda^\star, |\lambda^\star|>l} |\Theta(\lambda^\star)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varkappa_1$$

avec $\varkappa_1 > 0$. Choisissons enfin $\Phi(u) = \Theta(u-\mu)$, et $d_1 = l$. Alors, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\Phi(\mu) - \sum_{\lambda \in \Lambda_1} |\alpha(\lambda)\Phi(\lambda)| > \Theta(0) - \varkappa \,\text{mes.}\, G \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_1} |\Theta(\lambda-\mu)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} > \varkappa_1,$$

de sorte que l'existence de φ, avec les conditions imposées, est démontrée.

Ainsi $e^{i\mu x}$ est à une distance de $L^2_{\Lambda_1}(G)$ supérieure à $\varkappa_1$ (indépendant de μ). C'est dire qu'il existe une $\Psi_\mu \in \exp^2 G$, égale à $\varkappa_1$ en μ, nulle sur Λ_1, et de norme $\leqq 1$. Puisque Λ est régulière, le nombre de points de Λ dans la boule de centre μ et de rayon d_1, c'est-à-dire le nombre de points de $\Lambda - \Lambda_1$, est majoré par un nombre N indépendant de μ. Choisissons maintenant pour ε une fonction pyramide dont le support est un homothétique de $\mathfrak{U}$ assez petit pour que le support de $\varphi \star \varepsilon \star \ldots \star \varepsilon$ soit dans G' chaque fois que φ a son support dans G, et que la convolution contient au plus $N+1$ termes. Posons $E = \mathcal{F}(\varepsilon)$, et

$$X_\mu(u) = \prod_{\lambda \in \Lambda - \Lambda_1} (1 - E(u-\lambda)).$$

Il est clair que X_μ s'annule sur $\Lambda - \Lambda_1$, que $|X_\mu(u)| \leqq 1$, et que $X_\mu \Psi_\mu$ est la transformée de Fourier d'une fonction à support dans G'. Enfin il existe un $\alpha = \alpha(d) > 0$ tel que $1 - E(u) \geqq \alpha$ quand $|u| \geqq d$. Comme la distance de μ à $\Lambda - \Lambda_1$ est $\geqq d$, on a $X_\mu(\mu) \geqq \alpha^N$. Il suffit de poser

$$\Phi_\mu(u) = \frac{\Psi_\mu(u) X_\mu(u)}{\Psi_\mu(\mu) X_\mu(\mu)}$$

pour avoir la fonction de l'énoncé, avec $\|\Phi_\mu\|_{R^p} \leqq (\varkappa_1 \alpha^N)^{-1}$. Cela achève la démonstration de II.5.1.

On verra au chapitre VI (proposition VI.2.4) un résultat beaucoup plus facile, dont un énoncé partiel est le suivant.

Si G est associé à Λ et si $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ n'est pas complet dans $L^2(G)$, il existe un $\mu \notin \Lambda$ tel que G soit associé à la suite $\Lambda \cup \{\mu\}$.

CHAPITRE III.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES DOMAINES ASSOCIÉS A UNE SUITE.

1. Si Λ est l'ensemble des points à coordonnées entières dans R^p, il est très facile — nous l'avons fait en II 1 — de décrire géométriquement les domaines qui leur sont associés. Naturellement, on ne peut en espérer autant dans le cas général. Les principaux résultats que nous obtiendrons dans ce chapitre concernent les questions suivantes :

— domaines associés à des suites convenablement voisines;

— domaines associés à la réunion de deux suites;
— domaines associés à une suite convenablement lacunaire;
— épaisseurs, dans une direction, des domaines associés à une suite.

Sauf mention contraire, toutes les suites Λ considérées seront régulières.

Nous commencerons par une observation très simple. Si l'on effectue sur l'espace des λ et sur celui des x deux transformations linéaires adjointes, les $e^{i\lambda x}$ sont invariants, et les éléments de volume dx sont multipliés par un facteur constant. D'où :

PROPOSITION III.1.1. — *Soit* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}^\star$ *deux transformations linéaires adjointes de* R^p *sur* R^p. *Si* G *est un domaine associé à* Λ, $\mathcal{A}^\star G$ *est un domaine associé à* $\mathcal{A}\Lambda$.

Remarquons aussi qu'une translation, soit de Λ, soit de G, n'altère pas l'association.

Rappelons (I.9) l'existence d'un $\varkappa$ (ne dépendant que de la dimension p) tel que, pour toute suite Λ de pas $\geqq 1$, toute boule fermée de rayon supérieur à $\varkappa$ soit un domaine associé à Λ. Compte tenu de III.1.1, on a :

PROPOSITION III.1.2. — *Si le pas de* Λ *est* $\geqq d$, *toute boule fermée de rayon* $> \frac{\varkappa}{d}$ *est un domaine associé à* Λ ($\varkappa$ *ne dépendant que de* p).

La valeur minimale de $\varkappa$ n'est connue que lorsque $p=1$; Ingham a montré qu'elle est alors égale à 2π.

2. Soit G un domaine associé à Λ. Déplaçons chaque point de Λ d'une longueur inférieure à α. Nous allons montrer que, si α est assez petit, G reste associé à la nouvelle suite obtenue.

Énonçons le résultat en convenant de dire que Λ' *est α-voisine de* Λ si et seulement s'il existe une correspondance biunivoque $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ entre Λ et Λ' telle que $|\lambda'-\lambda| < \alpha$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

THÉORÈME III.2.1. — *Si* G *est un domaine associé à* Λ, *il existe un* $\alpha = \alpha(\Lambda, G) > 0$ *tel que* G *est encore associé à toute suite* Λ' *α-voisine de* Λ.

Démonstration, — Elle s'appuie sur la proposition II.4.1. Donnons-nous une suite $\{b(\lambda')\} \in l^2_{\Lambda'}$, et associons-lui la suite $\{b'(\lambda)\} \in l^2_\Lambda$ telle que, pour tout λ, $b'(\lambda) = b(\lambda')$; ainsi $\|\{b'(\lambda)\}\| = \|\{b(\lambda')\}\|$. Comme G est associé à Λ, il existe (II.2.4.d) une $\Phi \in \exp^2 G$, de norme $\|\Phi\|_{R^p} \leqq \varkappa \|\{b'(\lambda)\}\|$, telle que $\Phi(\lambda) = b'(\lambda)\,(\lambda \in \Lambda)$ avec $\varkappa = \varkappa(\Lambda, G)$. Il suffit de montrer que, si α est assez petit, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\|\{\Phi(\lambda') - \Phi(\lambda)\}\| < (1-\eta)\,\|\{\Phi(\lambda)\}\|. \tag{1}$$

Posons $\lambda' - \lambda = d\lambda$ (vecteur de composantes $d_1\lambda, \ldots, d_p\lambda$) et écrivons la formule de Taylor, à p variables, sous la forme

$$\Phi(\lambda') - \Phi(\lambda) = \sum_{n_1, \ldots, n_p} \frac{(d_1\lambda)^{n_1} \ldots (d_p\lambda)^{n_p}}{n_1! \ldots n_p!} \Phi^{(n_1, \ldots, n_p)}(\lambda).$$

Supposons qu'on ait, pour tout λ, $|d_1\lambda| < \alpha_1, \ldots |d_p\lambda| < \alpha_p$, les seconds membres étant indépendants de λ. On peut alors écrire

$$\|\{\Phi(\lambda') - \Phi(\lambda)\}\| \leqq \sum_{n_1, \ldots, n_p} \frac{\alpha_1^{n_1} \ldots \alpha_p^{n_p}}{n_1! \ldots n_p!} \|\{\Phi^{(n_1, \ldots, n_p)}(\lambda)\}\| \tag{2}$$

Or, si $\Phi = \mathcal{F}(\varphi)$, $\Phi^{(n_1, \ldots, n_p)}$ est la transformée de Fourier de

$$i^{n_1 + \ldots + n_p} x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p} \varphi(x_1, \ldots, x_p);$$

d'après II.2.3, il existe un $\varkappa' = \varkappa'(\Lambda, G)$ tel que

$$\begin{aligned} \|\{\Phi^{(n_1, \ldots, n_p)}(\lambda)\}\| &\leqq \varkappa' \|\Phi^{(n_1, \ldots, n_p)}\|_{R^p} \\ &= (2\pi)^{\frac{p}{2}} \varkappa' \left(\int \cdots \int_G |x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p} \varphi(x_1, \ldots, x_p)|^2 dx_1 \ldots dx_p \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Posons maintenant $\sup_{x \in G} |x_1| = \rho_1, \ldots, \sup_{x \in G} |x_p| = \rho_p$. Le dernier membre ne dépasse pas $\varkappa' \rho_1^{n_1} \ldots \rho_p^{n_p} \|\Phi\|_{R^p}$, de sorte que d'après (2),

$$\|\{\Phi(\lambda') - \Phi(\lambda)\}\| \leqq \varkappa' (e^{\alpha_1 \rho_1 + \ldots + \alpha_p \rho_p} - 1) \|\Phi\|_{R^p}.$$

On a vu que $\|\Phi\|_{R^p} \leqq \varkappa \|\{\Phi(\lambda)\}\|$; (1) résulte donc de

$$\varkappa\varkappa' (e^{\alpha_1 \rho_1 + \ldots \alpha_p \rho_p} - 1) \leqq 1 - \eta \tag{3}$$

Comme $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 \leqq \alpha^2$, il suffit de choisir

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \ldots + \rho_p^2}} \log\left(1 + \frac{1}{\varkappa\varkappa'}\right)$$

pour que G soit associé à Λ'. Cela achève la démonstration de III.2.1.

Remarquons que, si nous choisissons pour Λ l'ensemble des points à coordonnées entières dans R^p, et pour G un domaine associé minimal (c'est-à-dire un domaine fondamental au sens de II.1), $\|\Phi\|_{R^p}$ est égal à $(2\pi)^p \|\{\Phi(\lambda)\}\|$ pour $\Phi \in \exp^2 G$, de sorte qu'on peut prendre $\varkappa\varkappa' = 1$.

Exemple 1. — Soit Λ l'ensemble des points à coordonnées entières dans R^p. Le cube G : $|x_1| \leqq \pi, \ldots, |x_p| \leqq \pi$ est associé à toute suite α-voisine de Λ dès que $\alpha < \frac{\log 2}{\pi\sqrt{p}}$. Plus précisément d'aprés (3), dès que $\beta < \frac{\log 2}{\pi}$, G est associé à toute suite Λ' biunivoquement associé à Λ $(\lambda \leftrightarrow \lambda')$ de telle sorte que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, le point $\lambda' - \lambda$ appartienne au cube $|u_1| + \ldots + |u_p| \leqq \beta$, dont les sommets sont les points à distance β de l'origine sur les axes de coordonnées.

Exemple 2. — Soit $p=1$, et $\Lambda=\{n\}$ la suite des entiers. La réunion des segments $[-2\pi, -\pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ est un domaine associé à toute suite $\{\lambda'_n\}$ telle que $\sup_n |\lambda'_n - n| < \frac{\log 2}{2\pi}$.

On obtient un corollaire intéressant de III.2.1 à l'aide de II.5.1; en effet II.5.1 montre que, si l'on ajoute un nombre fini de points à Λ, tout domaine dont l'intérieur contient G reste associé à la nouvelle suite.

Énonçons le résultat en convenant de dire que deux suites sont asymptotes si et seulement si, pour tout $\alpha>0$, les restrictions de ces suites à l'extérieur d'une boule assez grande sont α-voisines.

Théorème III.2.2. — *Si deux suites sont asymptotes, tout domaine dont l'intérieur contient un domaine associé à l'une est associé à l'autre. Autrement dit, les ouverts qui contiennent des domaines associés sont les mêmes pour les deux suites.*

L'énoncé serait inexact si, au lieu de suites asymptotes, on avait parlé de suites α-voisines. En effet, soit par exemple $p=2$; prenons pour Λ l'ensemble des points à coordonnées entières, et pour Λ' une suite α-voisine de Λ, telle que son intersection avec une droite donnée D de pente irrationnelle soit une suite de densité positive Δ (on sait qu'il existe de telles suites Λ' quel que soit $\alpha>0$). Alors il est aisé de voir (c'est d'ailleurs un cas particulier de l'étude que nous ferons au paragraphe 7) qu'une bande de largeur inférieure à $2\pi\Delta$ et perpendiculaire à D ne contient aucun domaine associé à Λ', et qu'au contraire toute bande perpendiculaire à D contient des domaines associés à Λ.

3. Nous allons examiner la question suivante. On donne deux suites, et des domaines associés à chacune d'elles. Peut-on déterminer simplement un domaine associé à leur réunion?

Naturellement, cela n'a de sens que si la réunion est régulière. Nous savons déjà répondre (II.5) lorsque l'une des suites est finie. Nous allons démontrer :

Théorème III.3.1. — *Soit Λ_1 et Λ_2 deux suites (régulières), G_1 et G_2 des domaines qui leur sont respectivement associés. Si la réunion $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$ est régulière, tout domaine G' dont l'intérieur contient la somme directe G_1+G_2 est associé à Λ.*

Démonstration. — Elle s'appuie sur II.5.1 et II.4.2. Soit G'' un domaine intérieur à G', et dont l'intérieur contient G_1+G_2. Nous allons montrer qu'il existe, pour chaque $\mu\in\Lambda$, une $\Phi_\mu\in\exp^2 G''$, égale à 1 en μ, nulle sur $\Lambda-\mu$, et telle que $\sup_u |\Phi_\mu(u)|$ soit majoré indépendamment de μ; alors d'après II.4.2 le théorème sera établi. On peut supposer sans restriction $\mu\in\Lambda_1$. Il existe (II.2.4 *d*) une $\Phi_{1,\mu}=\mathcal{F}(\varphi_{1,\mu})\in\exp^2 G_1$ égale à 1 en μ, nulle sur $\Lambda_1-\mu$, et bornée en norme par $\varkappa_1=\varkappa_1(\Lambda_1, G_1)$; alors

$$\sup_u |\Phi_{1,\mu}(u)| \leq \int_G |\varphi_{1,\mu}| \leq \|\varphi_{1,\mu}\|_{G_1}\sqrt{\operatorname{mes} G_1} \leq (2\pi)^{-\frac{p}{2}}\varkappa_1\sqrt{\operatorname{mes} G_1}.$$

Utilisons maintenant II.5.1. Soit G'_2 un domaine dont l'intérieur contient G_1 et tel que $G_1 + G'_2 \subset G''$. Si l'on désigne par d le pas de Λ (suite *régulière*), il existe une $\Phi_{2,\mu} = \mathcal{F}(\varphi_{2,\mu}) \in \exp^2 G'_2$, égale à 1 en μ, nulle sur Λ_2 et bornée en norme par un $\varkappa' = \varkappa'(\Lambda_2, G'_2, d)$; alors

$$\sup |\Phi_{2,\mu}(u)| \leqq (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \sqrt{\text{mes}\, G'_2}.$$

Posons $\Phi_\mu = \Phi_{1,\mu}\Phi_{2,\mu}$; c'est la transformée de Fourier de $\varphi_{1,\mu} \star \varphi_{2,\mu}$, donc $\Phi_\mu \in \exp^2(G_1 + G'_2) \subset \exp^2 G''$, et Φ_μ satisfait les conditions rappelées plus haut; d'après II.4.2, le théorème est démontré.

4. Joint à III.1.2, le théorème III.3.1 permet de donner une condition de lacunarité suffisante pour qu'une suite Λ admette pour domaines associés des boules arbitrairement petites — autrement dit, pour que tout domaine soit associé à Λ.

Théorème III.4.1. — *Soit $\omega(d)$ la limite supérieure, quand le point u tend vers l'infini dans R^p, du nombre de points de Λ contenus dans la boule de centre u et de rayon d. Si $\omega(d) = o(d)$ quand $d \to \infty$, toute boule (fermée) est un domaine associé à Λ.*

Démonstration. — Considérons les cubes de côté d, dont les sommets ont leurs coordonnées dans R^p multiples de d. On peut les répartir en 2^p familles telles que deux cubes d'une même famille soient toujours à une distance $\geqq d$ (chaque famille a un représentant de sommet o, et est invariant par les translations $2d$ parallèles aux axes). D'autre part, à l'exception d'un nombre fini, chacun de ces cubes contient au plus $\omega(pd)$ points. Ainsi, quel que soit d, on peut considérer Λ comme la réunion d'une suite finie et de $\varpi(d) = 2^p\omega(pd)$ suites Λ_j de pas $\geqq d$ $(j = 1, 2, \ldots \varpi(d))$. Chaque Λ_j admettant pour domaines associés les boules de rayon $> \frac{\varkappa}{d}$, Λ admet pour domaines associés toute boule de rayon $> \varpi(d)\varkappa/d$, c'est-à-dire (par choix convenable de d) une boule arbitrairement petite.

Remarque. — En prenant pour Λ la suite des multiples d'un élément donné $\neq 0$, on voit que la conclusion de III.4.1 devient inexacte; on ne peut donc pas, dans l'énoncé, remplacer la condition $\omega(d) = o(d)$ par $\omega(d) = O(d)$; la remarque vaut quel que soit p. On sait ([6], p. 305) et nous verrons d'ailleurs plus loin que pour $p = 1$, $\omega(d) = o(d)$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir la conclusion de III.4.1.

5. Reprenons la démonstration d'Ingham du théorème I.6.3. On peut la raffiner, comme Ingham lui-même l'a fait dans le cas d'une variable, de façon à obtenir l'énoncé suivant :

Proposition III.5.1. — *Supposons que les translatés du cube unité $\mathfrak{U}$ centrés aux points de Λ, soient deux à deux disjoints. Alors, pour tout $\eta > 0$, la tranche de R^p définie par $|x_1| < \pi + \eta$ contient un domaine associé à Λ.*

Démonstration. — D'après la remarque faite en I.8, il suffit de construire une $\psi \in L^\infty(R^p)$, à support compact dans la tranche de R^p définie par $|x_1| < \pi + \eta$, et dont la transformée de Fourier $\Psi = \mathcal{F}(\psi)$ satisfasse, pour un $\alpha > 0$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$(4) \qquad \frac{1}{2} \sum_{\lambda' \in \Lambda - \lambda} (|\Psi(\lambda' - \lambda)| + |\Psi(\lambda - \lambda')|) \leqq |\Psi(0)| - \alpha.$$

Nous allons montrer qu'il en est ainsi si l'on choisit

$$\Psi(u) = \Psi(u_1, u_2, \ldots, u_p) = X(u_1) S(u_2) \ldots S(u_p),$$
$$X(\xi) = -\frac{\pi^2 \cos a\xi}{4a^2\xi^2 - \pi^2} \quad (\pi < a < \pi + \eta),$$
$$S(\xi) = \frac{\sin^2 \nu\xi}{\nu^2\xi^2}$$

à condition que ν soit assez grand. En effet, $X(\xi)$ et $S(\xi)$ sont respectivement transformées de Fourier de la fonction $\chi(t)$ de support $[-a, a]$, égale sur cet intervalle à $\frac{\pi}{4a} \cos \frac{\pi t}{2a}$, et de la fonction $s(t)$ de support $[-\nu, \nu]$, égale sur cet intervalle à $\frac{\nu - |t|}{\nu^2}$. Ainsi Ψ est la transformée de Fourier de la fonction bornée

$$\chi(x_1) s(x_2) \ldots s(x_p)$$

à support dans le pavé $|x_1| \leqq a$, $|x_2| \leqq \nu$, $\ldots$ $|x_p| \leqq \nu$. Reste à montrer que, si ν est assez grand, (4) a lieu.

Pour cela, nous allons évaluer le premier membre de (4), en remarquant que $\Psi(u) = \Psi(-u)$. Nous ferons d'abord la sommation dans le tube T_λ, parallèle au premier axe de coordonnées, défini par $|u_j - \lambda_j| < \frac{1}{2}$ $(j = 2, 3, \ldots, p)$. Ordonnons la suite $T_\lambda \cap \Lambda$ sous la forme $\{\mu_n\}$ $(n = -1, 0, 1, \ldots)$ de façon que $\mu_0 = \lambda$ et que la suite des abscisses $\{\mu_{n,1}\}$ soit croissante. D'après l'hypothèse faite sur Λ, cette suite $\{\mu_{n,1}\}$ admet un pas $\geqq 1$, de sorte que $|\mu_{n,1} - \mu_{0,1}| \geqq n$. La majoration

$$|\Psi(\mu_n - \mu_0)| \leqq \frac{\pi^2}{4a^2|\mu_{n,1} - \mu_{0,1}|^2 - \pi^2} < \frac{\pi^2}{4a^2n^2 - \pi^2}.$$

donne

$$\sum_{\lambda' \in T_\lambda \cap (\Lambda - \lambda)} |\Psi(\lambda' - \lambda)| < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{4a^2n^2 - \pi^2} = m(a),$$

$m(a)$ étant une fonction décroissante de a $(a > \pi)$, égale à 1 pour $a = \pi$ $\left(\text{on calcule } m(\pi) \text{ en observant que si } a = \pi, \sum_{-\infty}^{\infty} X(n) e^{in\pi} = 0\right)$. Pour la somme restante, l'argument I.8 montre que

$$\sum_{\lambda' \in (R^p - T_\lambda) \cap \Lambda} |\Psi(\lambda' - \lambda)| < \varepsilon(\nu)$$

$\varepsilon(\nu)$ tendant vers zéro quand $\nu \to \infty$. Comme $\Psi(0) = 1$, il suffit de choisir $\varepsilon(\nu) < 1 - m(a)$ pour avoir (4), avec $\alpha = 1 - m(a) - \varepsilon(\nu)$.

La proposition III.5.1, jointe au théorème III.4.1, va nous permettre de démontrer l'existence de domaines associés à Λ dans des « tranches » convenablement liées à Λ. Nous devons pour cela introduire la notion de « densité supérieure de répartition de Λ dans une direction ».

6. On donne une direction de droite D dans R^p. A tout $\eta > 0$ et tout $l > 0$ on fait correspondre le maximum, pour tous les segments S de longueur l parallèles à D, du nombre de points de Λ qui sont à une distance de S inférieure à η : soit $N(l, \eta)$. Du fait que $N(l + l', \eta) \leq N(l, \eta) + N(l', \eta)$ on déduit facilement que $\frac{N(l, \eta)}{l}$ admet une limite quand $l \to \infty$; cette limite est évidemment fonction croissante de η. *La densité supérieure de répartition de Λ dans la direction* D est

$$\Delta_D(\Lambda) = \lim_{\eta \to 0} \lim_{l \to 0} \frac{N(l, \eta)}{l}.$$

Par exemple, si Λ est formée des points à coordonnées entières, on a $\Delta_D(\Lambda) = 0$ pour toute direction non rationnelle.

Nous appellerons *tranche d'épaisseur l perpendiculaire à* D l'image réciproque d'un intervalle de longueur l (ouvert ou fermé) dans une projection orthogonale de R^p sur une droite parallèle à D.

THÉORÈME III.6.1. — *Soit* D *une direction de droite dans* R^p *et* $\Delta_D(\Lambda)$ *la densité supérieure de répartition de* Λ *(suite régulière) dans la direction* D. *Dans toute tranche d'épaisseur strictement supérieure à* $2\pi\Delta_D(\Lambda)$, *perpendiculaire à* D, *il existe un domaine associé à* Λ.

Démonstration. — Soit d le pas de Λ. Choisissons $\eta < \frac{d}{2p}$. Pour chaque $l > 0$, considérons un pavage de R^p (c'est-à-dire un recouvrement sans superposition, sauf sur un ensemble de mesure nulle) par des pavés P fermés ayant pour côtés des segments S (de longueur l et parallèles à D) d'une part, et des segments de longueur $< \eta$ d'autre part. Alors Λ est réunion de $N(l, \eta)$ suites Λ_j ayant chacune au plus un point dans tout pavé P. Donnons-nous un entier positif k. Recouvrons R^p par un pavage $\mathfrak{T}$ en pavés P', obtenus à partir des pavés P par une dilatation de rapport k dans la direction D, de façon que chaque P' contienne k pavés P; à chacun de ces P on fait correspondre la réunion de ses translatés par les translations conservant $\mathfrak{T}$, soit (P). Décomposons chaque Λ_j en k suites $\Lambda_{j,l}$ contenues chacune dans un (P), et considérons un pavé obtenu à partir d'un P par une dilatation de rapport $k - 1$ dans la direction D : les translatés de ce pavé centrés aux points d'une $\Lambda_{j,l}$ sont disjoints deux à deux. D'après III.1.1 et III.5.1 chaque $\Lambda_{j,l}$ admet un domaine associé dans toute tranche orthogonale à D et d'épaisseur $> \frac{2\pi}{(k-1)l}$. D'après III.4.1, Λ admet donc un domaine associé dans toute tranche orthogonale à D et d'épaisseur $> \frac{2\pi k N(l, \eta)}{(k-1)l}$; par passage à la limite ($l \to \infty$, $\eta \to 0$, $k \to \infty$) on a l'énoncé du théorème.

7. Nous allons montrer que, dans l'énoncé du théorème III.6.1, il est impossible de remplacer $\Delta_D(\Lambda)$ par une quantité plus petite.

THÉORÈME III.7.1. — *Soit* $\Delta_D(\Lambda)$ *la densité supérieure de répartition de* Λ *dans la direction* D. *Dans aucune tranche d'épaisseur strictement inférieure à* $2\pi\Delta_D(\Lambda)$, *perpendiculaire à* D, *il n'existe de domaine associé à* Λ.

Si nous définissons l'*épaisseur* d'un ouvert borné G dans la direction D comme la longueur du plus petit intervalle contenant la projection orthogonale de G sur une droite parallèle à D, l'ensemble des théorèmes III.6.1 et III.7.1 équivaut à l'énoncé suivant : *la borne inférieure des épaisseurs des domaines associés à une suite régulière donnée* Λ *dans une direction donnée* D *est* $2\pi\Delta_D(\Lambda)$.

La démonstration de III.7.1 repose sur la proposition suivante. On rappelle que la densité supérieure d'une suite portée par une demi-droite est $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n(t)}{t}$, où $n(t)$ est le nombre de points de la suite à distance $< t$ de l'origine de la demi-droite. On dit qu'une suite de suites Λ_j (constituées de points $\in R^p$) est convergente vers une suite Λ^* si l'on peut ordonner les Λ_j et Λ^* sous forme $\Lambda_j = \{\lambda_{j,n}\}$, $\Lambda^* = \{\lambda_n^*\}$ de façon que, pour chaque n, $\lim_{j\to\infty} \lambda_{j,n} = \lambda_n^*$.

PROPOSITION III.7.2. — *Étant donnée une suite* Λ *régulière et une direction* D *dans* R^p, *il existe une suite de translatées de parties de* Λ *qui converge vers une suite* Λ^* *portée par une demi-droite parallèle à* D, *et de densité supérieure* $\Delta_D(\Lambda)$.

Démonstration. — On reprend les notations du début du paragraphe 6. On peut choisir une suite $\eta_j \to 0$ telle que $2^{-j} N(2^j, \eta_j)$ tende vers $\Delta_D(\Lambda)$. Soit S_j un segment de longueur 2^j parallèle à D, tel que le nombre de points de Λ dont la distance à S_j est inférieure à η_j (nous dirons désormais : η_j-voisins de S_j) soit exactement $N(2^j, \eta_j)$. Le milieu de S_j et ses extrémités délimitent deux segments dont l'un au moins, soit S_j^1, est tel que le nombre de points de Λ η_j-voisins de S_j^1 soit au moins $\frac{1}{2} N(2^j, \eta_j)$. Par dichotomie, on peut ainsi construire des segments emboîtés $S_j^0 = S_j$, S_j^1, ..., S_j^j, chacun limité par une extrémité et le milieu du précédent, de façon que S_j^i soit η_j-voisin d'au moins $2^{-i} N(2^j, \eta_j)$ points de Λ. Les translatés de ces segments par la translation T_j amenant S_j^j sur S_0 forment une famille (F_j); désignons par (F_k^j) $(j \leq k)$ la partie de (F_k) constituée des segments de longueur $\leq 2^j$. Si l'on fixe j, il existe au plus 2^j familles (F_k^j) distinctes; ainsi, de toute suite infinie de valeurs de k, on peut extraire une suite pour laquelle les F_k^j coïncident à partir d'un certain rang. Par diagonalisation, on définit ainsi des segments emboîtés $S^0 = S_0, S^1, S^2, \ldots, S^j, \ldots$ et une suite $\{k_n\}$ telle que, pour chaque j, les $(F^j_{k_n})$ soient formés à partir d'un certain rang des segments $S^0, S^1, \ldots, S^j$. Soit Λ_k la partie de Λ qui est η_k-distante de S_k. La translatée $T_{k_n}\Lambda_{k_n}$ admet $N(2^{k_n}, \eta_{k_n})$ points η_{k_n}-distants de S^{k_n}, et au moins $2^{-k_n+j}N(2^{k_n}, \eta_{k_n})$ points η_{k_n}-distants de S^j (j fixe $< k_n$). D'autre part, Λ étant régulière, le nombre de ces derniers points est uniformément borné par rapport à n. Pour chaque j, on peut donc définir une sous-suite de $T_{k_n}\Lambda_{k_n}$ dont les restrictions à un voisinage de S^j forment une suite convergente. Par une nouvelle diagonalisation, on construit enfin une suite $T_{k_{n(j)}}\Lambda_{k_{n(j)}}$ convergente vers une suite $\Lambda^\star$ portée par une droite (D). Comme, sur S^i, le nombre de points de $\Lambda^\star$ est au moins $\lim\limits_{j\to\infty}(2^{i-k_{n(j)}}N(2^{k_{n(j)}}, \eta_{k_{n(j)}}))$, la densité supérieure de $\Lambda^\star$, soit $D^\star$, est au moins $\Delta_\Lambda(\Lambda)$ sur une demi-droite convenable portée par (D). D'ailleurs $D^\star \leq \Delta_D(\Lambda)$; en effet, si $\Lambda^\star$ admet p points sur un segment de longueur l, on a $N(l, \eta) \geq p$ quel que soit η. Donc $D^\star = \Delta_D(\Lambda)$, et la proposition est démontrée.

Démonstration du théorème III.7.1. — On peut supposer (grâce à III.1.1) que D est parallèle au premier axe de coordonnées, et que $\Lambda^\star$ est portée par cet axe. On sait alors [8] que la suite $\{e^{i\lambda x_1}\}_{\lambda^\star\in\Lambda^\star}$ est complète dans $L^2(I)$ pour tout intervalle I de longueur $< 2\pi D^\star$. Or une tranche dans R^p, perpendiculaire à D et d'épaisseur $< 2\pi\Delta_D(\Lambda)$, peut être définie par la condition $x_1 \in J$, J étant un intervalle strictement intérieur à un intervalle I de longueur $< 2\pi D^\star$. Soit $g \in L^2(I)$, nulle sur J, non identiquement nulle; considérons une suite de polynomes trigonométriques σ_i, à spectre dans $\Lambda^\star$, approchant g dans $L^2(I)$; le rapport $\dfrac{\int_I |\sigma_i|^2}{\int_J |\sigma_i|^2}$ tend vers l'infini. Étant donné un domaine G quelconque dans la tranche de R^p définie par $x_1 \in J$, et un pavé quelconque P contenant I, le rapport $\dfrac{\int_P |\sigma_i|^2}{\int_G |\sigma_i|^2}$ tend donc vers l'infini $\left(\text{ici} \int |\sigma_i|^2 = \int \cdots \int |\sigma_i(x_1)|^2\, dx_1 \ldots dx_p\right)$. Comme on peut approcher (au sens de III.7.2) le spectre de σ_i (partie finie de $\Lambda^\star$) par des translatées de parties finies de Λ, on peut approcher d'aussi près qu'on veut σ_i, dans $L^2(P)$ ou $L^2(G)$, par des produits d'exponentielles imaginaires et de polynomes trigonométriques de spectre contenu dans Λ. Il existe donc des polynomes trigonométriques s_i, de spectres contenus dans Λ, tels que $\dfrac{\int_P |s_i|^2}{\int_G |s_i|^2}$ tende vers l'infini. Ainsi G n'est pas un domaine associé à Λ, et le théorème III.7.1 est démontré.

8. Terminons ce chapitre par quelques remarques, et l'indication de quelques problèmes ouverts.

Si $p=1$, les théorèmes III.6.1 et III.7.1 fournissent à nouveau un résultat connu, à savoir que la borne inférieure des longueurs des *intervalles* G associés à une suite Λ est égale, au facteur 2π près, à la densité supérieure de répartition $\Delta(\Lambda)$. Or, dans ce cas, $\Delta(\Lambda)$ est susceptible de la définition suivante : c'est la borne inférieure des densités des suites bien réparties qui contiennent Λ, une suite bien répartie étant par définition une suite α-voisine (pour un α arbitraire) d'une homothétique de la suite des entiers (la densité d'une suite bien répartie régulière est la « densité uniforme » de Duffin et Schæffer [3]).

La définition d'une suite bien répartie se généralise immédiatement pour $p>1$, et l'on peut parler de la densité en volume d'une telle suite. Si Λ est l'ensemble des sommets d'un réseau p-dimensionnel, la borne inférieure des volumes des domaines associés est égale, au facteur $(2\pi)^p$ près, à la densité en volume de Λ, Question n° 1 : en est-il encore ainsi lorsque Λ est une suite bien répartie régulière quelconque ? Question n° 2 : dans le cas général où Λ est une suite régulière, y a-t-il une interprétation, relative aux domaines associés, de la densité supérieure de répartition en volume de Λ, définie comme la borne inférieure des densités en volume des suites bien réparties contenant Λ ?

L'exemple du cas $p=1$ suggère d'étudier d'abord les domaines G convexes. A cet égard, on a le résultat négatif suivant : *il existe des suites Λ « rares » dans ce sens que leur densité supérieure de répartition en volume est nulle, et telles que tout domaine convexe associé, symétrique par rapport à zéro, contient la boule $|x|\leq 2\pi$.*

Montrons comment on peut construire une telle suite. Pour chaque n, on fait un recouvrement de la sphère $|u|=1$ par des boules, de rayon $\frac{1}{n^2}$, centrées sur la sphère aux points $u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,k(n)}$, et l'on désigne par $\mathfrak{U}_{n,j}$ l'ensemble des multiples de $u_{n,j}$ contenus dans la boule $|x|\leq n$. On translate les $\mathfrak{U}_{n,j}$, en $\Lambda_{n,j}$, par des translations (arbitrairement grandes) telles que la réunion des $\Lambda_{n,j}(n=1, 2, \ldots, j=1, 2, \ldots k(n))$ soit une suite régulière « rare »; cette réunion est une suite Λ rare telle que $\Delta_D(\Lambda)=1$ pour toute direction D. S'il existait un domaine convexe associé, symétrique par rapport à zéro, et ne contenant pas la boule $|x|\leq 2\pi$, un tel domaine serait contenu dans une tranche d'épaisseur $<2\pi$, contrairement à III.7.1. Ainsi Λ satisfait les conditions imposées.

Si l'on ne se restreint pas à des domaines G connexes, la réponse à la question n° 1 n'est pas connue dans le cas $p=1$. Cependant l'exemple donné plus haut n'infirme pas l'hypothèse (vérifiée pour $p=1$) suivant laquelle toute suite rare admettrait des domaines associés de volume arbitrairement petit. Cela suggère la question n° 3 (*non* résolue pour $p=1$) : interpréter, par une notion de lacunarité convenable, le fait que Λ admet des domaines associés de volume arbitrairement petit.

Enfin le théorème III.4.1 appelle la question n° 4 (résolue pour $p=1$) : interpréter, par une notion de lacunarité convenable le fait que tout domaine est associé à Λ.

CHAPITRE IV.

Interpolation par des fonctions entières de type exponentiel.

1. Certains résultats du chapitre II (II.2.3, II.2.4.*d*, II.3.3) suggèrent la question suivante : on donne une suite Λ dans R^p, une classe de fonctions entières Φ de type exponentiel à p variables, et une classe de suites complexes $\{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$; à quelles conditions peut-on *interpoler* chaque suite $\{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ par une fonction Φ, c'est-à-dire faire correspondre à chaque suite $\{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ au moins une fonction Φ telle que $\Phi(\lambda)=a(\lambda)\,(\lambda\in\Lambda)$?

Le but de ce chapitre est de fournir quelques éléments de réponse à cette question (§ 4, 5, 6).

2. Convenons de dire qu'une mesure positive $d\mu$, définie sur R^p, est *régulière* lorsque l'intégrale $\int_B d\mu$ est majorée, pour toutes les boules B de rayon 1, par un nombre indépendant de B.

Notons $L^{\alpha,r}(d\mu)$ l'espace de Banach des F tels que

$$\|F\|_{\alpha,r,d\mu}=\left(\int |F(u)|^\alpha (1+|u|)^{r\alpha}\,d\mu(u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\infty \qquad (1\leq\alpha<\infty,\ r \text{ réel})$$

$$\text{resp. } \|F\|_{\infty,r,d\mu}=\sup_{u\in \operatorname{support} d\mu} |F(u)(1+|u|)^r| \qquad (r \text{ réel}).$$

Quand $d\mu$ est la mesure de Lebesgue sur R^p, nous noterons cet espace

$$L^{\alpha,r}=L^{\alpha,r}(R^p),$$

et la norme correspondante $\|F\|_{\alpha,r R^p}$. Lorsque $r=0$, nous écrirons simplement $L^\alpha(d\mu)$, $\|F\|_{\alpha,d\mu}$ etc.

Pour toute $F\in L^{\alpha,r}(d\mu)$ et toute fonction G à décroissance rapide sur R^p, c'est-à-dire telle que, pour tout $n\geq 0$, $\sup_u(|G(u)|.|u|^n)<\infty$, nous posons

$$F\underset{(d\mu)}{\star}G(u)=\int F(t)\,G(u-t)\,d\mu(t)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme IV.2.1. — *Soit $d\mu$ une mesure positive régulière $1\leq\alpha\leq\infty$, r réel. Pour toute* G *à décroissance rapide, l'application* $F\to F\underset{(d\mu)}{\star}G$ *est définie et continue* *de* $L^{\alpha,r}(d\mu)$ *dans* $L^{\alpha,r}$, *et elle est uniformément continue pour tous les* G *qui satisfont une condition de la forme* $|G(u)|.|u|^n < M_n (n=0, 1, \ldots)$, *où* $\{M_n\}$ *est une suite positive donnée.*

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, on peut supposer $F(u)=|F(u)|$ et $G(u)=|G(u)|$. Si $1 \leqq \alpha < \infty$, la convexité de la fonction $\xi^\alpha (\xi > 0)$ entraîne

$$\Big(F \underset{(d\mu)}{\star} G(u)\Big)^\alpha \leqq \varkappa F^\alpha \underset{(d\mu)}{\star} G(u),$$

$\varkappa$ ne dépendant que de $\{M_n\}$ et $d\mu$; il suffit donc de montrer que le rapport

$$\frac{\displaystyle\iint F^\alpha(t)\, G(u-t)\,(1+|u|)^{r\alpha}\, d\mu(t)\, du}{\displaystyle\int F^{(\alpha)}(t)\,(1+|t|)^{r\alpha}\, d\mu(t)}$$

est borné, ce qui résulte de

$$(1)\qquad \int G(u-t)\,(1+|u|)^{r\alpha}\, du < \varkappa'(1+|t|)^{r\alpha}$$

avec $\varkappa'=\varkappa'(\{M_n\}, \alpha, r)$. La démonstration de (1) est immédiate en écrivant l'intégrale $\int G(u)(1+|u+t|)^{r\alpha} du$ sous la forme

$$\int_{|u|<2|t|} + \int_{|u|\geqq 2|t|} \quad \text{si } r \geqq 0,$$

$$\int_{|u|<\frac{1}{2}|t|} + \int_{|u|\geqq \frac{1}{2}|t|} \quad \text{si } r \leqq 0.$$

Si $\alpha=\infty$, le résultat découle de

$$(2)\qquad \int G(u-t)\,(1+|t|)^{-r}\, d\mu(t) < \varkappa''(1+|u|)^{-r}$$

avec $\varkappa''=\varkappa''\{M_n\}, d\mu, r)$, qui se démontre comme (1).

3. Nous devons introduire de nouvelles notations, et rappeler quelques notions relatives aux fonctions entières de type exponentiel ([9], $[11]_{\text{II}}$, p. 128).

Désignons par $\exp^{\alpha,r}$ l'ensemble des fonctions entières de type exponentiel $\Phi(w)(w=(w_1, w_2, \ldots, w_p) \in C^p)$ dont les restrictions à R^p appartiennent à $L^{\alpha,r}$. On sait que toute $\Phi \in \exp^{\alpha,r}$ est transformée de Fourier d'une distribution φ à support compact; si ce support est contenu dans un compact K, on notera $\Phi \in \exp^{\alpha,r} K$ (notation cohérente avec celle du chapitre II : $\exp^{2,0} K = \exp^2 K$). $\text{Exp}^{\alpha,r} K$ est un sous-espace fermé de $L^{\alpha,r}$.

Étant donné une direction de demi-droite dans R^p, définie par $\xi \in R^p$, $|\xi|=1$, le type Φ dans cette direction est

$$h_\Phi(\xi) = \sup_{u\in R^p} \overline{\lim_{r\to\infty}} \,(r^{-1} \log |\Phi(u-ir\xi)|).$$

Le type de Φ dans la direction de droite correspondante est $\sup(h_\Phi(\xi), h_\Phi(-\xi))$. On sait que $h_\Phi(\xi)$ est la fonction d'appui du plus petit convexe contenant le support de φ : $h_\Phi(\xi) = \sup_{x \in \text{support } \varphi} \xi x$. Ainsi, si G est un domaine convexe,

$$\Phi \in \exp^{\alpha,r} G \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi \in \exp^{\alpha,r}, \\ h_\Phi(\xi) \leq \sup_{x \in G} \xi x \qquad \text{pour tout } \xi. \end{cases}$$

Λ étant, comme toujours, une suite régulière dans R^p, nous noterons $l_\Lambda^{\alpha,r}$ l'espace de Banach des suites $\{a(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ normées par

$$\| \{a(\lambda)\} \|_{\alpha,r} = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)|^\alpha (1 + |\lambda|)^{r\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{si} \quad 1 \leq \alpha < \infty$$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} (|a(\lambda)|(1 + |\lambda|)^r) \qquad \text{si} \quad \alpha = \infty.$$

Ainsi, $l_\Lambda^{\alpha,r} = L^{\alpha,r}(d\mu)$, $d\mu$ étant la mesure caractéristique de Λ (somme des masses ponctuelles unités aux points de Λ).

4. Nous allons d'abord constater (ce qui généralisera II.2.3) que l'interpolation d'une suite $\{a(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ par une $\Phi \in \exp^{\alpha,r}$ n'est possible que si

$$\{a(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \in l_\Lambda^{\alpha,r}.$$

Le résultat est bien connu pour $p = 1$, $r = 0$ ([2], p. 101). L'énoncé qui suit, un peu plus général, répond (pour $p > 1$) à une question posée par J. Dixmier.

THÉORÈME IV.4.1. — *Quels que soient* $\alpha (1 \leq \alpha \leq \infty)$, *le domaine* G *et la mesure positive régulière* $d\mu$, *toute* $\Phi \in \exp^{\alpha,r} G$ *appartient à* $L^{\alpha,r}(d\mu)$, *et l'application canonique de* $\exp^{\alpha,r} G$ *dans* $L^{\alpha,r}(d\mu)$ *est continue. En particulier,* Λ *étant une suite régulière, l'application* $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *est définie et continue de* $\exp^{\alpha,r} G$ *dans* $l_\Lambda^{\alpha,r}$.

Démonstration. — L'énoncé étant évident pour $\alpha = \infty$, nous supposons $1 \leq \alpha < \infty$. Utilisons l'inégalité, immédiate par récurrence sur p,

$$|\Phi(u)|^\alpha \leq \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}_{2p \text{ fois}} |\Phi(u_1 + \xi_1 + i\eta_1, \ldots, u_p + \xi_p + i\eta_p)|^\alpha \, d\xi_1 \, d\eta_1 \ldots d\xi_p \, d\eta_p$$

que nous écrirons

$$|\Phi(u)|^\alpha \leq \int_{\xi \in \mathfrak{U}, \eta \in \mathfrak{U}} |\Phi(u + \xi + i\eta)|^\alpha \, d\xi \, d\eta$$

et tenons compte de ce que, par hypothèse faite sur $d\mu$, il existe une constante M telle que, pour toute fonction Ψ à valeurs ≥ 0 (on prendra ensuite

$$\Psi(u) = |\Phi(u + i\eta)|^\alpha (1 + |u|^{r\alpha})),$$

on a

$$\int_{u\in R^p}\int_{\xi\in\mathfrak{U}}\Psi(u+\xi)\,d\xi\,d\mu(u)<M\int_{u\in R^p}\Psi(u)\,du$$

Il vient immédiatement

$$(3)\quad \int|\Phi(u)|^\alpha(1+|u|)^{r\alpha}\,d\mu(u)\leqq M'\int_{\mathfrak{U}}\left(\int|\Phi(u+i\eta)|^\alpha(1+|u|)^{r\alpha}\,d\mu(u)\right)d\eta$$

M' n'étant fonction que de M, r, α.

Soit maintenant g une fonction indéfiniment dérivable à support compact, égale à 1 au voisinage du support de la distribution φ telle que $\Phi=\mathcal{F}(\varphi)$, et soit $G=\mathcal{F}(g)$. On a

$$G_\eta(u)=G(u+i\eta)=\mathcal{F}(g(x)\,e^{-\eta.x}),$$
$$\Phi_\eta(u)=\Phi(u+i\eta)=\mathcal{F}(\varphi(x)\,g(x)\,e^{-\eta.x})=(2\pi)^{-p}\,\Phi\star G_\eta(u)$$

Or, pour $\eta\in\mathfrak{U}$, les dérivées d'ordre n de $g(x)\,e^{-\eta.x}$ sont bornées quel que soit n, de sorte que G_η satisfait une condition de la forme $|G_\eta(u)|.|u|^n<M_n$ indépendant de η. D'après le lemme IV.2.1 (où $d\mu$ est la mesure de Lebesgue), le second membre de (3) est donc majoré, à une constante multiplicative près, par $\int|\Phi(u)|^\alpha(1+|u|)^{r\alpha}\,du$, ce qui établit le théorème.

5. Nous allons maintenant montrer que l'interpolation d'une $\{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}\in l_\Lambda^{\alpha,r}$ par une $\Phi\in\exp^{\alpha,r}G$ est possible dès que l'intérieur de G contient un domaine associé à Λ. Plus précisément :

Proposition IV.5.1. — *On donne une suite régulière* Λ, *un domaine* G, $\alpha(1\leqq\alpha\leqq\infty)$ *et* $r(-\infty<r<\infty)$. *Si l'intérieur de* G *contient un domaine* G_0 *associé à* Λ, *on a la*

Propriété I. — *A toute suite* $\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}\in l_\Lambda^{\alpha,r}$ *on peut faire correspondre au moins une fonction* $\Phi\in\exp^{\alpha,r}G$ *telle que*

$$\Phi(\lambda)=b(\lambda)\qquad \textit{pour tout}\quad \lambda\in\Lambda,$$
$$\|\Phi\|_{\alpha,r,R^p}<\varkappa\,\|\{b(\lambda)\}\|_{\alpha,r},$$

$\varkappa$ *ne dépendant que de* Λ, G, α, r.

Inversement, la propriété I *entraîne que tout domaine* G′ *dont l'intérieur contient* G *est associé à* Λ.

Démonstration. — *Première partie.* — D'après II.2.4*d*, il existe une $\Phi_\lambda\in\exp^2 G_0$, égale à 1 en λ, nulle sur $\Lambda-\lambda$, telle que

$$\sup_u|\Phi_\lambda(u)|\leqq(2\pi)^{-\frac{p}{2}}\sqrt{\operatorname{mes}G_0}\,\|\Phi_\lambda\|_{2,R^p}<\varkappa_1=\varkappa_1(\Lambda,\,G_0)$$

Pour la démonstration, on peut se borner à considérer des suites $\{b(\lambda)\}$ à support fini; on pose alors

$$\Phi(u)=\sum_{\lambda\in\Lambda}b(\lambda)\,\Phi_\lambda(u)\,E(u-\lambda),$$

E étant la transformée de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable ε, normalisée de façon que $E(0)=1$, et telle que le support de $\varphi\star\varepsilon$ soit dans G dès que celui de φ est dans G_0. On a visiblement $\Phi(\lambda)=b(\lambda)\,(\lambda\in\Lambda)$ et

$$|\Phi(u)|\leqq \varkappa_1 \sum_{\lambda\in\Lambda} |b(\lambda)|.|E(u-\lambda)|$$

Le lemme IV.2.1 ($d\mu$ étant ici la mesure caractéristique de Λ) exprime que l'application $\{|b(\lambda)|\}\to|\Phi|$ est continue de $l_\Lambda^{\alpha,r}$ dans $L^{\alpha,r}$, ce qui entraîne la propriété I et achève la démonstration de la première partie.

Deuxième partie. — Soit G'' un domaine contenu dans l'intérieur de G', et dont l'intérieur contient G. Choisissons ε, comme plus haut, telle que le support de $\varphi\star\varepsilon$ soit dans G'' resp. G' dès que le support de φ est dans G resp. G'. La propriété I entraîne l'existence, pour chaque $\lambda\in\Lambda$, d'une $\Psi_\lambda\in \exp^{\alpha,r} G$ égale à 1 en λ et nulle sur $\Lambda-\lambda$, telle que $\|\Psi_\lambda\|_{\alpha,r,R^p}<\varkappa(1+|\lambda|)^r$. Posons $E=\mathcal{F}(\varepsilon)$, $E_\lambda(u)=E(u-\lambda)$ et $\Phi_\lambda=\Psi_\lambda E_\lambda$. L'inégalité de Hölder donne, avec $\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$,

$$\|\Phi_\lambda\|_{1,R^p}\leqq\|\Psi_\lambda\|_{\alpha,r,R^p}\|E_\lambda\|_{\alpha,-r,R^p}$$

Or on voit facilement [par l'inégalité (1) du paragraphe 2 si $\beta<\infty$, et par un argument analogue si $\beta=\infty$] que $\|E_\lambda\|_{\beta,-r,R^p}<\varkappa'(1+|\lambda|)^{-r}$, $\varkappa'$ ne dépendant pas de λ. Ainsi

$$\sup_u|\Phi_\lambda(u)|\leqq(2\pi)^{-p}\,\text{mes.}\,G''\,\|\Phi_\lambda\|_{1,R^p}$$

est borné quand $\lambda\in\Lambda$, et on en conclut comme dans la première partie que toute suite $\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}\in l_\Lambda^2$ est interpolable par une $\Phi\in\exp^2 G'$. D'après II.3.3, G' est donc associé à Λ.

L'énoncé et la démonstration de IV.5.1 sont inspirés de Boas ([2], p. 197). Il s'agit cependant d'un théorème d'interpolation de caractère tout différent.

Notons que la deuxième partie de IV.5.1 contient II.4.2, et que la démonstration donnée ici est indépendante du chapitre I.

6. Le théorème de Banach utilisé en II.3, permet d'obtenir, à partir de IV.4.1 et de IV.5.1, de nouvelles conditions suffisantes pour qu'un domaine soit associé à Λ; compte tenu des conditions nécessaires déjà connues (IV.5.1) on peut les exprimer ainsi :

Théorème IV.6.1. — *Soit* Λ *une suite régulière,* G *un domaine,* $1\leqq\alpha\leqq\infty$ *et* $-\infty<r<\infty$. *Si l'intérieur de* G *contient un domaine associé à* Λ, *toute suite* $\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}\in l_\Lambda^{\alpha,r}$ *peut être interpolée par une* $\Phi\in\exp^{\alpha,r}G$. *Inversement, si toute suite* $\{b(\lambda)\}\in l_\Lambda^{\alpha,r}$ *peut être interpolée par une* $\Phi\in\exp^{\alpha,r}G$, *tout domaine dont l'intérieur contient* G *est associé à* Λ.

La démonstration est calquée sur celle de II.3.3.

A l'aide de ce théorème, il est immédiat de transcrire tous les résultats du chapitre III en termes d'interpolation par des fonctions entières de type exponentiel. Nous nous bornons à un exemple, déduit de III.6.1 et III.7.1 en utilisant les notions rappelées au paragraphe 3.

THÉORÈME IV.6.2. — *Soit* Λ *une suite régulière,* D *une direction de droite,* $\tau > 0$, $1 \leq \alpha \leq \infty$ *et r réel. On désigne toujours par* $\Delta_D(\Lambda)$ *la densité supérieure de répartition de* Λ *dans la direction* D. *Pour qu'il existe un* $\varkappa > 0$ *tel que toute suite* $\{b(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \in l_\Lambda^{\alpha, r}$ *soit interpolable par au moins une* $\Phi \in \exp^{\alpha, r}$ *dont le type exponentiel soit majoré par* $\varkappa$ *dans toutes les directions, et strictement majoré par* τ *dans la direction* D, *il faut et il suffit que* $\tau > \pi \Delta_D(\Lambda)$.

CHAPITRE V.

SUR UN PROBLÈME DE MANDELBROJT.

1. Mandelbrojt ([7], p. 142) a posé sur les séries de Fourier un problème de prolongement que nous formulerons ainsi : la suite régulière Λ étant donnée, déterminer des domaines G et des propriétés (P) tels que, si une fonction pseudopériodique de spectre contenu dans Λ satisfait P sur un voisinage de G (= un ouvert contenant G), elle satisfait P partout.

Convenons provisoirement de dire, dans ces conditions, que (P) est une bonne propriété relativement à Λ et G. Nous allons montrer que, si G est un domaine associé à Λ, l'analyticité, l'appartenance à C^∞, l'appartenance locale à $\mathcal{F}L^{\alpha, r}$ sont des bonnes propriétés relativement à Λ et G (théorèmes V.2.1 et V.7.1).

Nous montrerons également une sorte de réciproque concernant l'appartenance locale à $\mathcal{F}L^{\alpha, r}$, dans le cas où cette propriété entraîne l'appartenance locale à L^2 : si c'est une bonne propriété relativement à Λ et G, c'est que tout voisinage de G contient un domaine associé à Λ (théorème V.7.2).

Une grande partie du chapitre sera consacrée aux espaces $E^{\alpha, r}$ de fonctions ou distributions qui sont localement (co-)transformées de Fourier de fonctions de $L^{\alpha, r}$. Les sous-espaces $E_\Lambda^{\alpha, r}$, engendrés par le système $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ dans $E^{\alpha, r}$, généralisent les familles pseudopériodiques ($F_\Lambda = E_\Lambda^{2, 0}$) et un certain nombre des résultats du chapitre II leur sont applicables.

2. Voici d'abord une simple conséquence de la définition des domaines associés à une suite, donnée au chapitre II. Le résultat est substantiellement dû à Wiener ([8], p. 125).

THÉORÈME V.2.1. — *Soit* G *un domaine associé à* Λ. *Si* $f \in F_\Lambda$ *est indéfiniment dérivable sur un voisinage de* G, *alors* f *est indéfiniment dérivable sur* R^p, *et pour chaque opérateur de dérivation* D, *on a* $\| Df \| < \varkappa \| Df \|_G$, $\varkappa$ *ne dépendant que de* Λ *et* G. *Si* $f \in F_\Lambda$ *est analytique sur un voisinage de* G, f *est analytique partout.*

Démonstration. — Df est limite uniforme sur G de combinaisons linéaires de translatées de f. Comme ces combinaisons linéaires convergent dans $L^2(G)$, elles convergent dans F_Λ, et il y a convergence dans l^2_Λ des suites de leurs coefficients de Fourier. Ainsi, en désignant par $\{a(\lambda)\}$ la suite des coefficients de Fourier de f, on a $\{P(\lambda)a(\lambda)\}\in l^2_\Lambda$ quel que soit le polynome P (car pour un D convenable, $D e^{i\lambda x} = P(\lambda)e^{i\lambda x}$). Donc toutes les séries formellement dérivées de la série de Fourier de f sont absolument convergentes, d'où résulte la dérivabilité indéfinie de f sur R^p. L'inégalité $\|Df\| \leq \varkappa \|Df\|_G$ tient au fait que $Df \in F_\Lambda$. En particulier, si les dérivées d'ordre n de f sont $O(e^{-\varepsilon n})$ dans $L^2(G)$, il en est de même, quel que soit le domaine G', dans $L^2(G')$; donc l'analyticité sur un ouvert contenant G entraîne l'analyticité partout.

Remarquons que l'on pourrait, dans l'énoncé, remplacer l'analyticité par l'appartenance à n'importe quelle classe de fonctions indéfiniment dérivables, définie par des inégalités sur les normes quadratiques des dérivées successives; en particulier, par l'appartenance à une classe quasi analytique de fonctions indéfiniment dérivables.

3. Quels que soient α et r ($1 \leq \alpha \leq \infty$, r réel), les éléments de $L^{\alpha,r}$ sont des fonctions à croissance lente au sens de Schwartz ([11]$_{\text{II}}$, p. 94). Nous désignerons par $A^{\alpha,r}$ l'ensemble des distributions cotransformées de Fourier des éléments de $L^{\alpha,r}$; c'est un espace de Banach, avec la norme

$$\| f \|_{A^{\alpha,r}} = \| \mathcal{F} f \|_{\alpha,r}.$$

Ainsi $A^{1,0}$ est l'espace classique de Wiener, souvent désigné par A; les $A^{2,r}$ avec r entier positif sont des espaces de Soboleff.

On sait (IV.2.1) que pour toute fonction G à décroissance rapide, et toute $F \in L^{\alpha,r}$, $F \star G \in L^{\alpha,r}$. Donc :

Proposition V.3.1. — *Si $f \in A^{\alpha,r}$ et si g est indéfiniment dérivable à support compact, le produit fg appartient à $A^{\alpha,r}$.*

Nous dirons qu'une distribution appartient localement à $A^{\alpha,r}$ sur un ensemble $S \subset R^p$ si, au voisinage de tout point $x \in S$, elle est égale à une $f_x \in A^{\alpha,r}$. Comme dans le cas classique de Wiener, on déduit facilement de V.3.1 que, si f appartient localement à $A^{\alpha,r}$ sur un compact K, elle est égale sur K à une $f_K \in A^{\alpha,r}$, à support dans un voisinage donné de K. Nous désignerons par $E^{\alpha,r}$ l'ensemble des distributions qui appartiennent localement à $A^{\alpha,r}$ sur R^p.

Si $f \in A^{\alpha,r}$ et a son support dans le cube $-\pi \leq x_j \leq \pi$ ($j = 1, 2, \ldots, p$), elle est développable dans ce cube en série de Fourier $\sum_{n\in Z^p} a_n e^{inx}$, et $a_n = (2\pi)^{-p}\mathcal{F}f(-n)$. D'après IV.4.1, $\{a_n\} \in l^{\alpha,r}_{Z^p}$, c'est-à-dire

$$\sum_{n\in Z^p} |a_n|^\alpha (1+|n|)^{r\alpha} < \infty \text{ resp. (pour } \alpha = \infty) \sup_{n\in Z^p} |a_n|(1+|n|)^r < \infty.$$

Inversement, si $\{a_n\}\in l_{Z^p}^{\alpha,r}$, la série $\sum_{n\in Z^p} a_n e^{inx}$ représente une distribution dont le produit par toute fonction indéfiniment dérivable à support compact appartient, d'après IV.2.1 ($d\mu$ étant alors la mesure caractéristique de Z^p) à $A_{Z^p}^{\alpha,r}$. Ainsi :

PROPOSITION V.3.2. — *Pour qu'une distribution appartienne localement à* $A^{\alpha,r}$ *sur* R^p (*c'est-à-dire appartienne à* $E^{\alpha,r}$) *il faut et il suffit qu'elle soit égale au voisinage de tout point à une distribution* 2π*-périodique dont la suite des coefficients de Fourier appartient à* $l_{Z^p}^{\alpha,r}$.

Étant donné un domaine G, nous désignerons par $A^{\alpha,r}[G]$ le sous-espace de $A^{\alpha,r}$ constitué par les éléments à support dans G; ainsi $f\in A^{\alpha,r}[G] \Leftrightarrow \mathcal{F}f\in \exp^{\alpha,r}G$.

Nous désignerons par $A^{\alpha,r}(G)$ l'espace quotient de $A^{\alpha,r}$ par le sous-espace fermé engendré par les éléments à support disjoint de G. D'après V.3.1, toute distribution, définie dans un voisinage de G, et qui appartient localement à $A^{\alpha,r}$ sur ce voisinage, définit un élément de $A^{\alpha,r}(G)$; par abus de langage, nous dirons qu'elle appartient à $A^{\alpha,r}(G)$; sa norme dans $A^{\alpha,r}(G)$ est la borne inférieure des normes des distributions $\in A^{\alpha,r}$ qui lui sont égales dans un voisinage (non précisé) de G.

$E^{\alpha,r}$ est muni d'une topologie d'espace de Fréchet, si l'on convient que la convergence dans $E^{\alpha,r}$ est la convergence dans chaque $A^{\alpha,r}(G)$ (G étant un domaine quelconque). A l'aide de IV.2.1 et IV.4.1, on vérifie facilement que les f_i convergent vers zéro dans $E^{\alpha,r}$ si et seulement si, sur toute boule de rayon inférieur à π, les f_i sont égales à des distributions 2π-périodiques dont les suites des coefficients de Fourier tendent vers zéro dans $l_{Z^p}^{\alpha,r}$.

Considérons deux espaces $E^{\alpha,r}$ et $E^{\alpha',r'}$. Si $E^{\alpha',r'}\subset E^{\alpha,r}$ (inclusion ordinaire) et si la convergence dans $E^{\alpha',r'}$ entraîne la convergence dans $E^{\alpha,r}$, on dit que $E^{\alpha',r'}$ est inclus topologiquement dans $E^{\alpha,r}$. D'après V.3.2 et la remarque faite au dernier alinéa, l'inclusion ordinaire resp. topologique de $E^{\alpha',r'}$ dans $E^{\alpha,r}$ a lieu en même temps que l'inclusion ordinaire resp. topologique de $l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ dans $l_{Z^p}^{\alpha,r}$. Nous allons montrer que l'inclusion ordinaire entraîne l'inclusion topologique.

PROPOSITION V.3.3. — *La condition*

$$(C)\qquad \begin{cases} r'-r\geqq 0 \ \text{et}\ r'-r>p\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha'}\right) \\ \text{ou}\qquad r'-r=\alpha-\alpha'=0 \end{cases}$$

est à la fois nécessaire et suffisante pour l'inclusion ordinaire et pour l'inclusion topologique de $E^{\alpha',r'}$ *dans* $E^{\alpha,r}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que (C) entraîne l'inclusion topologique de $l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ dans $l_{Z^p}^{\alpha,r}$, et que la négation de (C) entraîne la non-inclusion de $l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ dans $l_{Z^p}^{\alpha,r}$.

Supposons que (C) ait lieu. Si $\alpha < \alpha' < \infty$, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\sum_{n\in Z^p} |b_n|^\alpha (1+|n|)^{r\alpha} \leq \Big(\sum_{n\in Z^p} |b_n|^{\alpha'}(1+|n|)^{r'\alpha'}\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \Big(\sum_{n\in Z^p} (1+|n|)^\gamma\Big)^{1-\frac{\alpha}{\alpha'}}$$

avec $\gamma = -\dfrac{r'-r}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha'}} < -p$, donc $l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ est topologiquement inclus dans $l_{Z^p}^{\alpha,r}$.

Si $\alpha' \leq \alpha < \infty$ et si $\|\{b_n\}\|_{\alpha',r'} \leq 1$, on a

$$\sum_{n\in Z^p} |b_n|^\alpha (1+|n|)^{r\alpha} \leq \sum_{n\in Z^p} |b_n|^{\alpha'}(1+|n|)^{r'\alpha'}$$

(majoration terme à terme), donc $l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ est encore topologiquement inclus dans $l_{Z^p}^{\alpha,r}$. On conclut de même si $\alpha = \infty$ ou $\alpha' = \infty$.

Supposons que (C) n'ait pas lieu. Considérons d'abord le cas $r' < r$. Choisissons une suite $\{n_j\} \in Z^p$ telle que $|n_j| > 2^{j^2}$ $(j=1, 2, \ldots)$ et soit

$$b_n = 0 \text{ si } n \notin \{n_j\}, \qquad b_{n_j} = 2^{-j}(1+|n_j|)^{-r'};$$

il est clair que, quels que soient α et α', $\{b_n\} \in l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ et $\{b_n\} \notin l_{Z^p}^{\alpha,r}$. Dans le cas $r' \geq r$, $r'-r < p\Big(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha'}\Big)$, on choisit

$$b_n = (1+|n|)^{-r-\frac{p}{\alpha}}$$

et dans le cas $r'-r = p\Big(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha'}\Big) > 0$,

$$b_n = (1+|n|)^{-r-\frac{p}{\alpha}}(\log(1+|n|))^{-\frac{1}{\alpha}}$$

et l'on vérifie encore $\{b_n\} \in l_{Z^p}^{\alpha',r'}$ et $\{b_n\} \notin l_{Z^p}^{\alpha,r}$. Cela achève la démonstration de V.3.3.

Terminons ce paragraphe par deux propositions immédiates sur les convolutions $f \star \varepsilon$, où $f \in A^{\alpha,r}$ et ε est une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans R^p. On dira que de telles fonctions ε_i tendent vers la mesure de Dirac si leurs transformées de Fourier sont uniformément bornées, et tendent uniformément vers 1 sur tout compact de R^p.

Proposition V.3.4. — *Si les f_i tendent vers zéro dans l'espace $A^{\alpha,r}$, les $f_i \star \varepsilon$ (ε fixe) tendent vers zéro dans n'importe quel espace $A^{\alpha',r'}$.*

Proposition V.3.5. — *Si les ε_i tendent vers la mesure de Dirac, les $f \star \varepsilon_i$ tendent vers f dans l'espace $A^{\alpha,r}$.*

4. Λ désignant toujours une suite régulière dans R^p, on désigne par $A_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ et $E_\Lambda^{\alpha,r}$ les sous-espaces fermés de $A^{\alpha,r}(G)$ et de $E^{\alpha,r}$ engendrés par $\{e^{i\lambda.x}\}_{\lambda\in\Lambda}$. Si f est une distribution définie dans un voisinage de G, nous noterons

$f \in A_\Lambda^{\alpha, r}(G)$ lorsque $f \in A^{\alpha, r}(G)$ et que f est approchable dans $A^{\alpha, r}(G)$, au sens du paragraphe 3, par des combinaisons linéaires finies des $e^{i\lambda . x}(\lambda \in \Lambda)$.

Proposition V.4.1. — *Soit* G_1 *et* G_2 *deux domaines, tels que l'intérieur de* G_1 *contient* G_2. *Quels que soient* α, r, α', r', *on a l'inclusion*

$$A_\Lambda^{\alpha, r}(G_1) \cap A^{\alpha', r'}(G_2) \subset A_\Lambda^{\alpha', r'}(G_2),$$

dans le sens suivant : toute distribution φ *définie dans un voisinage de* G_1 *et qui appartient aux deux premiers espaces appartient aussi au dernier.*

Démonstration. — Si $\varphi \in A^{\alpha' r'}(G_2)$, on peut trouver, d'après V.3.5, une fonction ε indéfiniment dérivable à support compact telle que $\varphi \star \varepsilon$ soit définie dans un voisinage de G_2, et soit aussi proche qu'on veut de φ dans $A^{\alpha', r'}(G_2)$. D'autre part, si $\varphi \in A_\Lambda^{\alpha r}(G_1)$, il existe des polynomes trigonométriques s_i de spectre $\subset \Lambda$ qui tendent vers φ dans $A^{\alpha, r}(G_1)$; d'après V.3.4, les $s_i \star \varepsilon$ (qui sont encore des polynomes trigonométriques de spectre contenu dans Λ) tendent vers $\varphi \star \varepsilon$ dans $A^{\alpha', r'}(G_2)$. Donc $\varphi \in A_\Lambda^{\alpha', r'}(G_2)$.

5. Nous allons donner une caractérisation simple de $E_\Lambda^{\alpha, r}$.

Théorème V.5.1. — $E_\Lambda^{\alpha, r}$ *est l'ensemble des distributions presque-périodiques au sens de Schwartz* f *dont la série de Fourier s'écrit* $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_f(\lambda) e^{i\lambda . x}$, *avec* $\{a_f(\lambda)\} \in l_\Lambda^{\alpha, r}$. *L'application* $f \to \{a_f(\lambda)\}$ *est biunivoque et bicontinue de* $E_\Lambda^{\alpha, r}$ *sur* $l_\Lambda^{\alpha, r}$.

Cet énoncé résultera aisément du suivant.

Proposition V.5.2. — *Soit* G *un domaine dont l'intérieur contient un domaine associé à* Λ. *Alors* $A_\Lambda^{\alpha, r}(G)$ *admet* $\{e^{i\lambda . x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ *pour base, tout élément* $\varphi \in A_\Lambda^{\alpha, r}(G)$ *admet un développement suivant cette base* $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\varphi(\lambda) e^{i\lambda . x}$, *tel que* $\{a_\varphi(\lambda)\} \in l_\Lambda^{\alpha, r}$, *et l'application* $A_\Lambda^{\alpha, r}(G) \to l_\Lambda^{\alpha, r}$ *ainsi définie est un isomorphisme.*

Démonstration de V.5.2. — Il suffit de montrer que pour les polynomes trigonométriques $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda . x}$ les normes $\| s \|_{A^{\alpha, r}(G)}$ et $\| \{a(\lambda)\} \|_{\alpha, r}$ sont équivalentes. Soit $\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. Pour toute $F \in L^{\alpha, r}(R^p)$ on a

$$\| F \|_{\alpha, r} = \sup \int_{R^p} F(x) G(-x)\, dx \quad \text{quand} \quad G \in L^{\beta, -r}(R^p) \quad \text{et} \quad \| G \|_{\beta, -r} \leq 1,$$

donc, d'après Parseval, pour toute f indéfiniment dérivable à support compact on a

$$\| f \|_{A^{\alpha, r}} = (2\pi)^p \sup \int_{R^p} f(x) g(x)\, dx \quad \text{quand} \quad g \in A^{\beta, -r} \quad \text{et} \quad \| g \|_{\beta, -r} \leq 1,$$

la dernière intégrale étant prise au sens des distributions. Par conséquent,

$$\| s \|_{\Lambda^{\alpha,r}(G)} = (2\pi)^p \sup \int s(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{quand} \quad \varphi \in \Lambda^{\beta,-r}[G] \quad \text{et} \quad \| \varphi \|_{\Lambda^{\beta,-r}} \leqq 1,$$

soit

$$\| s \|_{\Lambda^{\alpha,r}(G)} = (2\pi)^p \sup \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\,\Phi(\lambda) \qquad \text{quand} \quad \Phi \in \exp^{\beta,-r} G \quad \text{et} \quad \| \Phi \|_{\beta,-r} \leqq 1.$$

D'autre part,

$$\| \{ a(\lambda) \} \|_{\alpha,r} = \sup \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, b(\lambda) \qquad \text{quand} \quad \| \{ b(\lambda) \} \|_{\beta,-r} \leqq 1.$$

Or d'après IV.4.1 il existe une constante $\varkappa_1$ telle que

$$\Phi \in \exp^{\beta,-r} G \quad \text{et} \quad \| \Phi \|_{\beta,-r} \leqq 1 \Rightarrow \| \{ \Phi(\lambda) \} \|_{\beta,-r} \leqq \varkappa_1,$$

donc

$$\| \{ a(\lambda) \} \|_{\alpha,r} \leqq (2\pi)^{-p} \varkappa_1 \| s \|_{\Lambda^{\alpha,r}(G)}.$$

Et d'après IV.5.2, il existe une constante $\varkappa_2$ telle que, à toute suite $\{ b(\lambda) \} \in l_\Lambda^{\beta,-r}$ de norme $\leqq 1$, on puisse faire correspondre une $\Phi \in \exp^{\beta,-r} G$, de norme $\leqq \varkappa_2$, telle que $\Phi(\lambda) = b(\lambda)\ (\lambda \in \Lambda)$; donc

$$\| s \|_{\Lambda^{\alpha,r}(G)} \leqq (2\pi)^p \varkappa_2 \| \{ a(\lambda) \} \|_{\alpha,r},$$

ce qui achève la démonstration de V.5.2.

Démonstration de V.5.1. — D'après V.5.2, appliquée à une suite croissante de domaines G recouvrant R^p, on fait correspondre à toute $f \in E_\Lambda^{\alpha,r}$ un développement $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_f(\lambda)\, e^{i\lambda x}$, de telle sorte que : 1° à tout polynome trigonométrique de spectre $\subset \Lambda$ corresponde son développement ordinaire; 2° l'application $f \to \{ a_f(\lambda) \}$ soit biunivoque et bicontinue de $E_\Lambda^{\alpha,r}$ sur $l^{\alpha,r}$. Ainsi, pour toute fonction ε indéfiniment dérivable à support compact, $f \star \varepsilon$ admet le développement absolument convergent $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_f(\lambda)\, E(\lambda)\, e^{i\lambda x}\ (E = \mathcal{F}\varepsilon)$; cela montre ([11]$_{\text{II}}$) que f est p.-p. au sens de Schwartz et admet pour série de Fourier $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_f(\lambda)\, e^{i\lambda x}$, et V.5.1 est démontré.

6. D'après V.5.1 et V.5.2, l'application canonique de $E_\Lambda^{\alpha,r}$ dans $\Lambda_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ est un isomorphisme dès que l'intérieur de G contient un domaine associé à Λ. Inversement, si $E_\Lambda^{\alpha,r}$ et $\Lambda_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ sont isomorphes dans l'application canonique, il en est de même pour les espaces duals. Or, les formes linéaires sur $E_\Lambda^{\alpha,r}$ peuvent être définies par

$$f \to \sum_{\lambda \in \Lambda} a_f(\lambda)\, b(\lambda) \qquad \text{avec} \quad b(\lambda) \in l_\Lambda^{\beta,-r}$$

et les formes linéaires sur $A_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ par

$$f \to \int f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{avec} \quad \varphi \in A^{\beta,-r}[G].$$

L'isomorphisme de $E_\Lambda^{\alpha,r}$ et $A_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ entraîne qu'à toute $\{b(\lambda)\} \in l_\Lambda^{\beta,-r}$ on puisse faire correspondre une $\varphi \in A_\Lambda^{\beta,-r}[G]$ telle que $\int e^{i\lambda x}\varphi(x)\,dx = b(\lambda)$ pour toute $\lambda \in \Lambda$. D'après IV.6.1 (deuxième partie) cela implique que tout domaine dont l'intérieur contient G est associé à Λ. Remarquons que l'isomorphisme de $E_\Lambda^{\alpha,r}$ et $A_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ dans l'application canonique équivaut, d'après le théorème de Banach utilisé en II.3, au fait que cette application est biunivoque et surjective. Résumons :

Théorème V.6.1. — *Pour que l'application canonique de* $E_\Lambda^{\alpha,r}$ *dans* $A_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ *définisse un isomorphisme ou, ce qui revient au même, pour que tout élément de* $A_\Lambda^{\alpha,r}(G)$ *admette un représentant et un seul dans* $E_\Lambda^{\alpha,r}$, *il suffit que l'intérieur de* G *contienne un domaine associé à* Λ, *et il faut que tout domaine dont l'intérieur contient* G *soit associé à* Λ.

7. Nous allons maintenant revenir au problème de Mandelbrojt. Au lieu de fonctions ps.-p. de spectre contenu dans Λ, nous allons considérer, plus généralement, des distributions appartenant à un $E_\Lambda^{\alpha,r}$ (rappelons que $F_\Lambda = E_\Lambda^{2} = E_\Lambda^{2,0}$). Comme propriété (P), nous prendrons l'appartenance locale à un $A^{\alpha',r'}$. Dans ces conditions, les théorèmes suivants éclairent le rôle joué par les domaines associés à Λ dans le problème de Mandelbrojt.

Théorème V.7.1. — *Soit* Ω *un voisinage d'un domaine associé à* Λ, *et soit* $f \in E_\Lambda^{\alpha,r}(1 \leqq \alpha \leqq \infty,\ -\infty < r < \infty)$. *Si* f *appartient localement à* $A^{\alpha',r'}$ *sur* $\Omega(1 \leqq \alpha' \leqq \infty,\ -\infty < r' < \infty)$, *il en est de même partout, et* $f \in E_\Lambda^{\alpha',r'}$.

Théorème V.7.2. — *Considérons deux espaces différents* $E^{\alpha,r}$ *et* $E^{\alpha',r'}$, *tels que* $E^{\alpha',r'} \subset E^{\alpha,r}$, *et un ouvert* Ω. *Si, pour les* $f \in E_\Lambda^{\alpha,r}$, *l'appartenance locale à* $A^{\alpha',r'}$ *sur* Ω *entraîne l'appartenance à* $E^{\alpha',r'}$, Ω *contient un domaine associé à* Λ.

Démonstration de V.7.1. — Il existe un domaine G, contenu dans Ω, dont l'intérieur contient un domaine associé à Λ. Les hypothèses sur f entraînent, d'après V.4.1, que $f \in A_\Lambda^{\alpha',r'}(G)$. On peut, d'après V.6.1, associer à f une $f_1 \in E_\Lambda^{\alpha',r'}$, telle que f et f_1 représentent le même élément de $A_\Lambda^{\alpha',r'}(G)$. La différence $f - f_1$ est (V.5.1) une distribution p.-p., de spectre $\subset \Lambda$, nulle à l'intérieur de G; donc, si ε est une fonction indéfiniment dérivable à support compact assez petit, $(f - f_1) \star \varepsilon \in F_\Lambda$ et s'annule sur un domaine associé à Λ, donc $(f - f_1) \star \varepsilon = 0$, et $f = f_1$, ce qui démontre V.7.1.

Démonstration de V.7.2. — Supposons, contrairement à l'énoncé, que Ω ne contienne aucun domaine associé à Λ. Soit $G_i (i = 1, 2, \ldots)$ une suite de domaines emboités croissants dont la réunion est Ω. D'après V.6.1, l'application canonique de $E_\Lambda^{\alpha',r'}$ dans $A_\Lambda^{\alpha',r'}(G_i)$ n'est un isomorphisme pour aucun i. Choisissons une suite de polynomes trigonométriques $s_i (i=1, 2, \ldots)$, dont les spectres Λ_i sont disjoints et contenus dans Λ, tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \| s_i \|_{A^{\alpha',r'}(G_i)} < \infty$ et que $\| \{ a_{s_i}(\lambda) \} \|_{\alpha',r'} = 1$ quel que soit i. L'inclusion stricte de $E^{\alpha',r'}$ dans $E^{\alpha,r}$ s'exprime (V.3.3) par la condition $r' \geqq r$, $r'-r > p\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}\right)$. Les calculs qui suivent V.3.3 (où l'on remplace Z^p par Λ_i) donnent alors :

— si $\alpha' > \alpha$,

$$\| \{ a_{s_i}(\lambda) \} \|_{\alpha,r} \leqq \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_i} (1+|\lambda|)^\gamma \right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}} \qquad \text{avec} \quad \gamma < -p;$$

— si $\alpha \geqq \alpha'$,

$$\| \{ a_{s_i}(\lambda) \} \|_{\alpha,r} < \sup_{\lambda \in \Lambda_i} (1+|\lambda|)^{r-r'},$$

de sorte qu'en tout cas $\rho_i = \| \{ a_{s_i}(\lambda) \} \|_{\alpha,r}$ tend vers zéro. Quitte à restreindre la suite s_i, on peut supposer $\sum_1^\infty \rho_i < \infty$. Alors la série $\sum_1^\infty s_i$ est convergente à la fois dans chaque $A^{\alpha',r'}(G_j)$ et dans $E^{\alpha,r}$; il existe donc une $f \in E_\Lambda^{\alpha,r}$, appartenant localement à $A^{\alpha',r'}$ sur Ω, et dont le développement de Fourier est $\sum_i \sum_{\lambda \in \Lambda_i} a_{s_i}(\lambda) e^{i\lambda . x}$. Comme $\| \{ a_{s_i}(\lambda) \} \|_{\alpha',r'} = 1$ quel que soit i, $f \notin E_\Lambda^{\alpha',r'}$. Cela montre que $f \notin E^{\alpha',r'}$, puisque, d'après V.7.1, $E_\Lambda^{\alpha,r} \cap E^{\alpha',r'} \subset E_\Lambda^{\alpha',r'}$. La contradiction avec l'hypothèse établit V.7.2.

On peut transcrire les résultats du chapitre III à l'aide de V.7.1 et V.7.2. Nous nous bornons à le faire pour III.6.1 et III.7.1.

Théorème V.7.3. — *Soient* Λ *une suite régulière,* D *une direction de droite,* Ω *une tranche ouverte d'épaisseur* τ *perpendiculaire à* D, $\Delta_D(\Lambda)$ *la densité supérieure de répartition de* Λ *dans la direction* D. *Si* $\tau > \Delta_D(\Lambda)$, *quels que soient* α, α', r, r' $(1 \leqq \alpha, \alpha' \leqq \infty, -\infty < r, r' < \infty)$, *les* $f \in E_\Lambda^{\alpha,r}$ *qui appartiennent localement à* $A^{\alpha',r'}$ *sur* Ω *appartiennent à* $E_\Lambda^{\alpha',r'}$. *Si* $\tau \leqq \Delta_D(\Lambda)$ *et si* $E^{\alpha',r'}$ *est strictement inclus dans* $E^{\alpha,r}$, *il existe une* $f \in E^{\alpha,r}$ *qui appartient localement à* $A^{\alpha',r'}$ *sur* Ω, *sans appartenir à* $E^{\alpha',r'}$.

CHAPITRE VI.

Séries de Fourier lacunaires sur des compacts sans points intérieurs.

1. Nous avons vu au cours des précédents chapitres que le comportement d'une fonction $\in F_\Lambda$, à divers égards, est déterminé par son comportement sur un domaine associé à Λ, ou au voisinage d'un tel domaine. Nous allons montrer maintenant que, si Λ est assez lacunaire, certaines propriétés des

fonctions continues resp. indéfiniment dérivables appartenant à F_Λ apparaissent dès qu'on connait ces fonctions sur des compacts sans points intérieurs, convenablement attachés à Λ.

Pour cela, nous commencerons par introduire les « mesures associées à Λ », pour lesquelles nous transcrirons une partie des résultats des chapitres II et III. Les compacts supports de ces mesures généraliseront les domaines associés à Λ. Nous donnerons des critères pour déterminer des compacts ainsi associés à Λ (« associés au sens large ») quaud Λ est une suite assez lacunaire, ou, inversement, pour déterminer des suites Λ admettant un compact donné pour compact associé au sens large.

Sur la droite ($p = 1$) nous ferons une étude un peu plus poussée inspirée de la démonstration élémentaire du théorème de Sidon sur les séries de Fourier lacunaires. Nons terminerons en montrant l'existence de fonctions continues à séries de Fourier lacunaires, s'annulant sur certains emsembles parfaits (par exemple l'ensemble triadique de Cantor).

2. La suite Λ est toujours supposée régulière dans R^p. Une mesure positive $d\mu$ à support compact dans R^p sera dite *associée à* Λ si et seulement si, pour tous les polynomes trigonométriques $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$, les normes

$$\left(\int |s|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left(\sum |a(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

sont équivalentes. Ainsi, un domaine G est associé à Λ lorsque sa fonction caractéristique définit une mesure associée à Λ.

Nous emploierons les notations suivantes :

$$\mathrm{M} = \mathcal{F}(d\mu) \Leftrightarrow \mathrm{M}(u) = \int e^{iux} \, d\mu(x);$$

$$\varphi \in \mathrm{L}^2(d\mu) \Leftrightarrow \int |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty ;$$

$$\Phi \in \exp^2 d\mu \Leftrightarrow \Phi(u) = \int e^{iux} \varphi(x) \, d\mu(x) \text{ avec } \varphi \in \mathrm{L}^2(d\mu);$$

$\mathrm{L}^2_\Lambda(d\mu)$: sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(d\mu)$ engendré par $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Une partie de la théorie des domaines associés s'adapte immédiatement aux mesures associées.

Proposition VI.2.1. — *Soit $d\mu$ une mesure positive à support compact, et* $\mathrm{M} = \mathcal{F}(d\mu)$. *Pour que $d\mu$ soit associée à Λ, il suffit que*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\lambda' \in \Lambda} |\mathrm{M}(\lambda' - \lambda)| < 2\mathrm{M}(0).$$

Démonstration. — *Voir* I.8.

Proposition VI.2.2. — *Dire que $d\mu$ est associée à Λ, c'est dire que l'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}$ est un homomorphisme de* $\exp^2 d\mu$ *sur* l^2_Λ.

Démonstration. — *Voir* II.2.4.

Proposition VI.2.3. — *Si $d\mu$ est associée à Λ, il existe un $\alpha = \alpha(\Lambda, d\mu) > 0$ tel que $d\mu$ soit encore associée à toute suite α-voisine de Λ.*

Démonstration. — *Voir* III.2.1 (on observera que l'inégalité (1) entraîne la continuité de l'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda')\}$ de $\exp^2 d\mu$ dans $l^2_{\Lambda'}$, quand on suppose continue l'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}$ de $\exp^2 d\mu$ dans l^2_Λ).

Comme conséquence immédiate de VI.2.2, on a le résultat suivant (partiellement annoncé à la fin du chapitre II).

Proposition VI.2.4. — *Si $d\mu$ est associée à Λ et si $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ n'est pas complet dans $L^2(d\mu)$, on peut ajouter à Λ au moins un élément tel que $d\mu$ soit encore associée à la nouvelle suite.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $\Phi_0 \in \exp^2 d\mu$, $\neq 0$, s'annulant sur Λ; soit λ' un point tel que $\Phi_0(\lambda') \neq 0$, et soit $\Lambda' = \Lambda \cup \{\lambda'\}$. Visiblement, l'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda'}$ est continue de $\exp^2 d\mu$ dans $l^2_{\Lambda'}$. D'autre part, si $\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda'} \in l^2_{\Lambda'}$, on interpole d'abord $\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ par une $\Phi \in \exp^2 d\mu$ de norme convenable (hypothèse), puis la suite $\{b(\lambda) - \Phi(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda'}$ par un multiple de Φ_0, soit $h\Phi_0$; alors $\Phi + h\Phi_0$ interpole $\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda'}$ et possède une norme convenable (c'est-à-dire majorée par $C(\Lambda', d\mu)\|\{b(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda'}\|_2$).

Remarquons que, dans les hypothèses de VI.2.4, il est faux que $d\mu$ reste associée à *toute* suite ne différant de Λ que par un élément. Par exemple, si $d\mu$ est portée par l'hyperplan $x_1 = 0$, elle ne peut être associée à Λ' que si tous les points de Λ' ont des projections différentes sur l'hyperplan $u_1 = 0$.

3. Nous dirons qu'un compact K est *associé à Λ au sens large* s'il porte une mesure associée à Λ. Ainsi un domaine associé à Λ est associé au sens large. Nous nous intéresserons désormais à des compacts sans points intérieurs.

Suivant une terminologie classique dans le cas $p = 1$ nous dirons que K est un ensemble de multiplicité au sens strict, ou du type M_0, si et seulement si K porte une mesure positive $d\mu$ telle que $\mathcal{F}(d\mu)$ s'annule à l'infini (on établit qu'il suffit pour cela que K porte une mesure *réelle* $d\nu$ telle que $\mathcal{F}(d\nu)$ s'annule à l'infini; *voir* p. ex. [12]$_{\text{II}}$ p. 145).

Désignons par $N_\Lambda(r)$ le nombre maximum de points de Λ dans une boule ouverte de rayon r [on posera $N_\Lambda(0) = 0$]. Une condition sur Λ du type $N_\Lambda(r) < \varpi(r)$, $\varpi(r)$ étant une fonction donnée telle que $\varpi(r) = o(r^p)(r \to \infty)$, sera appelée *condition de rareté uniforme*. Il est évident que toute suite régulière infinie contient des sous-suites infinies qui satisfont une condition de rareté uniforme donnée.

PROPOSITION VI.3.1. — *Si le compact* K *est du type* M_0, K *est associé au sens large à toute suite qui satisfait une condition de rareté uniforme convenable (dépendant de* K*).*

La démonstration de VI.3.1 résulte immédiatement de la proposition suivante :

PROPOSITION VI.3.2. — *Supposons* $M = \mathcal{F}(d\mu)$ *nulle à l'infini,* $M(0) = 1$, *et soit* $P(r)$ *une fonction décroissante* $(0 \leq r < \infty)$, *nulle à l'infini, telle que* $|M(u)| \leq P(r)$ *quand* $|u| = r$. *Pour que* $d\mu$ *soit une mesure associée à* Λ, *il suffit que*

$$-\int_0^\infty P'(r) N_\Lambda(r)\, dr < 2$$

[*la condition n'étant réalisable que si* $P(0) < 2$].

Démonstration de VI.3.2. — Soit $N_{\Lambda,\lambda}(r)$ le nombre de points de Λ contenus dans la boule ouverte de centre λ et de rayon r, avec $N_{\Lambda,\lambda}(0) = 0$, Une condition suffisante pour que $d\mu$ soit associée à Λ est, d'après VI.2.1,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_0^\infty P(r)\, dN_{\Lambda,\lambda}(r) < 2.$$

Or, une intégration par parties donne

$$\int_0^t P(r)\, dN_{\Lambda,\lambda}(r) + \int_0^t P'(r) N_{\Lambda,\lambda}(r)\, dr = N_{\Lambda,\lambda}(t)\, P(t) \geq 0$$

avec

$$N_{\Lambda,\lambda}(t)\, P(t) \leq \int_t^\infty - P'(r)\, N_{\Lambda,\lambda}(r)\, dr,$$

d'où

$$\int_0^\infty P(r)\, dN_{\Lambda,\lambda}(r) = \int_0^\infty - P'(r)\, N_{\Lambda,\lambda}(r)\, dr \leq \int_0^\infty - P'(r)\, N_\Lambda(r)\, dr,$$

et la condition de l'énoncé entraîne donc bien que $d\mu$ est associée à Λ.

VI.3.2 suggère une classification des compacts K du type M_0 d'après la vitesse de décroissance à l'infini permise pour les fonctions M.

Définition. — Nous dirons que K est *du type* M_α^* $(\alpha > 0)$ lorsque K porte une mesure positive $d\mu$ dont la transformée de Fourier satisfait $M(u) = O\left(|u|^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$ $(u \to \infty)$. La borne supérieure des α tels que K soit du type M_α^* peut être interprétée comme une espèce de dimension de K, souvent supérieure à la dimension ordinaire, que nous appellerons la $\mathcal{F}$-*dimension*.

Exemples.

1. Prenons pour K la sphère $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2=1$; en prenant pour $d\mu$ la mesure équirépartie sur la sphère, on voit que K est de type M^*_{p-1}. Il en est de même si K est une surface convexe assez régulière (communication orale de C. S. Herz).

2. Prenons par contre K dans un hyperplan; il est immédiat que K n'est même pas de type M_0.

3. Sur la droite ($p=1$), la $\mathcal{F}$-dimension ne dépasse jamais la dimension de Hausdorff; mais il existe, pour chaque $\alpha (0<\alpha<1)$ des compacts K dont la dimension de Hausdorff et la $\mathcal{F}$-dimension sont toutes deux égales à α [10].

4. Sur la droite encore, l'ensemble de Cantor admet une dimension de Hausdorff positive mais n'est pas de type M_0([12], p. 152).

5. Si la $\mathcal{F}$-dimension de K est supérieure à p, K est de mesure positive [car $M \in L^2(R^p)$].

6. Si la $\mathcal{F}$-dimension de K est supérieure à $2p$, K admet des points intérieurs [car $M \in L^1(R^p)$], donc K est de type M^*_β pour tout $\beta>0$.

7, La $\mathcal{F}$-dimension d'une somme directe de compacts est supérieure ou égale à la somme des $\mathcal{F}$-dimensions (car $d\mu_1 \star d\mu_2$ a son support dans la somme des supports de $d\mu_1$ et $d\mu_2$).

Il est naturel aussi de classer les suites Λ d'après la vitesse de croissance de $N_\Lambda(r)$.

Définition. — Nous appellerons *dimension* de Λ la borne inférieure des $\beta>0$ tels que $N_\Lambda(r)=O(r^\beta)(r\to\infty)$.

Exemples.

1. La suite réelle $\{1^\nu, 2^\nu, 3^\nu, \ldots\}$ $(\nu>1)$ est de dimension $\frac{1}{\nu}$.

2. La dimension d'un produit direct de suites est la somme des dimensions des suites facteurs.

3. Si Λ est contenue dans une variété linéaire de dimension q, sa dimension ne dépasse pas q.

Rappelons que le pas d'une suite est la borne inférieure des distances de deux de ses points.

Avec ces définitions, un énoncé affaibli de VI.3.2 est le suivant :

Théorème VI.3.3. — *Soit* $0\leqq\beta<\frac{\alpha}{2}$, K *un compact de* $\mathcal{F}$*-dimension* α, Λ *une suite de dimension* β. *Alors* K *est associé à toute sous-suite de* Λ *dont le pas est assez grand, et tout homothétique de* K *dans un rapport assez grand est associé à* Λ.

La démonstration, à partir de VI.3.2 est un simple exercice de calcul que nous laissons au lecteur; on remarquera qu'un compact homothétique du support de $d\mu(x)$ porte une mesure $d\mu\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$, dont le module de la transformée de Fourier est $|M(hu)|$.

4. Dans quelle mesure la connaissance d'une $f \in F_\Lambda$, ou de certaines propriétés de f, sur un compact K associé (au sens large) à Λ détermine-t-elle f, ou des propriétés de f, sur tout l'espace?

Nous nous bornerons à des $f \in F_\Lambda$ continues, soit $f \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a_f(\lambda) e^{i\lambda x}$. Elles sont uniformément approchables sur tout domaine par des fonctions $\in E^1_\Lambda$ (par exemple de la forme $f \star \varepsilon$, ε indéfiniment dérivable à support compact), donc, d'après V.4.1, par des polynomes trigonométriques $s_j = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_j(\lambda) e^{i\lambda x}$; pour chaque λ, $a_j(\lambda)$ tend vers $a_f(\lambda)$. Si K est associé (au sens large) à Λ, il existe par conséquent une constante $C = C(\Lambda, K)$ telle que

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_f(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

En particulier, si $f(x) = 0$ sur K, $f(x) = 0$ partout.

Étant donné une suite positive $\{M_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et une partie P de R^p, désignons par $C_P\{M_n\}$ la classe des fonctions indéfiniment dérivables dans un voisinage de P, et satisfaisant

$$\sup_{n \geq 0,\ x \in P} \frac{|\Delta^n f(x)|}{M_{2n}} < \infty,$$

où Δ^n désigne le laplacien n fois itéré. Si K est un compact associé (au sens large) à Λ et si $f \in F_\Lambda$ est indéfiniment dérivable et appartient à $C_K\{M_n\}$, on a, pour tout n,

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|^{4n} |a_f(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sup_{x \in K} |\Delta^n f(x)| < C' M_{2n}.$$

Comme, pour tout x,

$$|\Delta^n f(x)| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|^{2n} |a_f(\lambda)| \leq \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|^{-4q}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|^{4n+4q} |a_f(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'appartenance de f à $C_K\{M_n\}$ entraîne son appartenance à $C_{R^p}\{M_{n+q}\}$ dès que $\sum_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|^{-4q} < \infty$.

Résumons les résultats obtenus.

THÉORÈME VI.4.1. — *Soit* K *un compact associé* (*au sens large*) *à* Λ. *Si* $f \in F_\Lambda$ *est continue et si* $f(x) = 0$ *sur* K, $f(x) = 0$ *partout. Si* $f \in F_\Lambda$ *est indéfiniment dérivable et appartient* (*sur* K) *à* $C_K\{M_n\}$, f *appartient à* $C_{R^p}\{M_{n+p}\}$.

En particulier, si $M_n = h^n n!$, f est analytique. Donc, si $f \in F_\Lambda$ est indéfiniment dérivable et si ses dérivées successives sont égales sur K aux dérivées successives homologues d'une fonction analytique sur K, f est analytique. Ce résultat demeure si l'on ajoute à Λ un nombre fini de points. On a donc l'énoncé suivant.

THÉORÈME VI.4.2. — *Soit* K *un compact satisfaisant la condition suivante : toute fonction différentiable nulle sur* K *a sa différentielle nulle sur* K (*par exemple, sur la droite, un ensemble parfait*). *Supposons que* K *est associé* (*au sens large*) *à une sous-suite de* Λ *ne différant de* Λ *que par un nombre fini de points. Supposons enfin* $f \in F_\Lambda$ *indéfiniment dérivable, et égale sur* K *à une fonction analytique. Alors* f *est analytique.*

5. Dans la suite, nous nous restreignons au cas $p = 1$. Nous supposerons pour simplifier que K n'admet pas de point isolé, et que Λ est illimitée à droite; nous noterons $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ ou $n = 1, 2, \ldots$) avec $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

Par une méthode élémentaire, nous allons mettre en évidence une relation intéressante entre certains compacts parfaits K et certaines suites Λ (entraînant en particulier la validité de VI.4.1 et VI.4.2) qui n'est pas du type étudié jusqu'ici.

Rappelons qu'un compact parfait K peut toujours être construit de la manière suivante : on considère une suite de fermés décroissants F_k ($k = 1, 2, \ldots$) tels que F_k est la réunion de 2^k segments à intérieurs disjoints $B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}$ ($\varepsilon_j = 0$ ou 1), et que

$$B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}} \subset B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k},$$

ces deux segments ayant en commun l'extrémité gauche ou l'extrémité droite suivant que $\varepsilon_{k+1} = 0$ ou 1; on pose alors $K = \bigcap_{k=1,2,\ldots} F_k$. Naturellement, la suite $\{F_k\}$ n'est pas déterminée par K.

Définition. — Nous dirons que K est *surtriadique* s'il existe un $\varepsilon > 0$ et une suite $\{F_k\}$ comme ci-dessus, tels que pour tout choix des ε_j on ait

$$(1) \qquad \begin{cases} |B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}}| \geqq \varepsilon\, |B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}|, \\ |B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, 0}| + |B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, 1}| \geqq \left(\dfrac{2}{3} + 2\varepsilon\right) |B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}| \end{cases}$$

($|B|$ désignant la longueur du segment B).

Exemples.

1. Un segment est un parfait surtriadique.

2. Les ensembles parfaits symétriques à rapport de dissection constant ξ

$$(|B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}}| = \xi |B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}|)$$

sont surtriadiques si $\xi > \frac{1}{3}$, et ne le sont pas si $\xi \leq \frac{1}{3}$; l'ensemble triadique de Cantor correspond à $\xi = \frac{1}{3}$.

3. Étant donné un intervalle I ouvert de longueur $< 2\pi$, et une suite d'entiers positifs $\{n_k\}$, désignons par $H_I^{\{n_k\}}$ l'ensemble des x (restreints à un intervalle de longueur 2π) tels que, pour tout k

$$n_k x \notin I \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

De tels ensembles furent introduits par Rajchman (*voir* $[12]_{\mathrm{I}}$, p. 317). Si $|I| < \pi$, il existe des suites $\{n_k\}$ assez vite croissantes pour que $H_I^{\{n_k\}}$ contienne un parfait surtriadique (*voir* VI.7.2).

On sait ($[12])_{\mathrm{II}}$, p, 152) que les ensembles $H_I^{\{n_k\}}$, de même que les ensembles $H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$ introduits plus loin sont des « ensembles d'unicité »; en particulier, ils ne sont pas du type M_0, donc la proposition VI.3.1 ne leur est pas applicable; en fait, nous verrons (VI.9.1, VI.10.1) que la conclusion de VI.3.1 est fausse pour de tels ensembles. Cependant les ensembles surtriadiques peuvent être attachés à une suite assez lacunaire, dans le sens suivant.

Théorème VI.5.1. — *Soit* K *un compact parfait surtriadique. Il existe des constantes* C, C′, C″ *telles que, dès que la suite* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *satisfait* $\lambda_1 \geq C$, $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq C'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *et* $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$:

a. pour tout polynome trigonométrique réel $s(x) = \sum_{j \neq 0} a_j e^{i\lambda_j x}$ *on a*

$$\sum |a_j| < C'' \sup_{x \in K} s(x);$$

b. $f \in E'_{\Lambda - \{0\}}$ *et* $f(x) \geq 0$ *sur* $E \Rightarrow f \equiv 0$;

c. pour les $f \in E'_\Lambda$, *soit* $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_{f,j} e^{i\lambda_j x}$, *les normes*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_{f,j}| \text{ et } \sup_{x \in K} |f(x)|$$

sont équivalentes;

d. toute suite bornée donnée sur Λ *est la restriction à* Λ *de la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure portée par* K.

De ce théorème on tire immédiatement des conclusions analogues à VI.4.1 et VI.4.2, que nous nous contentons d'énoncer :

Dans les hypothèses de VI.5.1, *toute* $f \in E^1_\Lambda$ (*ou* F_Λ) *indéfiniment dérivable, appartenant à* $C_K(M_n)$, *appartient à* $C_R(M_n)$. *En particulier, si* $f \in E^1_\Lambda$ *est indéfiniment dérivable, et est égale sur* K *à une fonction analytique,* f *est analytique.*

Cette dernière conclusion ne nécessite évidemment aucune hypothèse sur λ_1.

6. *Démonstration de* V.5.1. — Évidemment $a \Rightarrow b$. Par dualité, $c \Rightarrow d$. Désignons par $C_\Lambda(K)$ le sous-espace fermé, engendré par $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in K}$ dans l'espace de Banach C(K) des fonctions continues sur K; l'application canonique $E^1_\Lambda \to C_\Lambda(K)$ est évidemment continue; elle est biunivoque d'après b, et elle est surjective d'après a; elle est donc bicontinue (Banach), ce qu'exprime c. Reste à démontrer a.

Démonstration de a. — Écrivons

$$s(x) = \sum_1^N r_j \cos(\lambda_j x + \varphi_j) \qquad (r_j \geqq 0).$$

Fixons α entre o et $\frac{1}{2}$, et désignons par G_j l'ensemble des x tel que $\cos(\lambda_j x + \varphi_j) \geqq \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{2}$. Nous allons montrer que, si α est assez petit, C et C′ assez grands, $\bigcap G_j$ et K ont un point commun; en ce point on aura

$$s(x) \geqq \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{2} \sum_1^N r_j,$$

donc a sera démontré.

G_j est réunion de segments disjoints I_j, de longueur $|I_j| = \frac{\pi(1-\alpha)}{\lambda_j}$. Désignons par J_j les intervalles de mêmes milieux que les I_j et de longueur $\frac{\pi(1-2\alpha)}{\lambda_j}$, et par J'_j les intervalles, de longueur $\frac{\pi(1+2\alpha)}{\lambda_j}$, contigus aux J_j. Nous allons représenter par B_k l'un quelconque des $B^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}$, et par B_0 le plus petit segment contenant K. Lorsque nous fixerons un J_j ou un B_k, nous écrirons $\bar{J}_j$ resp. $\bar{B}_k$. Supposons

$$C > \frac{\pi(1+2\alpha)}{|B_0|} \tag{2}$$

et soit $\bar{B}_{k_1}$ un intervalle, le plus petit possible, satisfaisant

$$|B_k| > \frac{\pi(1+2\alpha)}{\lambda_1} = |J'_1|$$

[(2) entraîne l'existence de $\bar{B}_{k_1}$]. L'un au moins des deux intervalles B_{k_1+1} contenus dans $\bar{B}_{k_1}$ ayant une longueur au moins égale à $\left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)\bar{B}_{k_1}$ [*voir* (1) : définition des parfaits surtriadiques], on a

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)|\bar{B}_{k_1}| \leq \frac{\pi(1+2\alpha)}{\lambda_1}.$$

Comme les extrémités de $\bar{B}_{k_1}$ ne peuvent appartenir à un même J'_1, nous avons les deux possibilités suivantes : α, une extrémité de $\bar{B}_{k_1}$ appartient à un J_1, que nous désignerons par $\bar{J}_1$; β sinon un J_1, soit encore $\bar{J}_1$, est contenu dans $\bar{B}_{k_1}$. Dans le cas β, considérons les 2^l segments B_{k_1+l} contenus dans $\bar{\beta}_{k_1}$; d'après (1), leurs longueurs ne dépassent pas $(1-\varepsilon)^l|\bar{B}_{k_1}|$, et les longueurs des intervalles contigus ne dépassent pas $\left(\frac{1}{3}-2\varepsilon\right)\bar{B}_{k_1}$. Remarquons que, d'après (3),

$$|J_1| = \frac{\pi(1-2\alpha)}{\lambda_1} > \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)|\bar{B}_{k_1}|$$

Si donc nous supposons

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\left(\dfrac{1}{3}+\varepsilon\right) > (1-\varepsilon)^l, \\[2ex] \dfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\left(\dfrac{1}{3}+\varepsilon\right) > \dfrac{1}{3}-2\varepsilon, \end{array}\right.$$

$\bar{J}_1$ contient au moins une extrémité d'un B_{k_1+l} contenu dans $\bar{B}_{k_1}$. Cela vaut aussi dans le cas α. Si, de plus,

$$(5) \qquad (1-\varepsilon)^l < \frac{\alpha(1+2\alpha)}{2\left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)},$$

de sorte que [d'après (3)],

$$(1-\varepsilon)^l|\bar{B}_{k_1}| < \frac{\pi\alpha}{2\lambda_1},$$

l'intervalle I_1 contenant $\bar{J}_1$, soit $\bar{I}_1$, contient au moins un des B_{k_1+l} contenus dans $\bar{B}_{k_1}$. Chacun de ces B_{k_1+l} satisfait, d'après (1),

$$|B_{k_1+l}| > \varepsilon^l|\bar{B}_{k_1}| > \varepsilon^l\frac{\pi(1+2\alpha)}{\lambda_1}.$$

Supposons enfin

$$(6) \qquad C^l > \varepsilon^{-l}.$$

On peut alors définir $\bar{B}_{k_2}$ comme un intervalle B_k contenu dans $B_{k_1}\cap\bar{I}_1$, le plus petit possible, satisfaisant

$$|B_k| > \frac{\pi(1+2\alpha)}{\lambda_2} = |J'_2|.$$

Par récurrence (il suffit ci-dessus de remplacer B_{k_1} par B_{k_j}), après avoir fixé une fois pour toutes C, α, l et C′ satisfaisant (2), (4), (5), (6), on construit une suite de segments emboîtés $\bar{B}_{k_j}$, et une suite de segments $\bar{I}_j$, tels que $\bar{B}_{k_{j+1}} \subset \bar{I}_j$. L'intersection des $\bar{B}_{k_j}$ est bien un point commun à tous les G_j et à K.

7. Nous allons maintenant examiner dans quelle mesure les hypothèses de V.5.1 sont nécessaires, pour les différents types de conclusions envisagées.

L'hypothèse que K est surtriadique ne peut pas être beaucoup affaiblie (sinon par l'hypothèse que K contient un parfait surtriadique). En effet, b est en défaut pour l'ensemble triadique de Cantor : sur l'ensemble de Cantor porté par $B_0 = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, chacune des fonctions $\cos 3^n x$ garde un signe constant, sans être identiquement nulle.

L'hypothèse $\lambda_1 \geqq C$ est, elle aussi, indispensable pour avoir b. En effet, si $\lambda_1 \leqq \frac{\pi}{|B_0|}$, on a $\cos(\lambda_1 x + \varphi_1) \geqq 0$ sur B_0. Compte tenu de (2) on voit que la borne inférieure des valeurs de C convenable est $\frac{\pi}{|B_0|}$.

L'hypothèse de lacunarité $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > C'$ est évidemment essentielle, même pour avoir la conclusion la plus faible, à savoir d. Mais on peut se demander s'il est permis de prendre C′ aussi voisin de 1 quon veut ($C' > 1$). Autrement dit, la simple lacunarité à la Hadamard $\left(\inf\limits_{n \geqq 1} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1\right)$, jointe à une minoration de λ_1, entraîne-t-elle d? Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Théorème VI.7.1. — *Il existe des compacts parfaits surtriadiques* K *et des suites positives* $\Lambda_0 = \{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *lacunaires à la Hadamard* $\left(\inf\limits_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1\right)$ *tels que, pour chaque suite* $\Lambda \subset \Lambda_0$ *ne différant de* Λ_0 *que par un nombre fini de points, chacune des conclusions* a, b, c, d *de* VI.5.1 *se trouve en défaut.*

La démonstration se fonde sur un certain nombre de lemmes. Nous désignerons (comme dans le paragraphe 5, exemple 3) par I un intervalle ouvert contenu dans $[-\pi, \pi]$, par $\{n_k\}$ une suite d'entiers positifs, et par $H_I^{\{n_k\}}$ l'ensemble des $x \in [-\pi, \pi]$ tels que, pour tout k, $n_k x \notin I$ (mod. 2π).

Lemme VI.7.2. — *Si* $|I| < \pi$ *et si* $\frac{n_{k+1}}{n_k} > C = 1 + \frac{24|I|}{\pi - |I|}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $H_I^{\{n_k\}}$ *contient un compact parfait surtriadique.*

Démonstration. — Soit (H_k) l'ensemble des x tels que $n_k x \notin I$ (mod. 2π); $H_I^{\{n_k\}}$ est la restriction à $[-\pi, \pi]$ de $H = \bigcap\limits_k (H_k)$. L'ensemble (H_k) est une réunion d'intervalles fermés « blancs » de longueur $\frac{2\pi - |I|}{n_k}$, séparés par des intervalles ouverts « noirs » de longueur $\frac{|I|}{n_k}$; chaque intervalle blanc sera appelé un H_k, chaque noir un N_k. Pour chaque N_k, soit N'_k le plus petit intervalle ouvert contenant N_k et contigu à deux H_{k+1}. Remarquons que les extrémités de N'_k sont à une distance de N_k inférieure à $\frac{2\pi}{n_{k+1}}$. Désignons par H'_k les intervalles fermés contigus aux $N'_k (H'_k \subset H_k)$, et par (H'_k) leur réunion. Soit enfin $K = \bigcap_k (H'_k)$. Comme $K \subset H$, il nous suffit de montrer que $K \cap [-\pi, \pi]$ est surtriadique.

Pour chaque H'_k, soit H''_k le plus petit segment contenant $K \cap H'_k$; désignons par N''_k les intervalles contigus aux $H''_k (N''_k \supset N'_k)$. Pour passer d'un N'_k à un N''_k, on ajoute, à droite et à gauche, des intervalles N'_{k+1}, N'_{k+2}, etc., et comme

$$|N'_k| < \frac{|I|}{n_k} + \frac{4\pi}{n_{k+1}} < \frac{5\pi}{n_k},$$

les extrémités de N''_k sont à une distance de N'_k inférieure à

$$5\pi\left(\frac{1}{n_{k+1}} + \frac{1}{n_{k+2}} + \ldots\right) < \frac{5\pi}{n_k(C-1)}.$$

Elles sont donc à une distance de N_k inférieure à

$$\frac{1}{n_k}\left(\frac{2\pi}{C} + \frac{5\pi}{C-1}\right) < \frac{7\pi}{n_k(C-1)};$$

d'où, en particulier,

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{n_k}\left(|I| - \dfrac{14\pi}{C-1}\right) < |N''_k| < \dfrac{1}{n_k}\left(|I| + \dfrac{14\pi}{C-1}\right), \\ \dfrac{1}{n_k}\left(2\pi - |I| - \dfrac{14\pi}{C-1}\right) < |H''_k|. \end{array}\right.$$

Pour passer de (H''_{k-1}) à (H''_k), nous opérerons de la manière suivante : de chaque H''_{k-1} (intervalle « blanc ») nous ôtons un intervalle « noir » N''_k intérieur à H''_{k-1} et le plus éloigné possible de ses extrémités, puis de nouveau, si c'est possible, de chacun des intervalles (blancs) restants, un N''_k intérieur aussi éloigné que possible des extrémités, et ainsi de suite jusqu'à ce que les intervalles blancs restants ne contiennent plus de N''_k. A chaque étape de ce processus, un intervalle blanc se trouve amputé d'un intervalle noir intérieur; nous allons vérifier que, par rapport à la longueur de cet intervalle blanc prise pour unité, la longueur de l'intervalle noir est inférieure à $\left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)$, et les longueurs des intervalles blancs restants après l'amputation supérieures à ε ($\varepsilon > 0$ sera fixé plus loin); cela montrera bien que $K \cap [-\pi, \pi]$ est surtriadique. Chaque intervalle blanc amputé contient au moins deux H''_k et un N''_k; d'après (7), sa longueur dépasse donc

$$\frac{1}{n_k}\left(4\pi-|I|-\frac{42\pi}{C-1}\right)$$

et la condition prescrite est satisfaite dès que

$$(8)\qquad \begin{cases} |I|+\dfrac{14\pi}{C-1}<\left(\dfrac{1}{3}-2\varepsilon\right)\left(4\pi-|I|-\dfrac{42\pi}{C-1}\right), \\ 2\pi-|I|-\dfrac{14\pi}{C-1}>\varepsilon\left(4\pi-|I|-\dfrac{42\pi}{C-1}\right). \end{cases}$$

Si C est choisi comme dans l'énoncé, on peut déterminer un $\varepsilon>0$ satisfaisant (8). Cela achève la démonstration de VI.7.2.

LEMME VI.7.3. — *Quel que soit* I, *il existe un entier positif* ν *et une fonction* $\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_j e^{ijx}$ *à support dans* I (mod 2π), *telle que* $\sum_{-\infty}^{-1}+\sum_{\nu+1}^{\infty}|\gamma_j|<|\gamma_0|$.

Démonstration. — Soit J un segment coupant I, de longueur $|J|<2\pi$, et tel que $|I|+|J|>2\pi$. Dans l'espace $A^1(J)$ (défini en V.3), les $\{e^{ijx}\}_{n=1,2,\ldots}$, forment un système total; en effet, si elles sont orthogonales à une $\theta\in A^\infty[J]$, le théorème de Carlson [1] appliqué à $\mathcal{F}(\theta)$ montre que $\theta=0$. Donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynome trigonométrique $s(x)=\sum_{1}^{\nu}\alpha_j e^{ijx}$ tel que $\|s-1\|_{A^1(J)}<\varepsilon$. Posons $s(x)-1=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_j e^{ijx}$; la dernière inégalité entraîne l'existence d'une fonction $\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_j e^{ijx}$ à support disjoint de J, telle que $\sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_j-\alpha_j|<2\varepsilon$. Il suffit de choisir $\varepsilon<\frac{1}{4}$, et ν assez grand, pour avoir la conclusion désirée.

LEMME VI.7.4. — *Quels que soient la suite* $\{n_k\}$ *et l'entier positif* ν, *il existe une suite positive* Λ_0 *lacunaire à la Hadamard et satisfaisant la condition suivante :*

(S_0) : *quel que soit* n ($n=\ldots,-1,0,1,\ldots$) *il existe une infinité de valeurs de* k *pour lesquelles* $n+jn_k\in\Lambda_0$ *quand* $j=1,2,\ldots$.

En outre, on peut imposer à Λ_0 *de satisfaire une condition de rareté uniforme arbitraire.*

Démonstration. — Soit $\{m_i\}$ ($i=1,2,\ldots;\ m_i>0$) une suite d'entiers relatifs contenant chaque entier n une infinité de fois. Pour chaque i, on choisit $n_{k_i}>m_i$ de façon que $m_i+n_{k_i}>2(m_{i-1}+\nu n_{k_{i-1}})$, et l'on pose

$$\Lambda_i=\{m_i+jn_{k_i}\}\quad(j=1,2,\ldots,\nu);\qquad \Lambda_0=\bigcup_i\Lambda_i$$

[1] *Voir* p. ex. [2] p. 153.

Λ_0 satisfait (S); d'autre part, le rapport d'un terme au précédent dépasse toujours $\frac{\nu+1}{\nu}$, donc Λ est lacunaire à la Hadamard. Si l'on impose en outre la condition de rareté uniforme $N(r) < \varpi(r)$ [$\varpi(r)$ étant une fonction croissante donnée] il suffira de choisir $\{n_{k_i}\}$ de telle façon que $\varpi(n_{k_j}) > j\nu$ pour $j = 1, 2, \ldots$.

8. Compte tenu des lemmes ci-dessus, le théorème VI.7.1 sera une simple conséquence de la proposition suivante, que je dois à un entretien avec R. Salem.

Proposition VI.8.1. — *Considérons un* $H_I^{\{n_k\}}$. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un ensemble fini d'entiers* > 0 *ou* < 0 (*mais* $\neq 0$) *qui satisfait la condition*

(R_1) : *il existe une* $\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{ijx}$ *à support dans* I (mod 2π) *telle que*

$$\sum_{\neq 0, j \notin \mathfrak{U}} |\gamma_j| < |\gamma_0|.$$

Soit Λ *une suite d'entiers* $\gtrless 0$ *satisfaisant la condition*

(S_1) : *quel que soit l'entier* $n \gtrless 0$, *il existe au moins un* k *tel que*

$$n + jn_k \in \Lambda \qquad \textit{quand} \quad j \in \mathfrak{U}.$$

Alors la seule mesure $d\mu$ *portée par* $H_I^{\{n_k\}}$ *dont la transformée de Fourier* M *s'annule sur* Λ *est la mesure nulle.*

Démonstration. — Quels que soient k et n, on a, par définition de $H_I^{\{n_k\}}$,

$$\int e^{inx} \varphi(n_k x)\, d\mu(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j M(n + jn_k) = 0. \tag{9}$$

Soit $B = \sup_j |M(j)|$, $\varepsilon > 0$ arbitraire, et n tel que $|M(n)| > B(1 - \varepsilon)$. Choisissons k en fonction de n suivant (S_1); alors (9) entraîne

$$|\gamma_0| . |M(n)| \leq B \sum_{j \neq 0, j \notin \mathfrak{U}} |\gamma_j|,$$

ce qui est incompatible avec (R_1) si $B \neq 0$ et si ε est assez petit. Donc $B = 0$, d'où $d\mu = 0$. C. Q. F. D.

Remarquons que la conclusion de VI.8.1 revient à dire que $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ est un système total dans l'espace $C(H_I^{\{n_k\}})$ des fonctions continues sur $H_I^{\{n_k\}}$.

Un corollaire immédiat de VI.8.1 est le suivant :

Proposition. — VI.8.2. — *Mêmes hypothèses qu'en* VI.8.1, (S_1) *étant remplacé par*

(S_2) : *quel que soit* n, *il existe une infinité de valeurs de* k *pour lesquelles* $n + jn_k \in \Lambda$ *quand* $j \in \mathfrak{U}$.

Alors il n'existe aucune mesure $\neq 0$, *portée par* $H_I^{\{n_k\}}$, *et dont la transformée de Fourier s'annule sur* Λ *sauf en un nombre fini de points. En particulier, la conclusion d de* VI.5.1 *se trouve en défaut si l'on prend pour* K *une partie de* $H_I^{\{n_k\}}$.

Le lemme VI.7.2 montre cependant que dans ces conditions K peut être surtriadique, et les lemmes VI.7.3 et VI.7.4 qu'on peut choisir pour Λ n'importe quelle sous-suite de Λ_0 [suite lacunaire à la Hadamard définie par (S_0)] ne différant de Λ_0 que par un nombre fini de points. Ainsi est achevée la démonstration de VI.7.1.

9. Nous allons maintenant démontrer un résultat plus frappant.

Théorème VI.9.1. — *Soit* K *un compact contenu dans un ensemble de Rajchman* $H_I^{\{n_k\}}$, *il existe une suite positive* Λ_0 *lacunaire à la Hadamard, satisfaisant une condition de rareté uniforme arbitraire, telle que, pour toute suite* $\Lambda \subset \Lambda_0$ *ne différant de* Λ_0 *que par un nombre fini de points, il y ait des fonctions*

$$f \in E_\Lambda^1 \left(f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} \qquad \textit{avec} \quad \sum |a(\lambda)| < \infty \right),$$

non identiquement nulles, qui s'annulent sur K.

Remarques. — 1° L'énoncé vaut en particulier pour certains ensembles de Cantor, et aussi pour certains ensembles surtriadiques (VI.7.2). Ainsi VI.5.1 fournit-il une sorte de réciproque à VI.9.1 : *l'éoncé de* VI.9.1 *serait incorrect si l'on remplaçait*

$$\text{« } \Lambda_0 \textit{ lacunaire à la Hadamard », soit } \Lambda_0 = \{\lambda_n\} \qquad \textit{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$$

par

$$\Lambda_0 = \{\lambda_n\} \qquad \textit{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \textit{ arbitrairement grand.}$$

Cela veut dire qu'on ne peut pas beaucoup améliorer l'énoncé en ce qui concerne la lacunarité de Λ.

2° D'après VI.3.1 et VI.4.1, *la conclusion de* VI.9.1 *est inexacte dès qu'on prend pour* K *un ensemble de type* M_0. Cela veut dire qu'on ne peut pas beaucoup élargir les conditions données sur K. Cependant, nous allons voir (§ 10) qu'on peut remplacer dans l'énoncé l'ensemble de Rajchman $H_I^{\{n_k\}}$ par un ensemble $H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$ d'un type introduit par Pyatetski-Shapiro.

La démonstration de VI.9.1 se fait à simple lecture, à partir de V.7.3, VI.7.4 et de la proposition suivante :

Proposition VI.9.2. — *Soit* K *un compact contenu dans un* $H_I^{\{n_k\}}$. *Soit* $\mathfrak{U}$ *un ensemble d'entiers* $\neq 0$ *satisfaisant à la condition* (R_1) *de* VI.8.1 *et* Λ *une suite d'entiers satisfaisant la condition* (S_2) *de* VI.8.2. *Alors il existe une* $f \in E_\Lambda^1$, $f \not\equiv 0$, *s'annulant sur* K.

Démonstration. — Appelons « pseudomesures » les distributions $\in E^\infty$, c'est-à-dire localement cotransformées de Fourier de fonctions bornées. On vérifie aisément que les énoncés VI.8.1 et VI.8.2 restent valables en remplaçant « mesure » par « pseudomesure ». Si nous continuons à représenter par $d\mu$ une pseudomesure à support dans $H_I^{\{n_k\}}$, et par M sa transformée de Fourier, (9) entraîne l'équivalence des normes $\sup\limits_{j \text{ entier}} |M(j)|$ et $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |M(\lambda)|$. Ainsi les suites $\{M(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ telles que $M \in \exp^\infty K$ constituent dans l_Λ^∞ un sous-espace fermé, soit $l_{\Lambda,K}^\infty$. D'après VI.8.2 (transcrit pour les pseudomesures), $l_{\Lambda,K}^\infty \neq l_\Lambda^\infty$.

Considérons maintenant l_Λ^∞ comme dual de l_Λ^1. Si des $\{M_i(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ($M_i \in \exp^\infty K$, $i = 1, 2, \ldots$) tendent faiblement vers $\{c(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ dans l_Λ^∞, elles forment un ensemble borné dans l_Λ^∞, donc les M_i forment un ensemble borné dans $\exp^\infty K$, qui est faiblement compact dans L^∞. Quitte à restreindre la suite M_i, on peut donc la supposer faiblement convergente dans L^∞.

Sa limite appartient à $\exp^\infty K$, et l'on a, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $c(\lambda) = M(\lambda)$. Ainsi $l_{\Lambda,K}^\infty$ est faiblement fermé dans l_Λ^∞, donc régulièrement fermé au sens de Banach ([0], chap. VIII). Il existe donc un élément non nul $\{\alpha(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \in l_\Lambda^1$, orthogonal à $l_{\Lambda,K}^\infty$ dans le sens que, pour tout $M \in \exp^\infty K$, $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\lambda) M(\lambda) = 0$. Cela veut dire que $f(x) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\lambda) e^{i\lambda x}$ s'annule sur K, ce qui démontre VI.9.2, et, du même coup, VI.9.1.

10. Explicitons le résultat annoncé dans la remarque 2° du dernier paragraphe.

Les ensembles de Pyatetski-Shapiro sont définis en $[12]_{\text{II}}$ (p. 152). Nous donnerons une définition plus restrictive, mais qui nous paraît suffisante en pratique. Un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de R^m sera dit *normal* s'il n'est orthogonal à aucun vecteur à composantes entières. A tout ouvert $\Omega \subset R^m$ associons la réunion (Ω) de ses translatés par les translations dont les composantes sont multiples de 2π. Étant donné un vecteur normal α dans R^m, un ouvert $\Omega \subset R^m$, et une suite de nombres positifs ρ_k tendant vers l'infini, nous désignerons par $H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$ l'ensemble des $t \in [-\pi, \pi]$ tels que, pour tout k, le point $\rho_k t\alpha$ n'appartienne pas à Ω.

Théorème VI.10.1. — *L'énoncé* VI.9.1 *est valable si l'on remplace* $H_I^{\{n_k\}}$ *par* $H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$.

Démonstration. — Nous nous bornons à indiquer les changements à apporter à la démonstration de VI.10.1.

Le premier pas consiste à obtenir l'analogue de VI.7.3. Désignons par P_α l'ensemble des $j = (j_1, \ldots, j_m) \in R^m$ à coordonnées entières, tels que $j\alpha = j_1\alpha_1 + \ldots, j_m\alpha_m > 0$, et par J un compact dans R^m, de mesure inférieure à $(2\pi)^m$, tel que $(\mathring{J}) \cup (\Omega) = R^m$ ($\mathring{J}$: intérieur de J). Soit J' un compact, de mesure inférieure à $(2\pi)^m$, dont l'intérieur contient J. Par un procédé de Helson et Lowdenslager ([4], p. 170-171), compte tenu de la normalité de α, il est aisé de voir que, dans $L^2(J')$, les polynomes trigonométriques

$$s(x) = \sum_{j \in P_\alpha} \alpha_j e^{ijx} \qquad [x = (x_1, \ldots, x_m);\, jx = j_1 x_1 + \ldots + j_m x_m]$$

approchent 1 d'aussi près qu'on le veut; on en déduit (comme pour V.3.4) que des polynomes $s \star \varepsilon(x)$ du même type approchent 1 d'aussi près qu'on veut dans $A^1(J)$. De là découle (comme pour VI.7.3), quel que soit $\eta > 0$. l'existence d'une fonction $\varphi(x) = \sum_{j \in Z^m} \gamma_j e^{ijx}$ à support dans (J), et d'une partie finie de P_α, soit $\mathfrak{U}$, telles que

$$\sum_{j \neq 0, j \notin \mathfrak{U}} |\gamma_j| < \eta |\gamma_0|. \tag{10}$$

L'énoncé de VI.7.4 vaut encore, ainsi qu'on le vérifie facilement, si l'on remplace (S_0) par

(S_3) : *quel que soit* $n(n = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ *il existe une infinité de valeurs de* k *pour lesquelles* $n + \rho_k j\alpha \in \Lambda_0$ *quand* $j \in \mathfrak{U}\,(j\alpha = j_1\alpha_1 + \ldots + j_m\alpha_m)$.

C'est pour pouvoir prendre une suite Λ_0 positive qu'on a imposé $\rho_k > 0$ et $j\alpha > 0$.

Soit maintenant $d\mu$ une pseudomesure à support dans $K \subset H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$. Pour tout u réel, et pour tout k, on a l'analogue de (9), soit

$$\int e^{iut} \varphi(\rho_k t\alpha)\, d\mu(t) = \sum_{j \in Z^m} \gamma_j M(u + \rho_k j\alpha) = 0.$$

Ainsi pour tout n,

$$|\gamma_0| . |M(n)| \leq \sum_{j \in \mathfrak{U}} |\gamma_j| \sup_{\lambda \in \Lambda_0} |M(\lambda)| + \sum_{j \neq 0, j \notin \mathfrak{U}} |\gamma_j| \sup_{u \in R} |M(u)|. \tag{11}$$

Or, K étant strictement contenu dans $[-\pi, \pi]$, on sait que sur $\exp^\infty K$ les normes $\sup_{u \in Z} |M(n)|$ et $\sup_{n \in R} |M(u)|$ sont équivalentes (1). Quitte à choisir η assez petit, (10) et (11) entraînent l'équivalence de ces normes avec $\sup |M(\lambda)|$, et le même résultat vaut lorsqu'on remplace Λ_0 par une sous-suite Λ ne différant de Λ_0 que par un nombre fini de points.

On transcrit ensuite aisément la démonstration de VI.9.2, et l'on conclut comme au paragraphe 9. Ainsi s'achève la démonstration de VI.10.1.

Des exemples intéressants d'ensembles $H_1^{\{n_k\}}$ et $H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$ sont fournis par les K_ξ, ensembles parfaits symétriques à rapport constant ξ (exemple 2 du paragraphe 5). Si $\frac{1}{\xi}$ est entier, K_ξ est un $H_1^{\{n_k\}}$; si $\frac{1}{\xi}$ est un nombre de Pisot non

---

(1) *Voir* p. ex. [2], p. 180.

entier (c'est-dire un entier algébrique dont tous les conjugués sont en module inférieurs à 1), K_ξ est un $H_{\Omega,\alpha}^{\{\rho_k\}}$ (vérification immédiate à partir de $[12]_{\text{II}}$, p. 154); dans tous les autres cas, K_ξ est du type M_0. D'après VI.3.1, VI.9.1 et VI.10.1, on a le résultat suivant :

THÉORÈME VI.10.2. — *Pour qu'il existe une fonction presque périodique $f \not\equiv 0$, dont le spectre satisfasse à une condition de rareté uniforme arbitraire, et qui s'annule sur un ensemble parfait symétrique à rapport constant ξ, $\left(\xi < \frac{1}{2}\right)$, il faut et il suffit que $\frac{1}{\xi}$ soit un nombre de Pisot. Dans ce cas, on peut imposer au spectre de f d'être contenu dans une suite positive Λ lacunaire à la Hadamard.*

Si $\frac{1}{\xi}$ est entier, on peut imposer de plus à Λ d'être une suite d'entiers. Nous ne savons pas si cela est possible en supposant seulement que $\frac{1}{\xi}$ est un nombre de Pisot.

On verra au paragraphe suivant un résultat plus profond concernant le cas : $\frac{1}{\xi}$ entier > 6.

Rappelons que K_ξ est surtriadique, donc justiciable du théorème VI.5.1, dès que $\frac{1}{\xi} < 3$. Cela n'exclut pas que $\frac{1}{\xi}$ puisse être un nombre de Pisot.

11. Le lemme VI.7.3 indique que, quel que soit I, la condition (R_1) du paragraphe 8 est satisfaite pour un ensemble $\mathfrak{U}$ d'entiers positifs. On peut évidemment préciser la relation entre I et $\mathfrak{U}$. En particulier, il sera intéressant d'indiquer des conditions sur I garantissant qu'on peut prendre $\mathfrak{U} = \{+1\}$ resp. $\mathfrak{U} = \{-1, +1\}$. En effet, on se servira alors, au lieu du lemme VI.7.4, du suivant, dont nous laissons la démonstratiom, immédiate, au lecteur.

LEMME VI.11.1. — *Soit $\rho_n (n = 1, 2, \ldots)$ une suite positive arbitrairement croissante. Si $\mathfrak{U} = \{+1\}$, il existe une suite d'entiers positifs $\Lambda = \{\lambda_n\} (n = 1, 2, \ldots)$ satisfaisant (S_2), et telle que, pour tout n, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \rho_n$. Si $\mathfrak{U} = \{-1, +1\}$, il existe une suite d'entiers $\Lambda = \{\lambda_n\} (n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ telle que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{-1} < 0$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \rho_n$ et $\frac{\lambda_{-n-1}}{\lambda_{-n}} > \rho_n$ pour tout entier $n > 0$.*

LEMME VI.11.2. — *Si $|I| > \frac{4\pi}{3}$, $\mathfrak{U} = \{+1\}$ satisfait (S_2).*

Démonstration. — Nous commencerons par construire une fonction $\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_j e^{ijx}$ telle que $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, $\sum_{j \neq 1, 2} |\beta_j| = 1$, et qui s'annule sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Pour cela, considérons la fonction $e^{i\frac{x}{3}} - e^{2i\frac{x}{3}}$ sur $[-\pi, \pi]$; sa série de Fourier est $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_j e^{ijx}$ avec $\alpha_j = \frac{(-1)^j}{6\left(j-\frac{1}{3}\right)\left(j-\frac{2}{3}\right)}$; ainsi

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_j| = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_j e^{ij\pi} = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{2i\frac{\pi}{3}} = 1.$$

Pour construire ψ, il suffit de poser $\beta_{3j} = -\alpha_j$, et $\beta_{3j+1} = \beta_{3j+2} = 0$ si $j \neq 0$. Supposons que I contient le segment $\left[a - \frac{\pi}{3} - \varepsilon, a + \frac{\pi}{3} + \varepsilon\right]$; on pose

$$\varphi(x) = e^{-i(x-a-\varepsilon)}\psi(x - a - \varepsilon) + e^{i(x+a+\varepsilon)}\psi(x + a + \varepsilon)$$

et l'on vérifie immédiatement que (S_2) est satisfaite avec $\mathfrak{U} = \{+1\}$.

Lemme VI.11.3. — *Si* $|I| > \pi$, $\mathfrak{U} = \{+1, -1\}$ *satisfait* (S_2).

Démonstration. — Soit $\psi(x) = \cos x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $(\operatorname{mod} 2\pi)$, 0 ailleurs. On a $\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_j e^{ijx}$ avec $\beta_j = \frac{-\cos\frac{j\pi}{2}}{\pi(j^2-1)}$, de sorte que $\beta_0 = \sum_{|j|\geq 2} |\beta_j|$. Soit $\left[a - \frac{\pi}{2} - \varepsilon, a + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right] \subset I$; on pose

$$\varphi(x) = \psi(x - a - \varepsilon) + \psi(x + a + \varepsilon)$$

et l'on vérifie immédiatement que (S_2) est satisfaite avec $\mathfrak{U} = \{+1, -1\}$.

A simple lecture de VI.9.2, VI.11.2 et VI.11.3, on a le théorème suivant :

Théorème VI.11.4. — *Considérons un ensemble de Rajchman* $H_I^{\{n_k\}}$, *et une suite positive* $\rho_n (n = 1, 2, \ldots)$ *qui croît aussi rapidement qu'on veut. On s'intéresse aux suites* Λ_0 *possédant la propriété suivante :* (H) *: pour chaque suite* $\Lambda \subset \Lambda_0$ *ne différant de* Λ_0 *que par un nombre fini de points, il existe une* $f \in E_\Lambda^1$, $f \not\equiv 0$, *s'annulant sur* $H_I^{\{n_k\}}$. *Si la longueur de* I *dépasse* $\frac{4\pi}{3}$, *il existe une suite d'entiers positifs* $\Lambda_0 = \{\lambda_n\} (n = 1, 2, \ldots)$, *satisfaisant* (H), *et très lacunaire dans le sens que* $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \rho_n (n = 1, 2, \ldots)$. *Si la longueur de* I *dépasse* π, *il existe une suite d'entiers* $\Lambda_0 = \{\lambda_n\} (n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ *satisfaisant* (H), *et très lacunaire dans le sens que* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{-1} < 0$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \rho_n$ *et* $\frac{\lambda_{-n-1}}{\lambda_{-n}} > \rho_n$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$.

INDEX TERMINOLOGIQUE ET DES NOTATIONS.

BIBLIOGRAPHIE.

[0] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932.
[1] A. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge U. P., 1932.
[2] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
[3] R. Duffin et A. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series* (*Transactions of the Amer. Math. Soc.*, t. 72, 1952, p. 341-366).
[4] H. Helson et D. Lowdenslager, *Prediction theory and Fourier series in several variables* (*Acta Mathematica*, t. 99, 1958, p. 165-202).
[5] A. Ingham, *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series* (*Math. Zeitschrift*, t. 41, 1936, p. 367-379).
[6] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées* (*Ann. Inst. Fourier*, t. VIII, 1957, p. 293-314).
[7] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1935.
[8] R. Paley et N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, *Colloq. Public. Amer. Math. Soc.*, New York, 1934.
[9] M. Plancherel et G. Pólya, *Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples* (*Comment. Math. Helv.*, t. 9, 1937, p. 224-248).
[10] R. Salem, *On singular monotonic functions whose spectrum has a given Hausdorff dimension* (*Arkiv för Matematik*, t. 1, 1950, p. 353-365).
[11] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. I et II, Hermann, Paris 1950 et 1951.
[12] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, t. I et II, 2e édition, Cambridge U. P., 1959.