

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ LAGRANGE

## Sur les permutations avec répétition

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 79, n° 1 (1962), p. 23-70

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1962\\_3\\_79\\_1\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_1_23_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LES PERMUTATIONS AVEC RÉPÉTITION.

PAR M. RENÉ LAGRANGE.



## INTRODUCTION

Les permutations avec répétition de  $n$  objets, soit  $\alpha$  objets  $a$ ,  $\beta$  objets  $b$ , ...,  $\lambda$  objets  $l$ , sont les groupements distincts de ces  $n$  objets, alignés dans un sens donné. Nous désignerons leur nombre par la parenthèse

$$(\alpha, \beta, \dots, \lambda) = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}.$$

On peut supposer, par exemple, qu'il s'agit de segments de droite, de couleurs différentes, soit  $\alpha$  de couleur  $a$ ,  $\beta$  de couleur  $b$ , etc., avec lesquels on construit une ligne brisée coloriée, orientée.

Si l'on fait abstraction de l'orientation, on considère comme équivalentes deux lignes brisées dont les côtés présentent la même suite de couleurs lorsqu'on les parcourt dans des sens convenables. Le nombre des permutations distinctes est inférieur au nombre précédent, et nous le désignerons par  $D(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$ .

Ceci suppose qu'on construit des lignes brisées ouvertes. Mais si l'on fait des polygones, deux tels polygones coloriés sont considérés comme équivalents s'ils fournissent la même suite de couleurs lorsqu'on les parcourt dans des sens convenables, à partir de sommets convenables. Le nombre des permutations est encore réduit, et nous le désignerons par  $P(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$ .

L'objet de cet article est la détermination de  $D(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$ , ainsi que des nombres  $P(\alpha, \beta)$  lorsque, pour ces derniers, l'un des deux arguments est inférieur à 7, car la recherche de l'expression de  $P(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$  devient vite très difficile.

Observons qu'avec des segments de même longueur  $l$ ,  $(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$  représente le nombre des vecteurs coloriés de la droite, de longueur  $nl$ , non

équipollents, que permettent de construire ces  $n$  segments.  $D(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$  est le nombre des segments coloriés du plan, de longueur  $n\lambda$ , non superposables par déplacement, et  $P(\alpha, \beta, \dots, \lambda)$  est le nombre des polygones convexes, réguliers, coloriés, non superposables par déplacement, ayant  $n$  côtés de longueur  $\lambda$ .

Avant d'aborder cette étude, énonçons quelques identités concernant les permutations orientées :

$$(I) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 1} (\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n),$$

où les  $\varepsilon_i$  sont des symboles ne prenant que les valeurs 0 ou 1. (I) est bien connu, et traduit la décomposition de l'ensemble des permutations en les sous-ensembles formés par celles qui ont un même premier élément.

$$(II) \quad \sum_{s=0}^{\alpha} (s, r_1, r_2, \dots, r_p) = (r_1, r_2, \dots, r_p) (\alpha, r_1 + r_2 + \dots + r_p + 1).$$

(II) se ramène tout de suite à la forme particulière où  $p = 1$

$$\sum_{s=0}^{\alpha} (s, r) = (\alpha, r + 1);$$

celle-ci est évidente pour  $r = 0$  ou  $\alpha = 0$ ; elle se démontre alors par récurrence, portant sur  $\alpha$  et sur  $r$ , à l'aide de (I) qui donne

$$\sum_{s=0}^{\alpha} (s, r) = \sum_{s=0}^{\alpha} (s, r-1) + \sum_{s=1}^{\alpha} (s-1, r) = \sum_{s=0}^{\alpha} (s, r-1) + \sum_{s=0}^{\alpha-1} (s, r).$$

$$(III) \quad \sum_{s=0}^{\alpha} (s, r_1, r_2, \dots, r_p) (\alpha - s, r'_1, r'_2, \dots, r'_q) \\ = (r_1, r_2, \dots, r_p) (r'_1, r'_2, \dots, r'_q) (\alpha, r_1 + \dots + r_p + r'_1 + \dots + r'_q + 1).$$

(III) se ramène tout de suite à la forme où  $p = q = 1$ , soit

$$\sum_{s=0}^{\alpha} (s, r) (\alpha - s, r') = (\alpha, r + r' + 1);$$

celle-ci est évidente pour  $\alpha = 0$ , ou si  $r$  ou  $r'$  est nul; elle se démontre aisément par récurrence portant sur  $\alpha$  et  $r$ , à l'aide de (I).

$$(IV) \quad \sum_{\substack{s_i=0 \\ i=1,2,\dots,n}}^{\alpha_i} (s_1, s_2, \dots, s_n, r_1, \dots, r_p) (\alpha_1 - s_1, \dots, \alpha_n - s_n, r'_1, \dots, r'_q) \\ = (r_1, r_2, \dots, r_p) (r'_1, r'_2, \dots, r'_q) (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, r_1 + \dots \\ + r_p + r'_1 + \dots + r'_q + 1).$$

Il n'y a qu'à appliquer (III) aux différentes sommes relatives aux  $s_i$ , ou, plus simplement, à l'utiliser pour la somme relative à  $s_n$ , en admettant sa validité pour  $n - 1$  arguments  $s_i$ .

$$(V) \quad \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=p} (r_1, \alpha_1 - r_1)(r_2, \alpha_2 - r_2) \dots (r_n, \alpha_n - r_n) = (p, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - p).$$

Ce n'est rien d'autre que la formule classique relative aux coefficients du développement du binome, obtenue en écrivant que la puissance d'ordre  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  est le produit des puissances d'ordres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

$$(VI) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{r_i=0 \\ i=1,2,\dots,n; i \neq k}}^{\alpha_i-1} (r_1, \dots, r_{k-1}, \alpha_k - 1, r_{k+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_1 - r_1, \dots, \alpha_{k-1} - r_{k-1}, \alpha_{k+1} - r_{k+1}, \dots, \alpha_n - r_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

C'est une évidence pour  $n = 1$ . Admettons sa validité pour moins de  $n$  arguments. Grâce à (I),

$$(\alpha_1 - r_1, \dots, \alpha_{k-1} - r_{k-1}, \alpha_{k+1} - r_{k+1}, \dots, \alpha_n - r_n) \\ = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\alpha_1 - r_1, \dots, \alpha_{l-1} - r_{l-1}, \dots, \alpha_n - r_n).$$

Dans la somme multiple, l'ensemble des termes pour lesquels  $l$  a une même valeur, par exemple  $l = 1$ , donne

$$\sum_{k=2}^n \sum_{\substack{r_i=0 \\ i=1,2,\dots,n; i \neq k}}^{\alpha_i-1} (r_1, \dots, r_{k-1}, \alpha_k - 1, r_{k+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_1 - 1 - r_1, \alpha_2 - r_2, \dots, \alpha_{k-1} - r_{k-1}, \alpha_{k+1} - r_{k+1}, \dots, \alpha_n - r_n);$$

la somme relative à  $r_1$ , effectuée à l'aide de (III), réduit ceci à

$$\sum_{k=2}^n \sum_{\substack{r_i=0 \\ i=2,3,\dots,n; i \neq k}}^{\alpha_i-1} (r_2, \dots, r_{k-1}, \alpha_k - 1, r_{k+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_2 - r_2, \dots, \alpha_{k-1} - r_{k-1}, \alpha_{k+1} - r_{k+1}, \dots, \alpha_n - r_n) (\alpha_1 - 1, \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n),$$

et ensuite, grâce à (VI) elle-même, valable pour  $n - 1$  arguments, à

$$(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) (\alpha_1 - 1, \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n).$$

La somme complète est ainsi grâce à (I),

$$\sum_{l=1}^n (\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_l - 1, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

C. Q. F. D.

## CHAPITRE I.

## PERMUTATIONS RECTILIGNES NON ORIENTÉES.

1. Sur la droite non orientée, un segment colorié, formé par  $n$  segments de même longueur  $l$ , ne peut-être égal à un autre segment analogue de longueur  $nl$  que d'une seule façon, si les deux côtés <sup>(1)</sup> extrêmes n'ont pas la même couleur. Le nombre des segments distincts de cette catégorie est donc le même que celui des segments orientés de  $n - 2$  côtés, construits avec les couleurs restantes; ainsi, ceux dont les deux couleurs extrêmes sont  $a$  et  $b$  sont au nombre de  $(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma, \dots, \lambda)$ , en conservant les notations de l'introduction. Le nombre total des segments analogues est donc

$$\sum_{\varepsilon + \varepsilon' + \dots = 2} (\alpha - \varepsilon, \beta - \varepsilon', \gamma - \varepsilon'', \dots),$$

où  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$  sont des symboles ne prenant que les valeurs 0 ou 1. Les autres segments de l'ensemble ont leurs côtés extrêmes de même couleur; pour eux, la loi d'équivalence est la même que pour les segments obtenus par amputation des deux côtés extrêmes, tout au moins dans chaque sous-ensemble où la couleur extrême est la même. Ainsi, le nombre de ceux dont les deux côtés extrêmes ont la couleur  $a$  est  $D(\alpha - 2, \beta, \dots, \lambda)$ , et, pour leur ensemble, le nombre de ces segments est

$$\sum_{\varepsilon + \varepsilon' + \dots = 1} D(\alpha - 2\varepsilon, \beta - 2\varepsilon', \gamma - 2\varepsilon'', \dots).$$

Nous avons ainsi établi la loi de récurrence

$$(1) \quad D(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \sum_{\varepsilon + \varepsilon' + \dots = 2} (\alpha - \varepsilon, \beta - \varepsilon', \gamma - \varepsilon'', \dots) \\ + \sum_{\varepsilon + \varepsilon' + \dots = 1} D(\alpha - 2\varepsilon, \beta - 2\varepsilon', \gamma - 2\varepsilon'', \dots).$$

2. CALCUL DE  $D(\alpha, \beta)$ . — Ici, (1) s'écrit

$$(2) \quad D(\alpha, \beta) = (\alpha - 1, \beta - 1) + D(\alpha - 2, \beta) + D(\alpha, \beta - 2).$$

Une première itération donne tout de suite

$$D(\alpha, \beta) = \sum_{p=0}^1 \sum_{r+s=p} (\alpha - 1 - 2r, \beta - 1 - 2s) + \sum_{r+s=2} (r, s) D(\alpha - 2r, \beta - 2s),$$

---

(1) Il sera commode d'appeler « côtés » les segments de longueurs  $l$ , comme pour une ligne brisée de  $n$  côtés.

où  $r, s$  sont des entiers naturels. On en déduit, par récurrence, la relation générale

$$(3) \quad D(\alpha, \beta) = \sum_{\rho=0}^m \sum_{r+s=\rho} (r, s) (\alpha-1-2r, \beta-1-2s) \\ + \sum_{r+s=m+1} (r, s) D(\alpha-2r, \beta-2s).$$

Admettons sa validité pour la valeur  $m$ . Grâce à (2), la dernière somme se décompose en

$$\sum_{r+s=m+1} (r, s) (\alpha-1-2r, \beta-1-2s) \\ + \sum_{r+s=m+1} \sum_{\varepsilon+\varepsilon'=1} (r, s) D(\alpha-2\varepsilon-2r, \beta-2\varepsilon'-2s).$$

Les nombres  $r_1 = r + \varepsilon, s_1 = s + \varepsilon'$  ont la somme  $r_1 + s_1 = m + 2$ , et le coefficient du terme  $D(\alpha - 2r_1, \beta - 2s_1)$  est

$$\sum_{\varepsilon+\varepsilon'=1} (r_1 - \varepsilon, s_1 - \varepsilon') = (r_1, s_1).$$

(3) est ainsi étendue à la valeur  $m + 1$ .

(3) permet de calculer  $D(\alpha, \beta)$ , à partir des relations évidentes

$$(4) \quad \begin{cases} D(\alpha, \beta) = D(\beta, \alpha), \\ D(\alpha, 0) = 1. \end{cases}$$

3. On peut poursuivre l'itération tant que le terme  $D(\alpha - 2r, \beta - 2s)$  à développer par (2) n'a pas d'argument nul, tandis qu'un terme  $D(\alpha - 2r, 0)$ , où  $\alpha - 2r > 0$ , est remplacé par 1. Cette dernière circonstance est impossible lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont impairs; mais alors la seconde somme dans (3) disparaît dès que  $m$  est assez grand, ce qui donne, avec  $\alpha = 2\alpha' + 1, \beta = 2\beta' + 1$ ,

$$(5) \quad D(2\alpha' + 1, 2\beta' + 1) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq \alpha' \\ 0 \leq s \leq \beta'}} (r, s) (2\alpha' - 2r, 2\beta' - 2s).$$

Si  $\alpha = 2\alpha' + 1, \beta = 2\beta'$ , le deuxième argument de  $D(\alpha - 2r, \beta - 2s)$ , avec  $0 \leq r \leq \alpha'$ , peut s'annuler. Un tel terme  $D(\alpha - 2r, 0)$  provient du développement par (2) d'un terme

$$D(\alpha - 2r, 2) = D(\alpha - 2r, 2\beta' - 2(\beta' - 1))$$

provenant d'une formule (3) d'indice  $m = r + \beta' - 2$ ; dans cette formule, son coefficient est  $(r, \beta' - 1)$ , qui se conserve dans l'itération, de sorte que le terme en  $D(\alpha - 2r, 0)$  est

$$(r, \beta' - 1) D(\alpha - 2r, 0) = (r, \beta' - 1).$$

Ce même terme se conserve dans les itérations suivantes. Ainsi, lorsque tous les termes  $D(\alpha - 2r, \beta - 2s)$  ont disparu, on a obtenu le développement

$$D(2\alpha' + 1, 2\beta') = \sum_{\substack{0 \leq r \leq \alpha' \\ 0 \leq s \leq \beta' - 1}} (r, s)(2\alpha' - 2r, 2\beta' - 1 - 2s) + \sum_{0 \leq r \leq \alpha'} (r, \beta' - 1),$$

ou, grâce à (II),

$$(6) \quad D(2\alpha' + 1, 2\beta') = \sum_{\substack{0 \leq r \leq \alpha' \\ 0 \leq s \leq \beta' - 1}} (r, s)(2\alpha' - 2r, 2\beta' - 1 - 2s) + (\alpha', \beta').$$

Enfin, lorsque  $\alpha = 2\alpha'$ ,  $\beta = 2\beta'$  sont pairs tous les deux, le même raisonnement montre qu'il apparaît des termes  $D(\alpha - 2r, 0)$ , où  $0 \leq r < \alpha'$ , avec le coefficient  $(r, \beta' - 1)$ , et des termes  $D(0, \beta - 2s)$ , où  $0 \leq s < \beta'$ , avec le coefficient  $(\alpha' - 1, s)$ . Il vient ainsi

$$D(2\alpha', 2\beta') = \sum_{\substack{0 \leq r \leq \alpha' - 1 \\ 0 \leq s \leq \beta' - 1}} (r, s)(2\alpha' - 1 - 2r, 2\beta' - 1 - 2s) \\ + \sum_{0 \leq r \leq \alpha' - 1} (r, \beta' - 1) + \sum_{0 \leq s \leq \beta' - 1} (\alpha' - 1, s).$$

(II) remplace la somme des dernières sommes par

$$(\alpha' - 1, \beta') + (\alpha', \beta' - 1) = (\alpha', \beta'),$$

donc

$$(7) \quad D(2\alpha', 2\beta') = \sum_{\substack{0 \leq r \leq \alpha' - 1 \\ 0 \leq s \leq \beta' - 1}} (r, s)(2\alpha' - 1 - 2r, 2\beta' - 1 - 2s) + (\alpha', \beta').$$

On peut rassembler ces expressions (5), (6), (7) en la formule unique

$$(8) \quad D(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq \left[\frac{\alpha-1}{2}\right] \\ 0 \leq s \leq \left[\frac{\beta-1}{2}\right]}} (r, s)(\alpha - 1 - 2r, \beta - 1 - 2s) \\ + \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha, \beta \text{ sont impairs,} \\ \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) & \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est pair.} \end{cases}$$

4. Cette formule remarquable peut être remplacée par l'expression encore plus simple

$$(9) \quad D(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha, \beta) + \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha, \beta \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) & \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est pair.} \end{cases}$$

C'est vérifié pour  $\beta = 0$ , et pour  $\alpha = \beta = 1$ , et il suffit de raisonner par récurrence à l'aide de (2). Admettons que (9) soit valable pour les  $D(\alpha_1, \beta_1)$  tels que  $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha + \beta$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont impairs, (2) donne en effet

$$\begin{aligned} 2D(\alpha, \beta) &= 2(\alpha - 1, \beta - 1) + 2D(\alpha - 2, \beta) + 2D(\alpha, \beta - 2) \\ &= [(\alpha - 1, \beta - 1) + (\alpha - 2, \beta)] + [(\alpha - 1, \beta - 1) + (\alpha, \beta - 2)] \\ &= (\alpha - 1, \beta) + (\alpha, \beta - 1) = (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

tandis que, lorsque  $\alpha$  ou  $\beta$  est pair, on doit ajouter aux termes précédents

$$\left( \left[ \frac{\alpha - 2}{2} \right], \left[ \frac{\beta}{2} \right] \right) + \left( \left[ \frac{\alpha}{2} \right], \left[ \frac{\beta - 2}{2} \right] \right) = \left( \left[ \frac{\alpha}{2} \right] - 1, \left[ \frac{\beta}{2} \right] \right) + \left( \left[ \frac{\alpha}{2} \right], \left[ \frac{\beta}{2} \right] - 1 \right) = \left( \left[ \frac{\alpha}{2} \right], \left[ \frac{\beta}{2} \right] \right).$$

C. Q. F. D.

La comparaison de (8) et de (9) fournit l'identité remarquable

$$\begin{aligned} (10) \quad \sum_{\substack{0 \leq r \leq \left[ \frac{\alpha-1}{2} \right] \\ 0 \leq s \leq \left[ \frac{\beta-1}{2} \right]}} (r, s)(\alpha - 1 - 2r, \beta - 1 - 2s) \\ = \frac{1}{2} (\alpha, \beta) - \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha, \beta \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\alpha}{2} \right], \left[ \frac{\beta}{2} \right] \right) & \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est pair,} \end{cases} \end{aligned}$$

que l'on peut naturellement démontrer directement par récurrence.

5. FORMULE GÉNÉRALE. — Quel que soit  $n$ , on a la forme généralisée de (9)

$$(11) \quad D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{2} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\alpha_1}{2} \right], \left[ \frac{\alpha_2}{2} \right], \dots, \left[ \frac{\alpha_n}{2} \right] \right) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(11) est vraie lorsque  $n - 1$ , ou même  $n - 2$ , des  $\alpha_i$  sont nuls. Supposons donc qu'elle ait été démontrée pour  $n$  arguments  $\alpha_i$  dont la somme est inférieure à  $m$ , et étendons la au cas où  $\sum \alpha_i = m$ . Dans cette dernière hypothèse, (1) et (11) donnent

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 2} (\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n) \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 1} D(\alpha_1 - 2\varepsilon_1, \alpha_2 - 2\varepsilon_2, \dots, \alpha_n - 2\varepsilon_n) \\ &= \sum_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 2} (\alpha_1 - \varepsilon_1, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1} (\alpha_1 - 2\varepsilon_1, \dots, \alpha_n - 2\varepsilon_n) + S, \end{aligned}$$



où  $S = 0$  lorsque deux des  $\alpha_i$  sont impairs, et

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1} \left( \left[ \frac{\alpha_1}{2} \right] - \varepsilon_1, \left[ \frac{\alpha_2}{2} \right] - \varepsilon_2, \dots, \left[ \frac{\alpha_n}{2} \right] - \varepsilon_n \right)$$

dans les autres cas. Grâce à (I), on a donc

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\alpha_1}{2} \right], \left[ \frac{\alpha_2}{2} \right], \dots, \left[ \frac{\alpha_n}{2} \right] \right) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'autre part, la même formule (I) réitérée donne

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\substack{\varepsilon'_1 + \dots + \varepsilon'_n = 1 \\ \varepsilon''_1 + \dots + \varepsilon''_n = 1}} (\alpha_1 - \varepsilon'_1 - \varepsilon''_1, \alpha_2 - \varepsilon'_2 - \varepsilon''_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon'_n - \varepsilon''_n).$$

Ici, un terme où  $\varepsilon'_i = \varepsilon''_i = 1$  n'apparaît qu'une fois, et est de la forme  $(\alpha_1 - 2\varepsilon_1, \alpha_2 - 2\varepsilon_2, \dots, \alpha_n - 2\varepsilon_n)$ , avec  $\sum \varepsilon_k = 1$ , tandis qu'un terme où  $\varepsilon'_i = \varepsilon''_j = 1$ ,  $i \neq j$ , est égal à celui où  $\varepsilon'_i = \varepsilon''_i = 1$ , et est de la forme  $(\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n)$  avec  $\sum \varepsilon_k = 2$ , ce qui démontre (11) pour  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m$ .

6. Il n'est pas sans intérêt de généraliser également (8), en calculant  $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  par un procédé plus analytique. Il s'agit de démontrer qu'on a

$$(12) \quad D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 2} \sum_{r_1, \dots, r_n} (r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \alpha_2 - \varepsilon_2 - 2r_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n) \\ + \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \left( \left[ \frac{\alpha_1}{2} \right], \left[ \frac{\alpha_2}{2} \right], \dots, \left[ \frac{\alpha_n}{2} \right] \right) & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

la somme  $\sum_{r_1, \dots, r_n}$  étant une somme multiple où chaque  $r_i$  prend les valeurs entières de l'intervalle fermé  $0, \left[ \frac{\alpha_i - \varepsilon_i}{2} \right]$ . Nous raisonnons toujours par récurrence en admettant que (12) ait été établi pour moins de  $n$  arguments. Comme au paragraphe 2, on voit tout de suite que

$$(13) \quad D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 2} \sum_{r_1 + \dots + r_n \leq m} (r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n) \\ + \sum_{r_1 + \dots + r_n = m+1} (r_1, r_2, \dots, r_n) D(\alpha_1 - 2r_1, \alpha_2 - 2r_2, \dots, \alpha_n - 2r_n),$$

et l'on peut réitérer tant que les  $n$  arguments de  $D(\alpha_1 - 2r_1, \dots, \alpha_n - 2r_n)$  sont positifs. Dès que l'un d'eux est nul, on conserve le terme  $D$  à  $n - 1$  arguments positifs; par exemple, si  $\alpha_1 - 2r_1 = 0$ , ce qui suppose que  $\alpha_1$  est pair, on a ainsi les termes

$$\left(\frac{\alpha_1}{2} - 1, r_2, \dots, r_n\right) D(\alpha_2 - 2r_2, \alpha_3 - 2r_3, \dots, \alpha_n - 2r_n).$$

Si donc tous les  $\alpha_i$  sont impairs, la formule (13) réitérée au maximum donne

$$(14) \quad D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\Sigma \varepsilon_i = 2} \sum_{r_1, \dots, r_n} (r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \alpha_2 - \varepsilon_2 - 2r_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n),$$

où les  $r_i$  prennent les valeurs vérifiant  $0 \leq r_i \leq \left[\frac{\alpha_i - \varepsilon_i}{2}\right]$ .

Dans le cas général, supposons que les  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, p)$  soient impairs et que les  $\alpha_k (k = p + 1, p + 2, \dots, n)$  soient pairs. Posons  $\alpha_j = 2\alpha'_j + 1$ ,  $\alpha_k = 2\alpha'_k$ . L'itération maximale de (13) donne

$$(15) \quad D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = \sum_{\Sigma \varepsilon_i = 2} \sum_{\substack{0 \leq r_j \leq \alpha'_j \\ 0 \leq r_k \leq \alpha'_k - 1}} (r_1, \dots, r_n) (2\alpha'_j + 1 - \varepsilon_j - 2r_j, \quad 2\alpha'_k - \varepsilon_k - 2r_k) + \sum_{l=p+1}^n S_l,$$

où

$$(16) \quad S_l = \sum_{\substack{0 \leq r_j \leq \alpha'_j \\ 0 \leq r_k \leq \alpha'_k - 1}} (r_1, \dots, r_p, r_{p+1}, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) \\ \times D(\alpha_j - 2r_j, \alpha_{p+1} - 2r_{p+1}, \dots, \alpha_{l-1} - 2r_{l-1}, \alpha_{l+1} - 2r_{l+1}, \dots, \alpha_n - 2r_n) \\ (j = 1, \dots, p).$$

Dans ces expressions,  $j$  ne prend que les valeurs entières au plus égales à  $p$ , et  $k$  prend les valeurs  $p + 1, p + 2, \dots, n$  à l'exception de  $l$  dans  $S_l$ ; nous désignerons par  $i$  un indice prenant toutes les valeurs  $1 \leq i \leq n$ , sauf indication contraire.

Si  $p \geq 2$ , (12) permet d'écrire

$$S_l = \sum_{\substack{0 \leq r_j \leq \alpha'_j \\ 0 \leq r_k \leq \alpha'_k - 1}} \sum_{\Sigma \varepsilon_i = 2} \sum_{\substack{0 \leq s_i \leq \alpha'_i - r_i \\ i \neq l}} (r_1, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) (s_1, \dots, s_{l-1}, s_{l+1}, \dots, s_n) \\ \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1 - 2s_1, \dots, \alpha_i - \varepsilon_i - 2r_i - 2s_i, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n - 2s_n).$$

Un argument  $\alpha_k - \varepsilon_k - 2r_k - 2s_k$  de cette dernière parenthèse ne peut s'annuler que si  $\varepsilon_k = 0$ ,  $r_k + s_k = \alpha'_k$ . Considérons celles de ces parenthèses

où  $\alpha_k - \varepsilon_k - 2r_k - 2s_k$  est nul <sup>(1)</sup> pour  $k = q + 1, q + 2, \dots, n$ , mais positif pour  $p < k \leq q$ . Posons  $\rho_i = r_i + s_i$ , et soit

$$(\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2\rho_1, \dots, \alpha_p - \varepsilon_p - 2\rho_p, \alpha_{p+1} - \varepsilon_{p+1} - 2\rho_{p+1}, \dots, \alpha_q - \varepsilon_q - 2\rho_q)$$

une telle parenthèse, où  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q = 2$ ,  $0 \leq \rho_j \leq \alpha'_j$ ,  $0 \leq \rho_k \leq \alpha'_k - 1$ ,  $p < k \leq q$ .

Ceci suppose évidemment  $l > q$ , et le coefficient de cette parenthèse dans un tel  $S_l$  est

$$\sum_{0 \leq r_j \leq \rho_j} \sum_{\substack{0 \leq r_k \leq \rho_k \\ p < k \leq q}} \sum_{\substack{0 \leq r_h \leq \alpha'_h - 1 \\ q < h \leq n; h \neq l}} (r_1, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, \dots, r_n) \\ \times (\rho_1 - r_1, \dots, \rho_q - r_q, \dots, \alpha'_h - r_h, \dots) \\ (q < h \leq n, h \neq l)$$

Grâce à (IV), la somme relative aux indices  $r_1, r_2, \dots, r_q$  vaut

$$(r_{q+1}, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha'_{q+1} - r_{q+1}, \dots, \alpha'_h - r_h, \dots, \alpha'_n - r_n) (\rho_1, \dots, \rho_q, \alpha'_{q+1} + \alpha'_{q+2} + \dots + \alpha'_n) \\ h \neq l$$

Pour l'ensemble des  $S_l (l > q)$  contenant la parenthèse en question, le coefficient de celle-ci est ainsi

$$(\rho_1, \dots, \rho_q, \alpha'_{q+1} + \dots + \alpha'_n) \sum_{l=q+1}^n \sum_{\substack{0 \leq r_h \leq \alpha'_h - 1 \\ q < h \leq n; h \neq l}} (r_{q+1}, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha'_{q+1} - r_{q+1}, \dots, \alpha'_h - r_h, \dots, \alpha'_n - r_n), \\ (h \neq l)$$

ou, d'après (VI),

$$(\rho_1, \dots, \rho_q, \alpha'_{q+1} + \dots + \alpha'_n) (\alpha'_{q+1}, \alpha'_{q+2}, \dots, \alpha'_n) = (\rho_1, \dots, \rho_q, \alpha'_{q+1}, \dots, \alpha'_n)$$

Ainsi, lorsque  $p \geq 2$ , il vient

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ = \sum_{\Sigma \varepsilon_i = 2} \sum_{\substack{0 \leq r_j \leq \alpha'_j \\ 0 \leq r_k \leq \alpha'_k - 1}} (r_1, r_2, \dots, r_n) (\alpha_j - \varepsilon_j - 2r_j, \alpha_k - \varepsilon_k - 2r_k) \\ (1 \leq j \leq p) \quad (p < k \leq n) \\ + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} \sum_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p + \varepsilon_{k_1} + \dots + \varepsilon_{k_m} = 2} \sum_{\substack{0 \leq r_j \leq \alpha'_j \\ 0 \leq r_{k_s} \leq \alpha'_{k_s}}} (r_1, \dots, r_p, r_{k_1}, \dots, r_{k_m}, \alpha'_{h_1}, \dots, \alpha'_{h_m'}) \\ \times (\alpha_j - \varepsilon_j - 2r_j, \alpha_{k_s} - \varepsilon_{k_s} - 2r_{k_s}), \\ (1 \leq j \leq p) \quad (1 \leq s \leq m)$$

<sup>(1)</sup> A cause de la symétrie par rapport aux arguments, il n'est pas restrictif d'admettre que ce sont les  $n - q$  derniers arguments qui sont nuls.

où les  $k_s$  forment toutes les combinaisons  $m$  à  $m$  des indices  $p + 1, p + 2, \dots, n$ , et  $h_1, h_2, \dots, h_{m'}$  ( $m + m' = n - p$ ) représentent les  $n - p - m$  autres indices supérieurs à  $p$ . Dans ce cas, la réunion des deux sommes multiples s'écrit donc, conformément à l'extension de (12),

$$(17) \quad D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\sum \varepsilon_i = 2} \sum_{\substack{0 \leq r_i \leq \alpha'_i \\ 1 \leq i \leq n}} (r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \alpha_2 - \varepsilon_2 - 2r_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n),$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs possibles des  $r_i$ .

Lorsque  $p = 1$ , le calcul qui précède est encore valable, à condition d'ajouter le terme

$$(\alpha'_1 - r_1, \dots, \alpha'_{l-1} - r_{l-1}, \alpha'_{l+1} - r_{l+1}, \dots, \alpha'_n - r_n)$$

au développement du terme D au second membre de (16) que nous avait fourni la formule (12). Il convient d'ajouter au développement de  $S_l$  ( $2 \leq l \leq n$ ) le terme

$$\sigma_l = \sum_{\substack{0 \leq r_1 \leq \alpha'_1 \\ 0 \leq r_k \leq \alpha'_k - 1; k \neq l}} (r_1, r_2, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha'_1 - r_1, \alpha'_2 - r_2, \dots, \alpha'_{l-1} - r_{l-1}, \alpha'_{l+1} - r_{l+1}, \dots, \alpha'_n - r_n).$$

Grâce à (III), la somme relative à  $r_1$  vaut

$$(r_2, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha'_2 - r_2, \dots, \alpha'_{l-1} - r_{l-1}, \alpha'_{l+1} - r_{l+1}, \dots, \alpha'_n - r_n) (\alpha'_1, \alpha'_2 + \alpha'_3 + \dots + \alpha'_n).$$

Par suite,

$$\sum_{l=2}^n \sigma_l = (\alpha'_1, \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n) \sum_{l=2}^n \sum_{\substack{0 \leq r_k \leq \alpha'_k - 1 \\ 2 \leq k \leq n; k \neq l}} (r_2, \dots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \dots, r_n) \\ \times (\alpha'_2 - r_2, \dots, \alpha'_{l-1} - r_{l-1}, \alpha'_{l+1} - r_{l+1}, \dots, \alpha'_n - r_n),$$

qui vaut, d'après (VI),

$$(\alpha'_1, \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n) (\alpha'_2, \alpha'_3, \dots, \alpha'_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n).$$

Dans ce cas, il suffit donc d'ajouter à (17) cette dernière parenthèse

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = \left( \left[ \frac{\alpha_1}{2} \right], \left[ \frac{\alpha_2}{2} \right], \dots, \left[ \frac{\alpha_n}{2} \right] \right),$$

ce qui établit (12) pour ces  $n$  arguments.

La comparaison des développements (11) et (12) fournit l'identité

$$(18) \quad \sum_{\sum \varepsilon_i = 2} \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} (r_1, r_2, \dots, r_n) (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n) \\ = \frac{1}{2} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\alpha_1}{2} \right], \left[ \frac{\alpha_2}{2} \right], \dots, \left[ \frac{\alpha_n}{2} \right] \right) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

## CHAPITRE II.

PERMUTATIONS FERMÉES AVEC RÉPÉTITION  $P(\alpha, \beta)$ ,

7. Rappelons que nous ne traiterons que des  $P(\alpha, \beta)$  dont l'un des arguments est inférieur à 7. Nous supposons, dans ce chapitre, que cet argument ne dépasse pas 5. Soit  $1 \leq \alpha \leq 5$ ,  $\alpha + \beta = n$ , et calculons  $P_n^\alpha = P(\alpha, n - \alpha)$  pour ces cinq valeurs de  $\alpha$ . Au lieu de colorier les côtés du polygone construit avec les  $n$  segments, il est équivalent, et plus commode pour l'exposé, de colorier les sommets, donc  $\alpha$  en la couleur  $a$ , et  $\beta = n - \alpha$  en la couleur  $b$ . Les sommets  $S_i$  de ce polygone régulier convexe seront numérotés de 0 à  $n - 1$ , dans le sens positif du cercle orienté, et l'on peut toujours supposer que  $S_0$  a la couleur  $a$ .

Il est clair que  $P_n^1 = 1$ . Pour  $\alpha = 2$ , un deuxième sommet  $S_m$  a la couleur  $a$ , de sorte que les arcs séparant les deux couleurs  $a$  mesurent respectivement  $m$  et  $n - m$ , si l'unité de mesure est l'arc soutenu par un côté. La symétrie par rapport au diamètre de  $S_0$  permet de supposer  $m \leq n - m$ , donc les seuls polygones distincts sont ceux pour lesquels  $m$  vérifie la double inégalité  $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$ ; ainsi

$$(1) \quad P_n^2 = \left[ \frac{n}{2} \right].$$

8.  $\alpha$  valant 3, les trois sommets de couleurs  $a$  sont séparés par trois écarts  $q_1, q_2, q_3$  dans le sens positif, à partir de  $S_0$ ; soit  $m$  leur borne inférieure. On peut faire  $q_1 = m$ , et, à l'aide d'une symétrie diamétrale, supposer que  $m = q_1 \leq q_2 \leq q_3$ . Ces sommets sont alors numérotés 0,  $m, m_1$ , avec  $1 \leq m, 2m \leq m_1, m_1 - m \leq n - m_1$ , c'est-à-dire

$$(2) \quad \begin{cases} 2m \leq m_1 \leq \frac{n+m}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n}{3}. \end{cases}$$

Le nombre des polygones distincts de cette espèce est donc

$$P_n^3 = \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n}{3} \right]} \left( \left[ \frac{n+m}{2} \right] - 2m + 1 \right).$$

Décomposons cette somme en deux parties, suivant que  $m$  est pair ou impair. Les termes où  $m = 2p$  ont la somme

$$(3) \quad \begin{aligned} A_n^3 &= \sum_{p=1}^{\left[ \frac{n}{6} \right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 - 3p \right) = \left[ \frac{n}{6} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 - \frac{3}{2} \left( \left[ \frac{n}{6} \right] + 1 \right) \right\} \\ &= \left[ \frac{n}{6} \right] \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left[ \frac{n}{6} \right] \right). \end{aligned}$$

On voit tout de suite que les termes où  $m = 2p - 1$  ont la somme  $A_{n+3}^3$ , de sorte que

$$(4) \quad P_n^3 = A_n^3 + A_{n+3}^3,$$

avec l'expression (3) de  $A_n^3$ . L'expression polynomiale de  $P_n^3$  dépend de la classe mod 6 à laquelle appartient  $n$ . Des calculs simples donnent ainsi :

$$\begin{aligned} n = 6\nu & : \left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n}{2}, & \left[ \frac{n}{6} \right] = \frac{n}{6}; & A_n^3 = \frac{n(n-2)}{24}; \\ n = 6\nu + 1 & : \left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n-1}{2}, & \left[ \frac{n}{6} \right] = \frac{n-1}{6}; & A_n^3 = \frac{(n-1)(n-3)}{24}; \\ n = 6\nu + 2 & : \left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n}{2}, & \left[ \frac{n}{6} \right] = \frac{n-2}{6}; & A_n^3 = \frac{n(n-2)}{24}; \\ n = 6\nu + 3 & : \left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n-1}{2}, & \left[ \frac{n}{6} \right] = \frac{n-3}{6}; & A_n^3 = \frac{(n-1)(n-3)}{24}; \\ n = 6\nu + 4 & : \left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n}{2}, & \left[ \frac{n}{6} \right] = \frac{n-4}{6}; & A_n^3 = \frac{(n+2)(n-4)}{24}; \\ n = 6\nu + 5 & : \left[ \frac{n}{2} \right] = \frac{n-1}{2}, & \left[ \frac{n}{6} \right] = \frac{n-5}{6}; & A_n^3 = \frac{(n+1)(n-5)}{24}; \end{aligned}$$

puis, grâce à (4),

$$(5) \quad P_n^3 = \begin{cases} \frac{n^2}{12}, & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ \frac{n^2-1}{12}, & n \equiv \pm 1 \pmod{6}, \\ \frac{n^2-4}{12}, & n \equiv \pm 2 \pmod{6}, \\ \frac{n^2+3}{12}, & n \equiv 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

On peut observer que  $P_n^3$  est toujours de la forme  $\frac{n^2 + \rho}{12}$ , où  $\rho$  est l'entier de valeur absolue minimale faisant de  $n^2 + \rho$  un multiple de 12.

9.  $\alpha$  étant égal à 4, soit  $m$  la borne inférieure des quatre écarts  $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$  séparant les quatre sommets de couleur  $\alpha$ , considérés dans l'ordre de parcours du polygone.

Admettons d'abord que deux écarts consécutifs valent  $m$ . On peut fixer l'origine et le sens de parcours de manière que ces quatre sommets soient  $S_0, S_m, S_{2m}, S_{m_2}$ , avec une suite d'écarts non décroissante, c'est-à-dire que

$$1 \leq m \leq m_2 - 2m \leq n - m_2.$$

Tous les polygones correspondants sont distincts, et fournis par les inégalités

$$(6) \quad \begin{cases} 3m \leq m_2 \leq \frac{n}{2} + m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n}{4}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$(7) \quad A_n^4 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{4}\right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 - 2m \right) = \left[ \frac{n}{4} \right] \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n}{4} \right] \right) = \left[ \frac{n}{4} \right] \left[ \frac{n+2}{4} \right],$$

car on a toujours

$$\left[ \frac{n}{2} \right] = \left[ \frac{n}{4} \right] + \left[ \frac{n+2}{4} \right].$$

Dans les autres cas, désignons par  $S_0, S_m, S_{m_1}, S_{m_2}$  les sommets de couleur  $a$ , avec les écarts

$$q_1 = m, \quad q_2 = m_1 - m > m, \quad q_3 = m_2 - m_1 \geq m, \quad q_4 = n - m_2 > m,$$

afin qu'il n'y ait pas deux écarts consécutifs minimaux. La symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m}{2}$  transforme cette suite d'écarts en la suite  $q'_1 = m, q'_2 = q_4, q'_3 = q_3, q'_4 = q_2$  sur le cercle positif, ce qui permet de supposer  $q_2 \leq q_4$ . Ainsi les polygones distincts de cette deuxième catégorie sont tous fournis, une fois et une seule, par l'ensemble des inégalités

$$m+1 \leq m_1 - m \leq n - m_2, \quad m \leq m_2 - m_1,$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad \begin{cases} m_1 + m \leq m_2 \leq n + m - m_1, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \frac{n}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-2}{4}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$B_n^4 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{4}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (n+1-2m_1) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{4}\right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 2m \right) \left( n - \left[ \frac{n}{2} \right] - 2m \right).$$

Grâce à

$$n = \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{n+1}{2} \right],$$

le produit des deux facteurs dans la dernière somme s'écrit

$$\left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 2nm + 4m^2 = \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 2(n+2)m + 4m(m+1),$$

de sorte qu'à l'aide de (II)

$$\begin{aligned} B_n^4 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{4}\right]} \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 2(n+2)(m-1, 1) + 8(m-1, 2) \right\} \\ &= \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] \left[ \frac{n-2}{4} \right] - 2(n+2) \left( \left[ \frac{n-2}{4} \right] - 1, 2 \right) + 8 \left( \left[ \frac{n-2}{4} \right] - 1, 3 \right), \end{aligned}$$

et enfin

$$(9) \quad B_n^4 = \left[ \frac{n-2}{4} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - (n+2) \left[ \frac{n+2}{4} \right] + \frac{4}{3} \left[ \frac{n+2}{4} \right] \left[ \frac{n+6}{4} \right] \right\}.$$

En définitive, l'expression de

$$P_n^4 = A_n^4 + B_n^4$$

est un polynome du troisième degré en  $n$ , dont la forme dépend de la classe mod 4 de  $n$ . Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} n = 4\nu & \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{n}{2} \right] &= \left[ \frac{n+1}{2} \right] = \frac{n}{2}, & \left[ \frac{n}{4} \right] &= \frac{n}{4}, & \left[ \frac{n-2}{4} \right] &= \frac{n-4}{4}; \\ A_n^4 &= \frac{n^2}{16}, & B_n^4 &= \frac{n(n-2)(n-4)}{48}; \end{aligned} \right. \\ n = 4\nu + 1 & \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{n}{2} \right] &= \frac{n-1}{2}, & \left[ \frac{n+1}{2} \right] &= \frac{n+1}{2}, & \left[ \frac{n}{4} \right] &= \frac{n-1}{4}, & \left[ \frac{n-2}{4} \right] &= \frac{n-5}{4}; \\ A_n^4 &= \frac{(n-1)^2}{16}, & B_n^4 &= \frac{n(n-1)(n-5)}{48}; \end{aligned} \right. \\ n = 4\nu + 2 & \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{n}{2} \right] &= \left[ \frac{n+1}{2} \right] = \frac{n}{2}, & \left[ \frac{n}{4} \right] &= \left[ \frac{n-2}{4} \right] = \frac{n-2}{4}; \\ A_n^4 &= \frac{n^2-4}{16}, & B_n^4 &= \frac{n(n-2)(n-4)}{48}; \end{aligned} \right. \\ n = 4\nu + 3 & \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{n}{2} \right] &= \frac{n-1}{2}, & \left[ \frac{n+1}{2} \right] &= \frac{n+1}{2}, & \left[ \frac{n}{4} \right] &= \left[ \frac{n-2}{4} \right] = \frac{n-3}{4}; \\ A_n^4 &= \frac{(n+1)(n-3)}{16}, & B_n^4 &= \frac{(n+1)(n-3)(n-4)}{48}; \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(10) \quad P_n^4 = \begin{cases} \frac{n(n^2-3n+8)}{2 \times 4!}, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{(n+1)(n-1)(n-3)}{2 \times 4!}, & n \equiv \pm 1 \pmod{4}, \\ \frac{(n-2)(n^2-n+6)}{2 \times 4!}, & n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

10. CALCUL DE  $P_n^5$ . — Dès la valeur  $\alpha=5$ , les calculs sont relativement pénibles, et l'on est amené à distinguer cinq cas, d'après le nombre et la répartition des écarts minimaux.

$m$  désignant toujours le minimum des cinq écarts  $q_i (i=1, 2, \dots, 5)$  séparant les sommets de couleur  $a$ , nous supposons d'abord que trois écarts consécutifs valent  $m$ . On peut choisir l'origine et le sens positif de manière qu'il s'agisse des sommets <sup>(1)</sup>  $S_0, S_m, S_{2m}, S_{3m}, S_{m_5}$ , avec

$$m \leq m_3 - 3m \leq n - m_3.$$

(1) Les sommets de couleur  $a$  sont toujours numérotés  $0, m, m_1, m_2, \dots, m_{\alpha-2}$ . de sorte qu'on a ici  $m_1 = 2m, m_2 = 3m$ .



Les polygones distincts de cette nature sont ainsi déterminés par le système d'inégalités

$$(11) \quad \begin{cases} 4m \leq m_3 \leq \frac{n+3m}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n}{5}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$A_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{5}\right]} \left( \left[ \frac{n+3m}{2} \right] + 1 - 4m \right).$$

Cette somme se décompose en deux, suivant la parité des valeurs de  $m$ . Les valeurs paires  $m = 2p$  donnent la somme partielle

$$(12) \quad A_n^{5'} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{10}\right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 - 5p \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{n}{10} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 5 \left[ \frac{n}{10} \right] - 3 \right).$$

Les valeurs impaires  $m = 2p - 1$  donnent la somme partielle

$$A_n^{5''} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n+5}{10}\right]} \left( \left[ \frac{n+5}{2} \right] + 1 - 5p \right) = A_{n+5}^{5'}.$$

On a donc

$$(13) \quad A_n^5 = A_n^{5'} + A_{n+5}^{5'},$$

avec l'expression (12) de  $A_n^{5'}$ .

11. Supposons qu'il n'y ait que deux écarts consécutifs minimaux. On peut placer les trois sommets qu'ils séparent aux points  $S_0, S_m, S_{2m}$ . Les deux autres sommets de couleur  $a$  sont  $S_{m_2}, S_{m_3}$ , avec

$$q_3 = m_2 - 2m > m, \quad q_4 = m_3 - m_2 \geq m, \quad q_5 = n - m_3 > m.$$

La symétrie par rapport au diamètre de  $S_m$  permet de réaliser la circonstance supplémentaire  $q_3 \leq q_5$ . Les polygones distincts de cette espèce sont ainsi déterminés par les inégalités

$$(14) \quad \begin{cases} m_2 + m \leq m_3 \leq n + 2m - m_2, \\ 3m + 1 \leq m_2 \leq \frac{n+m}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-2}{5}, \end{cases}$$

et leur nombre est

$$B_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{5}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n+m}{2}\right]} (n+1+m-2m_2) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{5}\right]} \left[ \frac{n-5m}{2} \right] \left[ \frac{n+1-5m}{2} \right].$$

Les valeurs paires  $m = 2p$  donnent la somme partielle

$$\begin{aligned} B'_n{}^{5} &= \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2}{10}\right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 5p \right) \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 5p \right) = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2}{10}\right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 5np + 25p^2 \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2}{10}\right]} \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 5(n+5)p + 50(p-1, 2) \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$(15) \quad B'_n{}^{5} = \left[ \frac{n-2}{10} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right] - \frac{5}{2}(n+5) \left[ \frac{n+8}{10} \right] + \frac{25}{3} \left[ \frac{n+8}{10} \right] \left[ \frac{n+18}{10} \right] \right\}.$$

Les valeurs impaires  $m = 2p - 1$  donnent la somme partielle

$$B''_n{}^{5} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n+3}{10}\right]} \left( \left[ \frac{n+5}{2} \right] - 5p \right) \left( \left[ \frac{n+6}{2} \right] - 5p \right) = B'_{n+3}{}^{5},$$

et, par conséquent,

$$(16) \quad B_n{}^5 = B'_n{}^5 + B''_n{}^5,$$

avec l'expression (15) de  $B'_n{}^5$ .

12. Dès que trois des cinq écarts  $q_i$  valent  $m$ , deux d'entre eux sont consécutifs. Nous examinons dans ce paragraphe les polygones présentant deux écarts minimaux, mais non consécutifs, contrairement au cas qui vient d'être étudié. On peut placer en  $S_0$  et  $S_m$  deux des sommets de couleur  $a$ , les autres étant dans l'ordre,  $S_{m_1}$ ,  $S_{m_2}$ ,  $S_{m_3}$ , avec les écarts

$$q_2 = m_1 - m > m, \quad q_3 = m_2 - m_1 \geq m, \quad q_4 = m_3 - m_2 \geq m, \quad q_5 = n - m_3 > m.$$

Seuls  $q_3$  ou  $q_4$  peuvent valoir  $m$ , et la symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m}{2}$  permet de supposer qu'il s'agit de  $q_3$ . Mais alors, la symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m+m_1}{2}$  conserve le couple d'écarts  $q_1$ ,  $q_3$  et l'écart  $q_2$ , tout en permutant  $q_4$  et  $q_5$ ; on peut ainsi supposer  $q_4 \leq q_5$ , et les polygones distincts de cette catégorie sont tels qu'on ait

$$m_1 > 2m, \quad m_2 = m + m_1, \quad m_3 - m_2 \geq m + 1, \quad n - m_3 \geq m_3 - m_2,$$

donc déterminés par le système d'inégalités

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 + 2m + 1 \leq m_3 \leq \frac{n + m + m_1}{2}, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq n - 2 - 3m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-3}{5}. \end{array} \right.$$

Leur nombre est

$$C_n^3 = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-3}{5} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{n-2-3m} \left( \left[ \frac{n+m+m_1}{2} \right] - 2m - m_1 \right) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-3}{5} \rfloor} \sum_{t=1}^{n-2-5m} \left[ \frac{n-5m-t}{2} \right],$$

où l'on a posé  $m_1 = 2m + t$ . La somme partielle fournie par les valeurs paires  $2p$  de  $t$  est

$$\sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-2-5m}{2} \rfloor} \left( \left[ \frac{n-5m}{2} \right] - p \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-2-5m}{2} \right] \left[ \frac{n-5m}{2} \right];$$

les valeurs impaires  $t = 2p - 1$  donnent la somme déduite de celle-ci en substituant  $n + 1$  à  $n$ ; la somme totale relative à  $t$  est ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{n-5m}{2} \right] \left[ \frac{n-5m-2}{2} \right] + \left[ \frac{n-5m+1}{2} \right] \left[ \frac{n-5m-1}{2} \right] \right\} \\ & = \left[ \frac{n-5m}{2} \right] \left[ \frac{n-5m-1}{2} \right], \end{aligned}$$

grâce à l'identité

$$\left[ \frac{x}{2} \right] \left[ \frac{x-2}{2} \right] + \left[ \frac{x+1}{2} \right] \left[ \frac{x-1}{2} \right] = 2 \left[ \frac{x}{2} \right] \left[ \frac{x-1}{2} \right].$$

On voit alors que  $C_n^3$  n'est rien d'autre que  $B_{n-1}^3$ , donc

$$(18) \quad C_n^3 = B_{n-1}^3 = B_{n-1}^3 + B_{n+4}^3.$$

13. Il ne reste plus qu'à évaluer le nombre des polygones ne présentant qu'un écart minimal  $m$  entre les cinq sommets de couleur  $a$ . Plaçons ceux-ci en  $S_0, S_m, S_{m_1}, S_{m_2}, S_{m_3}$ , avec les écarts

$$\begin{aligned} q_1 = m, \quad q_2 = m_1 - m > m, \quad q_3 = m_2 - m_1 > m, \\ q_4 = m_3 - m_2 > m, \quad q_5 = n - m_3 > m. \end{aligned}$$

La seule symétrie qui conserve l'écart minimal est celle par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m}{2}$ , et elle permet de supposer  $q_2 \leq q_5$ , et, si  $q_2 = q_5$ , de faire  $q_3 \leq q_4$ .

Évaluons d'abord le nombre des polygones de la deuxième catégorie;  $q_2 = q_5, q_3 \leq q_4$  fournissent les relations

$$\begin{aligned} m_3 &= n + m - m_1, \\ m + 1 &\leq q_2 = m_1 - m, \\ m + 1 &\leq q_3 = m_2 - m_1 \leq m_3 - m_2 = q_4, \end{aligned}$$

donc le système

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 + m + 1 \leq m_2 \leq \frac{n+m}{2}, \\ 2m+1 \leq m_1 \leq \frac{n-2-m}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-4}{5}. \end{array} \right.$$

Le nombre de ces polygones est

$$D_n^5 = \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{n-4}{5} \right\rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{\left\lfloor \frac{n-2-m}{2} \right\rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor - m_1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{n-4}{5} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n-5m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-5m-2}{2} \right\rfloor.$$

Les valeurs paires  $m = 2p$  fournissent la somme partielle

$$\begin{aligned} D_n^{5'} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n-4}{10} \right\rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 5p \right) \left( \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 5p \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{n-4}{10} \right\rfloor} \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 10 \left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor p + 50(p-1, 2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n-4}{10} \right\rfloor \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 5 \left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor + \frac{25}{3} \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+16}{10} \right\rfloor \right\}, \end{aligned}$$

soit

$$(20) \quad D_n^{5'} = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n-4}{10} \right\rfloor \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - \frac{5}{3} \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor \left( 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 5 \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor + 1 \right) \right\}.$$

On voit tout de suite que la partie de  $D_n^5$  fournie par les valeurs impaires de  $m$  est  $D_{n+3}^{5'}$ , donc

$$(21) \quad D_n^5 = D_n^{5'} + D_{n+3}^{5'},$$

avec l'expression (20) de  $D_n^{5'}$ .

14. Les polygones de la première catégorie, qu'il reste à compter, sont ceux pour lesquels  $q_2 < q_3$ , et que définissent les inégalités

$$m_1 \geq 2m+1, \quad m_2 \geq m_1+m+1, \quad m_3 \geq m_2+m+1, \quad n-m_3 \geq m_1-m+1,$$

donc le système

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 + m + 1 \leq m_3 \leq n + m - 1 - m_1, \\ m_1 + m + 1 \leq m_2 \leq n - 2 - m_1, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \frac{n-3-m}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-5}{5}. \end{array} \right.$$

Leur nombre est

$$E_n^3 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3-m}{2}\right]} \sum_{m_2=m_1+m+1}^{n-2-m_1} (n-1-m_1-m_2) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3-m}{2}\right]} (n-3-m-2m_1, 2).$$

Posons  $m_1 = 2m + t$ ; la somme relative à  $m_1$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3-5m}{2}\right]} \frac{1}{2} (n-2-5m-2t) (n-1-5m-2t) \\ &= \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3-5m}{2}\right]} \{ (n-3-5m, 2) - (2n-1-10m)t + 4(t-1, 2) \} \\ &= \left[ \frac{n-3-5m}{2} \right] \left\{ (n-3-5m, 2) - \left( n - \frac{1}{2} - 5m \right) \left[ \frac{n-1-5m}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{3} \left[ \frac{n-1-5m}{2} \right] \left[ \frac{n+1-5m}{2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$E_n^3$  est alors de la forme

$$(23) \quad E_n^3 = E_n'^3 + E_{n-5}^3,$$

où  $E_n'^3$  est la somme partielle fournie par les valeurs paires  $2p$  de  $m$ , soit

$$\begin{aligned} E_n'^3 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-5}{10}\right]} \left( \left[ \frac{n-3}{2} \right] - 5p \right) & \left\{ (n-3-10p, 2) - \left( n - \frac{1}{2} - 10p \right) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 5p \right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 5p \right) \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 5p \right) \right\}. \end{aligned}$$

L'accolade est un polynôme quadratique en  $p$  dont le développement est

$$\frac{2}{3} \left[ \frac{n-1}{2} \right]^2 - \left( n - \frac{7}{6} \right) \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 5 \left( n - \frac{11}{6} - \frac{2}{3} \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right) p + \frac{50}{3} p^2;$$

le terme général de la somme est donc de la forme

$$(24) \quad A - 5Bp + 25Cp^2 - 125Dp^3,$$

avec

$$\begin{aligned} (25) \quad A &= \left[ \frac{n-3}{2} \right] \left( \frac{2}{3} \left[ \frac{n-1}{2} \right]^2 - \left( n - \frac{7}{6} \right) \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right), \\ B &= \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 1 \right) \left( n - \frac{11}{6} - \frac{2}{3} \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right) \\ & \quad + \frac{2}{3} \left[ \frac{n-1}{2} \right]^2 - \left( n - \frac{7}{6} \right) \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n + \frac{11}{6} = \frac{3n^2 - 15n + 17}{6}, \\ C &= n - \frac{5}{2}, \quad D = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

En fonction des parenthèses  $(p-1, r)$ , (24) s'écrit (1)

$$\begin{aligned} A - 5(B + 5C + 25D)(p-1, 1) + 50(C + 15D)(p-1, 2) - 125 \times 6D(p-1, 3) \\ = A - 5 \frac{n^2 + 5n + 14}{2} (p-1, 1) + 25(2n + 15)(p-1, 2) - 500(p-1, 3), \end{aligned}$$

donc, grâce à (II),

$$\begin{aligned} E_n^5 &= \sum_{\nu=1}^{\left[ \frac{n-5}{10} \right]} \left\{ A - 5 \frac{n^2 + 5n + 14}{2} (p-1, 1) + 25(2n + 15)(p-1, 2) - 500(p-1, 3) \right\} \\ &= \left[ \frac{n-5}{10} \right] \left\{ A - 5 \frac{n^2 + 5n + 14}{4} \left[ \frac{n+5}{10} \right] + 25 \frac{2n + 15}{6} \left[ \frac{n+5}{10} \right] \left[ \frac{n+15}{10} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{125}{6} \left[ \frac{n+5}{10} \right] \left[ \frac{n+15}{10} \right] \left[ \frac{n+25}{10} \right] \right\}, \end{aligned}$$

soit encore, en ordonnant l'accolade par rapport à  $\left[ \frac{n+5}{10} \right]$ ,

$$(26) \quad E_n^5 = \left[ \frac{n-5}{10} \right] \left\{ A - 5 \left[ \frac{n+5}{10} \right] \left( \frac{3n^2 - 5n - 8}{12} - \frac{5n}{3} \left[ \frac{n+5}{10} \right] + \frac{25}{6} \left[ \frac{n+5}{10} \right]^2 \right) \right\},$$

avec l'expression (25) de A.

15. En rassemblant les résultats obtenus en (13), (16), (18), (21), (23), on peut écrire

$$(27) \quad P_n^5 = P_n'^5 + P_{n+5}^5,$$

avec

$$(28) \quad P_n'^5 = A_n'^5 + B_n'^5 + B_{n-1}'^5 + D_n'^5 + E_n'^5.$$

L'expression polynomiale de ces termes est fonction de la classe mod 10 de  $n$ . Nous nous contentons de donner ces expressions, dont la détermination est fastidieuse et ne présente aucune difficulté, pour  $n = 10\nu, 10\nu + 1, \dots, 10\nu + 9$ ,  $\nu$  entier.

On a ainsi

$$(29) \quad A_n'^5 = \begin{cases} \frac{1}{2} \nu(5\nu - 3), & n = 10\nu \quad \text{et} \quad 10\nu + 1, \\ \frac{1}{2} \nu(5\nu - 1), & n = 10\nu + 2 \quad \text{et} \quad 10\nu + 3, \\ \frac{1}{2} \nu(5\nu + 1), & n = 10\nu + 4 \quad \text{et} \quad 10\nu + 5, \\ \frac{1}{2} \nu(5\nu + 3), & n = 10\nu + 6 \quad \text{et} \quad 10\nu + 7, \\ \frac{1}{2} \nu(5\nu + 5), & n = 10\nu + 8 \quad \text{et} \quad 10\nu + 9. \end{cases}$$

(1) En posant

$$\omega_r = r!(x-1, r),$$

on a

$$\begin{aligned} x &= \omega_1, \quad x^2 = \omega_2 - \omega_1, \quad x^3 = \omega_3 - 3\omega_2 + \omega_1, \quad x^4 = \omega_4 - 6\omega_3 + 7\omega_2 - \omega_1, \\ x^5 &= \omega_5 - 10\omega_4 + 25\omega_3 - 15\omega_2 + \omega_1. \end{aligned}$$

$$(30) \quad B'_n = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{25}{6} \nu(\nu-1)(2\nu-1), & n = 10\nu, \\ \frac{5}{3} \nu(\nu-1)(5\nu-1), & n = 10\nu+1, \\ \frac{5}{3} \nu(\nu+1)(5\nu+1), & n = 10\nu+9, \\ \frac{1}{6} \nu(50\nu^2-45\nu+1), & n = 10\nu+2, \\ \frac{1}{6} \nu(50\nu^2+45\nu+1), & n = 10\nu+8, \\ \frac{1}{3} \nu(5\nu+1)(5\nu-4), & n = 10\nu+3, \\ \frac{1}{3} \nu(5\nu-1)(5\nu+4), & n = 10\nu+7, \\ \frac{1}{6} \nu(50\nu^2-15\nu-11), & n = 10\nu+4, \\ \frac{1}{6} \nu(50\nu^2+15\nu-11), & n = 10\nu+6, \\ \frac{1}{3} \nu(25\nu^2-7) & n = 10\nu+5; \end{array} \right.$$

done

$$(31) \quad B''_n + B''_{n-1} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5}{6} \nu(\nu-1)(20\nu-13), & n = 10\nu, \\ \frac{5}{6} \nu(\nu-1)(20\nu-7), & n = 10\nu+1, \\ \frac{1}{6} \nu(100\nu^2-105\nu+11), & n = 10\nu+2, \\ \frac{1}{6} \nu(100\nu^2+105\nu+11), & n = 10\nu+9, \\ \frac{1}{6} \nu(100\nu^2-75\nu-7), & n = 10\nu+3, \\ \frac{1}{6} \nu(100\nu^2+75\nu-7), & n = 10\nu+8, \\ \frac{1}{6} \nu(100\nu^2-45\nu-19), & n = 10\nu+4, \\ \frac{1}{6} \nu(100\nu^2+45\nu-19), & n = 10\nu+7, \\ \frac{5}{6} \nu(20\nu^2-3\nu-5), & n = 10\nu+5, \\ \frac{5}{6} \nu(20\nu^2+3\nu-5), & n = 10\nu+6. \end{array} \right.$$

$$(32) \quad D'_n{}^{\bar{5}} = \begin{cases} \frac{5}{6} \nu(5\nu - 4), & n = 10\nu \quad \text{et} \quad 10\nu + 1, \\ \frac{5}{6} \nu(\nu - 1)(5\nu - 1), & n = 10\nu + 2 \quad \text{et} \quad 10\nu + 3, \\ \frac{1}{6} \nu(5\nu + 1)(5\nu - 4), & n = 10\nu + 4 \quad \text{et} \quad 10\nu + 5, \\ \frac{1}{6} \nu(25\nu^2 - 7), & n = 10\nu + 6 \quad \text{et} \quad 10\nu + 7, \\ \frac{1}{6} \nu(5\nu - 1)(5\nu + 4), & n = 10\nu + 8 \quad \text{et} \quad 10\nu + 9. \end{cases}$$

$$(33) \quad E'_n{}^{\bar{5}} = \begin{cases} \frac{1}{6} (\nu - 1)(125\nu^3 - 250\nu^2 + 105\nu - 6), & n = 10\nu, \\ \frac{25}{6} \nu(\nu - 1)(5\nu^2 - 8\nu + 2), & n = 10\nu + 1, \\ \frac{5}{6} \nu(\nu - 1)(25\nu^2 - 30\nu + 2), & n = 10\nu + 2, \\ \frac{5}{6} \nu(\nu - 1)(25\nu^2 - 20\nu - 3), & n = 10\nu + 3, \\ \frac{25}{6} \nu(\nu - 1)(5\nu^2 - 2\nu - 1), & n = 10\nu + 4, \\ \frac{1}{6} \nu(125\nu^3 - 125\nu^2 - 20\nu + 26), & n = 10\nu + 5, \\ \frac{1}{6} \nu(125\nu^3 - 75\nu^2 - 50\nu + 18), & n = 10\nu + 6, \\ \frac{1}{6} \nu(125\nu^3 - 25\nu^2 - 65\nu + 7), & n = 10\nu + 7, \\ \frac{1}{6} \nu(125\nu^3 + 25\nu^2 - 65\nu - 7), & n = 10\nu + 8, \\ \frac{1}{6} \nu(125\nu^3 + 75\nu^2 - 50\nu - 18), & n = 10\nu + 9. \end{cases}$$

On a rapproché dans les tableaux (31) et (32) les expressions qui se déduisent l'une de l'autre, au signe près, en changeant  $\nu$  en  $-\nu$ . Ce même caractère se retrouve pour  $E'_n{}^{\bar{5}}$ , mais pour les valeurs de  $n$  symétriques par rapport à  $10\nu + \frac{15}{2}$ , et n'apparaît qu'après le changement de  $\nu$  en  $\nu + 1$  dans certaines des expressions (33).

L'addition des expressions (29), (31), (32), (33) donne alors

$$(34) \quad 6P'_n{}^{\bar{5}} = \begin{cases} 125\nu^4 - 250\nu^3 + 160\nu^2 - 35\nu + 6, & n = 10\nu, \\ \nu(125\nu^3 \mp 200\nu^2 + 85\nu \mp 4), & n = 10\nu + 1 \quad \text{et} \quad 10\nu + 9, \\ \nu(125\nu^3 \mp 150\nu^2 + 40\nu \pm 3), & n = 10\nu + 2 \quad \text{et} \quad 10\nu + 8, \\ \nu(125\nu^3 \mp 100\nu^2 - 5\nu \pm 10), & n = 10\nu + 3 \quad \text{et} \quad 10\nu + 7, \\ \nu(125\nu^3 \mp 50\nu^2 - 20\nu \pm 5), & n = 10\nu + 4 \quad \text{et} \quad 10\nu + 6, \\ \nu(125\nu^3 - 35\nu), & n = 10\nu + 5. \end{cases}$$



Dans chaque ligne comportant deux expressions, les signes supérieurs correspondent à la première valeur de  $n$ .

(27) donne alors

$$(35) \quad 6P_n^3 = \begin{cases} 250\nu^4 - 250\nu^3 + 125\nu^2 - 35\nu + 6, & n = 10\nu, \\ \nu(250\nu^3 - 150\nu^2 + 65\nu - 9), & n = 10\nu + 1, \\ \nu(250\nu^3 - 50\nu^2 + 35\nu - 7), & n = 10\nu + 2, \\ \nu(250\nu^3 + 50\nu^2 + 35\nu + 7), & n = 10\nu + 3, \\ \nu(250\nu^3 + 150\nu^2 + 65\nu + 9), & n = 10\nu + 4, \\ 250\nu^4 + 250\nu^3 + 125\nu^2 + 35\nu + 6, & n = 10\nu + 5, \\ 250\nu^4 + 350\nu^3 + 215\nu^2 + 61\nu + 6, & n = 10\nu + 6, \\ 250\nu^4 + 450\nu^3 + 335\nu^2 + 123\nu + 18, & n = 10\nu + 7, \\ 250\nu^4 + 550\nu^3 + 485\nu^2 + 197\nu + 30, & n = 10\nu + 8, \\ 250\nu^4 + 650\nu^3 + 665\nu^2 + 319\nu + 60, & n = 10\nu + 9. \end{cases}$$

Ces expressions présentent le caractère de symétrie signalé pour (33), mais par rapport à la valeur  $10\nu + \frac{5}{2}$ . En fonction de  $n$ , on ne trouve que quatre expressions distinctes

$$(36) \quad P_n^3 = \begin{cases} \frac{1}{2 \times 5!} (n^4 - 10n^3 + 50n^2 - 140n + 240), & n \equiv 0 \pmod{10}, \\ \frac{1}{2 \times 5!} (n-1)(n-3)(n^2 - 6n + 23), & n \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod{10}, \\ \frac{1}{2 \times 5!} (n-2)(n-4)(n^2 - 4n + 18), & n \equiv \pm 2, \pm 4 \pmod{10}, \\ \frac{1}{2 \times 5!} (n^4 - 10n^3 + 50n^2 - 110n + 165), & n \equiv 5 \pmod{10}. \end{cases}$$

### CHAPITRE III.

#### CALCUL DE $P_n^6 = P(6, n-6)$ .

16. On peut placer en  $S_0, S_m, S_{m_1}, S_{m_2}, S_{m_3}, S_{m_4}$ , dans l'ordre positif, les six sommets de couleur  $a$ , en désignant toujours par  $m$  le minimum des six écarts  $q_i$  entre ces sommets.

Considérons d'abord les polygones dont quatre écarts consécutifs valent  $m$ . On peut faire  $m_1 = 2m, m_2 = 3m, m_3 = 4m$ , et l'on a  $q_5 = m_4 - m_3 \geq m, q_6 = n - m_4 \geq m$ . La symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $2m$  permute les écarts  $q_5$  et  $q_6$ , et permet de supposer  $q_5 \leq q_6$ . Les polygones distincts de cette catégorie sont déterminés par le système d'inégalités

$$(1) \quad \begin{cases} 5m \leq m_4 \leq \frac{n}{2} + 2m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n}{6}, \end{cases}$$

et leur nombre est

$$(2) \quad A_n^a = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 3m \right) = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right).$$

17. On peut placer en  $S_0, S_m, S_{2m}, S_{3m}$  quatre des sommets de couleur  $a$  chez les polygones qui présentent trois écarts consécutifs, et trois seulement, de valeur  $m$ . Les deux autres sommets  $S_{m_3}, S_{m_4}$  sont alors tels que  $q_4 = m_3 - m_2 > m$ ,  $q_5 = m_4 - m_3 \geq m$ ,  $q_6 = n - m_4 > m$ . La symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{3m}{2}$  permute les écarts  $q_4$  et  $q_6$ , et conserve  $q_5$ ; on peut l'utiliser afin que  $q_4 \leq q_6$ , et les polygones distincts de cette famille sont définis par le système des doubles inégalités

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 + m \leq m_4 \leq n + 3m - m_3, \\ 4m + 1 \leq m_3 \leq \frac{n}{2} + m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-2}{6}. \end{array} \right.$$

Leur nombre est

$$B_n^a = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-2}{6} \rfloor} \sum_{m_3=4m+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + m} (n + 1 + 2m - 2m_3) = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-2}{6} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3m \right) \left( \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 3m \right).$$

Le produit des deux parenthèses s'écrit

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 3nm + 9m^2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 3(n+3)(m-1, 1) + 18(m-1, 2),$$

donc

$$\begin{aligned} B_n^a &= \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 3(n+3) \left( \left\lfloor \frac{n-8}{6} \right\rfloor, 2 \right) + 18 \left( \left\lfloor \frac{n-8}{6} \right\rfloor, 3 \right) \\ &= \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \frac{3}{2}(n+3) \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor + 3 \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor + 2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(4) \quad B_n^a = \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor \left( n-1-2 \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor \right) \right\}.$$

18. Supposons maintenant que deux  $q_i$  consécutifs soient égaux à  $m$ , soit  $q_1 = m - 0$ ,  $q_2 = m_1 - m = m$ , entre les sommets  $S_0, S_m, S_{m_1}$ ; les polygones examinés ici n'ayant pas trois  $q_i$  consécutifs de valeur  $m$ , les trois autres sommets de couleur  $a$  sont tels que  $q_3 = m_2 - m_1 > m$ ,  $q_4 = m_3 - m_2 \geq m$ ,  $q_5 = m_4 - m_3 \geq m$ ,  $q_6 = n - m_4 > m$ . Seuls  $q_4$  et  $q_5$  peuvent valoir  $m$ , et nous partageons ces polygones en trois catégories selon que  $q_4 = q_5 = m$ , ou qu'un seul de ces deux écarts, ou aucun d'eux, égale  $m$ .

Dans la première catégorie, les deux trios  $S_0, S_m, S_{m_1}$  et  $S_{m_2}, S_{m_3}, S_{m_4}$  jouent le même rôle, et une symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $m$ , qui permute  $q_3$  et  $q_6$ , permet de supposer  $q_3 \leq q_6$ . Les polygones distincts sont déterminés par les égalités  $m_3 = m_2 + m$ ,  $m_4 = m_3 + m = m_2 + 2m$ , et les inégalités  $m < m_2 - m_1 \leq n - m_4$ , donc par le système des doubles inégalités

$$(5) \quad \begin{cases} 3m + 1 \leq m_2 \leq \frac{n}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-2}{6}. \end{cases}$$

Leur nombre est ainsi

$$(6) \quad C_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{6}\right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m \right) = \left[ \frac{n-2}{6} \right] \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - \frac{3}{2} \left[ \frac{n+4}{6} \right] \right).$$

L'analogie de cette somme avec l'expression de  $B_n^6$  conduit à ajouter les deux résultats, ce qui donne

$$(7) \quad B_n^6 + C_n^6 = \left[ \frac{n-2}{6} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n+3}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n+4}{6} \right] \left( \frac{n}{2} - \left[ \frac{n-2}{6} \right] \right) \right\}.$$

19. Lorsqu'un seul des deux écarts  $q_4, q_5$  est égal à  $m$ , la symétrie par rapport au diamètre de  $S_m$ , qui permute  $q_4$  et  $q_5$ , permet de supposer qu'il s'agit de  $q_4$ . Les polygones de cette catégorie sont caractérisés par les relations

$$m_1 = 2m, \quad m_3 = m_2 + m, \quad m_2 - m_1 \geq m + 1, \quad m_4 - m_3 \geq m + 1, \quad n - m_4 \geq m + 1,$$

donc déterminés par le système des doubles inégalités

$$(8) \quad \begin{cases} m_2 + 2m + 1 \leq m_4 \leq n - m - 1, \\ 3m + 1 \leq m_2 \leq n - 3m - 2, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-3}{6}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$\begin{aligned} D_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{n-3m-2} (n-1-3m-m_2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} (n-1-6m)(n-2-6m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} \{ (n-1)(n-2) - 6(2n+3)(m-1, 1) + 72(m-1, 2) \} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left[ \frac{n-3}{6} \right] - 3(2n+3) \left( \left[ \frac{n-9}{6} \right], 2 \right) + 36 \left( \left[ \frac{n-9}{6} \right], 3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{n-3}{6} \right] \left\{ (n-1)(n-2) - 3(2n+3) \left[ \frac{n+3}{6} \right] + 12 \left[ \frac{n+3}{6} \right] \left[ \frac{n+9}{6} \right] \right\}, \end{aligned}$$

soit encore

$$(9) \quad D_n^6 = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-3}{6} \right] \left\{ (n-1)(n-2) - 3 \left[ \frac{n+3}{6} \right] \left( 2n-1 - 4 \left[ \frac{n+3}{6} \right] \right) \right\}.$$

20. Dans la dernière des trois catégories,  $q_3, q_4, q_5$  et  $q_6$  sont supérieurs à  $m$ . La symétrie par rapport au diamètre de  $S_m$ , qui permute  $q_3$  et  $q_6$ , ainsi que  $q_4$  et  $q_5$ , permet de supposer  $q_3 < q_6$ , ou, si  $q_3 = q_6$ , qu'on a  $q_4 \leq q_5$ . Cette catégorie se décompose ainsi en deux familles.

Examinons d'abord les polygones de la deuxième famille, c'est-à-dire tels qu'on ait  $m_4 = n + 2m - m_2$  et  $m_3 - m_2 \leq m_4 - m_3 = n + 2m - m_2 - m_3$ . Ils sont définis par les doubles inégalités

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 + m + 1 \leq m_3 \leq \frac{n}{2} + m, \\ 3m + 1 \leq m_2 \leq \frac{n}{2} - 1, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-4}{6}, \end{array} \right.$$

et leur nombre est

$$\begin{aligned} E_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n-4}{6} \right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]-1} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - m_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n-4}{6} \right]} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n-2}{2} \right] - 3m \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n-4}{6} \right]} \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n-2}{2} \right] - 6 \left[ \frac{n+2}{2} \right] (m-1, 1) + 18(m-1, 2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{n-4}{6} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n-2}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n+2}{2} \right] \left[ \frac{n+2}{6} \right] + 3 \left[ \frac{n+2}{6} \right] \left[ \frac{n+8}{6} \right] \right\}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(11) \quad E_n^6 = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-4}{6} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n-2}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n+2}{6} \right] \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n+2}{6} \right] \right) \right\}.$$

L'autre famille est caractérisée par les inégalités  $m+1 \leq m_2 - 2m < n - m_4$ ,  $m+1 \leq m_3 - m_2$ ,  $m+1 \leq m_4 - m_3$ , qui conduisent au système des doubles inégalités

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 + m + 1 \leq m_4 \leq n - 1 + 2m - m_2, \\ m_2 + m + 1 \leq m_3 \leq n - 2 + m - m_2, \\ 3m + 1 \leq m_2 \leq \frac{n-3}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-5}{6}. \end{array} \right.$$

Le nombre de ces polygones est

$$\begin{aligned} F_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \sum_{m_3=m_2+m+1}^{n-2+m-m_2} (n-1+m-m_2-m_3) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} (n-1-2m_2)(n-2-2m_2). \end{aligned}$$

Posons  $m_2 = 3m + t$ ; la somme relative à  $m_2$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} (n-1-6m-2t)(n-2-6m-2t) \\ &= \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} \{ (n-1-6m)(n-2-6m) - 2(2n-1-12m)(t-1, 1) + 8(t-1, 2) \} \\ &= \left( \left[ \frac{n-3}{2} \right] - 3m \right) \left\{ (n-1-6m)(n-2-6m) - (2n-1-12m) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{3} \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 3m \right) \right\}. \end{aligned}$$

L'accolade est de la forme

$$A - Bm + 12m^2,$$

avec

$$\begin{aligned} (13) \quad A &= (n-1)(n-2) - (2n-1) \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \frac{4}{3} \left[ \frac{n-1}{2} \right] \left[ \frac{n+1}{2} \right], \\ B &= 6n-11 - 4 \left[ \frac{n-1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Son produit avec la parenthèse qui la précède s'écrit, à l'aide des relations rappelées en note page 43,

$$\begin{aligned} & A \left[ \frac{n-3}{2} \right] - \left( 3A + B \left[ \frac{n-3}{2} \right] \right) m + 3 \left( B + 4 \left[ \frac{n-3}{2} \right] \right) [m(m+1) - m] \\ & \quad - 36[m(m+1)(m+2) - 3m(m+1) + m] \\ &= A \left[ \frac{n-3}{2} \right] - \left[ 3A + 3B + 36 + (B+12) \left[ \frac{n-3}{2} \right] \right] (m-1, 1) + 6 \left( B + 36 + 4 \left[ \frac{n-3}{2} \right] \right) \\ & \quad \times (m-1, 2) - 216(m-1, 3). \end{aligned}$$

Le coefficient de  $(m-1, 1)$  se réduit à

$$\begin{aligned} & 3A + 2B + 24 + \left( 6n+1 - 4 \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right) \left[ \frac{n-1}{2} \right] \\ &= 3(n-1)(n-2) + 12n+2 = 3n^2 + 3n + 8, \end{aligned}$$

et celui de  $(m-1, 2)$  est  $18(2n+7)$ . Il vient ainsi

$$F_n^6 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \left\{ A \left[ \frac{n-3}{2} \right] - (3n^2 + 3n + 8)(m-1, 1) \right. \\ \left. + 18(2n+7)(m-1, 2) - 216(m-1, 3) \right\},$$

donc

$$(14) \quad F_n^6 = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-5}{6} \right] \left\{ A \left[ \frac{n-3}{2} \right] - \frac{3n^2 + 3n + 8}{2} \left[ \frac{n+1}{6} \right] \right. \\ \left. + 3(2n+7) \left[ \frac{n+1}{6} \right] \left[ \frac{n+7}{6} \right] - 9 \left[ \frac{n+1}{6} \right] \left[ \frac{n+7}{6} \right] \left[ \frac{n+13}{6} \right] \right\},$$

avec l'expression (13) de A. Observons tout de suite que A n'a que deux expressions polynomiales distinctes, suivant la parité de  $n$ , qui sont

$$(13') \quad A = \begin{cases} \frac{(n-2)(2n-3)}{6}, & n \text{ pair,} \\ \frac{(n-1)(2n-7)}{6}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

21. Il reste à évaluer le nombre des polygones ne présentant pas deux écarts minimaux consécutifs. Ils se partagent en catégories différant par le nombre d'écarts  $q_i$  minimaux, qui ne peut surpasser 3. Considérons d'abord celle où ce maximum est atteint. Si  $q_1 = m$ , les autres écarts minimaux sont nécessairement  $q_3$  et  $q_5$ . En outre, on peut choisir l'origine  $S_0$  et le sens positif de manière que les trois autres écarts  $q_2, q_4, q_6$  soient dans l'ordre  $q_2 \leq q_4 \leq q_6$ . Ces polygones sont ainsi caractérisés par les conditions

$$m_2 - m_1 = m_4 - m_3 = m, \quad m+1 \leq m_1 - m \leq m_3 - m_2 \leq n - m_4,$$

donc, pour les seules indéterminées  $m, m_1, m_3$ , par le système

$$(15) \quad \begin{cases} 2m_1 \leq m_3 \leq \frac{n+m_1}{2}, \\ 2m+1 \leq m_1 \leq \frac{n}{3}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-3}{6}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$G_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \left( \left[ \frac{n+m_1}{2} \right] + 1 - 2m_1 \right) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} \sum_{t=1}^{\left[\frac{n}{3}\right] - 2m} \left( \left[ \frac{n-3t}{2} \right] + 1 - 3m \right),$$

où l'on a posé  $m_1 = 2m + t$ . Dans la somme relative à  $t$ , la contribution des valeurs paires  $t = 2p$  est

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{6}\right]-m} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 - 3m - 3p \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{n}{6} \right] - m \right) \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1 - 3m \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{n}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1 \right) - \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 1 \right) m + 3m^2 \right\}. \end{aligned}$$

La contribution des valeurs impaires de  $t$  se déduit de cette expression en changeant  $n$  en  $n + 3$ , et la somme totale relative à  $t$  est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{n}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{n+3}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n+3}{6} \right] + 1 \right) - 2nm + 6m^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{n}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{n+3}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n+3}{6} \right] + 1 \right) - 2(n+3)(m-1, 1) + 12(m-1, 2) \right\}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} G_n^6 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{n-3}{6} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1 \right) + \left[ \frac{n+3}{6} \right] \left( 2 \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n+3}{6} \right] + 1 \right) \right. \\ & \quad \left. - (n+3) \left[ \frac{n+3}{6} \right] + 2 \left[ \frac{n+3}{6} \right] \left( \left[ \frac{n+3}{6} \right] + 1 \right) \right\}, \end{aligned}$$

soit enfin

$$(16) \quad G_n^6 = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-3}{6} \right] \left( A \left[ \frac{n}{6} \right] - B \left[ \frac{n+3}{6} \right] \right),$$

avec

$$(17) \quad \begin{cases} A = 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - 3 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1, \\ B = 2 \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{n+3}{6} \right] - n. \end{cases}$$

22. Lorsque le polygone ne présente que deux écarts minimaux, dont  $q_1 = m$ , l'autre écart minimal est  $q_3$ , ou  $q_4$ , ou  $q_5$ . Les deux catégories de polygones où c'est  $q_3$ , ou  $q_5$ , sont équivalentes grâce à la symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m}{2}$ . La troisième catégorie, où  $q_4 = m$ , sera examinée plus loin.

Supposons donc  $q_1 = q_3 = m$ ,  $q_i \geq m + 1$  pour  $i = 2, 4, 5, 6$ . La symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m+m_1}{2}$  permute  $q_4$  et  $q_6$ , et permet de sup-

poser  $q_4 \leq q_6$ . Ces polygones sont déterminés par les conditions  $m_1 \geq 2m + 1$ ,  $m_2 = m_1 + m$ ,  $m + 1 \leq m_3 - m_2 \leq n - m_4$ ,  $m_4 - m_3 \geq m + 1$ , donc par le système des doubles inégalités

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 + m + 1 \leq m_4 \leq n + m + m_1 - m_3, \\ m_1 + 2m + 1 \leq m_3 \leq \frac{n - 1 + m_1}{2}, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq n - 3 - 4m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n - 4}{6}. \end{array} \right.$$

Le nombre de ces polygones est ainsi

$$\begin{aligned} H_n^6 &= \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{n-3-4m} \sum_{m_3=m_1+2m+1}^{\lfloor \frac{n-1+m_1}{2} \rfloor} (n + m_1 - 2m_3) \\ &= \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{n-3-4m} \left( \left[ \frac{n-m_1}{2} \right] - 2m \right) \left( \left[ \frac{n-1-m_1}{2} \right] - 2m \right). \end{aligned}$$

La somme relative à  $m_1$ , où l'on pose  $m_1 = 2m + t$ , puis  $t = 2p$  ou  $2p - 1$ , s'écrit

$$(19) \quad \begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n-3-6m} \left( \left[ \frac{n-t}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n-1-t}{2} \right] - 3m \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-3-6m}{2} \rfloor} \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m - p \right) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m - p \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-2-6m}{2} \rfloor} \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 3m - p \right) \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m - p \right), \end{aligned}$$

de sorte que la dernière somme se déduit de l'avant-dernière en changeant  $n$  en  $n + 1$ . Celle-ci s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-3-6m}{2} \rfloor} \left\{ \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) - (n-6m)(p-1, 1) + 2(p-1, 2) \right\} \\ &= \left[ \frac{n-3-6m}{2} \right] \left[ \frac{n-1-6m}{2} \right] \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m - \frac{n-6m}{2} + \frac{1}{3} \left[ \frac{n+1-6m}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left( \left[ \frac{n-3}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) \left( 4 \left[ \frac{n}{2} \right] - n - 6m \right). \end{aligned}$$



C'est un polynome en  $m$  de la forme  $\frac{1}{6}(a_n - 3bm + 9cm^2 - 54m^3)$ , avec

$$\begin{aligned} a_n &= \left[ \frac{n-3}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] \left( 4 \left[ \frac{n}{2} \right] - n \right), \\ b &= 2 \left[ \frac{n-3}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left( 4 \left[ \frac{n}{2} \right] - n \right) \left( 2 \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 1 \right), \\ c &= 3n - 6. \end{aligned}$$

La parenthèse polynomiale s'écrit encore

$$\begin{aligned} a_n - 3(b + 3c + 18)m + 9(c + 18)m(m+1) - 54m(m+1)(m+2) \\ = a_n - 3b_n(m-1, 1) + 54(n+4)(m-1, 2) - 6 \times 54(m-1, 3), \end{aligned}$$

où

$$b_n = b + 3c + 18 = 2 \left[ \frac{n-3}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left( 4 \left[ \frac{n}{2} \right] - n \right) \left( 2 \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 1 \right) + 9n.$$

Ainsi, la somme (19) vaut

$$\frac{1}{6} \{ A - 3B(m-1, 1) + 54(2n+9)(m-1, 2) - 12 \times 54(m-1, 3) \},$$

où  $A = a_n + a_{n+1}$ ,  $B = b_n + b_{n+1}$ ; par suite,

$$\begin{aligned} H_n^6 &= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n-1}{6} \right]} \{ A - 3B(m-1, 1) + 54(2n+9)(m-1, 2) - 12 \times 54(m-1, 3) \} \\ &= \frac{1}{6} \{ A \left[ \frac{n-4}{6} \right] - 3B \left( \left[ \frac{n-10}{6} \right], 2 \right) + 54(2n+9) \left( \left[ \frac{n-10}{6} \right], 3 \right) \\ &\quad - 12 \times 54 \left( \left[ \frac{n-10}{6} \right], 4 \right) \}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(20) \quad H_n^6 = \frac{1}{6} \left[ \frac{n-4}{6} \right] \left\{ A - \frac{3}{2} B \left[ \frac{n+2}{6} \right] + 9(2n+9) \left[ \frac{n+2}{6} \right] \left[ \frac{n+8}{6} \right] - 27 \left[ \frac{n+2}{6} \right] \left[ \frac{n+8}{6} \right] \left[ \frac{n+14}{6} \right] \right\}.$$

Les expressions de  $A$  et  $B$  sont des polynomes en  $n$  qui ne dépendent que de la parité de  $n$ . On voit tout de suite que  $n$  pair donne

$$a_n = \frac{n(n-2)(n-4)}{4}, \quad b_n = \frac{3n^2 + 6n + 8}{2},$$

tandis que  $n$  impair donne

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4}, \quad b_n = \frac{3n^2 + 6n + 11}{2},$$

Par suite

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{cases} \frac{1}{4} n(n-2)(2n-5) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{4} (n-1)(n-3)(2n-1) & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases} \\ B = 3n^2 + 9n + 14. \end{array} \right.$$

23. Nous supposons maintenant  $q_1 = q_4 = m < q_2, q_3, q_5, q_6$ . La symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m}{2}$ , qui permute  $q_2$  avec  $q_6$  et  $q_3$  avec  $q_5$  permet de supposer  $q_2 + q_3 \leq q_5 + q_6$ , c'est-à-dire  $m_2 - m \leq n - m_3 = n - m_2 - m$ , donc  $m_2 \leq \frac{n}{2}$ . D'autre part, la symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m+m_2}{2}$ , qui permute  $q_2$  avec  $q_3$  et  $q_5$  avec  $q_6$  permet de supposer  $q_2 \leq q_3$ .

Si  $m_2 < \frac{n}{2}$ , on aura donc soit  $q_2 < q_3$ , soit  $q_2 = q_3$  avec  $q_5 \leq q_6$ , ce qui nous amène à distinguer deux catégories.

Si  $m_2 = \frac{n}{2}$ , ce qui ne peut se produire que lorsque  $n$  est pair, on peut toujours supposer  $q_2 \leq q_3, q_5, q_6$ . Si  $q_2 = q_3$ , on a nécessairement  $q_2 = q_3 = q_6$ , tandis que, lorsque  $q_2 < q_3$ , donc  $2q_2 < q_5 + q_6$ , on suppose  $q_2 \leq q_5$  et  $q_6$ ; la distinction entre ces deux cas est inutile pour l'évaluation des polygones de cette troisième catégorie.

Évaluons d'abord le nombre des polygones de la première catégorie, caractérisée par les conditions  $m_2 < \frac{n}{2}$ ,  $q_2 < q_3$ ,  $m+1 \leq q_2, q_5$  et  $q_6$ , c'est-à-dire  $m_2 < \frac{n}{2}$ ,  $2m_1 < m + m_2$ ,  $2m+1 \leq m_1$ ,  $2m+1 \leq m_4 - m_2$ ,  $m+1 \leq n - m_4$ .

On obtient ainsi les doubles inégalités

$$m_2 + 2m + 1 \leq m_4 \leq n - m - 1,$$

$$2m_1 + 1 - m \leq m_2 \leq \begin{cases} \frac{n-1}{2}, \\ n-2-3m, \end{cases}$$

$$2m+1 \leq m_1 \leq \begin{cases} \frac{n-3+2m}{4}, \\ \frac{n-3-2m}{2}, \end{cases}$$

$$1 \leq m \leq \frac{n-7}{6}.$$

On voit tout de suite que  $\frac{n-3+2m}{4} < \frac{n-3-2m}{2}$  et  $\frac{n-1}{2} < n-2-3m$ , grâce à la dernière inégalité du système. Celui-ci équivaut donc à

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 + 2m + 1 \leq m_4 \leq n - m - 1, \\ 2m_1 + 1 - m \leq m_2 \leq \frac{n-1}{2}, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \frac{n-3+2m}{4}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-7}{6}, \end{array} \right.$$

et le nombre des polygones de cette catégorie est

$$I_n^6 = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-7}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{\lfloor \frac{n-3+2m}{4} \rfloor} \sum_{m_2=2m_1+1-m}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-1-3m-m_2).$$

La somme relative à  $m_2$  vaut

$$\frac{1}{2} \left( \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + m - 2m_1 \right) \left( 2n - 3 - 5m - 2m_1 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right),$$

de sorte qu'en posant  $m_1 = 2m + t$ , la somme relative à  $m_1$  s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n-3-6m}{4} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3m - 2t \right) \left( 2n - 3 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 9m - 2t \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n-3-6m}{4} \rfloor} \left\{ \left( \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3m \right) \left( 2n - 3 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 9m \right) \right. \\ & \quad \left. - 2(2n-1-12m)(t-1, 1) + 8(t-1, 2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n-3-6m}{4} \right\rfloor \left\{ \left( \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3m \right) \left( 2n - 3 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 9m \right) \right. \\ & \quad \left. - (2n-1-12m) \left[ \frac{n+1-6m}{4} \right] + \frac{4}{3} \left[ \frac{n+1-6m}{4} \right] \left[ \frac{n+5-6m}{4} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dans la dernière somme à effectuer, distinguons les valeurs paires de  $m$  de ses valeurs impaires. Les premières,  $m = 2p$ , donnent la somme partielle

$$\begin{aligned} I_n^6 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-7}{12} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n-3}{4} \right\rfloor - 3p \right) \left\{ \left( \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 6p \right) \left( 2n - 3 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 18p \right) \right. \\ & \quad \left. - (2n-1-24p) \left( \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - 3p \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{3} \left( \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - 3p \right) \left( \left\lfloor \frac{n+5}{4} \right\rfloor - 3p \right) \right\}, \end{aligned}$$

tandis que les valeurs impaires  $m = 2p - 1$  fournissent la somme  $I'_{n+6}$ . Dans l'expression de  $I'_n$ , l'accolade est de la forme  $A - bp + 48p^2$ , avec

$$(24) \quad A = \left[ \frac{n-1}{2} \right] \left( 2n-3 - \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right) - (2n-1) \left[ \frac{n+1}{4} \right] + \frac{4}{3} \left[ \frac{n+1}{4} \right] \left[ \frac{n+5}{4} \right],$$

$$b = 6n - 11 + 12 \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 16 \left[ \frac{n+1}{4} \right];$$

son produit avec le facteur qui la précède s'écrit

$$A \left[ \frac{n-3}{4} \right] - \left( b \left[ \frac{n-3}{4} \right] + 3A \right) p + \left( 48 \left[ \frac{n-3}{4} \right] + 3b \right) p^2 - 144p^3,$$

donc, grâce aux relations citées en note à la page 43,

$$A \left[ \frac{n-3}{4} \right] - \left\{ (b + 48) \left[ \frac{n-3}{4} \right] + 3(A + b + 48) \right\} (p-1, 1)$$

$$+ 6 \left( 16 \left[ \frac{n-3}{4} \right] + b + 144 \right) (p-1, 2) - 36 \times 24 (p-1, 3).$$

En posant

$$(25) \quad \begin{cases} 2B = (b + 48) \left[ \frac{n-3}{4} \right] + 3(A + b + 48) = 3A + (b + 48) \left[ \frac{n+9}{4} \right], \\ C = 16 \left[ \frac{n-3}{4} \right] + b + 144 = 16 \left[ \frac{n+1}{4} \right] + b + 128, \end{cases}$$

il vient

$$I'_n = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\left[ \frac{n-7}{12} \right]} \left\{ A \left[ \frac{n-3}{4} \right] - 2B(p-1, 1) + 6C(p-1, 2) - 36 \times 24 (p-1, 3) \right\},$$

ou

$$(26) \quad I'_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-7}{12} \right] \left\{ A \left[ \frac{n-3}{4} \right] - B \left[ \frac{n+5}{12} \right] + C \left[ \frac{n+5}{12} \right] \left[ \frac{n+17}{12} \right] \right.$$

$$\left. - 36 \left[ \frac{n+5}{12} \right] \left[ \frac{n+17}{12} \right] \left[ \frac{n+29}{12} \right] \right\},$$

et

$$(27) \quad I_n^6 = I'_n + I'_{n+6}.$$

Les expressions polynomiales de A, B, C dépendent de la classe (mod 4) de n. On trouve aisément

$$12A = \begin{cases} 4n^2 - 23n + 24, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ (n-1)(4n-9), & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ (n-2)(4n-7), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 4n^2 - 21n + 23, & n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$4B = \begin{cases} 6n^2 + 33n + 112, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 6n^2 + 39n + 127, & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ 6n^2 + 33n + 106, & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ 6n^2 + 39n + 133, & n \equiv 3 \quad \text{»} \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 3(4n + 35), & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3(4n + 37), & n \equiv 1 \quad \text{»} \end{cases}$$

24. Les polygones de la deuxième catégorie sont ceux pour lesquels  $m_2 < \frac{n}{2}$ ,  $q_2 = q_3$ ,  $q_5 \leq q_6$ , c'est-à-dire  $m_2 < \frac{n}{2}$ ,  $m + 1 \leq m_1 - m = m_2 - m_4$ ,  $m + 1 \leq m_4 - m_2 - m \leq n - m_4$ . Ces relations fournissent l'égalité  $m_2 = 2m_1 - m$  et les doubles inégalités

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2m_1 + m + 1 \leq m_4 \leq \frac{n}{2} + m_1, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \begin{cases} \frac{n + 2m - 1}{4}, \\ \frac{n - 2m - 2}{2}, \end{cases} \\ 1 \leq m \leq \frac{n - 5}{6}, \end{array} \right.$$

où l'on ne conserve que le premier terme de l'accolade, car

$$\frac{n + 2m - 1}{4} < \frac{n - 2m - 2}{2}$$

en vertu de la dernière des inégalités. Le nombre de ces polygones est ainsi

$$J_n^6 = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-5}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{\lfloor \frac{n+2m-1}{4} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - m - m_1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-5}{6} \rfloor} \left[ \frac{n-1-6m}{4} \right] \left( 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left[ \frac{n+3-6m}{4} \right] - 6m \right).$$

Ici encore, on a

$$(29) \quad J_n^6 = J'_n{}^6 + J'_{n+6}{}^6,$$

où  $J'_n{}^6$  est la somme fournie par les valeurs paires de  $m$ , et  $J'_{n+6}{}^6$  par les valeurs impaires. En posant  $m = 2p$ , il vient

$$J'_n{}^6 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n-5}{12} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - 3p \right) \left( 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left[ \frac{n+3}{4} \right] - 9p \right).$$

Le produit des deux parenthèses s'écrit

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{n-1}{4} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n+3}{4} \right] \right) - 3 \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] + 2 \left[ \frac{n-1}{4} \right] - 1 \right) p + 27p^2 \\ & = A - 6B(p-1, 1) + 54(p-1, 2), \end{aligned}$$

avec

$$(30) \quad \begin{cases} A = \left[ \frac{n-1}{4} \right] \left( 2 \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n+3}{4} \right] \right), \\ B = \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{4} \right] + 4. \end{cases}$$

Il vient donc

$$(31) \quad J_n^6 = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-5}{12} \right] \left( A - 3B \left[ \frac{n+7}{12} \right] + 9 \left[ \frac{n+7}{12} \right] \left[ \frac{n+19}{12} \right] \right).$$

Les expressions polynomiales de A, B sont

$$\begin{aligned} A &= \frac{3n(n-4)}{16}, & B &= \frac{3n+12}{4}, & n &\equiv 0 \pmod{4}, \\ A &= \frac{(n-1)(3n-7)}{16}, & B &= \frac{3n+13}{4}, & n &\equiv 1 \pmod{4}, \\ A &= \frac{(n-2)(3n-2)}{16}, & B &= \frac{3n+14}{4}, & n &\equiv 2 \pmod{4}, \\ A &= \frac{(n-3)(3n-5)}{16}, & B &= \frac{3n+11}{4}, & n &\equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

25. Évaluons maintenant le nombre des polygones de la troisième catégorie définie au paragraphe 23, et qui n'existe que si  $n$  est pair, soit  $n = 2n'$ . Elle est caractérisée par  $m_2 = n'$ ,  $q_2 \leq q_3$ ,  $q_5$  et  $q_6$ , c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} m+1 &\leq m_1 - m \leq m_2 - m_1 = n' - m_1, \\ m_1 - m &\leq m_4 - m_3 = m_4 - n' - m, \\ m_1 - m &\leq n - m_4 = 2n' - m_4, \end{aligned}$$

d'où résulte le système des doubles inégalités

$$(32) \quad \begin{cases} m_1 + n' \leq m_4 \leq 2n' + m - m_1, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \frac{n' + m}{2}, \\ 1 \leq m \leq \frac{n' - 2}{3}. \end{cases}$$

Le nombre de ces polygones est

$$K_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n'-2}{3} \right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[ \frac{n'+m}{2} \right]} (n'+1+m-2m_1) = \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n'-2}{3} \right]} \left[ \frac{n'-3m}{2} \right] \left[ \frac{n'+1-3m}{2} \right].$$

En posant  $m = 2p$  ou  $m = 2p - 1$ , on peut écrire

$$(33) \quad K_n^6 = K_n'^6 + K_{n+6}'^6,$$

où

$$K_n'^6 = \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n'-2}{6} \rfloor} \left( \left[ \frac{n'}{2} \right] - 3p \right) \left( \left[ \frac{n'+1}{2} \right] - 3p \right)$$

est la somme fournie par les valeurs paires de  $m$ , tandis que  $m = 2p - 1$  donne la somme qui s'en déduit en changeant  $n'$  en  $n' + 3$ , donc  $n$  en  $n + 6$ . On a d'ailleurs

$$K_n'^6 = \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n'-2}{6} \rfloor} \left\{ \left[ \frac{n'}{2} \right] \left[ \frac{n'+1}{2} \right] - 3(n'+3)(p-1, 1) + 18(p-1, 2) \right\},$$

donc

$$(34) \quad K_n'^6 = \left[ \frac{n'-2}{6} \right] \left\{ \left[ \frac{n'}{2} \right] \left[ \frac{n'+1}{2} \right] - \frac{3}{2}(n'+3) \left[ \frac{n'+4}{6} \right] + 3 \left[ \frac{n'+4}{6} \right] \left[ \frac{n'+10}{6} \right] \right\}.$$

26. Il ne reste plus qu'à évaluer le nombre des polygones qui ne présentent qu'un seul écart  $q_i$  minimal ( $1 \leq i \leq 6$ ), et l'on suppose toujours qu'il s'agit de  $q_1$ . La seule symétrie qui conserve le couple  $S_0, S_m$  est la symétrie par rapport au diamètre d'azimut  $\frac{m}{2}$ , qui permute  $q_2$  avec  $q_6$  et  $q_3$  avec  $q_5$ . Elle permet donc de se borner aux hypothèses  $q_2 < q_6$  ou, si  $q_2 = q_6$ , à  $q_3 \leq q_5$ .

Nous étudions d'abord le deuxième cas, qui est le plus simple. Il est caractérisé par les relations  $m+1 \leq m_1 - m = n - m_4$ ,  $m+1 \leq m_2 - m_1 \leq m_4 - m_3$ ,  $m+1 \leq m_3 - m_2$ , qui fournissent le système des doubles inégalités

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_2 + m + 1 \leq m_3 \leq n + m - m_2, \\ m_1 + m + 1 \leq m_2 \leq \frac{n-1}{2}, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \frac{n-3}{2} - m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-5}{6}. \end{array} \right.$$

Le nombre des polygones de cette catégorie est ainsi

$$\begin{aligned} L_n^6 &= \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-5}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor - m} \sum_{m_2=m_1+m+1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n - 2m_2) \\ &= \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-5}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor - m} \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - m - m_1 \right) \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - m - m_1 \right). \end{aligned}$$

Avec  $m_1 = 2m + t$ , la somme relative à  $m_1$  s'écrit

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m - t \right) \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m - t \right) \\
&= \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} \left\{ \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m \right) - (n-6m)(t-1, 1) + 2(t-1, 2) \right\} \\
&= \left( \left[ \frac{n-3}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right] - 3m - \frac{n-6m}{2} + \frac{1}{3} \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 3m \right) \right\} \\
&= \frac{1}{6} \left( \left[ \frac{n-3}{2} \right] - 3m \right) \left( \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3m \right) \left( 4 \left[ \frac{n}{2} \right] - n - 6m \right).
\end{aligned}$$

Grâce aux formules en note à la page 43, le produit de ces trois parenthèses se développe en

$$\begin{aligned}
& A - bm + cm^2 - 54m^3 \\
&= A - (b+c+54)m + (c+3 \times 54)m(m+1) - 54m(m+1)(m+2),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
(36) \quad & A = \left[ \frac{n-3}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] \left( 4 \left[ \frac{n}{2} \right] - n \right), \\
& b = 3 \left( 6 \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] - 3n + 4 \right), \\
& c = 27(n-2);
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
b+c+54 &= 6 \left( 3 \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] + 3n + 2 \right), \\
c+3 \times 54 &= 27(n+4).
\end{aligned}$$

En définitive, en posant

$$(37) \quad B = 3 \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n-1}{2} \right] + 3n + 2,$$

il vient

$$L_n^6 = \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \left\{ A - 6B(m-1, 1) + 54(n+4)(m-1, 2) - 6 \times 54(m-1, 3) \right\},$$

donc

$$\begin{aligned}
(38) \quad L_n^6 &= \frac{1}{6} \left[ \frac{n-5}{6} \right] \left\{ A - 3B \left[ \frac{n+1}{6} \right] + 9(n+4) \left[ \frac{n+1}{6} \right] \left[ \frac{n+7}{6} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{27}{2} \left[ \frac{n+1}{6} \right] \left[ \frac{n+7}{6} \right] \left[ \frac{n+13}{6} \right] \right\}.
\end{aligned}$$



Les expressions polynomiales de (36) et (37) sont

$$A = \begin{cases} \frac{1}{4}n(n-2)(n-4), & n \text{ pair,} \\ \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(n-3), & n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \frac{1}{4}(3n^2 + 6n + 8), & n \text{ pair,} \\ \frac{1}{4}(3n^2 + 6n + 11), & n \text{ impair.} \end{cases}$$

27, La dernière catégorie est définie par les conditions  $m+1 \leq q_2 < q_6$  et  $m+1 \leq q_3, q_4, q_5$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} m+1 &\leq m_1 - m < n - m_1, & m+1 &\leq m_2 - m_1, \\ m+1 &\leq m_3 - m_2, & m+1 &\leq m_4 - m_3. \end{aligned}$$

Ces polygones sont ainsi déterminés par le système d'inégalités

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 + m + 1 \leq m_4 \leq n - 1 + m - m_1, \\ m_2 + m + 1 \leq m_3 \leq n - 2 - m_1, \\ m_1 + m + 1 \leq m_2 \leq n - 3 - m - m_1, \\ 2m + 1 \leq m_1 \leq \frac{n-4}{2} - m, \\ 1 \leq m \leq \frac{n-6}{6}. \end{array} \right.$$

Leur nombre est la sommé quadruple

$$M_n^6 = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-6}{6} \rfloor} \sum_{m_1=2m+1}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor - m} \sum_{m_2=m_1+m+1}^{n-3-m-m_1} \sum_{m_3=m_2+m+1}^{n-2-m_1} (n-1-m_1-m_3).$$

En posant  $t = n - 2 - m - m_1 - m_2$ , la somme relative à  $m_3$  vaut  $(t-1, 2)$ . La somme relative à  $m_2$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n-3-2m-2m_1} (t-1, 2) = (n-4-2m-2m_1, 3) \\ &= \frac{1}{6} (n-3-2m-2m_1)(n-2-2m-2m_1)(n-1-2m-2m_1). \end{aligned}$$

Avec la nouvelle lettre  $t = m_1 - 2m$ , ceci prend la forme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} (n-3-6m-2t)(n-2-6m-2t)(n-1-6m-2t) \\ &= (n-4-6m, 3) - [n^2 - 4n + \frac{11}{3} - (2n-4)6m + (6m)^2]t \\ &\quad + 2(n-2-6m)t^2 - \frac{4}{3}t^3. \end{aligned}$$

Grâce aux formules en note à la page 43, la somme relative à  $m_1$  s'écrit

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-4}{2}\right]-3m} \{ (n-4-6m, 3) - (n-1-6m)^2 (t-1, 1) \\
 & + 4(n-6m)(t-1, 2) - 8(t-1, 3) \} \\
 & = \left( \left[ \frac{n-4}{2} \right] - 3m \right) \left\{ (n-4-6m, 3) - \frac{1}{2} (n-1-6m)^2 \left[ \frac{n-2-6m}{2} \right] \right. \\
 & + \frac{2}{3} (n-6m) \left[ \frac{n-2-6m}{2} \right] \left[ \frac{n-6m}{2} \right] \\
 & \quad \left. - \frac{1}{3} \left[ \frac{n-2-6m}{2} \right] \left[ \frac{n-6m}{2} \right] \left[ \frac{n+2-6m}{2} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  est pair, soit  $n = 2n'$ , ceci s'écrit

$$\begin{aligned}
 (40') \quad & (n'-2-3m)(n'-1-3m) \left\{ \frac{1}{3} (n-3-6m)(n-1-6m) - \frac{1}{2} (n-1-6m)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{3} (n-6m)^2 - \frac{1}{12} (n-6m)(n+2-6m) \right\} \\
 & = \frac{1}{48} (n-4-6m)(n-2-6m) \{ n^2 - 6n + 6 - 12(n-3)m + 36m^2 \};
 \end{aligned}$$

pour  $n = 2n' + 1$ , (40) s'écrit

$$\begin{aligned}
 (40'') \quad & (n'-2-3m)(n'-1-3m)(n-1-6m) \left\{ \frac{1}{3} (n-2-6m) - \frac{1}{2} (n-1-6m) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{3} (n-6m) - \frac{1}{12} (n+1-6m) \right\} \\
 & = \frac{1}{48} (n-5-6m)(n-3-6m)^2 (n-1-6m).
 \end{aligned}$$

(40') et (40'') sont deux polynomes de degré 4 en  $m$ , de la forme

$$\frac{1}{48} \{ A - B \times 6m + C \times (6m)^2 - D \times (6m)^3 + (6m)^4 \},$$

que les formules de la page 43 transforment en

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{48} \{ & A - 6(B + 6C + 6^2D + 6^3)m + 6^2(C + 18D + 7 \times 6^2)m(m+1) \\
 & - 6^3(D + 36)m(m+1)(m+2) + 6^4m(m+1)(m+2)(m+3) \}.
 \end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$B = 4(n-3)(n^2-6n+7), \quad C = 2(3n^2-18n+25), \quad D = 4(n-3),$$

donc

$$\begin{aligned}
 B + 6C + 6^2D + 6^3 &= 4n(n^2+7), \\
 C + 18D + 7 \times 6^2 &= 2(3n^2+18n+43), \\
 D + 36 &= 4(n+6).
 \end{aligned}$$

Par contre,

$$(41) \quad A = \begin{cases} (n-2)(n-4)(n^2-6n+6), & n \text{ pair,} \\ (n-1)(n-5)(n-3)^2, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

Il vient ainsi

$$M_n^6 = \frac{1}{48} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{6}\right]} \{ A - 24n(n^2+7)(m-1, 1) + 4 \times 6^2(3n^2+18n+43)(m-1, 2) \\ - 4 \times 6^3(n+6)(m-1, 3) + 4 \times 6^3(m-1, 4) \},$$

donc

$$(42) \quad M_n^6 = \frac{1}{48} \left[ \frac{n-6}{6} \right] \left\{ A - 12n(n^2+7) \left[ \frac{n}{6} \right] + 24(3n^2+18n+43) \left[ \frac{n}{6} \right] \left[ \frac{n+6}{6} \right] \right. \\ \left. - 6^3(n+6) \left[ \frac{n}{6} \right] \left[ \frac{n+6}{6} \right] \left[ \frac{n+12}{6} \right] \right. \\ \left. + \frac{6^4}{5} \left[ \frac{n}{6} \right] \left[ \frac{n+6}{6} \right] \left[ \frac{n+12}{6} \right] \left[ \frac{n+18}{6} \right] \right\},$$

avec l'une ou l'autre des expressions (41) de A.

28. Il s'agit maintenant de calculer

$$P_n^6 = [A_n^6 + (B_n^6 + C_n^6) + D_n^6] + [E_n^6 + F_n^6 + G_n^6 + H_n^6] + [I_n^6 + J_n^6 + K_n^6] + L_n^6 + M_n^6.$$

Des calculs fastidieux que nous omettons donnent tout d'abord

$$4! A_n^6 = \begin{cases} n(n-2), & n \equiv 0, 2 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3), & n \equiv 1, 3 \quad \text{»} \\ (n+2)(n-4), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n+1)(n-5), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

(7) donne ensuite

$$3 \times 4! (B_n^6 + C_n^6) = \begin{cases} n^2(n-6), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n+2)(n-1)(n-7), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n^2-4n-8), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n+3)(n-3)(n-6), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n+2)(n-4)^2, & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(n^2-n-14), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

L'expression (9) de  $D_n^6$  donne

$$3 \times 4! D_n^6 = \begin{cases} (n-6)(2n^2-15n+12), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)(2n-11), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(2n-7), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(2n^2-21n+39), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n-4)(2n^2-19n+26), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(2n^2-17n+17), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases} \cdot$$

la somme  $B_n^6 + C_n^6 + D_n^6$  a des valeurs plus simples, soit

$$4!(B_n^6 + C_n^6 + D_n^6) = \begin{cases} (n-1)(n-4)(n-6), & n \equiv 0, 4 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3)(n-7), & n \equiv 1, 3 \pmod{6}, \\ (n-2)(n^2-9n+16), & n \equiv 2 \pmod{6}, \\ (n-5)(n^2-6n+1), & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$(43) \quad 4!(A_n^6 + B_n^6 + C_n^6 + D_n^6) = \begin{cases} n^3 - 10n^2 + 32n - 24, & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3)(n-6), & n \equiv 1, 3 \pmod{6}, \\ (n-2)(n-4)^2, & n \equiv 2, 4 \pmod{6}, \\ (n-5)(n^2-5n+2), & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

(11) donne ensuite

$$6 \times 4! E_n^6 = \begin{cases} n(n-6)^2, & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)^2, & n \equiv 1 \pmod{6}, \\ (n-2)^2(n-8), & n \equiv 2 \pmod{6}, \\ (n-3)^2(n-9), & n \equiv 3 \pmod{6}, \\ (n-4)(n^2-8n+4), & n \equiv 4 \pmod{6}, \\ (n-5)(n^2-10n+13), & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Les diverses expressions de  $F_n^6$  sont fournies par

$$12 \times 4! F_n^6 = \begin{cases} (n-6)(n^3-16n^2+64n-48), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)(n^2-14n+41), & n \equiv 1 \pmod{6}, \\ (n-2)(n-8)(n^2-12n+24), & n \equiv 2 \pmod{6}, \\ (n-3)(n-9)(n^2-10n+13), & n \equiv 3 \pmod{6}, \\ (n-4)(n-10)(n^2-8n+8), & n \equiv 4 \pmod{6}, \\ (n-5)(n^3-17n^2+75n-51), & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

(16) et (17) donnent ensuite

$$9 \times 4! G_n^6 = \begin{cases} n(n-3)(n-6), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)^2(n-7), & n \equiv 1 \pmod{6}, \\ (n+1)(n-2)(n-8), & n \equiv 2 \pmod{6}, \\ (n-3)^3, & n \equiv 3 \pmod{6}, \\ (n+2)(n-4)(n-7), & n \equiv 4 \pmod{6}, \\ (n+1)(n-5)^2, & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

(20) et (21) donnent de même

$$12 \times 4! H_n^6 = \begin{cases} n(n-6)(n^2-12n+28), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)(n^2-10n+13), & n \equiv 1 \pmod{6}, \\ (n-2)(n-8)(n^2-8n+4), & n \equiv 2 \pmod{6}, \\ (n-3)(n-9)(n^2-6n+1), & n \equiv 3 \pmod{6}, \\ (n-4)(n^3-14n^2+44n+8), & n \equiv 4 \pmod{6}, \\ (n-5)(n^3-13n^2+35n+1), & n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Afin de faciliter le calcul final, effectuons la somme partielle  $E_n^6 + F_n^6 + G_n^6 + H_n^6$ ,

puis, en utilisant (43),  $A_n^6 + B_n^6 + \dots + H_n^6$ ; on trouve successivement

$$18 \times 4! (E_n^6 + F_n^6 + G_n^6 + H_n^6) = \begin{cases} (n-6)(3n^3 - 37n^2 + 114n - 72), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)(3n^2 - 31n + 58), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(3n^2 - 25n + 38), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(3n^3 - 46n^2 + 189n - 90), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n-4)(3n^3 - 43n^2 + 164n - 124), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(3n^3 - 40n^2 + 127n - 46), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

$$(44) \quad 18 \times 4! (A_n^6 + B_n^6 + \dots + H_n^6) = \begin{cases} n(3n^3 - 37n^2 + 156n - 180), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(3n^3 - 31n^2 + 113n - 82), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(3n^3 - 31n^2 + 94n - 16), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(3n^3 - 28n^2 + 63n + 18), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n-4)(3n^3 - 25n^2 + 56n + 20), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(3n^3 - 22n^2 + 37n - 10), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

Pour calculer  $I_n^6$ , évaluons d'abord (26), qui donne

$$2 \times 4!^2 I_n^6 = \begin{cases} (n-12)(n^3 - 25n^2 + 136n - 96), & n \equiv 0 \pmod{12}, \\ (n-1)(n-13)(n^2 - 21n + 72), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-14)(n^2 - 21n + 66), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(n-15)(n^2 - 17n + 34), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n-4)(n-16)(n^2 - 17n + 32), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(n-17)(n^2 - 13n + 8), & n \equiv 5 \quad \text{»} \\ (n-6)(n-18)(n^2 - 13n + 10), & n \equiv 6 \quad \text{»} \\ (n-7)(n^3 - 28n^2 + 189n - 54), & n \equiv 7 \quad \text{»} \\ (n-8)(n^3 - 29n^2 + 204n - 96), & n \equiv 8 \quad \text{»} \\ (n-9)(n^3 - 26n^2 + 145n + 24), & n \equiv 9 \quad \text{»} \\ (n-10)(n^3 - 27n^2 + 160n - 44), & n \equiv 10 \quad \text{»} \\ (n-11)(n^3 - 24n^2 + 121n - 46), & n \equiv 11 \quad \text{»} \end{cases}$$

D'après (27), il vient alors

$$(45) \quad 4!^2 I_n^6 = \begin{cases} (n-12)(n^3 - 13n^2 + 52n - 48), & n \equiv 0 \pmod{12}, \\ (n-1)(n-9)(n^2 - 13n + 36), & n \equiv 1, 9 \quad \text{»} \\ (n-2)(n^3 - 23n^2 + 162n - 312), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(n-7)(n^2 - 13n + 24), & n \equiv 3, 7 \quad \text{»} \\ (n-4)(n^3 - 21n^2 + 124n - 176), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(n^3 - 18n^2 + 85n - 52), & n \equiv 5 \quad \text{»} \\ (n-6)(n^3 - 19n^2 + 94n - 72), & n \equiv 6 \quad \text{»} \\ (n-8)(n^3 - 17n^2 + 72n - 96), & n \equiv 8 \quad \text{»} \\ (n-10)(n^3 - 15n^2 + 58n - 56), & n \equiv 10 \quad \text{»} \\ (n-5)(n-11)(n^2 - 7n + 8), & n \equiv 11 \quad \text{»} \end{cases}$$

(31) donne ensuite

$$16 \times 4! J_n^6 = \begin{cases} n(n-12)^2, & n \equiv 0 \pmod{12}, \\ (n-1)(n-9)(n-13), & n \equiv 1, 9 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-6)(n-14), & n \equiv 2, 6 \quad \text{»} \\ (n-3)(n-7)(n-15), & n \equiv 3, 7 \quad \text{»} \\ (n-4)^2(n-16), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(n^2-18n+49), & n \equiv 5 \quad \text{»} \\ (n-8)(n^2-16n+16), & n \equiv 8 \quad \text{»} \\ (n-10)(n^2-12n+4), & n \equiv 10 \quad \text{»} \\ (n-11)(n^2-14n+17), & n \equiv 11 \quad \text{»} \end{cases}$$

d'où l'on déduit  $J_n^6$  à l'aide de (29); il vient ainsi

$$(46) \quad 8 \times 4! J_n^6 = \begin{cases} n(n^2-14n+56), & n \equiv 0, \pmod{12}, \\ (n-1)(n-5)(n-9), & n \equiv 1, 5, 9 \quad \text{»} \\ (n-2)^2(n-10), & n \equiv 2, 10 \quad \text{»} \\ (n-3)(n-5)(n-7), & n \equiv 3, 7, 11 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-4)(n-8), & n \equiv 4, 8 \quad \text{»} \\ (n-6)(n^2-8n-4), & n \equiv 6 \quad \text{»} \end{cases}$$

Pour déterminer  $K_n^6$ , calculons d'abord  $K_{2n'}^6$ ; avec  $n = 2n'$ , (34) donne

$$3 \times 4! K_{2n'}^6 = \begin{cases} n'(n'-3)(n'-6), & n' \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n'-1)^2(n'-7), & n' \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n'-2)(n'^2-7n'+4), & n' \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n'-3)(n'^2-6n'-3), & n' \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n'-4)(n'^2-5n'-2), & n' \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n'+1)(n'-5)^2, & n' \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

d'où résulte, d'après (33),

$$(47) \quad 12 \times 4! K_n^6 = \begin{cases} n(n^2-9n+12), & n \equiv 0 \pmod{12}, \\ (n-2)(n^2-7n-2), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-4)(n^2-5n-8), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-6)(n^2-3n-6), & n \equiv 6 \quad \text{»} \\ (n-8)(n^2-n+4), & n \equiv 8 \quad \text{»} \\ (n+2)(n^2-11n+34), & n \equiv 10 \quad \text{»} \end{cases}$$

L'addition de (45), (46) et (47) fournit le résultat partiel  $I_n^6 + J_n^6 + K_n^6$ , avec les valeurs simples suivantes

$$4!^2 (I_n^6 + J_n^6 + K_n^6) = \begin{cases} (n-4)^2(n-6)^2, & n \equiv 0, 4 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3)(n-7)(n-9), & n \equiv 1, 3 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(n^2-10n+32), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-5)^2(n^2-10n+5), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à expliciter  $L_n^6$  et  $M_n^6$ . (38) donne

$$4!^2 L_n^6 = \begin{cases} n(n-4)(n-6)(n-10), & n \equiv 0, 4 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3)(n-7)(n-9), & n \equiv 1, 3 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(n^2-10n+8), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-5)^2(n^2-10n+5), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

d'où l'on déduit tout de suite

$$(48) \quad 12 \times 4! (I_n^6 + J_n^6 + K_n^6 + L_n^6) = \begin{cases} (n-4)(n-6)(n^2-10n+12), & n \equiv 0, 4 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3)(n-7)(n-9), & n \equiv 1, 3 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(n^2-10n+20), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-5)^2(n^2-10n+5), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

(42) donne de même

$$(49) \quad 6 \times 6! M_n^6 = \begin{cases} (n-6)(3n^4-72n^3+538n^2-1272n+720), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)(3n^3-66n^2+421n-670), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(3n^3-60n^2+322n-320), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(n-9)(3n^3-54n^2+241n-150), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n-4)(n-10)(3n^3-48n^2+178n-88), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(n-11)(3n^3-42n^2+133n-62), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

L'addition des expressions fournies par (44), (48) et (49) nous donne enfin celle de  $P_n^6$ . Après des simplifications remarquables, qui réduisent le dénominateur commun à  $2 \times 6! = 1440$ , on obtient les quatre formules suivantes :

$$(50) \quad P_n^6 = \begin{cases} \frac{1}{2 \times 6!} n(n^4-15n^3+100n^2-300n+384), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ \frac{1}{2 \times 6!} (n-1)(n-3)(n-5)(n^2-6n+23), & n \equiv 1, 5 \quad \text{»} \\ \frac{1}{2 \times 6!} n(n-2)(n-4)(n^2-9n+38), & n \equiv 2, 4 \quad \text{»} \\ \frac{1}{2 \times 6!} (n-3)(n^4-12n^3+64n^2-168n+195), & n \equiv 3 \quad \text{»} \end{cases}$$

29. Nous terminerons par un tableau comparatif des valeurs numériques de  $V_n^x = (\alpha, n - \alpha)$ ,  $D_n^x = D(\alpha, n - \alpha)$ ,  $P_n^x = P(\alpha, n - \alpha)$  pour  $2 \leq n \leq 12$ ; par raison de symétrie, on se bornera aux valeurs de  $\alpha$  inférieures ou égales à  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ,

en utilisant les formules <sup>(1)</sup> (9; I), (1; II), (5; II), (10; II), (35; II), ou (36; II), et (50) :

$$\begin{array}{l}
 n = 2 : V_2^1 = 2, \quad D_2^1 = 1, \quad P_2^1 = 1; \\
 n = 3 : V_3^1 = 3, \quad D_3^1 = 2, \quad P_3^1 = 1; \\
 n = 4 \left\{ \begin{array}{l} V_4^1 = 4, \quad D_4^1 = 2, \quad P_4^1 = 1, \\ V_4^2 = 6, \quad D_4^2 = 4, \quad P_4^2 = 2; \end{array} \right. \\
 n = 5 \left\{ \begin{array}{l} V_5^1 = 5, \quad D_5^1 = 3, \quad P_5^1 = 1, \\ V_5^2 = 10, \quad D_5^2 = 6, \quad P_5^2 = 2; \end{array} \right. \\
 n = 6 \left\{ \begin{array}{l} V_6^1 = 6, \quad D_6^1 = 3, \quad P_6^1 = 1, \\ V_6^2 = 15, \quad D_6^2 = 9, \quad P_6^2 = 3, \\ V_6^3 = 20, \quad D_6^3 = 10, \quad P_6^3 = 3; \end{array} \right. \\
 n = 7 \left\{ \begin{array}{l} V_7^1 = 7, \quad D_7^1 = 4, \quad P_7^1 = 1, \\ V_7^2 = 21, \quad D_7^2 = 12, \quad P_7^2 = 3, \\ V_7^3 = 35, \quad D_7^3 = 19, \quad P_7^3 = 4; \end{array} \right. \\
 n = 8 \left\{ \begin{array}{l} V_8^1 = 8, \quad D_8^1 = 4, \quad P_8^1 = 1, \\ V_8^2 = 28, \quad D_8^2 = 16, \quad P_8^2 = 4, \\ V_8^3 = 56, \quad D_8^3 = 28, \quad P_8^3 = 5, \\ V_8^4 = 70, \quad D_8^4 = 38, \quad P_8^4 = 8; \end{array} \right. \\
 n = 9 \left\{ \begin{array}{l} V_9^1 = 9, \quad D_9^1 = 5, \quad P_9^1 = 1, \\ V_9^2 = 36, \quad D_9^2 = 20, \quad P_9^2 = 4, \\ V_9^3 = 84, \quad D_9^3 = 44, \quad P_9^3 = 7, \\ V_9^4 = 126, \quad D_9^4 = 66, \quad P_9^4 = 10; \end{array} \right. \\
 n = 10 \left\{ \begin{array}{l} V_{10}^1 = 10, \quad D_{10}^1 = 5, \quad P_{10}^1 = 1, \\ V_{10}^2 = 45, \quad D_{10}^2 = 25, \quad P_{10}^2 = 5, \\ V_{10}^3 = 120, \quad D_{10}^3 = 60, \quad P_{10}^3 = 8, \\ V_{10}^4 = 210, \quad D_{10}^4 = 110, \quad P_{10}^4 = 16, \\ V_{10}^5 = 252, \quad D_{10}^5 = 126, \quad P_{10}^5 = 16; \end{array} \right. \\
 n = 11 \left\{ \begin{array}{l} V_{11}^1 = 11, \quad D_{11}^1 = 6, \quad P_{11}^1 = 1, \\ V_{11}^2 = 55, \quad D_{11}^2 = 30, \quad P_{11}^2 = 5, \\ V_{11}^3 = 165, \quad D_{11}^3 = 85, \quad P_{11}^3 = 10, \\ V_{11}^4 = 330, \quad D_{11}^4 = 170, \quad P_{11}^4 = 20, \\ V_{11}^5 = 462, \quad D_{11}^5 = 236, \quad P_{11}^5 = 26; \end{array} \right. \\
 n = 12 \left\{ \begin{array}{l} V_{12}^1 = 12, \quad D_{12}^1 = 6, \quad P_{12}^1 = 1, \\ V_{12}^2 = 66, \quad D_{12}^2 = 36, \quad P_{12}^2 = 6, \\ V_{12}^3 = 220, \quad D_{12}^3 = 110, \quad P_{12}^3 = 12, \\ V_{12}^4 = 495, \quad D_{12}^4 = 255, \quad P_{12}^4 = 29, \\ V_{12}^5 = 792, \quad D_{12}^5 = 396, \quad P_{12}^5 = 38, \\ V_{12}^6 = 924, \quad D_{12}^6 = 472, \quad P_{12}^6 = 50. \end{array} \right.
 \end{array}$$

(1) On observe en outre que, pour  $\alpha = 2$ ,  $D_{2v}^2 = v^2$  et  $D_{2v+1}^2 = v(v+1)$ .



*Remarque.* — La relation de récurrence (2; I), qui s'écrit ici

$$D_n^\alpha = D_{n-2}^\alpha + V_{n-2}^{\alpha-1} + D_{n-2}^{\alpha-2},$$

conjointement avec la relation classique

$$V_n^\alpha = V_{n-1}^\alpha + V_{n-1}^{\alpha-1},$$

permettrait de former rapidement les deux premières colonnes de ce tableau, à condition d'écrire les  $V_n^\alpha$  et  $D_n^\alpha$  sans se limiter à la valeur  $\left[ \frac{n}{2} \right]$  de  $\alpha$ .

