F. BOREL

Sur certaines propriétés invariantes par déformation des congruences de droites, de cercles ou de sphères

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 4 (1961), p. 305-412
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_4_305_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 78, 1961, p. 305 à 412.

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS INVARIANTES PAR DÉFORMATION DES CONGRUENCES DE DROITES, DE CERCLES OU DE SPHÈRES (¹)

PAR M. F. BOREL.

INTRODUCTION.

Soit une surface S de l'espace euclidien E^3, donnée, O étant un point fixe, par une représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M}(u^i) \qquad (i = 1, 2).$$

Nous nous placerons en général dans l'espace euclidien réel. $\overrightarrow{M}(u^i)$ sera supposée pourvue de dérivées partielles continues jusqu'à un ordre suffisamment élevé pour justifier les calculs qui vont suivre et telle que $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial M}{\partial u^2}$ ne soient pas colinéaires, ceci sur un certain domaine du plan réel des u^i. Cependant la plupart des calculs sont encore valables dans l'espace euclidien complexe à condition de supposer $\overrightarrow{M}(u^i)$ analytique relativement aux variables complexes u^i. Il faut toutefois remarquer dans ce cas que, lorsqu'une direction de droite a été déterminée par la donnée d'un vecteur unitaire, les directions de droites isotropes sont automatiquement écartées. Ainsi le fait de choisir une normale unitaire à S écarte le cas où S serait une développable isotrope, mais ce cas est sans intérêt pour des problèmes de déformation.

(¹) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1960.

A tout point $M(u^i)$ de S nous associons le repère $\mathcal{R}(u^i)$ constitué par les trois vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^2}, \vec{n}$, $\vec{n}$ désignant l'une des normales unitaires à S en $M(u^i)$ choisie de manière à varier continuement :

$$\vec{n} = \varepsilon \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^2}}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^2} \right\|} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Soit S' une deuxième surface rapportée aux mêmes paramètres u^i que S et telle que la correspondance ainsi établie entre S et S' soit une *isométrie*. De la même façon que pour S, à tout point $M'(u^i)$ de S' nous pouvons associer un repère $\mathcal{R}'(u^i)$ et en vertu de l'applicabilité, si le choix de ε a été le même dans les deux cas, les repères $\mathcal{R}(u^i)$ et $\mathcal{R}'(u^i)$ sont égaux. Il existe un déplacement $\mathcal{D}(u^i)$ de E^3 tel que :

$$\mathcal{R}(u^i) \xrightarrow{\mathcal{D}(u^i)} \mathcal{R}'(u^i).$$

Supposons qu'à chaque point $M(u^i)$ de S soit associée une figure $F(u^i)$ de E^3. Cette figure sera en général définie dans le repère $\mathcal{R}(u^i)$ par la donnée de certains paramètres qui seront des fonctions des u^i; fonctions qui seront supposées posséder des dérivées partielles continues jusqu'à un ordre suffisamment élevé ou être éventuellement analytiques. L'ensemble des $F(u^i)$ que nous appellerons une congruence de figures, sera désigné par $[F(u^i)]$. *La congruence* $[F]$ *sera dite attachée à* S.

S' étant une surface isométrique à S, nous pouvons lui attacher la congruence de figures $[F'(u^i)]$ déduite de $[F(u^i)]$ par

$$F(u^i) \xrightarrow{\mathcal{D}(u^i)} F'(u^i).$$

$F'(u^i)$ sera définie dans $\mathcal{R}'(u^i)$ par les mêmes paramètres qui définissent $F(u^i)$ dans $\mathcal{R}(u^i)$. S' étant parfois appelée une déformée de S au sens de Gauss, nous dirons que *la congruence* $[F']$ *est une déformée de la congruence* $[F]$ *attachée à la surface* S. Cette notion de déformation est indépendante du système de variables utilisé. Un changement de variables $u^i = f_i(v^k)$ modifie les repères en $M(u^i)$ et $M'(u^i)$ mais les nouveaux repères se correspondent encore dans le déplacement $\mathcal{D}(u^i) = \mathcal{D}[f_i(v^k)]$.

On peut se demander s'il existe des congruences de figures attachées à une surface S qui possèdent certaines propriétés $(\mathcal{P})$ de telle sorte que dans une déformation arbitraire de S toutes les déformées des congruences envisagées possèdent aussi la propriété $(\mathcal{P})$. *La propriété* $(\mathcal{P})$ *sera dite alors invariante dans une déformation arbitraire de* S.

La présente étude porte principalement sur le cas des congruences de sphères (admettant S pour déférente), de droites et de cercles. Une méthode générale a été suivie pour l'effectuer : les différents problèmes ont été mis en équation avec le système de paramètres (u^i) le plus général de S de manière à bénéficier de l'aide apportée par le calcul tensoriel. Le fait de n'introduire dans les équations que des éléments ayant un caractère tensoriel relativement à l'espace de Riemann à deux dimensions constitué par S, outre le grand allègement apporté dans certaines écritures, facilite l'interprétation de quelques résultats grâce à la forme intrinsèque sous laquelle on les obtient. Cependant certains problèmes n'ont pu être résolus qu'après une particularisation convenable du système de paramétrage de S. Celle-ci a parfois été dictée par la forme des équations générales obtenues, alors qu'elle n'apparaissait pas nettement au départ.

Les notations utilisées sont du type de celles qu'emploie M. J. Favard dans son « Cours de Géométrie Différentielle Locale ». Un usage fréquent a été fait des tenseurs antisymétriques τ_{ij} et τ^{ij} associés à la métrique de S

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j \qquad [(g = \text{dét}(g_{ij}) \neq 0),\ i = 1,\ 2]$$

et définis par

$$\tau_{12} = \sqrt{g}, \qquad \tau^{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

τ_{ij} et τ^{ij} sont deux formes d'un même tenseur euclidien, leur caractère tensoriel n'étant cependant assuré que pour les changements de variables conservant l'orientation de l'espace de Riemann. Ces tenseurs se prêtent à l'expression du développement de certains déterminants lorsqu'on désire faire intervenir le plus grand nombre possible d'éléments intrinsèques. Ainsi

$$\tau^{ij} a_i b_j = \frac{1}{g} \,|\, a_i,\ b_i \,| \qquad (i \text{ indice de ligne du déterminant}),$$

$$\tau^{ij} a_{hi} a_{kj} = \frac{1}{g} \tau_{hk}\, \text{dét}(a_{ij}),$$

$$\text{dét}(a_{ij}) = \frac{1}{2} g \tau^{hk} \tau^{ij} a_{hi} a_{kj},$$

$$\begin{vmatrix} A_{ij} & a_i \\ B_j & b \end{vmatrix} = b\, \text{dét}(A_{ij}) + g\tau^{ij}\tau^{hk} a_i A_{jh} B_k$$

($i = 1,\ 2$ indice des deux premières lignes, $j = 1,\ 2$ indice des deux premières colonnes).

Signalons d'autre part la propriété suivante :

$$\tau^{ih}\tau_{jh} = \delta^i_j \qquad \text{(Symbole de Krönecker)}$$

et le fait que les *tenseurs* τ^{ij}, τ_{ij} *sont des tenseurs stationnaires.*

La deuxième forme quadratique fondamentale de S est notée

$$\eta_{ij}\, du^i\, du^j.$$

Le symbole « d » est réservé à la différentiation des fonctions scalaires ainsi qu'à la différentiation des fonctions vectorielles dans E^3. Le symbole « D » désigne la différentiation absolue relativement à l'espace de Riemann constitué par S.

Les différentes propriétés envisagées pour les congruences examinées dans cette étude s'expriment par des relations en termes finis relativement à η_{11}, η_{12}, η_{22} de la forme

$$(1) \qquad P_k(\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{22}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où P_k est un polynome du premier ou du second degré dont les coefficients dépendent de g_{ij} et des paramètres fixant la figure $F(u^i)$ dans $\mathcal{R}(u^i)$. Ces coefficients sont donc des fonctions des u^i invariantes dans la déformation arbitraire de S. Pour que la propriété traduite par les équations (1) soit invariante dans une déformation arbitraire, il faut et il suffit que toutes les solutions η_{11}, η_{12}, η_{22} du système de Gauss-Codazzi, relatif au ds^2 de S, vérifient les équations (1). Pour cela il faut et il suffit que pour tout (u^i), tout système de valeurs η_{11}, η_{12}, η_{22}, vérifiant l'équation de Gauss

$$(2) \qquad \eta_{11}\eta_{22} - (\eta_{12})^2 - gK = 0,$$

où K est la courbure totale de S, vérifie les équations (1). Donc si P_k est du premier degré il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls pour tout (u^i); si P_k est du second degré, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient, pour tout (u^i), proportionnels à ceux du premier membre de (2).

Dans une première partie, sont examinés quelques problèmes de déformation arbitraire, avec conservation d'une propriété, pour des congruences de figures qui se définissent à partir d'une congruence de sphères attachée à S et admettant S pour déférente. On étudie en particulier des exemples de congruences de droites attachées à S et possédant des propriétés invariantes dans une déformation arbitraire (congruences de normales, congruences dont une famille de développables est persistante) et deux exemples de systèmes cycliques attachés à S et restant des systèmes cycliques dans une déformation arbitraire.

Dans une deuxième partie, sont étudiés deux problèmes de déformation arbitraire relatifs à une congruence de droites attachée à S dans le cas le plus général et dont des cas particuliers ont été signalés dans la première partie. C'est, tout d'abord, le problème de la recherche de toutes les congruences de droites attachées à S, dont une famille de développables a pour image sur S une famille de courbes invariantes. Ce problème y est complètement résolu.

Ensuite est traité le problème des congruences de normales attachées à S et conservant cette propriété dans une déformation arbitraire. Des familles de solutions dépendant de fonctions arbitraires en sont données. Dans le cas où le rayon $D(u^i)$ est situé dans le plan tangent en $M(u^i)$, la possibilité d'extension d'un théorème de Darboux sur les systèmes cycliques est examinée. Elle conduit à une propriété caractéristique intéressante d'une classe de congruences de normales attachées à S et signalées à un autre point de vue par M. P. Vincensini.

La troisième partie est consacrée aux congruences de cercles admettant une infinité de surfaces trajectoires orthogonales (systèmes cycliques) pour lesquelles cette propriété est invariante dans une déformation arbitraire.

L'intérêt de la recherche des systèmes cycliques arbitrairement déformables provient en grande partie des liens étroits qu'elle présente avec la théorie générale de la déformation des surfaces. C'est à ce point de vue qu'ils ont été étudiés par différents auteurs (Ribaucour, Darboux, Bianchi, P. Vincensini, etc.) qui en ont donné des solutions particulières. Ce problème est envisagé ici dans toute sa généralité et sa solution complète en est donnée.

I. — DÉFORMATION DES CONGRUENCES DE SPHÈRES.

1. Principales congruences de figures attachées a une surface obtenues par la donnée d'une congruence de sphères. — A la surface S dont le point courant est $M(u^i)$, attachons la congruence de sphères $[\Sigma(u^i)]$, la sphère $\Sigma(u^i)$ étant centrée en $M(u^i)$, son rayon étant une fonction donnée des u^i : $R(u^i)$. Nous supposerons $R(u^i)$ munie de dérivées partielles continues jusqu'à un ordre suffisamment élevé pour permettre les calculs qui vont suivre.

Cette congruence de sphères admet une enveloppe et les points de contact $P(u^i)$, $P'(u^i)$ de $\Sigma(u^i)$ avec chacune des deux nappes de l'enveloppe sont situés sur la perpendiculaire au plan tangent en $M(u^i)$ à S menée par le point $I(u^i)$ défini par

$$\underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{\overrightarrow{\mathrm{MI}}} \left\{ \begin{array}{c} -\mathrm{RR}_{|i} = -\rho_{|i}, \\ 0 \end{array} \right.$$

en posant

$$\rho = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2.$$

Le point $I(u^i)$ est donc *attaché* à S. Il en est donc de même des points $P(u^i)$ et $P'(u^i)$. Si S est réelle et si $R(u^i)$ est une fonction réelle des variables réelles u^i, pour que les points P et P' soient réels il faut et il suffit que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 = \mathrm{R}^2\,\Delta\mathrm{R} \leqq \mathrm{R}^2,$$

c'est-à-dire

$$\Delta\mathrm{R} \leqq 1,$$

ΔR désignant le paramètre différentiel du premier ordre classique de Beltrami.

On peut ainsi attacher à la surface S un certain nombre de congruences de figures associées à la conguence $[\Sigma(u^i)]$. Ce sont par exemple :

— les congruences des points $I(u^i)$, $P(u^i)$, $P'(u^i)$;

— les congruences des plans tangents à $\Sigma(u^i)$ en P ou en P′;

— les congruences des droites PP′, MP, MP′ et de la conjuguée de PP′ relativement à Σ;

— la congruence des cercles orthogonaux à Σ en P et P′ et la congruence des cercles orthogonaux à Σ et admettant PP′ pour axe.

L'étude de ces congruences fournit des solutions particulièrement intéressantes des problèmes qui seront examinés dans les parties II et III.

2. Congruences des points de contact P et P′ et des rayons MP, MP′. — Le point $P(u^i)$ (ainsi que P′) jouit de la propriété d'être attaché à S et de décrire une surface dont le plan tangent en $P(u^i)$ reste lui aussi attaché à S lorsque cette dernière subit une déformation arbitraire. Cette propriété des congruences des points de contact d'une enveloppe de sphères admet une réciproque partielle.

Considérons un point $\Omega(u^i)$, attaché à S, et cherchons dans quels cas la surface engendrée par $\Omega(u^i)$ admet en ce point un plan tangent *restant lui-même attaché à* S. Il faut et il suffit pour cela qu'il existe un vecteur normal $\vec{i}\,(u^i)$ à la surface décrite par Ω et qui soit lui-même attaché à S. $\Omega(u^i)$ et $\vec{i}\,(u^i)$ sont définis par

$$\underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{\overrightarrow{M\Omega}} \begin{cases} a_i, \\ b; \end{cases} \qquad \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{\vec{i}} \begin{cases} \alpha_i \\ \beta \end{cases} \qquad (\vec{i} \neq 0).$$

On en déduit :

$$(2.1) \qquad \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^j} \begin{cases} g_{ij} + a_{i|j} - b\eta_{ij}, \\ b_{|j} + a^k\eta_{kj}; \end{cases} \qquad \frac{\partial\vec{i}}{\partial u^j} \begin{cases} \alpha_{i|j} - \beta\eta_{ij}, \\ \beta_{|j} + \alpha^k\eta_{kj}. \end{cases}$$

La propriété recherchée se traduit par

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^j}\cdot\vec{i} = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Soit

$$(g_{ij} + a_{i|j} - b\eta_{ij})\alpha^i + (b_{|j} + a^i\eta_{ij})\beta = 0,$$

après changement d'un indice muet. Cette condition est linéaire par rapport au η_{ij}:

$$(2.2) \qquad (\beta a^i - b\alpha^i)\eta_{ij} + (g_{ij} + a_{i|j})\alpha^i + b_{|j}\beta = 0.$$

Pour que la propriété soit conservée dans une déformation arbitraire de S il faut et il suffit que les coefficients du polynome du premier degré en η_{11}, η_{12}, η_{22} soient identiquement nuls, ce qui conduit à

$$(2.3) \qquad \beta a^i - b\alpha^i = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

et

$$(g_{ij} + a_{i|j})\alpha^i + b_{|j}\beta = 0. \tag{2.4}$$

1^er^ *cas :* $b \neq 0$. — (2.3) conduit alors, β ne pouvant être nul, sinon $\vec{i}$ le serait aussi, à l'existence de λ tel que

$$\alpha^i = \lambda a^i, \qquad \beta = \lambda b, \qquad \lambda \neq 0.$$

Le vecteur $\vec{i}$ a dans ce cas même support que $\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}$. Les équations (2.4) s'écrivent alors

$$(g_{ij} + a_{i|j})a^i + b_{|j}b = 0.$$

Si l'on pose

$$\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}^2 = \mathrm{R}^2,$$

R étant le rayon de la sphère $\Sigma(u^i)$ centrée en M et passant par Ω, l'équation devient :

$$a_j = -\mathrm{R}\mathrm{R}_{|j}.$$

Elle montre que Ω est l'un des points de contact de $\Sigma(u^i)$ avec son enveloppe.

2^e^ *cas :* $b = 0$. — Si β est différent de 0, d'après (2.3) on a $a^i = b = 0$. C'est le cas banal où Ω est en M. Nous supposerons donc $\beta = 0$. Ω et $\vec{i}$ sont tous deux dans le plan tangent en $\mathrm{M}(u^i)$, (2.4) devient :

$$(g_{ij} + a_{i|j})\alpha^i = 0. \tag{2.5}$$

On remarque que (2.2) donne directement (2.5) lorsque $\beta = b = 0$. Cette remarque équivaut au théorème de Ribaucour d'après lequel *toute congruence de courbes situées dans les plans tangents d'une surface* S *et admettant des trajectoires orthogonales, conserve cette propriété lorsqu'elle est entraînée dans une déformation arbitraire de* S. Il suffit de prendre pour $\Omega(u^i)$ l'un quelconque des points de la courbe qui décrit une trajectoire orthogonale et pour $\vec{i}(u^i)$ un vecteur tangent à la courbe en ce point.

En particulier, la résolution de (2.5) fournit la congruence de normales la plus générale dont les rayons sont situés dans les plans tangents de S. Le rayon (u^i) est la droite issue de Ω parallèle au vecteur $\vec{i}$ pour une solution quelconque de (2.5). Cette question sera reprise dans la deuxième partie.

La réciproque partielle annoncée résulte du premier cas ($b \neq 0$) :

Les seules congruences de points $\Omega(u^i)$ *attachées à une surface* S, *telles que le plan tangent en* $\Omega(u^i)$ *à la surface décrite par ce point reste attaché à* S *dans une déformation arbitraire de celle-ci, sont, dans le cas où* $\Omega(u^i)$ *n'est pas situé dans le plan tangent à* S *en* $\mathrm{M}(u^i)$, *les congruences des points de contact avec leur enveloppe des congruences de sphères admettant* S *pour déférente.*

La droite MP (ainsi que MP′) jouit de la propriété d'être attachée à S et d'engendrer une congruence de normales. Elle fournit donc un exemple de congruence de normales attachée à S et conservant cette propriété dans une déformation arbitraire de S. Ces congruences ont été signalées pour la première fois par Beltrami. D'après le résultat ci-dessus et le théorème de Ribaucour :

Les seules congruences de normales attachées à S, *arbitrairement déformables, pour lesquelles les points décrivant les différentes trajectoires orthogonales restent attachés à* S *sont les congruences de Beltrami et les congruences de normales dont les rayons sont dans les plans tangents de* S.

3. Congruence des cordes de contact PP′. $D_\Sigma(u^i)$. — *a. Notions préliminaires.* — Étant donnés deux réseaux de courbes de S définis par leurs équations différentielles quadratiques :

$$\left\{\begin{array}{l} A_{ij}\,du^i\,du^j = 0, \\ B_{ij}\,du^i\,du^j = 0, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

pour que ces deux réseaux se divisent harmoniquement il faut et il suffit, *pourvu que l'une au moins des matrices* A_{ij} *ou* B_{ij} *soit symétrique*, qu'on ait

$$\tau^{ij}\tau^{hk}A_{ih}B_{jk} = 0. \tag{3.2}$$

On vérifie alors sans difficulté que, si A_{ij} *et* B_{ij} *sont toutes deux symétriques*, le réseau

$$C_{ij}\,du^i\,du^j = 0, \qquad \text{où} \quad C_{ij} = \tau^{hk}A_{hi}B_{kj} \tag{3.3}$$

divise harmoniquement les réseaux donnés par les équations (3.1) dans le cas où la matrice C_{ij} n'est pas antisymétrique. En effet, d'après (3.2) et (3.3) on peut écrire :

$$\tau^{ij}\tau^{hk}A_{ih}C_{jk} = \tau^{ij}A_{ih}A_{lj}\tau^{hk}\tau^{lm}B_{mk} = \frac{1}{g}\tau_{hl}\,\text{dét}(A_{lj})\tau^{hk}\tau^{lm}B_{mk} = \frac{1}{g}\,\text{dét}(A_{lj})\tau^{km}B_{mk} = 0,$$

après avoir utilisé la symétrie de A_{ij} et B_{ij}. On montrerait de même que le réseau (3.3) divise harmoniquement le deuxième réseau (3.1). Lorsque C_{ij} est antisymétrique (3.3) ne détermine plus un réseau. Ce cas ne se produit que lorsque les matrices A_{ij} et B_{ij} sont proportionnelles, c'est-à-dire lorsque les deux réseaux (3.1) sont confondus. Dans le cas où ces réseaux sont distincts (3.3) fournit le seul réseau les divisant harmoniquement. Il est à noter que *la matrice* C_{ij} *n'est pas symétrique en général.* Cela n'a lieu que si

$$\tau^{ij}C_{ij} = \tau^{hk}\tau^{ij}A_{hi}B_{kj} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (3.2), si les réseaux (3.1) se partagent harmoniquement. (Cette dernière étude est valable dès que l'une des matrices A_{ij}, B_{ij} est symétrique.)

Enfin on peut remarquer que l'équation du réseau (3.3) peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1\,du^2 & (du^1)^2 \\ A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ B_{11} & B_{12} & B_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Examinons maintenant dans quels cas le réseau (3.3) divise harmoniquement les réseaux (3.1) *lorsque l'une seule des matrices* A_{ij} *ou* B_{ij} *est symétrique*, (B_{ij} par exemple).

Dans ce cas, si nous introduisons la matrice symétrique associée à A_{ij} :

$$A'_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$$

et la matrice antisymétrique

$$A''_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \lambda\tau_{ij},$$

le premier réseau (3.1) a pour équation

$$A'_{ij}\,du^i\,du^j = 0. \tag{3.5}$$

D'autre part,

$$C_{ij} = \tau^{hk}A_{hi}B_{kj} = \tau^{hk}A'_{hi}B_{kj} + \tau^{hk}\tau_{hi}\lambda B_{kj},$$

soit

$$C_{ij} = \tau^{hk}A'_{hi}B_{kj} + \lambda B_{ij}.$$

1^er^ *cas.* — En écrivant que le réseau (3.3) divise harmoniquement le réseau (3.5), les termes en A'_{hi} disparaissent en vertu de la démonstration relative au cas où les deux matrices sont symétriques et l'on obtient la condition nécessaire et suffisante :

$$\lambda\tau^{ij}\tau^{hk}A'_{ih}B_{jk} = 0$$

qui se décompose en

$$\lambda = 0$$

A_{ij} est alors symétrique.

Et en

$$\tau^{ij}\tau^{hk}A'_{ih}B_{jk} = 0,$$

les deux réseaux (3.1) sont alors conjugués.

2^e^ *cas.* — En écrivant que le réseau (3.3) divise harmoniquement le deuxième réseau (3.1) les termes en A'_{ih} disparaissent encore pour la même raison et l'on obtient la condition nécessaire et suffisante

$$\lambda\tau^{ij}\tau^{hk}B_{ih}B_{jk} = 0,$$

soit

$$\lambda(\text{dét}\,B_{ij}) = 0.$$

Celle-ci conduit aux deux cas suivants : A_{ij} symétrique ou deuxième réseau (3.1) double.

D'où le résultat qui sera utilisé plus loin :

Étant donné les réseaux de courbes R_1 *et* R_2 *dont les équations respectives sont*

$$R_1 : \quad A_{ij}\, du^i\, du^j = 0, \qquad R_2 : \quad B_{ij}\, du^i\, du^j = 0$$

et le réseau R_3 *d'équation :*

$$C_{ij}\, du^i\, du^j = 0, \qquad \text{avec} \quad C_{ij} = \tau^{hk} A_{hi} B_{kj},$$

la matrice B_{ij} *étant symétrique :*

1° *Pour que le réseau* R_3 *divise harmoniquement le réseau* R_1 *il faut et il suffit, soit que la matrice* A_{ij} *soit symétrique, soit que les réseaux* R_1 *et* R_2 *se divisent harmoniquement.*

2° *Pour que le réseau* R_3 *divise harmoniquement le réseau* R_2, *il faut et il suffit, soit que la matrice* A_{ij} *soit symétrique, soit que le réseau* R_2 *soit double.*

b. Étude des développables de la congruence des cordes de contact. — Nous désignerons par la suite la corde de contact PP′ de la sphère $\Sigma(u^i)$ par la notation $D_\Sigma(u^i)$. L'équation différentielle des développables de la congruence $[D_\Sigma(u^i)]$, s'écrit

$$\left(d\vec{I},\, d\vec{n},\, \vec{n}\right) = 0,$$

or

$$\underset{\text{cov.}}{d\vec{I}} \begin{cases} (g_{ij} - \rho_{|ij})\, du^j, \\ -\rho^{|k} \eta_{kj}\, du^j; \end{cases} \qquad \underset{\text{cov.}}{d\vec{n}} \begin{cases} -\eta_{ij}\, du^j, \\ 0 \end{cases} \qquad \underset{\text{cov.}}{\vec{n}} \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases}$$

Après des modifications d'indices muets, l'équation des développables s'écrit

$$\tau^{hk}(g_{hi} - \rho_{|hi})\eta_{kj}\, du^i\, du^j = 0. \tag{3.6}$$

Cette équation définit en général un réseau de courbes réelles ou imaginaires de S. Ces courbes sont les images sur S des développables de $[D_\Sigma]$. Les tenseurs $g_{ij} - \rho_{|ij}$ et η_{ij} étant symétriques, d'après (3.3), le réseau image des développables divise harmoniquement les réseaux d'équations respectives :

$$\begin{aligned} &\eta_{ij}\, du^i\, du^j = 0, \\ &(g_{ij} - \rho_{|ij})\, du^i\, du^j = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Le premier de ces réseaux est celui des asymptotiques de S. Le deuxième a la propriété remarquable d'être invariant dans une déformation arbitraire de S. Ce réseau n'est autre que le réseau invariant associé par M. P. Vincensini à la congruence des points $I(u^i)$, attachés à S. C'est le réseau des courbes le long desquelles $M(u^i)$ doit se déplacer pour que les courbes homologues décrites par $I(u^i)$ leur correspondent avec orthogonalité des tangentes. En effet (3.7) exprime :

$$d\vec{M} \cdot d\vec{I} = 0.$$

Le réseau image des développables est conjugué au sens de Dupin et divise harmoniquement le réseau invariant associé par M. Vincensini à la congruence des points $I(u^i)$.

On peut caractériser les congruences de cordes de contact parmi les congruences $[D(u^i)]$ dont le rayon $D(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent en $M(u^i)$, grâce aux propriétés ci-dessus. Soit une congruence dont le rayon $D(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent à S en $M(u^i)$ au point $\Omega(u^i)$

$$\underset{\text{cov.}}{\overrightarrow{M\Omega}} \begin{cases} a_i, \\ 0; \end{cases} \qquad \underset{\text{cov.}}{d\overrightarrow{\Omega}} \begin{cases} (g_{ij} + a_{i|j})\, du^j, \\ a^k \eta_{kj}\, du^j. \end{cases}$$

L'équation des développables de la congruence $[D]$:

$$\left(d\overrightarrow{\Omega}.d\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}\right) = 0,$$

s'écrit

$$\tau^{hk}(g_{hi} + a_{h|i})\,\eta_{kj}\, du^i\, du^j = 0. \tag{3.9}$$

Le réseau invariant associé à la congruence de points $[\Omega(u^i)]$ par M. Vincensini s'écrit ici

$$(g_{ij} + a_{i|j})\, du^i\, du^j = 0. \tag{3.10}$$

Le résultat trouvé pour les congruences de cordes de contact ne s'étend pas en général car ici le tenseur $g_{ij} + a_{i|j}$ n'est pas symétrique en général. Pour que ce tenseur soit symétrique il faut et il suffit que $a_{i|j}$ le soit, or cela est la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur a_i soit un gradient, c'est-à-dire pour qu'il existe $\rho(u^i)$ (défini à une constante additive près) tel que :

$$a_i = -\rho_{|i}.$$

$[D]$ est alors une congruence de cordes de contact relativement à la congruence des sphères $\Sigma(u^i)$ centrées en $M(u^i)$ et dont le rayon est $R(u^i)$ tel que $R^2 = 2\rho$.

En posant $A_{ij} = g_{ij} + a_{i|j}$ et $B_{ij} = \eta_{ij}$, (3.9) prend la forme (3.3).

Le tenseur η_{ij} étant symétrique, d'après l'étude préliminaire, pour que le réseau image des développables de $[D]$ soit conjugué au sens de Dupin, c'est-à-dire divise harmoniquement le réseau ($\eta_{ij}\, du^i\, du^j = 0$) il faut et il suffit :

— soit que le tenseur $g_{ij} + a_{i|j}$ soit symétrique, c'est-à-dire que $[D]$ soit une congruence de cordes de contact;

— soit que le réseau ($\eta_{ij}\, du^i\, du^j = 0$) soit double, c'est-à-dire que S soit développable.

Les seules congruences dont le rayon $D(u^i)$ *est perpendiculaire au plan tangent en* $M(u^i)$ *à* S *pour lesquelles le réseau image sur* S *des développables est conjugué, sont, lorsque* S *n'est pas développable, les congruences des cordes de contact d'enveloppes de sphères admettant* S *pour déférente.*

D'après la même étude préliminaire, pour que le réseau image des développables de [D] divise harmoniquement le réseau invariant (3.10), il faut et il suffit :

— soit que le tenseur $g_{ij} + a_{i|j}$ soit symétrique ;

— soit que le réseau invariant (3.9) divise harmoniquement le réseau des asymptotiques.

Les seules congruences dont le rayon $\mathrm{D}(u^i)$ *est perpendiculaire en* $\Omega(u^i)$ *au plan tangent en* $\mathrm{M}(u^i)$ *à* S *pour lesquelles le réseau image des développables sur* S *divise harmoniquement le réseau invariant associé à la congruence de points* $[\Omega(u^i)]$ *sont les congruences de cordes de contact de congruences de sphères admettant* S *pour déférente et les congruences pour lesquelles le réseau invariant est conjugué.*

Une différence importante distingue ces deux types de congruences. Les congruences de cordes de contact conservent la propriété lorsqu'elles sont entraînées dans une déformation arbitraire de S. Il n'en est pas ainsi pour les congruences du second type, car il est bien connu qu'il n'existe pas de réseau invariant restant conjugué dans une déformation arbitraire de S.

Examinons s'il existe des congruences $[\mathrm{D}(u^i)]$ dont le rayon est perpendiculaire au plan tangent en $\mathrm{M}(u^i)$, autres que les congruences de cordes de contact, pour lesquelles le réseau image des développables divise harmoniquement un réseau invariant lorsqu'elles sont entraînées dans une déformation arbitraire de S. Soit

$$\mathrm{D}_{ij}\, du^i\, du^j = 0, \tag{3.11}$$

l'équation du réseau invariant cherché. D_{ij} est supposé symétrique et non nul. Pour que les réseaux (3.9) et (3.11) se divisent harmoniquement, il faut et il suffit, puisque D_{ij} est symétrique, qu'on ait d'après (3.2) :

$$\tau^{ij}\tau^{hk}\mathrm{D}_{ih}\tau^{lm}(g_{lj} + a_{l|j})\eta_{mk} = 0.$$

Pour que cette propriété soit invariante dans une déformation arbitraire de S, il faut et il suffit que les coefficients de η_{11}, η_{12}, η_{22} dans le premier membre de l'équation ci-dessus soient nuls, c'est-à-dire que le tenseur

$$\mathrm{H}^{mk} = \tau^{lm}\tau^{hk}\tau^{ij}\mathrm{D}_{ih}(g_{lj} + a_{l|j})$$

soit antisymétrique. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que le tenseur

$$\mathrm{K}_{lh} = \tau^{ij}(g_{lj} + a_{l|j})\mathrm{D}_{ih}$$

le soit car

$$\mathrm{H}^{mk} = \tau^{lm}\tau^{hk}\mathrm{K}_{lh} \Leftrightarrow \mathrm{K}_{ij} = \tau_{mi}\tau_{kj}\mathrm{H}^{mk}.$$

Si nous posons $g_{ij} + a_{i|j} = \mathrm{A}_{ij}$, en vertu de la symétrie de D_{ih} :

$$\mathrm{K}_{lh} = \tau^{ij}\mathrm{D}_{hi}\mathrm{A}_{lj}. \tag{3.12}$$

En écrivant que $K_{11} = K_{22} = 0$, on est conduit à

$$\text{dét}(D_{li}, A_{li}) = 0 \qquad (l = 1, 2;\ i \text{ indice de ligne}).$$

De sorte que si l'on suppose que les A_{1i} ne sont pas tous nuls ainsi que les A_{2i}, ce qui est toujours réalisable pour certains paramétrages de S sauf si le tenseur A_{ij} est nul, il existe $\underset{(l)}{\lambda}$ tel que :

$$D_{li} = \underset{(l)}{\lambda} A_{li}.$$

La condition $K_{12} + K_{21} = 0$ conduit alors à

$$\underset{(1)}{\lambda}\tau^{ij} A_{1i} A_{2j} - \underset{(2)}{\lambda}\tau^{ij} A_{1i} A_{2j} = 0,$$

soit

$$\left[\underset{(1)}{\lambda} - \underset{(2)}{\lambda}\right] \text{dét}(A_{ij}) = 0,$$

d'où deux cas :

$\underset{(1)}{\lambda} = \underset{(2)}{\lambda} = \lambda$ qui conduit à

$$D_{ij} = \lambda A_{ij},$$

ce qui exige que $A_{ij} = g_{ij} + a_{i|j}$ soit symétrique. Ce cas est celui des congruences de cordes de contact.

$\text{dét}(A_{ij}) = \text{dét}(g_{ij} + a_{i|j}) = 0$, $\underset{(1)}{\lambda}$ et $\underset{(2)}{\lambda}$ doivent vérifier, pour que D_{ij} soit symétrique :

$$\underset{(1)}{\lambda} A_{12} = \underset{(2)}{\lambda} A_{21}.$$

On constate que

$$\text{dét}(D_{ij}) = \underset{(1)}{\lambda}\underset{(2)}{\lambda} \text{dét}(A_{ij}) = 0.$$

Dans ce cas le réseau invariant divisé harmoniquement par le réseau image des développables est double. Une des familles de courbes-images des développables coïncide avec ce réseau double. Une des familles de développables de la congruence est donc *persistante* dans une déformation arbitraire de S. L'étude complète des congruences de droites attachées à S et admettant une famille de développables persistantes sera faite dans la deuxième partie. Les congruences rencontrées ici seront alors identifiées avec une classe spéciale de congruences à développables persistantes déterminées par M. S. Finikoff.

Les seules congruences dont le rayon $D(u^i)$ *est perpendiculaire au plan tangent à* S *en* $M(u^i)$ *pour lesquelles le réseau-image des développables divise harmoniquement un réseau invariant dans une déformation arbitraire de* S *sont les congruences des cordes de contact des congruences de sphères qui admettent* S *pour déférente et les congruences de M. Finikoff.*

c. *Étude des plans focaux. Congruences de normales.* — Lorsque $M(u^i)$ décrit la courbe-image d'une développable de $[D_\Sigma(u^i)]$, le plan tangent à cette développable le long de $D_\Sigma(u^i)$ est déterminé par $\vec{n}$ et $d\vec{n}$ ou par $\vec{n}$ et $d\vec{I}$, du^i étant un vecteur tangent à la courbe-image. Soit δu^i le vecteur tangent à la deuxième courbe-image de développables passant par $\mathrm{M}(u^i)$. Le réseau-image étant conjugué au sens de Dupin et divisant harmoniquement le réseau invariant associé à $[\mathrm{I}(u^i)]$, du^i et δu^i vérifient

$$\eta_{ij}\, du^j\, \delta u^i = 0,$$
$$(g_{ij} - \rho_{|ij})\, du^j\, \delta u^i = 0.$$

Lorsque le réseau-image des développables n'est pas indéterminé, c'est-à-dire si le réseau invariant ne coïncide pas avec le réseau des asymptotiques, l'une au moins des équations ci-dessus détermine parfaitement le couple δu^i (à une proportionnalité près). Or ces équations s'écrivent :

$$d\vec{n}\,.\,\delta\vec{\mathrm{M}} = 0,$$
$$d\vec{\mathrm{I}}\,.\,\delta\vec{\mathrm{M}} = 0;$$

elles montrent que *le plan focal en* $\mathrm{D}_\Sigma(u^i)$ *associé à une développable de* $[\mathrm{D}_\Sigma]$ *est perpendiculaire à la tangente en* $\mathrm{M}(u^i)$ *à la courbe-image de la deuxième famille de développables.*

Pour que la congruence $\mathrm{D}_\Sigma(u^i)$ soit une congruence de normales, il est donc nécessaire et suffisant que le réseau-image des développables soit orthogonal (plans focaux perpendiculaires). Ce réseau étant conjugué coïncidera alors avec le réseau des lignes de courbure de S. Il bissectera le réseau invariant associé à $\mathrm{I}(u^i)$. D'après (3.4) l'équation du réseau-image des développables peut s'écrire

$$(3.13)\qquad \begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1\,du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} - \rho_{|11} & g_{12} - \rho_{|12} & g_{22} - \rho_{|22} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que ce réseau soit orthogonal, c'est-à-dire divise harmoniquement le réseau des courbes de longueur nulle, il faut et il suffit que l'équation déduite de (3.13) en remplaçant $(du^2)^2$, $-du^1\,du^2$, $(du^1)^2$ par g_{11}, g_{12}, g_{22} soit vérifiée. D'où la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de cordes de contact soit une congruence de normales :

$$(3.14)\qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ \rho_{|11} & \rho_{|12} & \rho_{|22} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème est ramené à la résolution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à la fraction inconnue $\rho(u^i)$, (3.14).

On remarque que, lorsque S est une sphère, le réseau-image des développables qui est conjugué est par conséquent orthogonal. La congruence $[\mathrm{D}_\Sigma(u^i)]$ est, quel que soit $\rho(u^i)$, une congruence de normales.

Examinons en particulier s'il existe des congruences $[D_\Sigma(u^i)]$ attachées à S qui restent des congruences de normales dans une déformation arbitraire. Pour cela, il faut et il suffit que les coefficients de η_{11}, η_{12}, η_{22} dans le premier membre de (3.14) soient nuls c'est-à-dire qu'on ait

$$\rho_{|ij} = \alpha g_{ij}, \tag{3.15}$$

α étant un scalaire. Pour étudier cette condition, utilisons un paramétrage particulier de S : $u^1 = u$, $u^2 = v$ tel que le réseau des courbes coordonnées soit orthogonal, la fonction ρ restant constante le long des courbes ($u = \text{Cte}$). Sauf dans le cas où $\rho(u^i)$ est constante sur S, ce réseau est parfaitement déterminé tout au moins localement. Nous écarterons d'ailleurs ce cas qui fournit une solution banale : la congruence des normales à S.

Si pour le paramétrage particulier utilisé nous posons

$$g_{11} = \text{E}, \qquad g_{12} = g_{22} = \text{F}, \qquad g_{22} = \text{G},$$

l'hypothèse faite équivaut à

$$\text{F} = 0, \qquad \rho = \rho(u) \qquad (\text{fonction de } u \text{ seul}).$$

Le calcul des dérivées secondes covariantes et l'élimination de α dans (3.15) conduisent aux équations :

$$\frac{\rho'' - \frac{1}{2\text{E}}\frac{\partial \text{E}}{\partial u}\rho'}{\text{E}} = \frac{\frac{1}{2\text{E}}\frac{\partial \text{G}}{\partial u}\rho'}{\text{G}} = \frac{-\frac{1}{2\text{E}}\frac{\partial \text{E}}{\partial v}\rho'}{\text{O}}. \tag{3.16}$$

Le cas ($\rho = \text{Cte}$) ayant été écarté, on déduit de là $\frac{\partial \text{E}}{\partial v} = 0$ c'est-à-dire E fonction de u seul.

Par un changement de variable, $u = \varphi(\text{U})$ qui ne change donc pas le réseau des courbes coordonnées, tel que

$$\text{E}(u)\, du^2 = d\text{U}^2,$$

on peut toujours se ramener, sans altérer les hypothèses faites précédemment, au cas où

$$\text{E} = 1.$$

La première équation (3.16) s'écrit alors :

$$\frac{\rho''}{\rho'} = \frac{1}{2\text{G}}\frac{\partial \text{G}}{\partial u}, \tag{3.17}$$

d'où

$$\text{G} = f(v)\rho'^2.$$

Par un changement de variable de la forme $v = \psi(\text{V})$ tel que

$$f(v)\, dv^2 = d\text{V}^2,$$

on peut toujours se ramener au cas où

$$G = \rho'^2 \qquad \text{(fonction de } u \text{ seul).}$$

La surface S doit donc être isométrique à une surface de révolution. Sa première forme fondamentale peut en effet s'écrire

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\, dv^2.$$

La condition est suffisante, la congruence des spères étant définie d'après (3.17) par

$$\rho = a \int r(u)\, du,$$

a étant une constante arbitraire non nulle.

Lorsque S *est isométrique à une surface de révolution il existe des congruences de sphères* $[\Sigma]$ *admettant* S *pour déférente telles que les congruences* $[D_\Sigma]$ *des cordes de contact restent des congruences de normales dans une déformation arbitraire de* S. *Si l'on exclut les congruences de sphères de rayon constant, cette propriété est caractéristique des surfaces de révolution.*

Dans la deuxième partie, le problème des congruences de normales attachées à une surface S et arbitrairement déformables avec elle sera étudié dans toute sa généralité et l'on verra que, dans le cas où le rayon $D(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent en $M(u^i)$ à S, sa solution en est précisément fournie par les congruences de cordes de contact étudiées ci-dessus.

4. Congruence $[\Delta_\Sigma(u^i)]$ engendrée par la droite conjuguée de la corde des contacts $D_\Sigma(u^i)$ relativement a la sphère $\Sigma(u^i)$. — Dans la suite, nous l'appelerons plus brièvement la *congruence des polaires des cordes de contact.*

a. Étude préliminaire. — Étant donnée une congruence de droites $\Delta(u^i)$, examinons s'il existe une congruence de sphères $\Sigma(u^i)$ telle que $\Delta(u^i)$ soit la droite conjuguée relativement à $\Sigma(u^i)$ de la corde des contacts PP′ de $\Sigma(u^i)$ avec les deux nappes de son enveloppe. Nous supposerons $\Delta(u^i)$ définie par la donnée de l'un de ses points $\Omega(u^i)$ (surface de départ) et de l'un de ses deux vecteurs unitaires $\vec{i}(u^i)$ (représentation sphérique). Nous appellerons $M(u^i)$ et $R(u^i)$ le centre et le rayon de la sphère cherchée $\Sigma(u^i)$.

Les points de contact de la sphère et de son enveloppe sont les intersections P et P′ de la sphère

$$\Sigma(u_i): \overrightarrow{MX}^2 = R^2$$

et des plans

$$\Pi_j(u^i): \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^j} \cdot \overrightarrow{MX} = -R \frac{\partial R}{\partial u^j} \qquad (j = 1, 2), \tag{4.1}$$

X désignant le point courant de ces surfaces. Nous supposerons régulière la déférente de la congruence de sphères cherchées c'est-à-dire que les vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^j}$ ne sont pas colinéaires. Il faut et il suffit que chacun des plans Π_j ait son pôle relativement à Σ sur Δ. Ce pôle Q_j est tel, lorsqu'il est à distance finie, que l'équation de Π_j peut s'écrire

$$\overrightarrow{MQ_j}.\overrightarrow{MX} = R^2.$$

Ceci a lieu lorsque R et $\frac{\partial R}{\partial u^j}$ sont différents de o. En comparant avec (4.1) on en déduit

$$\overrightarrow{MQ_j} = -\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial u^j}}\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^j}$$

et en prenant Ω pour origine

$$\overrightarrow{\Omega Q_j} = \overrightarrow{\Omega M} - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial u^j}}\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^j}$$

Pour que les points Q_j appartiennent à Δ, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial R}{\partial u^j}\overrightarrow{\Omega M} - R\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^j} // \vec{i}$$

On remarque que cette condition est encore nécessaire et suffisante lorsque l'une des quantités $\frac{\partial R}{\partial u^j}$ est nulle, car le plan Π_j passe alors par M et son pôle est le point à l'infini dans la direction $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^j}$. Par contre nous devons écarter le cas où les deux quantités $\frac{\partial R}{\partial u^j}$ sont nulles, car cela entraîne, soit le parallélisme des vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^j}$, soit le fait que $\Delta(u^i)$ est rejetée à l'infini. Nous écarterons donc les congruences de rayon constant qui ne peuvent convenir. Après division par R^2, la condition ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \Omega}{\partial u^j} + \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{R}\overrightarrow{\Omega M}\right) // \vec{i}. \tag{4.2}$$

Condition nécessaire. — Si $[\Delta]$ est la congruence des polaires des cordes de contact associée à la congruence de sphères $[\Sigma]$, (4.2) est vérifiée. Si nous faisons intervenir la congruence de droites $[\Delta']$ dont le rayon $\Delta'(u^i)$ est parallèle à $\Delta(u^i)$ et contient le point $\Omega'(u^i)$ défini, O étant un point fixe, par :

$$\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1}{R}\overrightarrow{M\Omega},$$

(4.2) peut s'écrire

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^j}-\frac{\partial\vec{\Omega}'}{\partial u^j}//\vec{i}. \tag{4.3}$$

L'équation des développables de $[\Delta]$

$$\left(d\vec{\Omega},\ d\vec{i},\ \vec{i}\right)=0,$$

en vertu de (4.3) est équivalente à

$$\left(d\vec{\Omega}',\ d\vec{i},\ \vec{i}\right)=0.$$

Il en résulte que les congruences $[\Delta]$ et $[\Delta']$, qui ont la même représentation sphérique, admettent les mêmes images pour leurs développables. Les plans focaux homologues sont parallèles.

Les foyers F_1, F_2 de $\Delta(u^i)$ sont déterminés par

$$\overrightarrow{\Omega F}=x\vec{i},$$

x étant solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^1}+x\frac{\partial\vec{i}}{\partial u^1},\ \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^2}+x\frac{\partial\vec{i}}{\partial u^2},\ \vec{i}\right)=0$$

qui en vertu de (4.3) devient

$$\left(\frac{\partial\vec{\Omega}'}{\partial u^1}+\frac{x}{R}\frac{\partial\vec{i}}{\partial u^1},\ \frac{\partial\vec{\Omega}'}{\partial u^2}+\frac{x}{R}\frac{\partial\vec{i}}{\partial u^2},\ \vec{i}\right)=0,$$

ce qui montre que les foyers F'_1, F'_2 de $\Delta'(u^i)$ vérifient

$$\overrightarrow{\Omega' F'_1}=\frac{1}{R}\overrightarrow{\Omega F_1},\qquad \overrightarrow{\Omega' F'_2}=\frac{1}{R}\overrightarrow{\Omega F_2}.$$

On peut énoncer ainsi le résultat de cette étude :

Étant donnée une congruence de sphères $\Sigma(u^i)$ de rayon $R(u^i)$, l'homothétie variable $\mathcal{H}(u^i)$ (ou translation) de rapport $\frac{1}{R}$ qui transforme $M(u^i)$ en un point fixe O, transforme la polaire $\Delta_\Sigma(u^i)$ de la corde de contact en une droite $\Delta'(u^i)$ telle que les congruences $[\Delta_\Sigma]$ et $[\Delta']$ ont même image sphérique de leurs développables, les foyers et plans focaux associés à $\Delta_\Sigma(u^i)$ et $\Delta'(u^i)$ se correspondant dans $\mathcal{H}(u^i)$.

La transformée de la sphère $\Sigma(u_i)$ par $\mathcal{H}(u^i)$ est la sphère unitaire de centre O.

Si l'on suppose que la représentation sphérique de la congruence $[\Delta_\Sigma]$ est régulière, on peut faire intervenir les composantes de $\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^j}$ et $\frac{\partial\vec{\Omega}'}{\partial u^j}$ dans le repère local de la sphère unitaire $\frac{\partial \vec{i}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{i}}{\partial u^2}, \vec{i}$:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^j} \begin{cases} \mu_{ij}, \\ \lambda_j; \end{cases} \qquad \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial u^j} \begin{cases} \mu'_{ij}, \\ \lambda'_j. \end{cases}$$

Les μ_{ij} (coefficients de Kummer) sont les composantes d'un tenseur. La condition (4.3) équivaut à

$$\mu'_{ij} = \frac{1}{R} \mu_{ij}. \tag{4.4}$$

Les coefficients de Kummer des congruences $[\Delta_\Sigma]$ et $[\Delta']$ rapportées aux surfaces de départ $\Omega(u^i)$ et $\Omega'(u^i)$ sont proportionnels.

Condition suffisante. — Inversement, si les coefficients de Kummer des congruences $[\Delta(u^i)]$, $[\Delta'(u^i)]$ ayant même représentation sphérique, sont proportionnels pour des surfaces de départ données $\Omega(u^i)$ et $\Omega'(u^i)$, il suffit de poser égal à $\frac{1}{R}$ le rapport de proportionnalité pour que (4.4) et par suite (4.3) soient vérifiées. O étant un point fixe quelconque, si $M(u^i)$ est défini par (4.3) la congruence des sphères $\Sigma(u^i)$ de rayon $R(u^i)$ centrées en $M(u^i)$ vérifie la condition nécessaire et suffisante (4.2), Elle admet donc $[\Delta(u^i)]$ comme congruence des polaires de cordes de contact.

Étant donnée une congruence de droites $[\Delta(u^i)]$ dont la représentation sphérique est régulière, la recherche des congruences de sphères admettant $[\Delta]$ comme congruence des polaires des cordes de contact est équivalente à la recherche des congruences de droites $[\Delta'(u^i)]$ ayant même représentation sphérique que $[\Delta(u^i)]$ et des coefficients de Kummer proportionnels à ceux de $[\Delta(u^i)]$.

La représentation sphérique étant connue, pour que le tenseur μ_{ij} fournisse les coefficients de Kummer d'une congruence, il faut et il suffit qu'il vérifie l'équation

$$\tau^{hj} \mu^{i}_{.h|ji} + \tau^{ji} \mu_{ij} = 0, \tag{4.5}$$

les calculs étant effectués relativement à la métrique de la représention sphérique La congruence et sa surface de départ sont alors déterminées à une translation près par des quadratures. Cette équation prend la forme plus remarquable suivante si l'on introduit le tenseur symétrique M^{ij} défini par

$$M^{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji}), \qquad \text{avec} \quad A^{ij} = \tau^{hj} \mu^{i}_{.h}, \tag{4.6}$$

τ^{ij} étant antisymétrique et stationnaire :

$$M^{ij}{}_{|ij} + M_{i.}^{i} = 0. \tag{4.7}$$

On vérifie aisément que M^{ij} est indépendant de la surface de départ et que sa connaissance, lorsque (4.3) est vérifiée, entraîne la connaissance de la congruence à une translation près.

Pour que $\mu'_{ij} = \frac{1}{R}\mu_{ij}$ détermine une congruence ayant même représentation sphérique que [Δ], il faut et il suffit qu'il vérifie l'équation analogue à (4.5). Pour cela, il faut et il suffit que

$$M'^{ij} = \sigma M^{ij}, \qquad \text{avec} \quad \sigma = \frac{1}{R}$$

vérifie l'équation analogue à (4.7). D'où une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre pour σ qui, en tenant compte de (4.7), s'écrit :

$$M^{ij}\sigma_{|ij} + 2M^{ij}{}_{|i}\,\sigma_{|j} = 0. \tag{4.8}$$

A toute solution $\sigma = \frac{1}{R}$ de (4.8), correspond une surface de départ $\Omega'(u^i)$ définie à une translation près lorsque $[\Delta(u^i)]$ est définie par sa représentation sphérique et une surface de départ $\Omega(u^i)$. La sphère $\Sigma(u^i)$ cherchée a pour rayon $R(u^i)$ et pour centre $M(u^i)$ tel que

$$\overrightarrow{\Omega M} = -R\,\overrightarrow{O\Omega'},$$

O *étant un point fixe quelconque.*

En permutant les rôles de Δ et Δ' on voit que la congruence des sphères $[\Sigma'(u^i)]$ de rayon $\frac{1}{R}$ et de centre M′ défini par $\overrightarrow{\Omega' M'} = -\frac{1}{R}\overrightarrow{O\Omega}$, admet $[\Delta']$ pour congruence des polaires des cordes de contact.

b. Étude des développables de la congruence $[\Delta_\Sigma]$. — Soit une congruence de sphères $\Sigma(u^i)$ admettant S pour déférente, de rayon $R(u^i)$. D'après l'étude préliminaire, O étant un point fixe, l'homothétie variable de rapport $\frac{1}{R}$ qui transforme le point courant $M(u^i)$ de la surface en le point O transforme $\Delta_\Sigma(u^i)$ en une droite $\Delta'(u^i)$, les congruences $[\Delta_\Sigma]$ et $[\Delta']$ ayant même représentation sphérique pour leurs développables. Cette même homothétie transforme $\Sigma(u^i)$ en la sphère fixe Σ' de rayon unité, centrée en O, $D_\Sigma(u^i)$ en une droite $D'(u^i)$ et le point I en I′ avec les notations du paragraphe 3.

$\Delta'(u^i)$ et $D'(u^i)$ sont homologues dans la transformation par polaires réciproques relativement à la sphère directrice Σ' puisque $\Delta_\Sigma(u^i)$ et $D_\Sigma(u^i)$ sont conjuguées relativement à $\Sigma(u^i)$. Il en résulte que leurs développables se correspondent. Les congruences $[\Delta_\Sigma]$, $[\Delta']$ et $[D']$ ont donc même réseau-image de leurs développables sur S. Nous le déterminerons à l'aide de la congruence D′, qui a même représentation sphérique que S, en utilisant la surface de départ décrite par $I'(u^i)$ Il est donné par l'équation

$$(\overrightarrow{dI'}, \overrightarrow{dn}, \overrightarrow{n}) = 0.$$

Or en vertu de l'homothétie :

$$\overrightarrow{OI'} = \frac{1}{R} \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{\overrightarrow{MI}} \begin{cases} -R_{|i}, \\ 0; \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{d\overrightarrow{I'}} \begin{cases} -R_{|ij}\, du^j, \\ -R^{|k} \eta_{kj}\, du^j. \end{cases}$$

(A partir de ce paragraphe, les calculs tensoriels sont de nouveau effectués relativement à la métrique de S).

D'où l'équation des développables de $[\Delta_\Sigma]$ en utilisant les composantes de $d\vec{n}$ rencontrées au paragraphe 3.

$$\tau^{hk} R_{|hi} \eta_{kj}\, du^i\, du^j = 0. \tag{4.9}$$

D'après (3.3), le réseau-image sur S des développables de la congruence $[\Delta_\Sigma]$ divise harmoniquement les réseaux

$$\begin{aligned} \eta_{ij}\, du^i\, du^j &= 0, \\ R_{|ij}\, du^i\, du^j &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Le premier de ces réseaux est le réseau des asymptotiques de S. Le deuxième est un réseau invariant dans une déformation arbitraire de S. On retrouve ainsi le résultat suivant :

Le réseau-image des développables de $[\Delta_\Sigma]$ *est conjugué au sens de Dupin et divise harmoniquement un réseau invariant dans une déformation arbitraire de* S.

La première de ces propriétés caractérise, parmi les congruences dont le rayon $\Delta(u^i)$ est dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S, les congruences des polaires des cordes de contact d'après un résultat dû à Ribaucour. La deuxième de ces propriétés, signalée par J. Drach, n'est possédée d'après une étude de M. Vincensini (en se limitant toujours aux congruences dont les rayons sont dans les plans tangents), que par deux sortes de congruences : les congruences du type précédent de Ribaucour, et une famille de congruences pour lesquelles le réseau invariant est double et caractérisées par la persistance, dans une déformation arbitraire de S, de l'une des deux familles de développables.

Ces résultats présentent donc une similitude remarquable avec ceux qui ont été déduits de l'étude des congruences dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents de S en ce qui concerne l'existence d'un réseau invariant divisé harmoniquement par le réseau-image des développables. Dans les deux cas, la propriété a lieu soit pour les congruences associées à une congruence de sphères (cordes des contacts ou polaires des cordes de contact), soit pour les congruences qui possèdent une famille de développables persistantes.

Le réseau invariant est double lorsque le déterminant de $R_{|ij}$ est nul, c'est-à-dire, en introduisant le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami, si

$$\Delta_{22} R = 0. \tag{4.11}$$

Dans ce cas, l'une des familles de développables a ses courbes images confondues avec les courbes du réseau double. Ces développables sont donc persistantes dans une déformation arbitraire de S.

c. Études des plans focaux. Congruences de normales. — D'après l'étude préliminaire, les plans focaux de $[\Delta_\Sigma]$ associés à $\Delta_\Sigma(u^i)$ sont respectivement parallèles aux plans focaux de $[\Delta']$ associés au rayon $\Delta'(u^i)$. Ces derniers, d'après les propriétés de la transformation par polaires réciproques, sont les plans polaires relativement à Σ' des foyers de $[D']$ portés par $D'(u^i)$. Les normales aux plans focaux du rayon $\Delta_\Sigma(u^i)$ sont donc respectivement parallèles aux droites joignant le point fixe O aux foyers correspondants du rayon $D'(u^i)$.

Le même raisonnement montre que les droites joignant $M(u^i)$ aux foyers portés par $\Delta_\Sigma(u^i)$ sont respectivement perpendiculaires aux plans focaux correspondants associés au rayon $D'(u^i)$.

En particulier, pour que $[\Delta_\Sigma]$ soit une congruence de normales, il faut et il suffit que le segment joignant les foyers Φ_1, Φ_2 de $D'(u^i)$ soit vu de O sous un angle droit; c'est-à-dire que

$$\overrightarrow{\mathrm{I}'\Phi_1}.\overrightarrow{\mathrm{I}'\Phi_2} = -\overline{\mathrm{OI}'}^2. \tag{4.12}$$

Or l'équation qui détermine l'abscisse des foyers sur $D'(u^i)$ à partir de l'origine I' à l'aide du vecteur unitaire $\vec{n}$ s'écrit

$$\left(\frac{\partial\vec{\mathrm{I}}'}{\partial u^1} + x\frac{\partial\vec{n}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{\mathrm{I}}'}{\partial u^2} + x\frac{\partial\vec{n}}{\partial u^2}, \vec{n}\right) = 0.$$

Soit, en vertu des composantes de $d\vec{\mathrm{I}}'$ dans $\mathcal{R}$ données plus haut :

$$\text{dét}(\mathrm{R}_{|ij} + x\gamma_{ij}) = 0.$$

Il en résulte que le produit des racines est égal à :

$$\overline{\mathrm{I}'\Phi_1}.\overline{\mathrm{I}'\Phi_2} = \frac{\text{dét}(\mathrm{R}_{|ij})}{\text{dét}(\gamma_{ij})} = \frac{\Delta_{22}\mathrm{R}}{\mathrm{K}},$$

dans le cas où S n'est pas développable, K désignant la courbure totale de S en $M(u^i)$. Comme d'autre part,

$$\overline{\mathrm{OI}'}^2 = \Delta\mathrm{R},$$

on voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence des polaires des cordes de contact d'une congruence de sphères* $[\Sigma]$ *soit une congruence de normales est que le rayon* $R(u^i)$ *de la sphère* $\Sigma(u^i)$ *soit solution de l'équation*

$$\Delta_{22}\mathrm{R} + \mathrm{K}\,\Delta\mathrm{R} = 0. \tag{4.13}$$

Ce résultat est encore valable lorsque S est développable. Dans ce cas, l'un des foyers est rejeté à l'infini. Pour que $O\Phi_1$ et $O\Phi_2$ soient orthogonales, il faut et il suffit que l'autre foyer soit en I′, c'est-à-dire que l'équation en x, linéaire dans ce cas, admette la racine O. D'où la condition $\Delta_{22}R = 0$ identique à (4.13), puisque $K = 0$ dans ce cas.

L'équation (4.13), ainsi d'ailleurs que l'équation (4.11), sont des équations aux dérivées partielles du second ordre du type de Monge-Ampère.

Nous verrons dans la partie II que les congruences de normales ainsi obtenues ne sont pas les seules congruences de normales dont le rayon $\Delta(u^i)$ est situé dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S, et qu'en outre, parmi ces dernières, elles peuvent être caractérisées par la propriété suivante (à rapprocher d'un théorème de Darboux sur les systèmes cycliques dont il sera question plus loin) : *ce sont les seules congruences de normales dont les rayons sont dans les plans tangents à* S, *qui, attachées à* S *admettent une déformée dont les rayons sont dans un même plan isotrope*.

5. Congruence des cercles orthogonaux a Σ en P et P′, — $C_\Sigma(u^i)$. — La congruence des cercles $C_\Sigma(u^i)$ orthogonaux en P et P′ à la sphère $\Sigma(u^i)$ est attachée à S dès que [Σ] l'est. Les cercles $C_\Sigma(u^i)$ admettent deux trajectoires orthogonales qui sont les deux nappes de l'enveloppe des sphères $\Sigma(u^i)$. Cette propriété de la congruence $[C_\Sigma]$ est invariante dans une déformation arbitraire de S, les points P et P′ décrivant ces trajectoires orthogonales étant eux-mêmes attachés à S.

On sait que dès que les cercles d'une congruence admettent plus de deux surfaces trajectoires orthogonales, ils en admettent une infinité. La congruence est alors appelée un *système cyclique*. La correspondance établie par chaque cercle sur les différentes trajectoires orthogonales fait se correspondre les lignes de courbure, celles-ci correspondant d'ailleurs aux développables de la congruence des axes des cercles. Réciproquement, si les cercles d'une congruence admettent deux trajectoires orthogonales avec correspondance sur celles-ci des lignes de courbure, la congruence est un système cyclique.

Pour que la congruence des cercles $C_\Sigma(u^i)$ soit un système cyclique, il faut et il suffit que la congruence des sphères $\Sigma(u^i)$ établisse entre P et P′ une correspondance qui, aux lignes de courbure de l'une des nappes de l'enveloppe, associe les lignes de courbure de l'autre. Ces congruences sont appelées des congruences de sphères de Ribaucour. Elles sont données par l'équation

$$(5.1) \qquad \begin{vmatrix} g_{11} - R_{|1}R_{|1} & g_{22} - R_{|1}R_{|2} & g_{22} - R_{|2}R_{|2} \\ R_{|11} & R_{|12} & R_{|22} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que la congruence $[C_\Sigma]$, attachée à S, reste un système cyclique dans une déformation arbitraire de S, il faut et il suffit que [Σ] soit une congruence de Ribaucour arbitrairement déformable. Il existe de telles congruences à condition que S soit isométrique à une surface de révolution. Leur étude a été faite par L. Bianchi. Le premier membre de (5.1) étant linéaire en η_{11}, η_{12}, η_{22}, il faut et il suffit, pour que la propriété soit invariante dans une déformation arbitraire de S, que les coefficients des polynomes du premier degré en η_{11}, η_{12}, η_{22} soient nuls, c'est-à-dire ici qu'il existe une fonction $\lambda(u^i)$ telle que

$$R_{|ij} = \lambda(g_{ij} - R_{|i}R_{|j}). \tag{5.2}$$

L'étude de Bianchi conduit à la solution suivante : le ds^2 de S doit pouvoir se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\, dv^2, \tag{5.3}$$

u, v désignant les paramètres relatifs au paramétrage particulier de S. Le rayon R de Σ est fonction de u seul. Il est donné par

$$R = a\int \frac{r\, du}{\sqrt{1 + a^2 r^2}} \qquad (a, \text{ constante arbitraire}). \tag{5.4}$$

La congruence des axes des cercles $C_\Sigma(u^i)$ est la congruence $[\Delta_\Sigma(u^i)]$. L'équation (4.9) des développables de $[\Delta_\Sigma]$ est aussi l'équation des lignes de courbure des deux nappes de l'enveloppe de Σ et plus généralement de toutes les trajectoires orthogonales de $[C_\Sigma(u^i)]$ lorsque cette congruence est un système cyclique. Dans le cas où le système cyclique est arbitrairement déformable, les lignes de courbure des trajectoires orthogonales ne sont pas persistantes car leur réseau-image sur S, défini par (4.9), étant conjugué, ne peut pas être invariant dans une déformation arbitraire de S.

Lorsque la surface est réelle et rapportée à un paramétrage réel, $C_\Sigma(u^i)$ n'est réel que lorsque

$$\Delta R \leqq 1.$$

Lorsque cette condition n'est pas remplie, $D_\Sigma(u^i)$ ne coupe pas $\Sigma(u^i)$. Il existe alors un cercle $\Gamma_\Sigma(u^i)$ admettant $D_\Sigma(u^i)$ pour axe et orthogonal à $\Sigma(u^i)$. La congruence $[\Gamma_\Sigma]$ est, elle aussi, attachée à S dès que $[\Sigma]$ l'est.

6. Congruence des cercles $\Gamma_\Sigma(u^i)$ orthogonaux a $\Sigma(u^i)$ et admettant $D_\Sigma(u^i)$ pour axe. — Le cercle $\Gamma_\Sigma(u^i)$ est situé dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S. Son centre est $I(u^i)$. Recherchons dans quels cas la congruence $[\Gamma_\Sigma]$ est un système cyclique. Cette congruence étant attachée à S, d'après le théorème de Ribaucour cité au paragraphe 2, fournira un système cyclique arbitrairement déformable.

D'après un résultat connu sur les systèmes cycliques, pour que $[\Gamma_\Sigma]$ en soit un, il faut et il suffit que les sphères contenant $\Gamma_\Sigma(u^i)$ et centrées aux foyers F_1, F_2 de l'axe $D_\Sigma(u^i)$ se coupent orthogonalement et admettent $\Gamma_\Sigma(u^i)$ comme cercle caractéristique lorsque leur centre décrit l'arête de rebroussement de l'une quelconque des développables de la congruence des axes $D_\Sigma(u^i)$. Ces deux sphères peuvent se définir comme étant les sphères centrées en F_1 et F_2 et orthogonales à la sphère $\Sigma(u^i)$.

a. Étude préliminaire. — Soit $M'(u^i)$ un point quelconque de la droite des contacts $D_\Sigma(u^i)$, sous réserve seulement des conditions de continuité et dérivabilité de la fonction vectorielle $\overrightarrow{M'}(u^i)$. On a

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u^i} \cdot \overrightarrow{MM'} = -R \frac{\partial R}{\partial u^i} \qquad (i = 1, 2).$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{\partial \overrightarrow{M'}}{\partial u^i} \cdot \overrightarrow{M'M} = -\frac{\partial \overrightarrow{MM'}}{\partial u^i} \cdot \overrightarrow{MM'} + R \frac{\partial R}{\partial u^i}.$$

De telle sorte que si l'on considère la sphère $\Sigma'(u^i)$ centrée en $M'(u^i)$, et orthogonale à $\Sigma(u^i)$, dont le rayon R' par conséquent vérifie

$$R^2 + R'^2 = \overrightarrow{MM'}^2,$$

la relation ci-dessus s'écrit

$$\frac{\partial \overrightarrow{M'}}{\partial u^i} \overrightarrow{M'M} = -R' \frac{\partial R'}{\partial u^i},$$

ce qui montre que la droite joignant les points de contact de la sphère $\Sigma'(u^i)$ avec les deux nappes de l'enveloppe de $[\Sigma']$ passe par le point M.

Étant données deux congruences de sphères $[\Sigma(u^i)]$ et $[\Sigma'(u^i)]$ telles que pour tous (u^i), $\Sigma(u^i)$ et $\Sigma'(u^i)$ soient orthogonales, le fait pour la sphère $\Sigma'(u^i)$ d'être centrée sur la corde des contacts associée à $\Sigma(u^i)$ entraîne que $\Sigma(u^i)$ est centrée sur la corde des contacts associée à $\Sigma'(u^i)$.

b. Application à la recherche des systèmes cycliques $[\Gamma_\Sigma]$. — Désignons par $\Sigma'_1(u^i)$ et $\Sigma'_2(u^i)$ les sphères centrées respectivement en F_1 et F_2 et contenant $\Gamma_\Sigma(u^i)$; elles sont orthogonales à Σ. D'après le résultat précédent, leurs cordes de contact respectives passent par M et sont perpendiculaires aux plans tangents aux surfaces respectives décrites par les foyers F_1, F_2 (surfaces focales de $[D_\Sigma]$). *Les cordes de contact associées aux sphères* $\Sigma'_1(u^i)$ et $\Sigma'_2(u^i)$ *sont donc les perpendiculaires aux plans focaux du rayon* $D_\Sigma(u^i)$ *issues de* M.

D'après l'étude des plans focaux faite aux paragraphe 3 :

La corde des contacts associée à $\Sigma'_1(u^i)$ [*respectivement* $\Sigma'_2(u^i)$] *est la tangente en* $M(u^i)$ *à la courbe image de la développable de* $D_\Sigma(u^i)$ *dont l'arête de rebroussement contient* $F_1(u^i)$ [*respectivement* $F_2(u^i)$].

Ainsi apparaît une réciprocité entre les congruences $[\Sigma(u^i)]$ et $[\Sigma'_1(u^i)]$: chacune d'elles admet pour déférente une des nappes de la surface focale de la congruence des cordes de contact de l'autre avec correspondance, sur ces déférentes, des arêtes de rebroussement des développables des congruences des cordes de contact. Il en est de même pour $[\Sigma(u^i)]$ et $[\Sigma_2'(u^i)]$.

Lorsque F_1 décrit l'arrête de rebroussement de l'une des développables de $[D_\Sigma]$, le plan du cercle caractéristique de $\Sigma_1'(u^i)$ est perpendiculaire à $D_\Sigma(u_i)$. D'autre part, ce plan passe par la corde des contacts associée à $\Sigma_1'(u^i)$. D'après l'étude précédente, ce plan est donc le plan tangent en $M(u^i)$ à S. Le cercle caractéristique de $\Sigma_1'(u^i)$ dans ces conditions est donc $\Gamma_\Sigma(u^i)$.

De même, le cercle $\Gamma_\Sigma(u^i)$ est le cercle caractéristique de $\Sigma_2'(u^i)$ quand F_2 décrit l'arête de rebroussement d'une développable de $[D_\Sigma]$. Par conséquent, pour que la congruence des cercles $\Gamma_\Sigma(u^i)$ soit un système cyclique il faut et il suffit que les sphères $\Sigma_1'(u^i)$ et $\Sigma_2'(u^i)$ se coupent orthogonalement le long de $\Gamma_\Sigma(u^i)$. D'où la condition nécessaire et suffisante :

$$\overline{IF}_1 . \overline{IF}_2 = -\mathcal{P}^I/\Sigma(u^i) = MI^2 + R^2. \tag{6.1}$$

Or l'équation qui détermine l'abscisse des foyers sur $D_\Sigma(u^i)$ à partir de l'origine I, à l'aide du vecteur unitaire $\vec{n}$, s'écrit

$$\left(\frac{\partial \vec{I}}{\partial u^1} + x\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{I}}{\partial u^2} + x\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2}, \vec{n}\right) = 0.$$

C'est-à-dire en utilisant les composantes covariantes dans $\mathcal{R}(u^i)$ de $\dfrac{\partial \vec{I}}{\partial u^j}$ et $\dfrac{\partial \vec{n}}{\partial u^j}$:

$$\text{dét}(g_{ij} - \rho_{|ij} - x\eta_{ij}) = 0. \tag{6.2}$$

D'où, si S n'est pas développable,

$$\overline{IF}_1 . \overline{IF}_2 = \frac{\text{dét}(g_{ij} - \rho_{|ij})}{\text{dét}(\eta_{ij})};$$

d'autre part

$$MI^2 = \Delta\rho.$$

(6.1) s'écrit alors à l'aide de $\rho = \frac{1}{2}R^2$,

$$\frac{\text{dét}(g_{ij} - \rho_{|ij})}{\text{dét}(g_{ij})} = -K(\Delta\rho - 2\rho).$$

Le développement du dénominateur du premier membre conduit à l'équation

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + 1 + K(\Delta\rho - 2\rho) = 0. \tag{6.3}$$

A chaque solution de cette équation du type de Monge-Ampère, il correspond une congruence de sphères $\Sigma(u^i)$ *telle que la congruence des cercles* $\Gamma_\Sigma(u^i)$ *soit un système cyclique. Ce système cyclique est attaché à* S *et arbitrairement déformable avec* S.

c. Recherche de tous les systèmes cycliques dont les cercles sont dans les plans tangents à S. — L'équation (6.3) connue sous le nom de « deuxième équation de l'applicabilité » traduit le fait que la courbure de Demoulin de la congruence $[\Sigma(u^i)]$ est égale à $+1$ ou, ce qui est équivalent, qu'il existe une déformée de $[\Sigma(u^i)]$, supposée attachée à S, pour laquelle toutes les sphères passent par un point fixe ([1]).

Soit un système cyclique $[\Gamma(u^i)]$ tel que le cercle $\Gamma(u^i)$ soit situé dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S. D'après le théorème de Darboux, auquel il a déjà été fait allusion et sur lequel nous reviendrons dans la partie II, *il existe un déformé de* $[\Gamma(u^i)]$, *supposé attaché à* S, *pour lequel tous les cercles sont situés sur une même sphère de rayon nul.* Soit A le centre de cette sphère. Si l'on associe à $\Gamma(u^i)$ la congruence des sphères $\Sigma(u^i)$ orthogonales à $\Gamma(u^i)$ et centrées en $M(u^i)$, cette congruence est elle-même attachée à S et sa déformée dans la déformation précédente sera telle que toutes les sphères seront orthogonales à la sphère-point A, c'est-à-dire passeront par A, La déformée de la congruence des cordes de contact $D_\Sigma(u^i)$ aura tous ses rayons passant par A. Ces rayons seront donc les axes des cercles correspondants de la déformée de $[\Gamma(u^i)]$. En revenant à la surface initiale, il en résulte que $D_\Sigma(u^i)$ est l'axe de $\Gamma(u^i)$. Ce cercle coïncide donc avec $\Gamma_\Sigma(u^i)$, $[\Sigma(u^i)]$ étant une congruence de sphères qui possède une déformée dont toutes les sphères passent par un point fixe, c'est-à-dire une congruence de sphères qui vérifie (6.3). Il résulte de cette étude que :

Le système cyclique le plus général dont les cercles sont situés dans les plans tangents à une surface S *est fourni par la congruence* $[\Gamma_\Sigma]$ *associée à la congruence de sphères* $[\Sigma]$ *la plus générale vérifiant* (6.3), *donc ayant une courbure de Demoulin égale à* $+1$.

La considération des congruences de sphères admettant S pour déférente fournit deux exemples importants de systèmes cycliques arbitrairement déformables avec S. L'étude générale des systèmes cycliques arbitrairement déformables sera effectuée complètement dans la partie III. Elle montrera que les systèmes cycliques ainsi associés aux congruences de sphères sont les seuls pour lesquels plusieurs trajectoires orthogonales des cercles sont engendrées par des points attachés à S lorsque S n'est pas développable. D'après l'étude du paragraphe 2, ces points sont nécessairement des points du cercle en lesquels la tangente est contenue dans le plan tangent à S en $M(u^i)$ ou en lesquels la tangente passe par $M(u^i)$.

([1]) La courbure de Demoulin d'une congruence de sphères $\Sigma(u^i)$, de rayon $R(u^i)$, admettant la surface S pour déférente est la courbure de la forme quadratique différentielle

$$d\varphi^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2}.$$

M. Vincensini a montré que cette courbure $\mathcal{K}$ admet l'expression suivante, où ne figurent que des invariants,

$$\mathcal{K} = 1 - \frac{4\rho^2}{(2\rho - \Delta\rho)^2}[\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + 1 + K(\Delta\rho - 2\rho)].$$

D'après le théorème de Ribaucour, toutes les trajectoires orthogonales des systèmes cycliques du type $[\Gamma_\Sigma]$ *sont engendrées par des points attachés à* S.

Deux seulement des trajectoires orthogonales des systèmes cycliques arbitrairement déformables du type $[C_\Sigma]$ *sont engendrées par des points attachés à* S. *Ce sont les deux nappes de l'enveloppe de la congruence de sphères* $[\Sigma]$.

II. — DÉFORMATION DES CONGRUENCES DE DROITES.

A. — Congruences de droites attachées a une surface et admettant une famille de développables persistantes.

1. Considérations générales. — *a*. Étant donnée une congruence de droites $D(u^i)$ attachée à la surface S, nous étudions dans cette partie la possibilité pour cette congruence de posséder une famille de développables donnée par une équation en (u^i) invariante dans une déformation arbitraire de S. Une telle famille de développables sera dite persistante. Il est équivalent de dire que l'une des deux familles de courbes du réseau-image sur S des développables de D est invariante.

Ce problème, dont la Partie I fournit des solutions particulières, a été partiellement étudié par MM. Finikoff et Vincensini. M. Finikoff a déterminé toutes les congruences admettant une famille de développables persistantes dont le rayon $D(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent à S en $M(u^i)$. M. Vincensini a déterminé toutes celles dont le rayon $D(u^i)$ est situé dans le plan tangent à S en $M(u^i)$. Il a montré qu'elles sont aussi caractérisées par le fait d'admettre sur chaque rayon un foyer attaché à S.

Dans ce qui va suivre, le problème des congruences de droites attachées à S, arbitrairement déformables avec une famille de développables persistantes, va être complètement résolu. Il ne comporte pas de solutions autres que celles qui ont été signalées ci-dessus. Mais le procédé de résolution utilisé permet d'obtenir des propriétés remarquables de ces congruences et de les rattacher étroitement les unes aux autres par des considérations cinématiques.

b. *Mise en évidence des différents types de solutions.* — Dans le repère local $\mathcal{R}(u^i)$ le rayon $D(u^i)$ est défini par la donnée de l'un de ses points $\Omega(u^i)$, qui pourra être particularisé par la suite, et par la donnée de l'un de ses deux vecteurs unitaires $\vec{i}(u^i)$.

$$(1.1)\qquad \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{\overrightarrow{M\Omega}}\begin{cases} a_i, \\ b;\end{cases}\qquad \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{\vec{i}(u^i)}\begin{cases}\alpha_i, \\ \beta,\end{cases}\qquad \text{avec}\quad \alpha_i\alpha^i+\beta^2=1.$$

Il en résulte :

$$(1.2)\qquad \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{d\vec{\Omega}}\begin{cases}(g_{ij}+a_{i|j}-b\eta_{ij})\,du^j,\\(b_{|j}+a^k\eta_{kj})\,du^j;\end{cases}\qquad \underset{\text{cov.}\,\mathcal{R}(u^i)}{d\vec{i}}\begin{cases}(\alpha_{i|l}-\beta\eta_{il})\,du^l,\\(\beta_{|l}+\alpha^h\eta_{hl})\,du^l.\end{cases}$$

L'équation des développables

$$\left(d\vec{\Omega},\, d\vec{i},\, \vec{i}\right)=0,$$

s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} g_{ij}+a_{i|j}-b\eta_{ij} & \alpha_{i|l}-\beta\eta_{il} & \alpha_i \\ b_{|j}+a^k\eta_{kj} & \beta_{|l}+\alpha^h\eta_{hl} & \beta \end{vmatrix}du^j\,du^l=0,$$

où $i=1, 2$ est l'indice des deux premières lignes du déterminant, j et l étant des indices de sommation. Le développement de ce déterminant suivant les éléments de la deuxième colonne donne après division par $\sqrt{g}$ la forme suivante à l'équation des développables :

$$(1.3)\qquad \Delta_{jl}\,du^j\,du^l=0,$$

avec

$$(1.4)\qquad \begin{aligned}\Delta_{jl}=\beta\tau^{pq}(g_{pj}+a_{p|j}-b\eta_{pj})(\alpha_{q|l}-\beta\eta_{ql})\ldots\\ -\tau^{is}\alpha_s\begin{vmatrix} g_{ij}+a_{i|j}-b\eta_{ij} & \alpha_{i|l}-\beta\eta_{il} \\ b_{|j}+a^k\eta_{kj} & \beta_{|l}+\alpha^h\eta_{hl}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Rapportons S à un système de coordonnées curvilignes tel que la famille de développables persistantes ait pour équation $du^2=0$. Il existe de tels systèmes, invariants dans une déformation arbitraire, puisque l'équation des développables persistantes est invariante. Il suffit avec un tel système d'exprimer que $du^2=0$ est l'équation d'une famille de développables, d'où la condition nécessaire et suffisante d'après (1.3)

$$(1.4)\qquad \Delta_{11}=0.$$

Cette condition doit être vérifiée pour toutes les déformées de la congruence D. Or Δ_{11} est un polynome du second degré en η_{11}, η_{12}, η_{22}. Il est donc nécessaire et suffisant que les coefficients de ce polynome soient proportionnels à ceux du polynome du premier membre de l'équation de Gauss :

$$\eta_{11}\eta_{22}-(\eta_{12})^2-\mathrm{K}g=0.$$

Δ_{11} ne contient pas de monome de la forme $a\eta_{11}\eta_{12}$, par conséquent tous ses coefficients doivent être nuls.

Étudions tout d'abord les termes du second degré de Δ_{11}. — Ils s'écrivent

$$\beta^2 b\tau^{pq}\eta_{p1}\eta_{q1}+\tau^{is}\alpha_s(b\alpha^h-\beta a^h)\eta_{i1}\eta_{h1}.$$

Le premier terme est identiquement nul. Les coefficients du deuxième sont nuls si :

$$\text{Terme en } (\eta_{11})^2 : \quad \alpha_2(b\alpha^1 - \beta a^1) = 0,$$
$$\text{Terme en } (\eta_{21})^2 : \quad \alpha_1(b\alpha^2 - \beta a^2) = 0,$$
$$\text{Terme en } \eta_{11}\eta_{12} : \quad \alpha_2(b\alpha^2 - \beta a^2) - \alpha_1(b\alpha^1 - \beta a^1) = 0.$$

D'où les cas suivants :

1° $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2)$.

$D(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent à S en $M(u^i)$.

2° $\alpha_i \neq 0$.

Dans ce cas il faut et il suffit qu'on ait

$$b\alpha^i = \beta a^i = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{1.5}$$

Deux possibilités se présentent alors :

1° $\beta \neq 0$.

Dans ce cas $D(u^i)$ coupe le plan tangent à S en $M(u^i)$ et l'on peut prendre Ω dans ce plan, d'où, d'après (1.5) :

$$b = a^i = 0 \qquad (i = 1, 2);$$

$D(u^i)$ passe par $M(u^i)$;

2° $\beta = 0$.

Les α^i ne peuvent être nuls tous deux et (1.5) entraîne

$$b = 0;$$

$D(u^i)$ est dans le plan tangent à S en $M(u^i)$.

2. Étude du cas ou $D(u^i)$ passe par $M(u^i)$. Congruences de type I. — Ω étant pris en M, $(b = a^i = 0)$, Δ_{11} s'écrit

$$\Delta_{11} = \beta\tau^{pq}g_{p1}(\alpha_{q|1} - \beta\eta_{q1}) - \tau^{is}\alpha_s g_{i1}(\beta_{|1} + \alpha^h\eta_{h1}),$$

soit, après changement d'indices muets,

$$\Delta_{11} = -(\beta^2\tau^{pq}g_{p1} + \tau^{ps}\alpha_s\alpha^q g_{p1})\eta_{q1} + \tau^{pq}g_{p1}(\beta\alpha_{q|1} - \alpha_q\beta_{|1}).$$

Pour que les coefficients des η_{q1} soient nuls, il faut et il suffit, après des élévations et des abaissements d'indices, qu'on ait

$$\beta^2\tau_{1q} + \tau_{1s}\alpha^s\alpha_q = 0 \qquad (q = 1, 2),$$

d'où les équations

$$\alpha_1\alpha^2 = 0 \tag{2.1}$$

et

$$\beta^2 + \alpha^2\alpha_2 = 1 - \alpha_1\alpha^1 = 0. \tag{2.2}$$

D'après (2.2) α_1 ne peut être nul, d'où, d'après (2.1), puis (2.2) :

$$\alpha^2 = \beta = 0. \tag{2.3}$$

On constate que (2.3) entraîne que Δ_{11} est identiquement nul.

Ce cas est celui, évident *a priori*, où $D(u^i)$ est tangente en $M(u^i)$ à la courbe $u^2 = \text{Cte}$. *C'est le cas des congruences admettant* S *pour nappe focale*. Le réseau-image des développables est alors conjugué au sens de Dupin, il ne peut donc pas être invariant dans une déformation arbitraire de telle sorte que ces congruences de type I admettent une famille de développables persistantes et une seulement.

3. Étude du cas où $D(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent en $M(u^i)$ à S. Congruences de type II. — *a.* Si l'on prend Ω confondu avec l'intersection I de $D(u^i)$ avec le plan tangent en $M(u^i)$ on a

$$\alpha^i = 0 \quad (i = 1, 2), \qquad \text{donc} \quad \alpha_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = 1, \; b = 0,$$

d'où

$$\Delta_{11} = -\varepsilon^{pq}(g_{p1} + a_{p|1})\gamma_{q1}.$$

Pour que les coefficients des γ_{q1} soient nuls, il faut et il suffit que

$$g_{i1} + a_{i|1} = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{3.1}$$

Lorsque S est connue, (3.1) est un système de deux équations aux dérivées partielles aux fonctions inconnues a_i dont la résolution se ramène à celle d'un système de deux équations différentielles linéaires du premier ordre, puisque seules interviennent les dérivées partielles par rapport à u^1.

On peut se donner arbitrairement S *et la famille des images sur* S *des développables persistantes. Les solutions dépendent de deux fonctions arbitraires de u^2, par exemple : $a_1(u^1_0, u^2)$ et $a_2(u^1_0, u^2)$.*

b. Propriétés géométriques et interprétation cinématique de ces congruences. — (3.1) exprime que le vecteur $\dfrac{\partial \vec{I}}{\partial u^1}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en M. Lorsque M décrit une courbe $\gamma_{u^2}(u^2 = \text{Cte})$, D engendre une développable et I décrit l'arête de rebroussement de cette développable. Le point $I(u^i)$ est donc l'un des foyers de $D(u^i)$. D'autre part, le plan focal associé au foyer I est déterminé par $\vec{n}$ et $\dfrac{\partial \vec{I}}{\partial u^2}$, sa trace dans le plan tangent est parallèle au vecteur dont les coordonnées covariantes sont $g_{i2} + a_{i|2}$.

Ces congruences, signalées par M. Finikoff, ont donc la propriété de posséder une famille de développables persistantes et, relativement à chaque rayon, un foyer et le plan focal correspondant attachés à S *dans une déformation arbitraire de* S.

$\dfrac{\partial \vec{\mathrm{I}}}{\partial u^1}$ étant perpendiculaire à $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial u^1}$ les courbes γ_{u^2} font partie du réseau invariant associé par M. Vincensini à la congruence des points $[\mathrm{I}(u^i)]$. Compte tenu de (3.1) et de (I.3.10), ce réseau admet l'équation :

$$(g_{i2}+a_{i|2})\,du^i\,du^2=0.$$

Il est double si $g_{12}+a_{1|2}$ est nul, c'est-à-dire d'après (3.1), si la matrice $a_{i|j}$ est symétrique.

Les congruences du type II *qui sont des congruences de cordes de contact d'une enveloppe de sphères admettant* S *pour déférente sont caractérisées par un réseau invariant associé de Vincensini double.*

Étudions l'ensemble des congruences de type II correspondant à une surface donnée S et à une famille donnée de courbes γ_{u^2}. Lorsque M décrit une courbe γ_{u^2}, les points I correspondant aux différentes congruences décrivent des trajectoires orthogonales au plan tangent à S le long de γ_{u^2}. Ces points I restent donc invariablement liés entre eux et donnent au plan tangent à S une structure de plan matériel roulant sans glisser sur S le long de γ_{u^2}. D'où une génération cinématique simple des congruences de type II, la réciproque étant évidente.

La congruence de type II *la plus générale est engendrée par une normale invariablement liée à un plan matériel qui roule sans glisser sur* S *le long des différentes courbes* γ_{u^2}, *à partir d'une position initiale arbitrairement choisie pour chacune des courbes* γ_{u^2}.

Le choix de la position initiale sur chaque γ_{u^2} équivaut à la donnée des fonctions $a_1(u_0^1, u^2)$ et $a_2(u_0^1, u^2)$ par exemple. Ces données sont arbitraires sous réserve des conditions de continuité et de dérivabilité exigées par la résolution de (3.1).

En particulier, la connaissance de deux congruences de type II correspondant à la même famille de courbes γ_{u^2} entraîne sans quadrature la connaissance de toutes les congruences de ce type associées à la même famille de courbes γ_{u^2}. En effet les plans matériels qui roulent sans glisser le long des γ_{u^2} sont parfaitement déterminés par la connaissance de deux de leurs points matériels.

c. Équation des congruences de type II *en paramétrage général.* — Les congruences étudiées vérifiant (3.1) vérifient par conséquent l'équation

$$\text{dét}(g_{ij}+a_{i|j})=0 \tag{3.3}$$

qui a une signification intrinsèque, car son premier membre est le produit d'un scalaire par $g=\text{dét}(g_{ij})$. Elle est donc vérifiée par les congruences de type II quel que soit le paramétrage choisi sur S.

Inversement, soit une congruence dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents de S vérifiant (3.3); il existe une famille de courbes de S le long desquelles on a

$$d\vec{I} // \vec{n},$$

car (3.3) exprime que les deux équations suivantes, qui traduisent la relation ci-dessus, sont compatibles :

$$(g_{ij} + a_{i|j})\, du^j = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{3.4}$$

Cette congruence est une congruence de type II. La famille de courbes solution de (3.4) est la famille des courbes images des développables persistantes. On peut donc dire que :

L'équation générale des congruences de type II *est l'équation* (3.3).

L'équation (3.3) traduit aussi la compatibilité des équations (I.2.5).

$$(g_{ij} + a_{i|j})\, \alpha^i = 0 \qquad (j = 1, 2) \tag{3.5}$$

dont dépend la recherche des points Ω situés dans les plans tangents de S qui, attachés à S, décrivent des surfaces dont les plans tangents sont eux-mêmes attachés à S. Ces congruences de points ne sont autres que les congruences des points $\mathrm{I}(u^i)$ correspondant aux différentes congruences de type II. Or la résolution de (3.5) fournit la congruence de normales la plus générale dont les rayons sont dans les plans tangents de S. (3.3) en donne les trajectoires orthogonales qui sont les surfaces focales des congruences de type II décrites par les points $\mathrm{I}(u^i)$.

La recherche des congruences de normales dont les rayons sont situés dans les plans tangents de S *peut se ramener à la recherche des congruences de type* II *associées à* S. *A chaque congruence de type* II *correspond une congruence de normales dont le rayon* (u^i) *est perpendiculaire en* $\mathrm{I}(u^i)$ *au plan focal en ce point.*

Inversement, à chaque congruence de normales dont les rayons sont dans les plans tangents de S, il correspond une infinité de congruences de type II. Chacune d'elles est déterminée par les points $\mathrm{I}(u^i)$ qui décrivent l'une des trajectoires orthogonales de la congruence de normales. En particulier, la connaissance d'une congruence de type II entraîne la connaissance, sans quadrature, d'une infinité d'autres de ces congruences par l'intermédiaire de la congruence de normales associée. Leurs premières nappes focales (celles décrites par I) sont parallèles entre elles.

4. Étude du cas où $\mathrm{D}(u^i)$ est située dans le plan tangent à S en $\mathrm{M}(u^i)$. Congruences de type III.

a. Dans ce cas, $b = 0$, $\beta = 0$, d'où

$$\Delta_{11} = -\tau^{is} \alpha_s [(g_{i1} + a_{i|1})\, \alpha^h - \alpha_{i|1} a^h]\, \eta_{h1}.$$

Pour que les coefficients des $\gamma_{|h1}$ soient nuls, il faut et il suffit qu'on ait

$$(4.1)\qquad [\tau^{is}\alpha_s(g_{i1}+a_{i|1})]\,\alpha^h - [\tau^{is}\alpha_s\alpha_{i|1}]\,a^h = 0 \qquad (h=1,\ 2).$$

(4.1) est un système linéaire homogène par rapport aux quantités entre crochets. D'où deux cas.

1° $a^h = \lambda\alpha^h$. On retrouve le cas où $D(u^i)$ passe par $M(u^i)$ traité au paragraphe 2.

2° *Les deux quantités entre crochets dans* (4.1) *sont nulles.*

$$(4.2)\qquad \tau^{is}\alpha_s(g_{i1}+a_{i|1}) = 0,$$

$$(4.3)\qquad \tau^{is}\alpha_s\alpha_{i|1} = 0.$$

D'autre part, de la relation $\alpha^i\alpha_i = 1$, on déduit par dérivation :

$$(4.4)\qquad \alpha^i\alpha_{i|1} = 0.$$

(4.3) et (4.4) constituent un système linéaire homogène en $\alpha_{i|1}$ dont le déterminant à un facteur non nul près est égal à

$$\tau_{ij}\tau^{is}\alpha_s\alpha^j = \alpha_j\alpha^j = 1\,;$$

il en résulte

$$(4.5)\qquad \alpha_{i|1} = 0 \qquad (i=1,\ 2).$$

Le problème se ramène à la résolution du système d'équations aux dérivées partielles (4.5) *qui se ramènent à des équations différentielles, linéaires, du premier ordre avec la variable* u^1. *Pour chaque solution non nulle* α_i, *il suffit ensuite de résoudre* (4.2) *qui se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre aux fonctions inconnues* a_i.

Les solutions de (4.5) dépendent de deux fonctions arbitraires de la variable u^2, par exemple $\alpha_1(u^1_0,\ u^2)$ et $\alpha_2(u^1_0,\ u^2)$. En vertu de (4.4) il suffit que ces fonctions soient telles qu'on ait $\alpha^i\alpha_i = 1$ pour $u^1 = u^1_0$ pour que cette condition soit vérifiée pour tous (u^i). Mais pour la résolution de (4.2), il n'est pas nécessaire d'imposer cette condition, puisque les α^i y interviennent de façon homogène. Dans cette équation, l'une des fonctions a_i peut être choisie arbitrairement. Cela provient du fait qu'une infinité de points Ω peuvent être choisis sur $D(u^i)$.

b. Étude géométrique. Relations avec les congruences de type II. — (4.5) traduit précisément le fait que le vecteur $\frac{\partial\vec{i}}{\partial u^1}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en $M(u^i)$, c'est-à-dire que le vecteur équipollent à $\vec{i}(u^i)$ issu de $M(u^i)$ subit un déplacement parallèle de Levi-Civita lorsque M décrit une des courbes-images γ_{u^2} des développables persistantes. La développable engendrée dans ces conditions par $D(u^i)$ admet donc, le long de $D(u^i)$ un plan tangent perpendiculaire au plan tangent en M à S. L'équation (4.2) traduit précisément que $\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^1}$ se trouve dans ce plan.

On peut profiter de l'indétermination de Ω sur $D(u^i)$ pour particulariser son choix en lui imposant par exemple de décrire, lorsque u^2 reste fixe, une des trajectoires orthogonales de $D(u^i)$ sur la développable qu'elle engendre. D'après ce qui précède, $\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial \vec{u}^1}$ sera alors perpendiculaire au plan tangent en M à S. Ces points $\Omega(u^i)$ seront donc les points $I(u^i)$ associés à une congruence de type II correspondant à la même famille de courbes-images des développables persistantes γ_{u^2}.

Ceci se vérifie immédiatement par le calcul. Si a_i est solution de (4.2),

$$a'_i = a_i + \lambda\alpha_i,$$

qui entraîne

$$a'_{i|1} = a_{i|1} + \lambda_{|1}\alpha_i,$$

puisque $\alpha_{i|1} = 0$, est aussi solution de (4.2). On peut déterminer $\lambda(u^i)$ de telle sorte que

$$g_{i1} + a'_{i|1} = (g_{i1} + a_{i|1}) + \lambda_{|1}\alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{4.6}$$

puisque (4.2) vérifiée par a_i, exprime la compatibilité en $\lambda_{|1}$ des deux équations (4.6). λ se détermine par une quadrature à une fonction arbitraire additive de u^2 près.

On peut donc, sans restreindre la généralité, pour la recherche des congruences de type III, résoudre le système;

$$g_{i1} + a_{i|1} = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{4.7}$$

$$\alpha_{i|1} = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{4.8}$$

ce qui peut s'exprimer autrement sous forme cinématique.

Les points $I(u^i)$ vérifiant (3.1) sont, comme cela a été démontré au paragraphe 3, liés à un plan matériel qui roule sans glisser sur S le long des différentes courbes γ_{u^2}. Le vecteur $\vec{i}(u^i)$ étant tel que $\frac{\partial i}{\partial u^1}$ est perpendiculaire à ce plan, il en résulte que la droite $D(u^i)$ passant par un des points $I(u^i)$ ci-dessus et parallèle au vecteur $\vec{i}$ est invariablement liée à ce plan matériel. La réciproque est évidente. On peut donc donner pour les congruences à développables persistantes dont les rayons sont dans les plans tangents à S une génération cinématique analogue à celle des congruences de type II. Ces congruences ont été signalées par M. Vincensini qui en a étudié certaines propriétés.

La congruence de type III *la plus générale correspondant à une famille donnée* γ_{u^2} *de courbes-images des développables persistantes est engendrée par une droite* *invariablement liée à un plan matériel et située dans celui-ci, ce plan roulant sans glisser sur* S *le long des différentes courbes* γ_{u^2} *à partir d'une position arbitrairement choisie pour chaque* γ_{u^2}.

Pour une famille de courbes γ_{u^2} donnée, la connaissance de deux congruences prises indifféremment parmi les types II ou III entraîne la connaissance sous forme finie de toutes les congruences de ces deux types relatives à la famille des courbes γ_{u^2}. En effet le plan matériel qui roule sur S le long des γ_{u^2} est parfaitement déterminé par la connaissance, soit de deux points, soit de deux droites, soit d'une droite et d'un point qui lui sont invariablement liés.

Ceci montre que la recherche de toutes les congruences de l'un des deux types attachées à une surface S est équivalente à la recherche de toutes les congruences de l'autre type, ce qu'on peut d'ailleurs établir à partir des équations dont dépendent ces recherches.

S et la famille des courbes γ_{u^2} étant données, la recherche des congruences de type III correspondantes dépend de la résolution du système (4.7), (4.8). Les équations (4.7) dont dépend la recherche des congruences de type II sont des équations différentielles linéaires, du premier ordre, relativement à la variable u^1 dont les équations sans second membre associées ne sont autres (aux notations des fonctions inconnues près) que les équations (4.8).

Or la résolution du système (4.8) se ramène à une quadrature lorsqu'on prend pour inconnue l'angle φ du vecteur $\vec{i}(u^i)$ à partir d'un vecteur unitaire donné $\vec{j}(u^i)$ dans le plan tangent. Deux quadratures permettent ensuite d'obtenir la solution générale du système (4.7).

La détermination des congruences des types II *et* III *associées à une surface* S *se ramène donc à des quadratures.*

Le plan perpendiculaire au plan tangent en $M(u^i)$ à S et issu du rayon $D(u^i)$ d'une congruence de type III est un des plans focaux associés à $D(u^i)$; il est attaché à S. Soit $F(u^i)$ le foyer associé à ce plan focal. C'est le point de $D(u^i)$ qui décrit une surface dont le plan tangent en $F(u^i)$ est perpendiculaire au plan tangent à S en $M(u^i)$ le long de $D(u^i)$. D'après l'étude du paragraphe (I, 2) la congruence de points $[F(u^i)]$, supposée attachée à S conserve la propriété ci-dessus dans une déformation arbitraire de S. Le foyer $F(u^i)$ est donc lui aussi attaché à S. Comme les congruences de type II :

Les congruences du type III *possèdent une famille de développables persistantes et, relativement à chaque rayon, un foyer et le plan focal correspondant attachés à* S *dans une déformation arbitraire de* S.

Cette fixité du foyer avait été établie par M. Vincensini qui a signalé qu'elle caractérise ce type de congruences dont les rayons sont dans les plans tangents de S au même titre que la persistance d'une famille de développables.

On peut remarquer que la perpendiculaire en $F(u^i)$ à $D(u^i)$ tracée dans le plan tangent à S engendre une congruence de normales dont $F(u^i)$ décrit une trajectoire orthogonale. Par suite, la perpendiculaire en $F(u^i)$ au plan tangent en $M(u^i)$ à S engendre une congruence de type II. Mais cette dernière n'admet pas en général les mêmes courbes-images des développables persistantes que la congruence du type III qui l'a introduite.

5. Conclusion. — *Il n'existe que trois types de congruences de droites attachées à une surface* S *et admettant une famille de développables persistantes dans une déformation arbitraire de* S.

I. *Les congruences dont une nappe de la surface focale est* S.

II. *Les congruences du type étudié par M. Finikoff dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents de* S.

III. *Les congruences du type étudié par M. Vincensini, dont les rayons sont situés dans les plans tangents de* S.

Une congruence peut appartenir simultanément aux types I et III. Dans ce cas $D(u^i)$ est tangente en $M(u^i)$ à la courbe γ_{u^2}, le vecteur unitaire tangent à cette courbe devant subir le long de celle-ci un déplacement parallèle de Lévi-Civita, il est nécessaire que les courbes γ_{u^2} soient des géodésiques de S. Réciproquement, les tangentes à une famille de géodésiques de S engendrent une congruence particulière du type III, les points $I(u^i)$ correspondants étant les points qui décrivent les développantes des géodésiques γ_{u^2}.

Les congruences qui appartiennent simultanément aux types I *et* III *sont donc des congruences de normales. Ce sont les seules congruences des types* I *et* III (*si l'on exclut le cas des surfaces* S *développables*) *qui sont des congruences de normales*. C'est évident pour le type I. Pour le type III, cela résulte du fait que, l'un des plans focaux de $D(u^i)$ étant perpendiculaire au plan tangent, l'autre doit être confondu avec le plan tangent en $M(u^i)$ de telle sorte que le foyer correspondant ne peut être que $M(u^i)$ si S n'est pas développable. $D(u^i)$ passant par $M(u^i)$, la congruence est du type I.

Des études faites par MM. Finikoff et Vincensini il résulte que les congruences des types II et III ne peuvent avoir leur deux familles de développables persistantes. Donc :

Il n'existe pas de congruences de droites attachées à une surface S *et admettant deux familles de développables persistantes dans une déformation arbitraire de* S.

Il est intéressant de remarquer que, par contre, il existe des congruences attachées à une surface S telles que *les deux foyers* de chaque rayon soient *attachés* à S. C'est le cas, par exemple, des congruences de roulement engendrées par une droite D invariablement liée à une surface matérielle S_0, isométrique à S, qui roule sans glisser sur S. Les foyers relatifs au rayon $D(u^i)$

sont respectivement la projection orthogonale de $M(u^i)$ sur $D(u^i)$ et l'intersection de $D(u^i)$ avec le plan tangent en $M(u^i)$.

Le problème général de la déformation des congruences avec *foyers persistants* semble intéressant; je compte y revenir dans une publication ultérieure.

B. Congruences de normales arbitrairement déformables.

6. Considérations générales. — *a*. Dans cette partie est étudiée la recherche des congruences de droites $D(u^i)$, attachées à une surface S, qui sont des congruences de normales et le restent dans une déformation arbitraire. Des cas importants de ce problème ont déjà été étudiés. Beltrami a montré que si une congruence [D] est attachée à S de telle sorte que $D(u^i)$ passe par $M(u^i)$ et si cette congruence est une congruence de normales cette propriété est invariante. Ribaucour a montré une propriété analogue pour les congruences dont le rayon $D(u^i)$ est dans le plan tangent en $M(u^i)$. D'après l'étude du paragraphe 2 de la partie I, ces congruences de normales arbitrairement déformables peuvent être associées à toute surface S. Ce sont les seules pour lesquelles les trajectoires orthogonales sont décrites par des points attachés à S. Les congruences de Beltrami s'obtiennent à partir des congruences de sphères $[\Sigma]$ admettant S pour déférente, $D(u^i)$ étant l'une des droites joignant $M(u^i)$ à l'un des points de contact de $\Sigma(u^i)$ avec son enveloppe. Nous avons vu que la détermination de toutes les congruences de normales du type étudié par Ribaucour, associées à une surface S, se ramène à la recherche de toutes les congruences du type II étudié dans la partie II.A. Cette détermination n'exige donc que des quadratures.

M. M. Vasseur a montré, dans le cas où $D(u^i)$ n'est pas parallèle au plan tangent en $M(u^i)$ à S, le cas de Beltrami étant écarté, que S doit être isométrique à une surface de révolution et que $D(u^i)$ doit couper le plan tangent en un point de la tangente en $M(u^i)$ à la déformée de méridien passant par ce point.

Dans ce qui va suivre, le problème général sera mis en équation avec le paramétrage le plus général de S. Celui-ci sera ensuite particularisé suivant les besoins des différents cas qui se présenteront afin de permettre de poursuivre l'étude de la question.

b. Mise en équation générale. — Le rayon $D(u^i)$ est défini dans le repère local $\mathcal{R}(u^i)$, comme dans la partie A, par les données (1.1).

La condition nécessaire et suffisante pour que $[D(u^i)]$ soit une congruence de normales est que le tenseur μ_{ij} (coefficients de Kummer, paragraphe I.4) soit symétrique;

$$\tau^{jl}\mu_{lj} = \tau^{jl}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial\vec{i}}{\partial u^l} = 0. \tag{6.1}$$

D'après (1.2), après un changement d'indice muet,

$$\tau^{jl}[(g_{ij}+a_{i|j}-b\eta_{ij})(\alpha^i{}_{|l}-\beta g^{ik}\eta_{kl})+(b_{|j}+a^i\eta_{ij})(\beta_{|l}+\alpha^k\eta_{kl})]=0,$$

et en séparant les termes en η_{ij} suivant leur degré

$$\tau^{jl}(b\beta g^{ik}+a^i\alpha^k)\eta_{ij}\eta_{kl}+\tau^{jl}(a^i\beta_{|l}-b\alpha^i{}_{|l})\eta_{ij}+\ldots$$
$$+\tau^{jl}[\alpha^k b_{|j}-\beta g^{ik}(g_{ij}+a_{i|j})\eta_{kl}]+\tau^{jl}[(g_{ij}+a_{i|j})\alpha^i{}_{|l}+b_{|j}\beta_{|l}]=0.$$

Or, K étant la courbure totale de S,

$$\tau^{jl}\eta_{ij}\eta_{kl}=\frac{1}{g}\tau_{ik}\,\text{dét}(\eta_{ij})=\tau_{ik}\mathrm{K},$$

et en groupant les termes en η_{ij}, après permutation des indices muets j et l, k et i dans le troisième terme

$$\tau^{jl}[a^i\beta_{|l}-\alpha^i b_{|l}+\beta a^i{}_{|l}-b\alpha^i{}_{|l}+\beta g^i{}_l]\eta_{ij}+\ldots$$
$$+\tau^{jl}(\alpha_{j|l}+a_{i|j}\alpha^i{}_{|l}+b_{|j}\beta_{|l})+\tau_{ik}(b\beta g^{ik}+a^i\alpha^k)\mathrm{K}=0.$$

Si l'on pose

$$\bar{a}^i=\beta a^i,\qquad \bar{\alpha}^i=b\alpha^i, \tag{6.2}$$

ce qui entraîne

$$\bar{a}^i{}_{|l}=\beta_{|l}a^i+\beta a^i{}_{|l},\qquad \bar{\alpha}^i{}_{|l}=b_{|l}\alpha^i+b\alpha^i{}_{|l},$$

l'équation qui donne la condition nécessaire et suffisante pour que [D] soit une congruence de normales s'écrit, en remarquant que $\tau^{jl}g^i{}_l\eta_{ij}=\tau^{ji}\eta_{ij}=0$, $\tau_{ik}g^{ik}=0$, après des changements d'indices muets dans le dernier terme

$$\tau^{jl}(\bar{a}^i{}_{|l}-\bar{\alpha}^i{}_{|l})\eta_{ij}+\tau^{jl}(\alpha_{j|l}+a_{i|j}\alpha^i{}_{|l}+b_{|j}\beta_{|l}+a_j\alpha_l\mathrm{K})=0. \tag{6.3}$$

Le premier membre de (6.3) est linéaire en η_{11}, η_{12}, η_{22}. Pour que [D], attachée à S, reste une congruence de normales dans une déformation arbitraire il faut et il suffit que les coefficients de ce polynome du premier degré soient nuls. Pour cela il faut et il suffit que le tenseur

$$\mathrm{A}^{ij}=\tau^{jl}(\bar{a}^i{}_{|l}-\bar{\alpha}^i{}_{|l}) \tag{6.4}$$

soit antisymétrique et que l'équation ci-dessous soit vérifiée :

$$\tau^{jl}(\alpha_{j|l}+a^i{}_{|j}\alpha_{i|l}+b_{|j}\beta_{|l}+a_j\alpha_l\mathrm{K})=0, \tag{6.5}$$

c'est-à-dire que le tenseur suivant soit symétrique :

$$\mathrm{B}_{ij}=\alpha_{i|j}+a^h{}_{|i}\alpha_{h|j}+b_{|i}\beta_{|j}+a_i\alpha_j\mathrm{K}.$$

L'étude ultérieure se simplifie si l'on remarque que l'un des deux vecteurs $\bar{a}^i$, $\bar{\alpha}^i$ du plan tangent peut toujours être supposé nul. Le premier en prenant $\Omega(u^i)$ dans le plan tangent à S en $\mathrm{M}(u^i)$ si $\mathrm{D}(u^i)$ coupe ce plan ($b=0$). Le deuxième si $\mathrm{D}(u^i)$ est parallèle à ce plan ($\beta=0$). Nous séparerons ces deux cas dans la suite.

7. Congruences dont le rayon $D(u^i)$ coupe en $\Omega(u^i)$ le plan tangent a S en $M(u^i)$. — *a. Choix d'un paramétrage particulier.* — Ce cas correspond, en vertu du choix de Ω, aux hypothèses :

$$b = 0, \qquad \bar{\alpha}^i = 0 \qquad [(i = 1, 2), (\beta \neq 0)]. \tag{7.1}$$

Exprimons tout d'abord que le tenseur

$$A^{ij} = \tau^{jl} \bar{a}^i{}_{|l} \tag{7.2}$$

est antisymétrique. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{a}^1{}_{|2} = \bar{a}^2{}_{|1} = 0, \\ \bar{a}^1{}_{|1} = \bar{a}^2{}_{|2}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

Nous simplifierons le système ci-dessus en rapportant la surface à un paramétrage particulier $u^1 = u$, $u^2 = v$, tel que :

La tangente en M *à la courbe* $v =$ Cte *passe par* Ω (*ainsi* $a^2 = 0$).
Les courbes coordonnées sont orthogonales.

Ceci entraîne :

$$g_{11} = E, \qquad g_{12} = g_{21} = 0, \qquad g_{22} = G,$$
$$a^2 = 0, \qquad \text{donc} \quad \bar{a}^2 = 0.$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont donnés par

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v},$$
$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Les équations (7.3) s'écrivent alors

$$\frac{\partial \bar{a}^1}{\partial v} + \frac{1}{2}\bar{a}^1 \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \tag{7.4}$$

$$-\frac{1}{2}\bar{a}^1 \frac{1}{G}\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial \bar{a}^1}{\partial u} + \frac{1}{2}\bar{a}^1 \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{1}{2}\bar{a}^1 \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{7.6}$$

L'équation (7.5) conduit à deux possibilités.

1er *cas :* $\bar{a}^1 = 0$. — β n'étant pas nul, cela entraîne $a^1 = a^2 = 0$. Le point $\Omega(u^i)$ est en $M(u^i)$. Ce cas est le cas de Beltrami. On vérifie d'ailleurs immédiatement que (7.4) et (7.6) sont satisfaites tandis que (6.5) s'écrit

$$\tau^{jl} \alpha_{j|l} = 0.$$

Le tenseur $\alpha_{i|j}$ étant symétrique, α_i est un gradient. Il existe donc R tel que

$$\alpha_i = -R_{|i}.$$

On vérifie, d'après l'étude faite au paragraphe I. 1, que $D(u^i)$ joint $M(u^i)$ à l'un des deux points de contact de la sphère $\Sigma(u^i)$, centrée en $M(u^i)$, de rayon $R(u^i)$, avec son enveloppe.

2^e *cas :* $\dfrac{\partial E}{\partial v} = 0$. — E est fonction de u seul; par un changement de variable déjà utilisé au paragraphe I.3 *c*, on peut toujours se ramener, tout en respectant les hypothèses déjà faites, au cas où

$$E = 1.$$

L'équation (7.4) donne alors

$$\overline{a}^1 = f(u) \qquad (f, \text{ fonction arbitraire d'une variable})$$

et par suite (7.6),

$$f'(u) = \frac{1}{2} f(u) \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u},$$

$$G = g^2(v) f^2(u) \qquad (g, \text{ fonction arbitraire d'une variable}),$$

puisque nous pouvons ici écarter le cas où $f(u)$ serait identiquement nulle. Comme au paragraphe I.3 *c*, nous pouvons toujours nous ramener au cas où G est fonction de u seul. S admet donc nécessairement une première forme quadratique fondamentale de la forme

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\, dv^2. \tag{7.7}$$

Si avec ce ds^2 on résoud le système (7.4), (7.5) et (7.6), on trouve la condition nécessaire et suffisante suivante pour que A^{ij} soit antisymétrique :

$$\overline{a}^1 = k\, r(u) \qquad (k, \text{ constante arbitraire}). \tag{7.8}$$

Ainsi se retrouve par une autre méthode le résultat de M. L. Vasseur que nous allons approfondir en effectuant une étude de l'équation aux dérivées partielles (6.5) entre les fonctions inconnues α_i, β liées par la relation $\alpha_i \alpha^i + \beta^2 = 1$.

Les seules congruences de normales attachées à une surface S *et arbitrairement déformables avec elle sont, lorsque le rayon* $D(u^i)$ *ne passe pas par* $M(u^i)$ *et coupe le plan tangent en ce point à* S, *certaines congruences attachées à des surfaces isométriques à une surface de révolution et dont le rayon* $D(u^i)$ *rencontre la tangente en* $M(u^i)$ *à la déformée de méridien passant par ce point.*

b. Étude de certaines solutions particulières. — 1° L'équation (6.5) s'écrit ici ($b = 0$), après élévation et abaissement d'indices :

$$\tau^{jl}(\alpha_{j|l} + a^i{}_{|j}\alpha_{i|l} + a_j \alpha_l K) = 0. \tag{7.9}$$

Avec le système de paramétrage utilisé et la forme correspondante des symboles de Christoffel, les dérivées covariantes qui interviennent dans (7.9) ont pour valeurs

$$\alpha_{1|1}=\frac{\partial\alpha_1}{\partial u},\qquad \alpha_{1|2}=\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}-\frac{r'}{r}\alpha_2,\qquad \alpha_{2|1}=\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}-\frac{r'}{r}\alpha_2;$$

$$\alpha_{2|2}=\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}+rr'\alpha_1;$$

$$a^1{}_{|1}=\frac{\partial a^1}{\partial u},\qquad a^1{}_{|2}=\frac{\partial a^1}{\partial v},\qquad a^2{}_{|1}=0,\qquad a^2{}_{|2}=\frac{r'}{r}a';$$

de plus

$$K=-\frac{r''}{r}.$$

On obtient ainsi l'équation

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}-\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}+\frac{\partial a^1}{\partial u}\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}-\frac{\partial a^1}{\partial v}\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}-\frac{r'}{r}\alpha_2\frac{\partial a^1}{\partial u}-\frac{r'}{r}a^1\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}+\frac{r'^2}{r^2}a^1\alpha_2-a^1\alpha_2\frac{r''}{r}=0$$

car ici $a_1=a^1$, $a_2=a^2=0$. Cette équation peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$(7.10)\qquad \frac{D[a^1+u,\,\alpha_1]}{D(u,v)}-\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{r'}{r}a^1+1\right)\alpha_2\right]=0,$$

$$(7.11)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[(a^1+u)\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}-\left(\frac{r'}{r}a^1+1\right)\alpha_2\right]=\frac{\partial}{\partial v}\left[(a^1+u)\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\right],$$

$$(7.12)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial a^1}{\partial v}\alpha_1+\left(\frac{r'}{r}a^1+1\right)\alpha_2\right]=\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial a^1}{\partial u}+1\right)\alpha_1\right].$$

Si dans la base B orthonormée $\frac{\partial\vec{M}}{\partial u},\ \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{M}}{\partial v},\ \vec{n}$, le vecteur $\vec{i}$ est repéré à l'aide des angles ψ et θ tels que

$$(7.13)\qquad \vec{i}_{B}\begin{cases}\cos\theta\cos\psi,\\ \cos\theta\sin\psi,\\ \sin\theta,\end{cases}\ \text{il en résulte}\ \begin{aligned}&\alpha_1=\cos\theta\cos\psi,\\ &\alpha_2=r\cos\theta\sin\psi,\\ &\beta=\sin\theta\neq 0,\end{aligned}$$

θ est l'angle de $D(u^i)$ avec le plan tangent en $M(u^i)$, ψ est l'angle de la projection orthogonale de $D(u^i)$ sur le plan tangent avec la tangente en $M(u^i)$ à la déformée de méridienne. (7.8) donne alors

$$(7.14)\qquad a^1=\frac{\overline{a}^1}{\beta}=k\frac{r}{\sin\theta}.$$

En opérant les substitutions (7.13), (7.14), l'équation (7.10) fournit une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux fonctions inconnues ψ et θ. De la résolution de cette équation, dans laquelle une des deux fonctions ψ ou θ peut être prise arbitrairement, dépend la recherche des congruences de normales arbitrairement déformables qu'on peut attacher à une surface isométrique à une surface de révolution. θ et ψ déterminent le vecteur $\vec{i}$ et (7.14) fournit a^1, c'est-à-dire la position de Ω.

La complexité de l'équation en θ et ψ ne semble pas permettre l'obtention de la solution générale sous forme finie ou à l'aide de quadratures. Grâce aux formes particulières (7.10), (7.11) et (7.12), on peut cependant obtenir des solutions particulières dépendant de fonctions arbitraires. Certaines de ces solutions permettent des remarques géométriques intéressantes.

2° *Cas où* $D(u^i)$ *est dans le plan normal contenant la tangente à la déformée de méridien en* $M(u^i)$. — Ce cas correspond à $\alpha_2 = 0$ ou $\psi = 0$, en choisissant convenablement les déterminations de ψ et θ. L'équation (7.10) s'écrit alors

$$\frac{D\left[\dfrac{kr}{\sin\theta} + u, \cos\theta\right]}{D(u, v)} = -\left(\frac{kr'}{\sin\theta} + 1\right)\sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0,$$

soit

$$(kr' + \sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

D'où la solution générale de ce cas :

$$(7.15)\qquad \begin{cases} \psi = 0, \\ \theta = \theta(u) \qquad [\theta(u), \text{ fonction arbitraire}], \\ a^1 = k\dfrac{r}{\sin\theta}. \end{cases}$$

En effet $kr' + \sin\theta = 0$ conduit aussi à θ fonction de u seul.

Mise en place géométrique. — Nous l'effectuons sur l'une des surfaces de révolution S' admettant (7.7) pour première forme fondamentale en affectant de l'indice « prime » les éléments géométriques correspondants. La droite $D'(u, v)$ est dans le plan méridien de $M'(u, v)$. D'après (7.15), il suffit de construire tous les rayons situés dans un plan méridien, la congruence complète s'en déduit par révolution autour de l'axe de S'.

H' étant la projection orthogonale de M' sur D' :

$$M'H' = M'\Omega' \,|\sin\theta| = |a^1|.|\sin\theta|.$$

D'après (7.15) :

$$(7.16)\qquad M'H' = |k|\, r(u)$$

La droite $D'(u, v)$ est tangente à la sphère centrée en $M(u, v)$ dont le rayon est $|k|\,r(u)$. Inversement, sous réserve de conditions de continuité et de dérivabilité de $\theta(u)$, toute famille de droites du plan méridien telle que la droite associée à M' soit tangente à la sphère $(M', |k|\,r)$ où k est une constante, engendre par rotation autour de l'axe de S' une congruence de normales arbitrairement déformable avec S'. En effet (7.16) entraîne (7.15) en choisissant convenablement le signe de k ou le sens de $\vec{n}$.

Étant donnée une surface de révolution S′, *il existe des congruences de normales attachées à* S′, *arbitrairement déformables, dont les rayons sont situés dans les plans méridiens de* S′. *Ce sont les congruences admettant le même axe de révolution que* S′ *dont le rayon associé au point* M′ *est tangent à la sphère de rayon* $|k|r$ *centrée en ce point,* r *désignant le rayon du parallèle qui passe par* M′ *et* k *une constante.*

En particulier si $|k| = 1$, la congruence dont tous les rayons $D'_0(u, v)$ sont confondus avec l'axe de révolution de S′, entre dans la catégorie précédente. C'est une congruence de normales singulière, mais ce dernier caractère n'est pas invariant dans une déformation arbitraire.

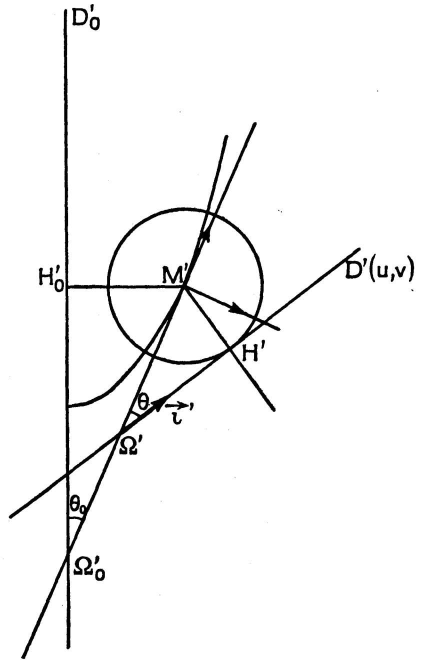

Fig. 1.

Attachons à S′ une congruence de surfaces $[\mathfrak{S}']$, la surface $\mathfrak{S}'(u, v)$ associée au point $M(u, v)$ coïncidant avec S′. On peut donner de la congruence $[D'_0]$ la définition suivante invariante par déformation arbitraire : $[D'_0]$ est engendrée par l'axe de révolution de la surface de révolution $\mathfrak{S}'(u, v)$ qui roule sans glisser sur S′.

Par déformation arbitraire, on retrouve ainsi le résultat connu suivant :

L'axe d'une surface de révolution qui roule sans glisser sur une surface (qui lui est nécessairement isométrique) engendre une congruence de normales.

Le point $\Omega'_0(u, v)$ correspondant à la congruence $[D'_0]$ est l'intersection du plan tangent en $M'(u, v)$ et de l'axe de S′, c'est le centre de courbure géodésique en $M'(u, v)$ du parallèle. Ce centre reste attaché à S' dans une déformation arbitraire. Donc si S est la déformée la plus générale de S', $[D_0]$ la déformée correspondante de $[D'_0]$, le point $\Omega_0(u, v)$ où $D_0(u, v)$ coupe le plan tangent est le centre de courbure géodésique en $M(u, v)$ de la déformée de parallèle. Un calcul simple montre que dans ce cas :

$$a_0^1 = -\frac{r}{r'}. \tag{7.17}$$

Ce type de solution correspond donc à la fonction $\theta(u)$ particulière suivante :

$$\sin\theta_0(u) = -r' \qquad (\text{si } k = +1). \tag{7.17'}$$

Cas particulier où le rayon $D(u, v)$ *est perpendiculaire au plan tangent en* $M(u, v)$. — Ce cas est aussi un cas particulier du type de solution donné par (7.15). C'est celui qui correspond à la fonction

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

puisqu'on peut toujours choisir $\vec{i}$ de sorte que $\vec{i} = \vec{n}$. Il en résulte

$$a_1 = a^1 = k\,r(u), \qquad a_2 = 0.$$

La congruence $[D(u, v)]$ est la congruence des cordes de contact de la congruence de sphères $\Sigma(u, v)$ centrées en $M(u, v)$ et dont le demi-carré du rayon est l'une des fonctions de la variable u seule définie par

$$\rho = -k\int r(u)\,du.$$

Ainsi se trouve établi le résultat énoncé au paragraphe (I.3.*c*).

Les seules congruences de normales attachées à une surface S, *arbitrairement déformables, pour lesquelles le rayon* $D(u^i)$ *est perpendiculaire au plan tangent en* $M(u^i)$ *sont les congruences de cordes de contact de congruences de sphères centrées sur* S *étudiées au paragraphe* (I.3.*c*).

3° *Cas où* $D(u^i)$ *passe par le centre de courbure géodésique en* M *de la déformée de parallèle.* — C'est le cas où

$$a^1 = -\frac{r}{r'}, \tag{7.18}$$

donc

$$\sin\theta = -kr'. \tag{7.19}$$

L'équation (7.10) s'écrit alors en tenant compte du fait que, d'après (7.19), θ n'est fonction que de u

$$\frac{rr''}{r'^2}\cos\theta\,\sin\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0.$$

Les cas où $\sin\psi = 0$ ou $\cos\theta = 0$ ont été étudiés au paragraphe précédent, seuls restent à examiner les cas suivants :

$r'' = 0$. S *est développable.*

Opérons la mise en place de la congruence sur le plan S′ qui se trouve repéré en coordonnées polaires. Quel que soit $M'(u, v)$ le point $\Omega'(u, v)$ est le pôle O du système de coordonnées polaires, centre de courbure du parallèle de M′.

L'angle θ est constant d'après (7.19), car r' est constant dans l'hypothèse actuelle. ψ est une fonction arbitraire de u et v.

La congruence [D′] *est singulière. Ses rayons sont des génératrices d'un cône de révolution dont l'axe est normal au plan* S′ *associées de façon arbitraire aux points du plan.*

$\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0$ conduit à la solution

$$(7.20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi &= \psi(u) \qquad \text{(fonction arbitraire)}, \\ a^1 &= -\frac{r}{r'}, \\ \sin\theta &= -kr'. \end{aligned} \right.$$

Lorsque la fonction $\psi(u)$ est choisie identiquement nulle, la solution obtenue peut se mettre sous la forme (7.17)-(7.17′). En effet, par un changement de variable linéaire sur les v seuls, on peut remplacer dans le ds^2 de S, $r(u)$ par toute fonction de la forme $h\,r(u)$ ($h =$ Cte). Ceci permet de se ramener si on le désire, au cas où $|k| = 1$. Cette solution est donc engendrée par l'axe d'une surface de révolution qui roule sans glisser sur S.

Les solutions (7.20) *se déduisent simplement des congruences obtenues par roulement sur* S *d'une surface de révolution isométrique à* S. *Il suffit de soumettre chaque rayon* $D_0(u^i)$ *de ces dernières à une rotation autour de la parallèle à la normale en* $M(u^i)$ *issue du point* $\Omega_0(u^i)$ *où ce rayon perce le plan tangent, l'angle de cette rotation étant constant le long des déformées de parallèles.*

4° *Congruences* [D] *invariantes dans les déformations qui laissent* S *invariante.* — Ce sont les congruences qui, attachées à l'une des surfaces de révolution S′ isométriques à S, sont de révolution autour de l'axe de S′. Pour cela, il faut et il suffit que ψ et θ soient fonctions de u seul. Il en est alors ainsi pour a^1, α_1 et α_2.

Le déterminant fonctionnel de (7.10) est nul, d'où la solution correspondante

$$(7.21) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\theta(u),\ \psi(u) \text{ telles que } \quad r(kr' + \sin\theta)\cot\!g\,\theta\,\sin\psi = C \qquad \text{(C constante arbitraire)}, \\ &a^1 = k\frac{r}{\sin\theta}. \end{aligned} \right.$$

Quel que soit C, si l'on ne se trouve pas dans les cas précédemment étudiés, $\theta(u)$ peut être choisie arbitrairement, $\psi(u)$ et $a^1(u)$ s'en déduisent.

Ces solutions se déduisent de la solution pour laquelle le rayon $D(u^i)$ *est dans le plan normal en* $M(u^i)$ *qui contient la tangente à la déformée de méridienne et correspondant à la même fonction* $\theta(u)$ *par des rotations analogues à celles utilisées dans le paragraphe précédent. Mais ici l'angle de rotation ne varie pas arbitrairement le long d'une déformée de méridien. Il est précisé par la première équation* (7.21).

Plus généralement, on peut obtenir sous forme finie toutes les solutions pour lesquelles le déterminant fonctionnel de (7.10) est nul. Le cas $a^1 + u = \mathrm{Cte}$ étant étudié plus loin, on obtient ici la solution :

$$(7.22)\quad \begin{cases} \cos\theta\cos\psi = f\left(\dfrac{kr}{\sin\theta} + u\right) \quad (f, \text{ fonction arbitraire d'une variable}), \\ r(k'r' + \sin\theta)\operatorname{cotg}\theta\sin\psi = g(v) \\ (g, \text{ fonction arbitraire d'une variable}), \\ a^1 = k\dfrac{r}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Les deux premières équations déterminent en général, implicitement, les fonctions $\psi(u, v)$ et $\theta(u, v)$.

5° *Cas où le rayon* $D(u^i)$ *coupe la tangente en* $M(u^i)$ *à la déformée de méridienne sous un angle constant le long de cette dernière.* — C'est le cas ou α_1 n'est fonction que de v. (7.11) s'intègre alors. D'où la solution correspondante en introduisant θ et ψ.

$$(7.23)\quad \begin{cases} \cos\theta\cos\psi = f(v) \quad (f, \text{ fonction arbitraire}), \\ \left(\dfrac{kr}{\sin\theta} + u\right)f'(v) - r\left(\dfrac{kr'}{\sin\theta} + 1\right)\cos\theta\sin\psi = g(v) \\ (g, \text{ fonction arbitraire}), \\ a^1 = \dfrac{kr}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Les deux premières équations déterminent θ et ψ.

Il existe des solutions pour lesquelles l'angle de $D(u^i)$ avec la tangente à la déformée de méridienne est constant sur tout S. Elles correspondent aux fonctions f constantes dans (7.23) [et aussi dans (7.22)].

6° *Cas où* $\Omega(u^i)$ *décrit une développante d'une déformée de méridienne quand* $M(u^i)$ *décrit cette dernière.* — C'est le cas où $a^1 + u$ n'est fonction que de v, u définissant un système d'abscisse curviligne sur les déformées de méridienne. (7.12) s'intègre alors et les solutions correspondantes sont données par

$$(7.24)\quad \begin{cases} a^1 = \dfrac{kr}{\sin\theta} = f(v) - u \quad (f, \text{ fonction arbitraire}), \\ f'(v)\cos\theta\cos\psi + r\left(k\dfrac{r'}{\sin\theta} + 1\right)\cos\theta\sin\psi = g(v) \\ (g, \text{ fonction arbitraire}). \end{cases}$$

Les deux premières équations déterminent a^1 et θ. La dernière permet ensuite de calculer ψ.

En particulier, si f est constante $\Omega(u^i)$ décrit une surface dont S est une nappe de la développée, le réseau des courbes coordonnées de S étant constitué d'une famille de géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales, u étant l'abscisse curviligne sur les géodésiques.

8. Congruences dont le rayon $D(u^i)$ est parallèle au plan tangent a S au point $M(u^i)$. — *Choix d'un paramétrage particulier.* — Ce cas correspond aux hypothèses

$$\beta = 0, \quad \text{donc} \quad \overline{a}^i = 0. \tag{8.1}$$

Exprimons tout d'abord que le tenseur

$$-\Lambda^{ij} = \tau^{jl}\overline{\alpha}^i{}_{|l} \tag{8.2}$$

est antisymétrique. Ce problème est le même ($\overline{\alpha}^i$ remplaçant $\overline{a}^i$) que celui qui a été étudié au paragraphe 7 *a*. Sa solution est la même si l'on adopte sur S un paramétrage $u^1 = u$, $u^2 = v$ tel que

$$g_{11} = E, \qquad g_{12} = g_{21} = F = 0, \qquad g_{22} = G,$$
$$\alpha^2 = 0, \qquad \text{donc} \quad \overline{\alpha}^2 = 0.$$

Cela revient ici à prendre un réseau de courbes coordonnées orthogonales tel que la tangente en $M(u, v)$ *à la courbe* $v =$ Cte *soit parallèle à* $D(u, v)$.

L'étude du paragraphe 7.*a* conduit alors aux possibilités suivantes :

1^er^ *Cas* : $\overline{\alpha}^1 = 0$. — Cela entraîne donc $\overline{\alpha}^i = 0\,(i = 1, 2)$, les α^i ne peuvent être nuls tous deux, sinon $\vec{i}$ serait nul, cette condition est réalisée si et seulement si

$$b = 0. \tag{8.3}$$

Ce cas est celui où $D(u^i)$ est dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S. Il sera étudié au paragraphe suivant.

2^e^ *Cas.* — C'est celui où S est isométrique à une surface de révolution. Le ds^2 relatif aux courbes coordonnées choisies peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\, dv^2. \tag{8.4}$$

Il en résulte alors

$$\overline{\alpha}^1 = k\, r(u) = b\,\alpha^1 \qquad (k, \text{ constante arbitraire}), \tag{8.5}$$

Si le vecteur $\vec{i}$ est pris équipollent à $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u}$, ce qu'on peut toujours supposer, on a alors

$$\alpha^1 = 1, \qquad \alpha^2 = 0, \qquad \beta = 0,$$

et d'après (8.5),

$$b = k\,r(u).$$

On peut particulariser le point Ω sur $D(u, v)$ en le prenant par exemple confondu avec la projection orthogonale de $M(u, v)$ sur $D(u, v)$. Dans ce cas,

$$a^1 = 0.$$

L'équation (6.5) permet de déterminer la dernière fonction inconnue a^2. Les dérivées covariantes qui y interviennent sont données dans le tableau ci-dessous :

$$\alpha_{1|1} = 0, \qquad \alpha_{1|2} = 0, \qquad \alpha_{2|1} = 0, \qquad \alpha_{2|2} = rr';$$

$$a^2{}_{|1} = \frac{\partial a^2}{\partial u} + \frac{r'}{r} a^2;$$

$$K = -\frac{r''}{r}.$$

(6.5) devient

$$rr'\left(\frac{\partial a^2}{\partial u} + \frac{r'}{r} a^2\right) + a^2 rr'' = 0,$$

car $a_2 = r^2 a^2$. Cette équation est vérifiée si l'une des fonctions r' ou a^2 est nulle. Les autres solutions s'obtiennent par la résolution de l'équation obtenue en divisant par $rr'a^2$,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial a^2}{\partial u} + \frac{r'}{r} + \frac{r''}{r'} = 0.$$

D'où la solution générale qui englobe les solutions particulières signalées ci-dessus.

$$rr'a^2 = f(v) \qquad (f, \text{ fonction arbitraire}).$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les seules surfaces S *auxquelles on peut attacher des congruences de normales* [D], *arbitrairement déformables, pour lesquelles le rayon* $D(u^i)$, *est parallèle au plan tangent en* $M(u^i)$ *sont les surfaces isométriques aux surfaces de révolution. Le rayon* $D(u^i)$ *est parallèle à la tangente en* $M(u^i)$ *à la déformée de méridien. Le* ds^2 *de* S *étant mis sous la forme*

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\,dv^2,$$

les solutions sont données par

$$(8.6) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1, & \alpha^2 = \beta = 0, \\ a^1 = 0, & rr'a^2 = f(v), \qquad b = kr. \end{cases}$$

Lorsque $r' = 0$, c'est-à-dire lorsque S est une développable rapportée à un ds^2 cartésien, la fonction f doit être nulle et a^2 est une fonction arbitraire de u, v. En particulier, la congruence ainsi attachée au plan S' est singulière. Tous ses rayons sont parallèles entre eux et situés dans un plan parallèle à S', ils sont associés de façon arbitraire aux points du plan.

Dans les autres cas $f(v)$ est une fonction arbitraire. Sa connaissance et celle de k entraînent la connaissance de a^2 et b.

9. CONGRUENCES DONT LE RAYON $D(u^i)$ EST SITUÉ DANS LE PLAN TANGENT A S AU POINT $M'(u^i)$. — *a. Équation générale.* — Ici

$$\beta = 0, \qquad b = 0,$$

ce qui entraîne

$$a^i = 0, \qquad \bar{\alpha}^i = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Le tenseur A^{ij} est nul, donc antisymétrique, et l'équation générale des congruences de normales dont les rayons sont situés dans les plans tangents de S, est donnée par (6.5) qui s'écrit

$$\tau^{jl}(\alpha_{j|l} + a^i{}_{|j}\alpha_{i|l} + a_j\alpha_l K) = 0. \tag{9.1}$$

Dans cette équation, $\Omega(u^i)$ peut être un point quelconque de $D(u^i)$ attaché à S. On peut choisir arbitrairement les fonctions $\alpha_i(u^i)$, c'est-à-dire la direction de $D(u^i)$. (9.1) est alors une équation aux dérivées partielles du premier ordre aux fonctions inconnues a^i dont l'une peut être prise arbitrairement.

L'équation (9.1) peut être mise sous une autre forme qu'on peut obtenir directement de la manière suivante : Pour que [D] soit une congruence de normales, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer $\lambda(u^i)$ de telle sorte qu'on ait l'identité en u^i et du^i :

$$d(\vec{\Omega} + \lambda\vec{i}).\vec{i} = 0.$$

Soit, $\vec{i}$ étant unitaire :

$$d\vec{\Omega}.\vec{i} + d\lambda = 0, \tag{9.2}$$

$$d\lambda = -(du^i + Da^i)\alpha_i = -(\alpha_j + a^i{}_{|j}\alpha_i)\,du^j = -d(a^i\alpha_i) - (\alpha_j - a^i\alpha_{i|j})\,du^j, \tag{9.3}$$

où, nous le rappelons, le symbole D est le symbole de différentiation extérieure absolue relativement à l'espace de Riemann dont la métrique est celle de S.

La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de (9.3) peut prendre l'une des formes suivantes équivalentes à (9.1).

$$D[(du^i + Da^i)\alpha_i] = 0, \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(\alpha_1 + a^i{}_{|1}\alpha_i) = \frac{\partial}{\partial u^1}(\alpha_2 + a^i{}_{|2}\alpha_i), \tag{9.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(\alpha_1 - a^i\alpha_{i|1}) = \frac{\partial}{\partial u^1}(\alpha_2 - a^i\alpha_{i|2}). \tag{9.6}$$

Si l'on développe les calculs dans (9.4), en utilisant la relation $D^2 a_i = -\Omega_{ik}a^k \left(\Omega_{ik} = \frac{1}{2}R_{iklh}\,du^l \wedge du^h,\ R_{iklh}\text{ tenseur de Riemann-Christoffel}\right)$ on retrouve la forme (9.1).

Remarque. — Plus généralement l'équation (7.9), formellement identique à (9.1), mais où $\alpha^i\alpha_i \neq 1$, peut se mettre sous l'une des formes (9.4), (9.5) ou (9.6). Car le calcul, indiqué ci-dessus, qui ramène (9.4) à la forme (9.1) est encore valable. Ceci explique les formes (7.11) et (7.12) qui ont été données pour l'équation (7.9).

b. Solution générale. — Le vecteur $\vec{i}(u^i)$ du plan tangent à S en $M(u^i)$ étant unitaire, il existe sur S une famille de courbes le long desquelles le vecteur $\vec{i}(u^i)$ ayant pour origine $M(u^i)$, subit un déplacement parallèle de Levi-Civita. En effet, de

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(\alpha^i\alpha_i) = 2\alpha^i\alpha_{i|j} = 0 \qquad (j = 1, 2),$$

il résulte

$$\text{dét}(\alpha_{i|j}) = 0.$$

Donc, les équations

$$D\alpha_i = \alpha_{i|j}\,du^j = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

sont compatibles. Elles déterminent la famille de courbes le long desquelles $\vec{i}$ subit un déplacement parallèle. Cette famille de courbes est invariante dans une déformation arbitraire de S d'après son équation.

Si l'on prend cette famille de courbes comme courbes $u^2 = \text{Cte}$, avec le paramétrage particulier correspondant on aura

$$\alpha_{i|1} = 0. \tag{9.7}$$

L'équation (9.6) s'intègre alors moyennant une quadrature :

$$\alpha_{i|2}a^i - \alpha_2 + \int \frac{\partial \alpha_1}{\partial u^2}\,du^1 = 0. \tag{9.8}$$

D'où la méthode suivante pour obtenir toutes les congruences de normales dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface S.

Une famille à un paramètre de courbes de S *étant prise, arbitrairement, comme courbes* $u^2 = \text{Cte}$, *on détermine les vecteurs unitaires* $\vec{i}(u^i)$, *issus de* $M(u^i)$ *dans le plan tangent à* S, *qui, le long des courbes de la famille, subissent un déplacement parallèle de Lévi-Civita. Cette détermination* (*cf.* II. 4.*b*) *n'exige qu'une quadrature.*

Pour chaque solution $\vec{i}(u^i)$, *les congruences* [D] *dont le rayon* $D(u^i)$ *est parallèle à* $\vec{i}(u^i)$ *sont fournies par* (9.8) *qui, moyennant une quadrature, donne l'équation de* $D(u^i)$ *dans le repère* $\mathcal{R}(u^i)$.

La détermination de ces congruences est ramenée à deux quadratures.

Rappelons que, d'après une étude faite au paragraphe (II. 3.*c*), la recherche de ces congruences a été ramenée à la recherche des congruences à développables persistantes du type II et que cette recherche, elle aussi, n'exige que des quadratures.

c. Étude de l'extension aux congruences de normales d'un théorème de Darboux sur les systèmes cycliques.

1° *Introduction.* — Toute congruence de droites dont les rayons sont situés dans un plan isotrope fixe est une congruence singulière de normales dont les trajectoires orthogonales sont des courbes (les isotropes du plan). Donc étant donnée une surface S_0 quelconque, il est possible de lui attacher une congruence de normales D_0 dont le rayon $D_0(u^i)$ est l'intersection du plan tangent en $M_0(u^i)$ à S_0 avec un plan isotrope fixe. Cette congruence de normales ainsi attachée à S_0 est singuilère; d'après le théorème de Ribaucour cette congruence reste une congruence de normales lorsqu'on la déforme arbitrairement sans qu'elle reste en général singulière.

On peut se demander inversement si toute congruence de normales attachée à une surface S, dont le rayon $D(u^i)$ est situé dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S, admet une déformée $[D_0]$ dont tous les rayons sont situés dans un même plan isotrope.

Une étude analogue a été faite pour les systèmes cycliques dont les cercles sont dans les plans tangents à une surface S, le rôle du plan isotrope étant alors joué par une sphère de rayon nul. Cette étude a conduit au remarquable théorème de Darboux signalé au paragraphe (I. 6.c).

Pour qu'une congruence de cercles attachée à une surface S, *le cercle* $\Gamma(u^i)$ *étant dans le plan tangent en* $M(u^i)$ *à S, soit un système cyclique, il faut et il suffit qu'une déformée de cette congruence ait tous ses cercles sur une même sphère de rayon nul.*

Nous allons examiner si ce théorème peut s'étendre au cas des congruences de normales. Résolvons tout d'abord le problème plus général suivant :

2° *Recherche des congruences de droites attachées à une surface* S *et dont une déformée a tous ses rayons dans un même plan isotrope.* — La congruence $[D(u^i)]$ sera définie par (1.1). La déformée particulière étudiée, $[D_0]$ sera attachée à la surface S_0, déformée de S, qui à un déplacement près est déterminée par ses deux tenseurs fondamentaux :

$$g_{ij}, \quad \text{(commun à S et } S_0\text{)},$$

et

$$\eta_{ij}, \quad \text{(nous posons } \varpi_i = \eta_{ij}\, du^j\text{)}.$$

Pour que ces deux tenseurs déterminent S_0, il faut et il suffit que les équations de Gauss et de Codazzi soit vérifiées :

$$\Omega_{ij} + \varpi_i \wedge \varpi_j = 0, \tag{9.9}$$

$$D\varpi_i = 0. \tag{9.10}$$

Soit $\vec{u}_0$ le vecteur normal du plan isotrope fixe

$$(9.11) \qquad \underset{\mathcal{R}_0(ui)}{\vec{u}_0} \begin{cases} \gamma_i, \\ \delta, \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \vec{u}_0^2 = \gamma^i\gamma_i + \delta^2 = 0.$$

Nous devons exprimer que ce vecteur est fixe et que $D_0(u^i)$ est située dans un plan isotrope fixe admettant $\vec{u}_0$ pour normale. D'où les conditions :

$$(9.12) \qquad d\vec{u}_0 = 0,$$

$$(9.13) \qquad \vec{u}_0 . \vec{i}_0 = 0,$$

$$(9.14) \qquad \vec{u}_0 . d\vec{\Omega}_0 = 0.$$

L'équation (9.12) s'écrit

$$(9.15) \qquad D\gamma_i - \delta\varpi_i = 0,$$

$$(9.16) \qquad d\delta + \gamma^k\varpi_k = 0.$$

En tenant compte de $d\vec{u}_0 = 0$ (9.14) peut se mettre sous la forme

$$\vec{u}_0 . d\vec{M}_0 + d(\vec{u}_0 . \vec{M}_0\vec{\Omega}_0) = \gamma_i\, du^i + d(\gamma_i a^i + \delta b) = 0.$$

Si l'on pose

$$(9.17) \qquad \gamma_i a^i + \delta b = R,$$

l'équation devient alors

$$(9.18) \qquad \gamma_i = -R_{|i}.$$

Enfin (9.13) s'écrit :

$$(9.19) \qquad \gamma_i\alpha^i + \delta\beta = 0, \qquad \text{avec} \quad \alpha^i\alpha_i + \beta^2 = 1.$$

La condition $\vec{u}_0^2 = 0$, (9.11), entraîne

$$\vec{u}_0 . d\vec{u}_0 = \gamma^i(D\gamma_i - \delta\varpi_i) + \delta(d\delta + \gamma^k\varpi_k) = 0.$$

On constate que si δ n'est pas nul, cette équation et (9.15) entraînent (9.16) qui peut être alors abandonnée. D'où deux cas :

$\delta \neq 0$.

(9.15) est alors équivalente à

$$(9.20) \qquad \varpi^i = \frac{1}{\delta} D\gamma_i.$$

En écrivant que la forme ϖ_i vérifie (9.9) et (9.10), on obtient

$$\Omega_{ij} + \frac{1}{\delta^2} D\gamma_i \wedge D\gamma_j = 0,$$

$$\Omega_{ij}\gamma^j + \frac{d\delta}{\delta} \wedge D\gamma_i = 0,$$

après avoir utilisé la relation $D^2\gamma_i = -\Omega_{ij}\gamma^j$.

Or, d'après (9.11),

$$\delta^2 = -\gamma^j\gamma_j,$$

d'où

$$\delta d\delta = -\gamma^j D\gamma_j.$$

De telle sorte que les deux équations trouvées s'écrivent, après des changements d'indices muets :

$$(9.21)\qquad \begin{aligned} &D\gamma_i \wedge D\gamma_j - \gamma^l\gamma_l\Omega_{ij} = 0,\\ &\gamma^j D\gamma_i \wedge D\gamma_j - \gamma^l\gamma_l\gamma^j\Omega_{ij} = 0. \end{aligned}$$

On constate que (9.21) entraîne l'équation suivante (multiplication contractée par γ^j).

En tenant compte de (9.18), (9.21) devient

$$R_{|ih}R_{|jk}\,du^h \wedge du^k - \frac{1}{2}\Delta R\, R_{ijhk}\,du^h \wedge du^k = 0.$$

R_{ijhk}, tenseur de Riemann-Christoffel, étant antisymétrique par rapport à ses deux derniers indices, cette équation équivaut à

$$R_{|i1}R_{|j2} - R_{|j1}R_{|i2} - \Delta R\, R_{ij12} = 0.$$

Le premier membre est antisymétrique en i et j. On obtient donc l'équation unique

$$\text{dét}(R_{|ij}) - \Delta R\, R_{1212} = 0,$$

or

$$R_{1212} = -K\,\text{dét}(g_{ij}).$$

D'où, après division par dét (g_{ij}), l'équation en R

$$(9.22)\qquad \Delta_{22}R + K\Delta R = 0.$$

Le problème se trouve ramené à la résolution de (9.22). *A toute solution* $R(u^i)$ *telle que* $\Delta R \neq 0$ *il correspond une infinité de congruences* [D] *attachées à S dont une déformée* [D_0] *a tous ses rayons dans un même plan isotrope. Elles sont données par les équations suivantes déduites de* (9.11), (9.17), (9.18) et (9.19).

$$(9.23)\qquad \gamma_i = -R_{|i} \qquad \delta^2 = -\Delta R \qquad (\delta = \varepsilon i\sqrt{\Delta R},\ \varepsilon = \pm 1),$$

$$(9.24)\qquad \alpha^i R_{|i} - \varepsilon i\beta\sqrt{\Delta R} = 0,$$

$$(9.25)\qquad a^i R_{|i} - \varepsilon i b\sqrt{\Delta R} + R = 0;$$

une détermination de $\sqrt{\Delta R}$ étant choisie.

La déformée [D_0] est attachée à la surface S_0 dont le deuxième tenseur fondamental, d'après (9.20), est

$$(9.26)\qquad \eta_{ij} = \frac{\varepsilon i}{\sqrt{\Delta R}} R_{|ij}$$

— $\delta = 0$: S_0 a ses plans tangents parallèles à la direction isotrope fixe $\vec{u}_0$, c'est donc un cylindre. S est nécessairement une développable. Ceci résulte d'ailleurs de (9.16) qui, $d\delta$ étant nul, entraîne $\varpi_i \wedge \varpi_j = 0$, et de (9.9) qui donne alors $\Omega_{ij} = 0$, ce qui démontre la proposition.

Le cas des développables isotropes étant exclu (*cf.* Introduction), si S, et par suite S_0 sont rapportées au ds^2 cartésien du plan

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \qquad (u^1 = u,\ u^2 = v), \tag{9.27}$$

l'équation (9.15) jointe à (9.18) conduit à $R_{|ij} = 0$, c'est-à-dire avec le paramétrage particulier choisi à

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} = 0.$$

D'où

$$R = Au + Bv + C \qquad (A,\ B,\ C,\ \text{constantes}), \tag{9.28}$$

$$\gamma_1 = -A, \qquad \gamma_2 = -B \qquad (A,\ B,\ \text{non nuls tous deux}), \tag{9.29}$$

(9.11) devient

$$A^2 + B^2 = 0. \tag{9.30}$$

Ω_{ij} étant nul, (9.10) équivaut à

$$\varpi_i = D\lambda_i,$$

soit

$$\eta_{ij} = \lambda_{i|j},$$

λ_i étant un vecteur qui, en vertu de la symétrie de η_{ij}, doit être un gradient $\Phi_{|i}$. (9.10) admet pour solution

$$\eta_{ij} = \Phi_{|ij}.$$

(9.16) peut s'écrire, puisque $D\gamma^k = 0$, $\varpi_k = D\Phi_k$,

$$D(\gamma^k \Phi_{|k}) = 0,$$

d'où l'équation en Φ,

$$\gamma^k \Phi_{|k} = E' \qquad (E'\ \text{constante}).$$

En nous limitant, d'après (9.30), au cas où $B = iA$ (il suffira de remplacer dans ce qui suit i par $-i$ pour obtenir le deuxième cas possible), l'équation en Φ s'écrit, avec le paramétrage (9.27)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + i\frac{\partial \Phi}{\partial v} = E.$$

Sa solution générale est

$$\Phi = F(u + iv) + Eu \qquad (F,\ \text{fonction analytique arbitraire d'une variable}),$$

on en déduit

$$\eta_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = F''(u + iv), \qquad \eta_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} = iF''(u + iv),$$

$$\eta_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = -F''(u + iv).$$

La solution générale du cas ($\delta = 0$) *est donc la suivante* : d'après ce qui précède et (9.19) et (9.27) :

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

(9.31) $$\alpha^1 + i\alpha^2 = 0,$$

(9.32) $$a^1 + ia^2 + u + iv + c' = 0$$

et celle qui s'en déduit en remplaçant i par — i.

La déformée D_0 dont tous les rayons sont dans un même plan isotrope est attachée à la déformée S_0 de S dont le deuxième tenseur fondamental γ_{ij} est donné par

(9.33) $$\gamma_{11} = f(u + iv), \qquad \gamma_{12} = if(u + iv)$$
$$\gamma_{22} = -f(u + iv),$$

(f, fonction analytique arbitraire d'une variable),

ou par les formules se déduisant de celles-ci par remplacement de i par $-i$. Il y a donc ici une infinité de déformées $[D_0]$ ayant la propriété étudiée.

Autre interprétation du problème précédent. — Si dans la mise en équation du problème ci-dessus, on fait abstraction de la condition (9.13), la seule qui fasse intervenir $\vec{i}_0$, on exprime en fait que la congruence $[\pi_0(u_i)]$ des plans isotropes passant par $\Omega_0(u^i)$ est admettant pour normale $\vec{u}_0$ a tous ses plans confondus. De telle sorte que *le problème précédent équivaut à la recherche des congruences de plans isotropes* $[\pi]$ *attachées à une surface* S *et dont une déformée a tous ses plans confondus*. La solution générale en est donnée en supprimant (9.24) et (9.31) dans les résultats donnés ci-dessus pour chacun des deux cas.

Les équations (9.25), (9.32) donnent précisément l'équation dans $\mathcal{R}(u^i)$ des plans $\pi(u^i)$ cherchés.

Les équations supprimées traduisent que les congruences $[D]$ cherchées ci-dessus se déduisent des congruences de plans $[\pi]$ en prenant arbitrairement la droite $D(u^i)$ dans le plan $\pi(u^i)$.

Interprétation géométrique des résultats à l'aide des congruences de sphères. — Considérons la congruence des sphères $\Sigma(u^i)$ centrées en $M(u^i)$ et dont le rayon $R(u^i)$ est la fonction désignée par cette notation dans l'étude précédente. Le cas ($R = \mathrm{Cte}$) devant être écarté, le plan $\pi(u^i)$ a pour équation dans les deux cas d'après (9.17) et (9.18),

$$-R_{|i}a^i + \delta b = R.$$

Il coupe donc le plan tangent en $M(u^i)$ à S suivant la droite d'équation

(9.34) $$a^i R_{|i} + R = 0.$$

Avec les notations de la partie I, Q désignant le point courant de la droite, l'équation (9.34) s'écrit

$$-a^i RR_{|i} - R^2 = \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MI} - R^2 = 0.$$

Ceci exprime que la droite étudiée est la polaire de la corde de contact associée à $\Sigma(u^i) : \Delta_\Sigma(u^i)$.

Dans le cas $\delta \neq 0$, il faut et il suffit que R soit solution de (9.22)

$$\Delta_{22}R + K\,\Delta R = 0, \qquad \text{avec} \quad \Delta R \neq 0.$$

Il correspond à cette solution deux congruences $[\pi]$ pour les deux signes de ε. Les plans $\pi'(u^i)$, $\pi''(u^i)$ sont les deux plans isotropes issus de $\Delta_\Sigma(u^i)$,

Dans le cas $\delta = 0$, R est encore une solution de (9.22) ($R_{|ij} = 0$, $\Delta R = \gamma^i\gamma_i = 0$), mais cette condition n'est suffisante que si S est développable,

$$R_{|ij} = 0, \qquad \Delta R = 0 \qquad (\text{R non constante}).$$

$\Delta_\Sigma(u^i)$ est alors isotrope et $\pi(u^i)$ est le seul plan isotrope issu de $\Delta_\Sigma(u^i)$. En fait, si R n'est pas constante, la condition $R_{|ij} = 0$ entraîne que S est développable.

En effet, si ΔR n'est pas nul, la famille de courbes R = Cte n'est pas constituée de courbes de longueur nulle et comme au paragraphe (I. 3*c*) on peut utiliser un paramétrage $u^1 = u$, $u^2 = v$, tel que

$$ds_2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad R = f(u).$$

La condition $R_{|ij} = 0$ s'écrit alors

$$f'' - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}f' = \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}f' = -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}f' = 0$$

Elle entraîne donc

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

S est développable.

Si ΔR est nul, les courbes R = Cte sont des courbes de longueur nulle. En utilisant le paramétrage $u^1 = u$, $u^2 = v$ de telle sorte que les courbes coordonnées soient de longueur nulle, on se ramène au cas

$$ds = 2F\,du\,dv, \qquad R = f(u).$$

Les symboles de Christoffel de seconde espèce sont tous nuls, sauf

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

La condition $R_{|ij} = 0$ se réduit alors à

$$f'' - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u}f' = 0.$$

f' n'étant pas nul, il en résulte

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\operatorname{Log} F) = 0.$$

S est développable.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les congruences de plans isotropes attachées à une surface et admettant une déformée dont tous les plans sont confondus sont les congruences de plans isotropes issus des polaires des cordes de contact des congruences de sphères vérifiant l'équation (9.22)

$$\Delta_{22} R + K \Delta R = 0,$$

les solutions de cette équation qui vérifient de plus $\Delta R = 0$ *étant exclues, sauf si elles ne sont pas constantes et satisfont en outre à la condition* $R_{|ij} = 0$(S *est alors développable*).

3° *Cas où* $D(u^i)$ *est dans le plan tangent en* $M(u^i)$ *à* S. — D'après le théorème de Ribaucour, [D] est une congruence de normales puisqu'il en est ainsi de sa déformée $[D_0]$. D'après l'étude précédente $D(u^i)$ est la polaire $\Delta_\Sigma(u^i)$ de la corde de contact associée à la sphère $\Sigma(u^i)$ dont la congruence fait l'objet du résultat ci-dessus.

Or on constate, et cela constitue une vérification, que tout au moins dans le cas $\Delta R \neq 0$, (9.22) est l'équation générale des congruences de sphères dont la congruence des polaires des cordes de contact est une congruence de normales non isotropes (paragraphe I. 4.*c*).

Le cas $\Delta R = 0$ correspond aux cas où les polaires des cordes de contact sont isotropes d'après (9.34). Ce cas avait été écarté dans l'étude citée du paragraphe 1. Nous allons l'examiner en étudiant le problème, *a priori* plus général, suivant.

Recherches des congruences de normales dont les rayons sont isotropes et situés dans les plans tangents de S. — $\Omega(u^i)$ et $\vec{i}(u^i)\left(\vec{i}^2 = 0\right)$ étant un point et un vecteur de $D(u^i)$, pour que [D] soit une congruence de normales, il faut et il suffit que l'équation ci-dessous soit complètement intégrable en $\lambda(u^i)$

$$d(\vec{\Omega} + \lambda\vec{i}).\vec{i} = 0.$$

Mais ici $\vec{i}^2 = 0$, donc $\vec{i}.\vec{di} = 0$, l'équation ci-dessus se réduit à la forme singulière

$$d\vec{\Omega}.\vec{i} = 0 \tag{9.35}$$

qui montre que les congruences de normales constituées d'isotropes sont singulières. D'après (9.35), la surface décrite par $\Omega(u^i)$ a toutes ses normales isotropes, c'est donc une développable isotrope et les rayons de [D] coïncident avec les génératrices rectilignes de cette développable. [(Ωu^i) étant un point quelconque de $D(u^i)$, on peut toujours supposer qu'il décrit une surface, sauf si les $D(u^i)$ sont toutes confondues, auquel cas [D] est encore singulière]. Ces congruences ne présentent donc pas un intérêt très grand et nous ne les recherchons que dans le but de donner un résultat comportant un degré de généralité maximal.

Rapportons S à ses lignes de longueur nulle. Avec un paramétrage particulier $u^1 = u$, $u^2 = v$

$$ds^2 = 2\,\mathrm{F}\,du\,dv$$

$$\underset{\mathcal{R}(u,v)}{\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}} \begin{cases} a^1, \\ a^2, \\ 0; \end{cases} \qquad \underset{\mathcal{R}(u,v)}{\vec{i}} \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = 0, \\ \beta = 0, \end{cases}$$

(9.35) s'écrit

$$(du^i + \mathrm{D}a^i)\,\alpha_i = 0,$$

soit

$$\alpha_i + a^j{}_{|i}\alpha_j = 0,$$

c'est-à-dire ici

$$1 + a^1{}_{|1} = 0, \qquad a^1{}_{|2} = 0.$$

En utilisant l'expression des symboles de Christoffel donnée plus haut :

$$\frac{\partial a^1}{\partial u} + \frac{1}{\mathrm{F}}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}a^1 + 1 = 0, \tag{9.36}$$

$$\frac{\partial a^1}{\partial v} = 0. \tag{9.37}$$

D'après (9.37) a^1 n'est fonction que de u. Il en est donc de même de $\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ et par suite S *est développable*. On peut toujours se ramener au cas où $\mathrm{F} = \mathrm{Cte}$, en particulier au cas

$$ds^2 = du\,dv.$$

(9.36) donne alors

$$a^1 + u = c \qquad (c,\ \text{constante}),$$

qui est l'équation de $\mathrm{D}(u, v)$ dans $\mathrm{R}(u, v)$.

En comparant avec (9.34), *on constate que* $\mathrm{D}(u, v)$ *est la polaire de la corde de contact associée à la sphère* $\Sigma(u, v)$ *dont le rayon* $\mathrm{R}(u, v)$ *vérifie*

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} = \frac{1}{u - c}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} = 0,$$

soit

$$\mathrm{R} = \mathrm{A}(u - c) \qquad (\mathrm{A},\ \text{constante non nulle}).$$

On obtient une deuxième famille de solutions en permutant les rôles de u et v. Si l'on opère ensuite le changement de variables $u = u' + iv'$, $v = u' - iv'$, on obtient

$$ds^2 = du'^2 + dv'^2, \qquad \mathrm{R} = \mathrm{A}(u' \pm iv' - c),$$

c'ést-à-dire exactement les solutions obtenues dans le paragraphe précédent dans le cas $\delta = 0\,(\Delta\mathrm{R} = 0)$.

Ainsi se trouve complétement démontré le résultat suivant :

Les congruences de droites attachées à une surface S, *dont les rayons sont situés dans les plans tangents de* S *et qui admettent une déformée pour laquelle tous les rayons sont dans un plan isotrope fixe, s'identifient avec les congruences de normales constituées par les polaires de cordes de contact d'une congruence de sphères admettant* S *pour déférente.*

Ces congruences de sphères sont déterminées par

$$\Delta_{22} R + K\,\Delta R = 0, \qquad \text{avec} \quad \Delta R \neq 0 \qquad \text{ou} \begin{cases} \Delta R = 0, \qquad R_{|ij} = 0, \\ (\text{R non constante}). \end{cases}$$

Cas des congruences réelles. — Si S est réelle avec un paramétrage réel et si l'on ne recherche que des congruences [D] réelles, d'après (9.34), il faut et il suffit que $\frac{1}{R} R_{|i} (i = 1, 2)$ soient réels, c'est-à-dire que R soit de la forme

$$R = l\varphi(u^i),$$

l étant une constante, $\varphi(u^i)$ une fonction réelle. Or (9.34) montre que deux fonctions $R(u^i)$ dont le rapport est constant conduisent à la même congruence $[\Delta_\Sigma]$. Pour la recherche des congruences réelles on peut donc se limiter aux solutions réelles de (9.22) et même, localement, aux solutions positives. Il suffit alors d'écarter les solutions constantes de (9.22).

Pour étudier l'extension du théorème de Darboux, il suffit donc de voir si toute congruence de normales dont les rayons sont dans les plans tangents de S est congruence des polaires des cordes de contact d'une congruence de sphères centrées sur S. D'après le paragraphe (9*b*) il existe une infinité de congruences de normales [D] dont le rayon $D(u^i)$, situé dans le plan tangent en $M(u^i)$, est parallèle au vecteur unitaire $\vec{i}(u^i)$, le champ de vecteurs unitaires tangents à S $\vec{i}(u^i)$ étant arbitrairement donné. *Examinons si parmi ces congruences de normales, il en existe qui soient des congruences de polaires de cordes de contact.* Pour cela, rapportons S à un réseau orthogonal de courbes coordonnées tel que, si u et v sont les paramètres correspondants $\vec{i}(u, v)$ soit parallèle à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$. Dans ce cas, en choisissant convenablement $\Omega(u, v)$ sur $D(u, v)$, les hypothèses sont les suivantes :

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \qquad (u^1 = u,\ u^2 = v),$$

$$\overrightarrow{M\Omega} \begin{cases} a^1, \\ a^2 = 0, \\ 0; \end{cases} \qquad \vec{i} \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = \sqrt{G}, \\ 0. \end{cases}$$

Pour que [D] soit une congruence de normales, il faut et il suffit que (9.6) par exemple soit vérifiée. Avec les symboles de Christoffel donnés au paragraphe $(7a)$, (9.6) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}a^1\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}+\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}a^1\right). \tag{9.38}$$

Pour que [D] soit congruence des polaires des cordes de contact d'une congruence de sphères, il faut et il suffit d'après (9.34), $D(u^i)$ étant ici perpendiculaire à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$, que le rayon $R(u, v)$ de la sphère $\Sigma(u, v)$ vérifie

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}=-\frac{1}{a^1},\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial v}=0.$$

R, et par suite a^1, ne sont fonctions que de u. (9.38) s'écrit alors

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right]a^1+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\frac{da^1}{du}+1\right)=0. \tag{9.39}$$

1^er^ *cas* : $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\neq 0$. — a^1 ne peut être identiquement nul et (9.39) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)}{\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}=-\frac{1}{a^1}\frac{da^1}{du}-\frac{1}{a^1}=\frac{R''(u)}{R(u)}.$$

Cette équation n'admet de solution que si le premier membre est fonction de u seul ce qui, en général, n'est pas réalisé. Il n'y a donc pas, en général, de congruences de normales dont le rayon $D(u^i)$ est parallèle au vecteur $\vec{i}(u^i)$ qui soient en outre des congruences de polaires de cordes de contact. *Ce type de congruences ne fournit donc pas toutes les congruences de normales dont les rayons sont dans les plans tangents de* S. Par suite :

Le théorème de Darboux sur les systèmes cycliques ne s'étend pas en général aux congruences de normales, mais il existe une classe particulière de congruences de normales attachées à S *dont le rayon* $D(u^i)$ *est dans le plan tangent à* S *en* $M(u^i)$, *admettant une déformée pour laquelle tous les rayons sont dans un même plan isotrope. Les congruences de cette classe sont caractérisées par la propriété remarquable d'être des congruences de polaires des cordes de contact associées à une congruence de sphères dont* S *est la déférente.*

Si le premier membre de (9.40) n'est fonction que de u, il existe des congruences de polaires de cordes de contact dont le rayon $D(u^i)$ est parallèle à $\vec{i}(u^i)$. Elles correspondent à

$$R=Af(u)+B\qquad (\text{A, B, constantes arbitraires, } A\neq 0),$$

d'où

$$a^1 = -\frac{f(u)}{f'(u)} - \frac{B}{A}\frac{1}{f'(u)},$$

$f(u)$ étant une fonction de u bien déterminée. Ces congruences dépendent d'une constante arbitraire $\frac{B}{A}$ seulement. Elles ne fournissent donc pas toutes les congruences de normales dont le rayon $D(u^i)$ est parallèle à $\vec{i}(u^i)$.

2^e *cas* : $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0$, *c'est-à-dire* $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$. $\quad a^1 = -\frac{R(u)}{R'(u)}$ ne peut pas être nul et (9.39) se réduit alors à

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\right) = 0.$$

G n'est ici fonction que de v. Par un changement de variable n'altérant pas les courbes coordonnées, on peut toujours se ramener au cas où $G = 1$. La condition ci-dessus donne alors à

$$E = \varphi(u)\,v + \psi(u) \qquad (\varphi,\ \psi,\ \text{fonctions arbitraires}).$$

D'où

$$ds^2 = [\varphi(u)\,v + \psi(u)]\,du^2 + dv^2. \tag{9.41}$$

S *est donc applicable sur une surface réglée à plan directeur isotrope*, les courbes $u =$ Cte étant les déformées des génératrices rectilignes.

Les congruences de polaires de corde de contact répondant à la question s'obtiennent d'après (9.39) en prenant pour a^1, donc pour R, une fonction arbitraire de $u (a^1 \neq 0)$.

Avec le ds^2 ci-dessus, (9.38) devient

$$\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial a^1}{\partial v} = 0.$$

Si $\frac{\partial E}{\partial v} \neq 0$, les congruences de normales dont le rayon $D(u^i)$ est parallèle à $\vec{i}(u^i)$ correspondent aussi à a^1 fonction arbitraire de u. Elles sont donc toutes congruences des polaires des cordes de contact, sauf celle correspondant à $a^1 = 0$.

Si $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, S est développable, a^1 est une fonction arbitraire de u, v. Les congruences de normales obtenues ne sont pas toutes congruences de polaires de cordes de contact.

L'étude ci-dessus fournit donc une *propriété caractéristique des surfaces isométriques aux surfaces réglées non développables à plan directeur isotrope.*

Ce sont les seules surfaces S *auxquelles on peut associer un champ de vecteurs tangents* $\vec{i}(u^i)$, *non isotropes, tel que toutes les congruences de normales dont le* *rayon* $D(u^i)$ *est parallèle à* $\vec{i}(u^i)$ *dans le plan tangent à* S *en* $M(u^i)$ *et ne passe pas par ce point soient des congruences de polaires de cordes de contact.* $\vec{i}(u^i)$ *est parallèle à la tangente en* $M(u^i)$ *à la déformée de la génératrice rectiligne passant par ce point.*

Remarquons à ce sujet que le ds^2 (9.41) fournit les cinq types d'éléments linéaires (correspondant à des formes particulières de φ, ψ) pour lesquels le problème de la déformation peut être complètement résolu.

III. — SYSTÈMES CYCLIQUES ARBITRAIREMENT DÉFORMABLES.

1. Considérations générales. — Étant donnée une congruence de cercles $C(u^i)$ attachée à S, nous étudions dans cette partie la possibilité pour cette congruence d'être un système cyclique et de conserver cette propriété dans une déformation arbitraire. Une telle congruence sera appelée un système cyclique arbitrairement déformable. L'étude des congruences de sphères fournit des exemples de tels systèmes.

Darboux a étudié deux cas particuliers de systèmes cycliques arbitrairement déformables. Tout d'abord celui où le cercle $C(u^i)$ est situé dans le plan tangent en $M(u^i)$ à S. Cette étude a conduit au remarquable théorème cité au paragraphe (II. 9.c). De tels systèmes cycliques qui peuvent se définir à l'aide des congruences de sphères admettant S pour déférente et dont la courbure de Demoulin est égale à $+1$, peuvent être attachés à une surface S quelconque.

Le deuxième cas étudié par Darboux est celui où $C(u^i)$ est orthogonal à S en $M(u^i)$. Il exige que S soit une surface isométrique à une surface de révolution.

M. Vincensini a généralisé cette étude en déterminant tous les systèmes cycliques arbitrairement déformables pour lesquels le cercle $C(u^i)$ est orthogonal au plan tangent à S en $M(u^i)$. Il existe deux types de solutions pour ce cas. Dans le premier, S doit être isométrique à une surface de révolution. Dans le deuxième, S doit avoir un ds^2 pris parmi une famille à quatre paramètres.

Mais le problème général de la recherche de tous les systèmes cycliques arbitrairement déformables restait à effectuer. Il se trouve complètement traité dans cette partie. Celle-ci commence par l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de cercles soit un système cyclique. Ensuite le problème de déformation arbitraire est mis en équation, la surface S étant rapportée au paramétrage le plus général. Le système d'équations ainsi obtenu est résolu en utilisant un paramétrage particulier de S. Enfin est examinée pour les systèmes cycliques trouvés, la possibilité de posséder une ou plusieurs trajectoires orthogonales décrites par des points attachés à S.

2. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de cercles soit un système cyclique. — *a*. Soit une congruence de cercles [C], le cercle $C(u^i)$ étant déterminé par son centre $\Omega(u^i)$, le vecteur unitaire $\vec{i}(u^i)$ de son axe et son rayon $r(u^i)$. Associons à ce cercle les vecteurs $\vec{e}_\alpha(u^i)$ ($\alpha = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$) constituant une base orthonormée $\mathcal{B}(u^i)$ telle que

$$\vec{e}_3 = \vec{i}.$$

Dans ce qui suit, les indices latins prendront les valeurs 1, 2 et les indices grecs les valeurs 1, 2, 3. Posons :

$$d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \tag{2.1}$$

$$d\Omega = \omega^\beta \vec{e}_\beta, \tag{2.2}$$

Les ω_α^β et ω^β vérifient les équations de structure du groupe des déplacements

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\lambda \wedge \omega_\lambda^\beta, \tag{2.3}$$

$$d\omega^\beta = \omega^\lambda \wedge \omega_\lambda^\beta, \tag{2.4}$$

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0 \qquad (\text{en particulier } \omega_\alpha^\alpha = 0, \text{ sans sommation}). \tag{2.5}$$

Le point courant $Q(\theta, u^i)$ du cercle $C(u^i)$ est défini par

$$\vec{Q} = \vec{\Omega} + r\vec{u} = \vec{\Omega} + r(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2),$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de $\overrightarrow{\Omega Q}$, θ l'angle polaire de $\vec{u}$ à partir de $\vec{e}_1$. La tangente en Q au cercle $C(u^i)$ a la direction du vecteur unitaire $\vec{v}$, perpendiculaire à $\vec{u}$:

$$\vec{v} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta} = -\sin\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2.$$

Les trajectoires orthogonales sont décrites par les points $P(u^i) = Q[\theta(u^i), u^i]$ correspondant aux fonctions $\theta(u^i)$, solutions de l'équation ci-dessous en remarquant que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

$$\vec{v}.d\vec{Q} = \vec{v}.d\vec{\Omega} + r\vec{v}.d\vec{u} = 0. \tag{2.6}$$

Or en utilisant (2.1), puis (2.5) :

$$d\vec{u} = \vec{v}\, d\theta + \cos\theta\, \omega_1^\beta \vec{e}_\beta + \sin\theta\, \omega_2^\beta \vec{e}_\beta,$$

$$d\vec{u} = \vec{v}\,(d\theta - \omega_2^1) + (\omega_1^3 \cos\theta + \omega_2^3 \sin\theta)\, \vec{e}_3.$$

(2.6) s'écrit alors, puisque $\vec{v}^2 = 1$, $\vec{v}.\vec{e}_3 = 0$:

$$r(d\theta - \omega_2^1) - \omega^1 \sin\theta + \omega^2 \cos\theta = 0. \tag{2.7}$$

Les fonctions $\theta(u^i)$ cherchées sont les solutions de l'équation aux différentielles totales (2.7). Pour que [C] soit un système cyclique il faut et il suffit que (2.7) soit complètement intégrable. D'après le théorème de Frobenius, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'équation déduite de (2.7) par différentiation extérieure soit vérifiée par toute solution en $d\theta$, du^i de (2.7) pour tout système de valeurs de θ, u^i. Cette équation s'écrit

$$dr \wedge (d\theta - \omega_2^1) - r\omega_2^\lambda \wedge \omega_\lambda^1 - \omega^\lambda \wedge \omega_\lambda^1 \sin\theta + \omega^\lambda \wedge \omega_\lambda^2 \cos\theta - d\theta \wedge (\omega^1 \cos\theta + \omega^2 \sin\theta) = 0,$$

après avoir utilisé (2.3) et (2.4). En utilisant ensuite (2.5) on obtient

$$(2.8)\quad (dr + \omega^1 \cos\theta + \omega^2 \sin\theta) \wedge (d\theta - \omega_2^1) + (\omega_3^1 \sin\theta - \omega_3^2 \cos\theta) \wedge \omega^3 + r\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Dans (2.7) les du^i peuvent être pris arbitrairement, il faut et il suffit que la valeur correspondante de $d\theta$ vérifie (2.8) identiquement en u^i, θ, du^i. On opère par l'intermédiaire de la forme $(d\theta - \omega_2^1)$ après multiplication par r des deux membres de (2.8). D'où la condition d'intégrabilité

$$(dr + \omega^1 \cos\theta + \omega^2 \sin\theta) \wedge (\omega^1 \sin\theta - \omega^2 \cos\theta) + r(\omega_3^1 \sin\theta - \omega_3^2 \cos\theta) \wedge \omega^3 + r^2\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = 0.)$$

Après développement elle s'écrit

$$(dr \wedge \omega^1 + r\omega_3^1 \wedge \omega^3) \sin\theta - (dr \wedge \omega^2 + r\omega_3^2 \wedge \omega^3) \cos\theta + r^2 \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 - \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

C'est une identité en θ, u^i, du^i de la forme $(\mathrm{A}\sin\theta + \mathrm{B}\cos\theta + \mathrm{C})\, du^1 \wedge du^2$. A, B, C n'étant fonctions que des u^i doivent être identiquement nuls et cela suffit. Il est équivalent d'écrire que les formes ci-dessous sont identiquement nulles en u^i et du^i. D'où la condition de complète intégrabilité de (2.7) :

$$(2.9)\qquad dr \wedge \omega^\alpha + r\omega_3^\alpha \wedge \omega^3 = 0 \qquad (\alpha = 1, 2),$$

$$(2.10)\qquad \omega^1 \wedge \omega^2 + r^2 \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0.$$

b. Mais il doit être possible de mettre la condition nécessaire et suffisante pour que [C] soit un système cyclique sous une forme qui ne fasse intervenir que les données $\Omega(u^i)$, $\vec{i}(u^i)$ et $r(u^i)$. Transformons la condition ci-dessus en remarquant que

$$\omega^\alpha = \left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k} \cdot \vec{e}_\alpha\right) du^k, \qquad \omega_3^\alpha = \left(\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial u^h} \cdot \vec{e}_\alpha\right) du^h.$$

Si θ^{hk} est la matrice antisymétrique telle que $\theta^{12} = 1$, (2.9) et (2.10) s'écrivent

$$(2.11)\qquad \theta^{hk}\left[\frac{\partial r}{\partial u^h}\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k} + r\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k} \cdot \vec{e}_3\right)\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial u^h}\right] \cdot \vec{e}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2).$$

$$(2.12)\qquad \theta^{hk}\left[\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^h} \cdot \vec{e}_1\right)\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k} \cdot \vec{e}_2\right) + r^2\left(\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial u^h} \cdot \vec{e}_1\right)\left(\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial u^k} \cdot \vec{e}_2\right)\right] = 0.$$

(2.12) se transforme à l'aide de la formule qui développe un produit scalaire de deux produits vectoriels qui peut s'écrire

$$(\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2).(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \theta^{hk}(\vec{U}_h.\vec{V})(\vec{U}_k.\vec{W}).$$

En utilisant $\vec{e}_3 = \vec{i}$ et $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_3$, *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence* [C] *soit un système cyclique s'écrit :*

$$\theta^{hk}\left[\frac{\partial r}{\partial u^h}\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k} + r\frac{\partial \vec{i}}{\partial u^h}\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k}.\vec{i}\right)\right] // \vec{i}, \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^2}, \vec{i}\right) + r^2\left(\frac{\partial \vec{i}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{i}}{\partial u^2}, \vec{i}\right) = 0. \tag{2.14}$$

c. Cas où l'image sphérique de la congruence des axes est régulière. — En prenant comme surface de départ la surface décrite par $\Omega(u^i)$ et en introduisant les notations du paragraphe (I. 4.*a*), les conditions ci-dessus s'écrivent :

$$\tau^{hk}\left(\frac{\partial r}{\partial u^h}\mu^i_{.k} + r\,\delta^i_h\,\lambda_k\right) = 0, \tag{2.15}$$

$$\text{dét}\,(\mu^i_{.j}) + r^2 = 0, \tag{2.16}$$

où τ_{hk} est le tenseur antisymétrique associé au ds^2 de la représentation sphérique et δ^i_h le symbole de Krönecker.

On peut, à partir de ces conditions, retrouver certaines propriétés des systèmes cycliques. Par exemple (2.14), ou (2.16), montre que

$$r^2 = -\overline{\Omega F_1}.\overline{\Omega F_2},$$

F_1 et F_2 étant les foyers de la congruence des axes.

3. Mise en équation générale du problème. — La congruence [C] sera attachée à la surface S par les données suivantes :

$$\underset{\mathcal{R}(u^i)}{\vec{M\Omega}}\begin{cases} a_i, \\ b; \end{cases} \qquad \underset{\mathcal{R}(u^i)}{\vec{i}}\begin{cases} \alpha_i, \\ \beta, \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \alpha_i\alpha^i + \beta^2 = 1, \qquad r(u^i).$$

a. Étude de la condition (2.13). — Si l'on pose

$$\vec{W} = \tau^{hk}\left[\frac{\partial r}{\partial u^h}\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k} + r\frac{\partial \vec{i}}{\partial u^h}\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial u^k}.\vec{i}\right)\right],$$

où τ^{hk} est le tenseur antisymétrique associé au ds^2 de S, (2.13) devient

$$\vec{W} // \vec{i}, \tag{3.1}$$

En utilisant les formules (I. 2.1), les composantes covariantes de $\vec{W}$ dans $\mathcal{R}(u^i)$ sont les suivantes :

$$\vec{W}_{\mathcal{R}(u^i)}\begin{cases} A_i = \tau^{hk}\{ r_{|h}(g_{ik}+a_{i|k}-b\eta_{ik}) \\ \qquad + r(\alpha_{i|h}-\beta\eta_{ih})[\alpha_k+\alpha^l a_{l|k}+\beta b_{|k}+(\beta a^l - b\alpha^l)\eta_{lk}]\}, \\ B = \tau^{hk}\{ r_{|h}(b_{|k}+a^l\eta_{lk}) \\ \qquad + r(\beta_{|h}+\alpha^m\eta_{mh})[\alpha_k+\alpha^l a_{l|k}+\beta b_{|k}+(\beta a^l - b\alpha^l)\eta_{lk}]\}. \end{cases}$$

On constate que $\vec{W}$ a une signification intrinsèque indépendante du paramétrage utilisé sur S.

Les termes du second degré en η_{ij} de A_i s'écrivent

$$-\tau^{hk}\eta_{ih}\eta_{lk}r\beta(\beta a^l - b\alpha^l) = -\tau_{il}\frac{\text{dét}(\eta_{ij})}{\text{dét}(g_{ij})}r\beta(\beta a^l - b\alpha^l) = \tau_{li}r\beta(\beta a^l - b\alpha^l)\,K,$$

et ceux de B

$$\tau^{hk}\eta_{mh}\eta_{lk}r\alpha^m(\beta a^l - b a^l) = \tau_{ml}r\alpha^m(\beta a^l - b\alpha^l)\,K.$$

Les composantes de $\vec{W}$ sont donc du premier degré relativement aux η_{ij}. Après des changements d'indices muets elles s'écrivent, en posant

$$H_i = \alpha_i + \alpha^l a_{l|i} + \beta b_{|i}, \qquad L^i = \beta a^i - b\alpha^i. \tag{3.2}$$

$$\vec{W}\begin{cases} A_i = \tau^{hk}[(r\beta H_h - br_{|h})\eta_{ik} + r\alpha_{i|h}L^l\eta_{lk}] \\ \qquad + \tau^{hk}[r_{|h}(g_{ik}+a_{i|k}) + r\alpha_{i|h}H_k] + \tau_{li}r\beta L^l K, \\ B = \tau^{hk}(r_{|h}a^l - r\alpha^l H_h + rL^l\beta_{|h})\eta_{lk} \\ \qquad + \tau^{hk}(r_{|h}b_{|k} + r\beta_{|h}H_k) + \tau_{ml}r\alpha^m L^l K. \end{cases} \tag{3.3}$$

La condition (3.1) s'exprime par deux des équations suivantes convenablement choisies.

$$\tau^{ij}A_i\alpha_j = 0, \tag{3.4}$$

$$\beta A_i - \alpha_i B = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{3.5}$$

Ces équations sont du premier degré en η_{ij}.

b. Étude de la condition (2.14). — On peut substituer aux produits mixtes de (2.14) les déterminants des composantes covariantes des vecteurs dans la base $\mathcal{R}(u^i)$ qui leur sont proportionnels.

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{i|j} - \beta\eta_{ij} & \alpha_i \\ \beta_{|j} + \alpha^l\eta_{lj} & \beta \end{vmatrix}, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} g_{ij} + a_{i|j} - b\eta_{ij} & \alpha_i \\ b_{|j} + a^l\eta_{lj} & \beta \end{vmatrix},$$

$i = 1, 2$ étant l'indice des deux premières lignes; $j = 1, 2$ celui des deux premières colonnes.

En développant suivant les éléments de la troisième colonne.

$$\delta_1 = g\tau^{ij}\tau^{hk}\alpha_i(\alpha_{j|h} - \beta\eta_{jh})(\beta_{|k} + \alpha^l\eta_{lk}) + \beta\,\text{dét}(\alpha_{ij} - \beta\eta_{ij}),$$

or

$$\begin{aligned}\text{dét}(\alpha_{i|j} - \beta\eta_{ij}) &= \frac{1}{2}\tau^{ij}\tau^{hk}(\alpha_{i|k} - \beta\eta_{ih})(\alpha_{j|k} - \beta\eta_{jk}) \\ &= \text{dét}(\alpha_{i|j}) + \beta^2\,\text{dét}(\eta_{ij}) - \beta g\tau^{ij}\tau^{hk}\alpha_{i|h}\eta_{jk}.\end{aligned}$$

Les termes du second degré en η_{ij} dans δ_1 sont

$$-g\tau^{ij}\tau^{hk}\eta_{jh}\eta_{lk}\beta\alpha_i\alpha^l+\beta^3\,\text{dét}(\eta_{ij})=\beta(\alpha_i\alpha^i+\beta^2)\,\text{dét}(\eta_{ij})=\beta g\mathrm{K}.$$

D'où, en faisant des changements d'indices et en introduisant l'invariant $\frac{\delta_1}{g}$,

$$\frac{\delta^1}{g}=\tau^{hk}[\tau^{ij}\beta(\beta\alpha_{i|k}-\alpha_i\beta_{|k})+\tau^{lm}\alpha_m\alpha^j\alpha_{lk}]\,\eta_{jh}$$
$$+\tau^{ij}\tau^{hk}\alpha_i\alpha_{j|h}\beta_{|k}+\frac{\beta}{g}\,\text{dét}(\alpha_{i|j})+\beta\mathrm{K}.$$

En utilisant la relation $\tau^{ij}\tau_{ip}=g^j_p$ on peut écrire

$$\frac{\delta_1}{g}=\tau^{hk}\tau^{ij}\mathrm{A}_{ik}\eta_{jh}+\tau^{ij}\tau^{hk}\alpha_i\alpha_{j|h}\beta_{|k}+\frac{\beta}{g}\,\text{dét}(\alpha_{i|j})+\beta\mathrm{K}, \tag{3.6}$$

avec

$$\mathrm{A}_{ik}=\beta(\beta\alpha_{i|k}-\alpha_i\beta_{|k})+\tau_{ip}\tau^{lm}\alpha_m\alpha^p\alpha_{l|k}.$$

Si l'on tient compte de la relation $\alpha^i\alpha_i+\beta^2=1$ et de $\alpha^i\alpha_{i|j}+\beta\beta_{|j}=0$ qui s'en déduit et si l'on explicite les indices. on obtient

$$\mathrm{A}_{ik}=\alpha_{i|k}. \tag{3.7}$$

Un calcul analogue s'opère pour δ_2. Les termes du second degré en η_{ij} sont

$$-g\tau^{ij}\tau^{hk}\eta_{jh}\eta_{lk}b\,\alpha_i a^l+\beta b^2\,\text{dét}(\eta_{ij})=b(\alpha_i a^i+\beta b)\,g\mathrm{K}.$$

Comme pour δ_1,

$$\frac{1}{g}\delta_2=\tau^{hk}\tau^{ij}\mathrm{B}_{ik}\eta_{jh}+\tau^{ij}\tau^{hk}\alpha_i(g_{jh}+a_{j|h})\,b_{|k}+ \tag{3.8}$$
$$+\frac{\beta}{g}\,\text{dét}(g_{ij}+a_{i|j})+b(\alpha_i a^i+\beta b)\,\mathrm{K},$$

avec

$$\mathrm{B}_{ik}=b[\beta(g_{ik}+a_{i|k})-\alpha_i b_{|k}]+\tau_{ip}\tau^{lm}\alpha_m a^p(g_{lk}+a_{l|k}).$$

Si l'on pose

$$\mathrm{U}=\alpha_i a^i+\beta b=\vec{i}\;\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \tag{3.9}$$

$$2\mathrm{V}=a_i a^i+b^2=\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}^2, \tag{3.10}$$

et si l'on explicite les indices on obtient

$$\mathrm{B}_{ik}=(a_{i|k}+g_{ik})\,\mathrm{U}-\alpha_i(\mathrm{V}_{|k}+a_k). \tag{3.11}$$

De plus,

$$\tau^{ij}\tau^{hk}\alpha_i g_{jh}b_{|k}=-\alpha^i b_{|i}$$

et

$$\frac{1}{g}\,\text{dét}(g_{ij}+a_{i|j})=1+\frac{1}{g}\,\text{dét}(a_{i|j})+\tau^{ij}\tau^{hk}g_{ih}a_{j|k}=1+\frac{1}{g}\,\text{dét}(a_{i|j})+a^i{}_{|i}.$$

L'équation (2.14) s'écrit $r^2\delta_1+\delta_2=0$, c'est-à-dire, après des modifications d'indices,

$$\tau^{ih}\tau^{jk}C_{ij}\eta_{hk}+\tau^{ih}\tau^{jk}(a_{h|j}b_{|k}+r^2\alpha_{h|j}\beta_{|k})\,\alpha_i \tag{3.9}$$
$$+\beta\left[1+\frac{1}{g}\,\text{dét}(a_{i|j})+\frac{r^2}{g}\,\text{dét}(\alpha_{i|j})\right]+\beta a^l{}_{|l}-\alpha^l b_{|l}+(b\mathrm{U}+\beta r^2)\,\mathrm{K}=0,$$

avec

$$C_{ij}=\alpha_i(\mathrm{V}_{|j}+a_j)-(a_{i|j}+g_{ij})\,\mathrm{U}-\alpha_{i|j}r^2. \tag{3.10}$$

c. Systèmes cycliques arbitrairement déformables. — La condition nécessaire et suffisante pour que [C] soit un système cyclique est donnée par trois équations : deux parmi (3.4) et (3.5) $i=1, 2$ et l'équation (3.9). Dans ces équations les η_{ij} n'interviennent qu'au premier degré.

Pour que [C], supposée attachée à S, conserve cette propriété dans une déformation arbitraire, il faut et il suffit que les coefficients de η_{11}, η_{12}, η_{22} et le terme indépendant des η_{ij} dans ces équations soient identiquement nuls relativement aux u^i.

4. Choix d'un paramétrage particulier. — *a.* Nous rapportons la surface S aux paramètres $u^1=u$, $u^2=v$ tels que le réseau des courbes coordonnées soit orthogonal, la tangente en $\mathrm{M}(u, v)$ à la courbe $u=\mathrm{Cte}$ étant parallèle à la projection orthogonale de $\vec{i}(u, v)$ sur le plan tangent à S en $\mathrm{M}(u, v)$. Ce paramétrage est invariablement lié au paramétrage initial car $\vec{i}(u^i)$ est attaché à S. Dans ce cas,

$$g_{11}=\mathrm{E}, \qquad g_{12}=g_{21}=0, \qquad g_{22}=\mathrm{G}, \qquad \alpha_1=\alpha^1=0. \tag{4.1}$$

La condition (2.13) se traduit par

$$\mathrm{A}_1=0, \tag{4.2}$$
$$\beta\mathrm{A}_2-\alpha_2\mathrm{B}=0. \tag{4.3}$$

En écrivant que les coefficients des polynomes du premier degré en η_{11}, η_{22}, η_{12} des premiers membres de (4.2), (4.3), (3.9) sont nuls, on obtient les douze équations dont dépend la recherche des systèmes cycliques arbitrairement déformables.

D'après (4.2),

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^\circ & br_{|2}-r(\beta\mathrm{H}_2+\alpha_{1|2}\mathrm{L}^1)=0; \\ 2^\circ & r\alpha_{1|1}\mathrm{L}^2=0; \\ 3^\circ & r(\beta\mathrm{H}_1+\alpha_{1|1}\mathrm{L}^1-\alpha_{1|2}\mathrm{L}^2)-br_{|1}=0; \\ 4^\circ & \theta^{hk}[r_{|h}a_{1|k}+r\alpha_{1|h}\mathrm{H}_k]-\mathrm{E}r_{|2}-\mathrm{EG}r\beta\mathrm{L}^2\mathrm{K}=0 \end{array}\right. \tag{4.4}$$

(θ^{hk} antisymétrique, $\theta^{12}=1$).

D'après (4.3),

$$
\begin{gathered}
r(\alpha_2\beta_{|2}-\beta\alpha_{2|2})\,\mathrm{L}^1+r_{|2}\alpha_2 a^1=0,\\
r(\beta\alpha_{2|1}-\alpha_2\beta_{|1})\,\mathrm{L}^2+r(\alpha_2\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{H}_1-r_{|1}(\alpha_2 a^2+\beta b)=0,\\
r(\beta\alpha_{2|1}-\alpha_2\beta_{|1})\,\mathrm{L}^1-r(\beta\alpha_{2|2}-\alpha_2\beta_{|2})\,\mathrm{L}^2-r(\alpha_2\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{H}_2+r_{|2}(\alpha_2 a^2+\beta b)-r_{|1}a^1\alpha_2=0,\\
\theta^{hk}[r_{|h}(\beta a_{2|k}-\alpha_2 b_{|k})+r(\beta\alpha_{2|h}-\alpha_2\beta_{|h})\,\mathrm{H}_k]+r_{|1}\mathrm{G}\beta+r\mathrm{EG}(\alpha_2\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{L}^1 k=0.
\end{gathered}
$$

Les relations $\alpha^i\alpha_i+\beta^2=1$, $\alpha^i\alpha_{i|j}+\beta\beta_{|j}=0$ avec $\alpha_1=\alpha^1=0$ entraînent en particulier,

$$
\alpha^2(\beta\alpha_{2|i}-\alpha_2\beta_{|i})=-\beta_{|i},\qquad \beta(\beta\alpha_{2|i}-\alpha_2\beta_{|i})=\alpha_{2|i}\qquad (i=1,\ 2).
$$

Ceci permet de simplifier les quatre équations ci-dessus qui peuvent s'écrire

$$
(4.5)\quad \begin{cases}
1^\circ & (r_{|2}\alpha_2-\alpha_{2|2}r)\,a^1=0;\\
2^\circ & r\mathrm{U}_{|1}-\mathrm{U}r_{|1}-r\alpha_{1|1}a^1=0;\\
3^\circ & r_{|2}\mathrm{U}-r\mathrm{U}_{|2}-r\alpha_2+(r\alpha_{1|2}-\alpha_2 r_{|1}+r\alpha_{2|1})\,a^1=0;\\
4^\circ & \theta^{hk}[r_{|h}(\beta a_{2|k}-\alpha_2 b_{|k})+r(\beta\alpha_{2|h}-\alpha_2\beta_{|h})\,\mathrm{H}_k]+r_{|1}\mathrm{G}\beta+r\mathrm{EGL}^1\mathrm{K}=0.
\end{cases}
$$

D'après (3.9), pour que les coefficients de η_{11}, η_{12}, η_{22} soient nuls, il faut et il suffit que $\mathcal{C}^{hk}=\tau^{ih}\tau^{jk}\mathrm{C}_{ij}$ soit antisymétrique, donc que C_{ij} le soit. D'où les équations

$$
(4.6)\quad \begin{cases}
\left.\begin{aligned}
&1^\circ\quad (a_{1|1}+\mathrm{E})\,\mathrm{U}+r^2\alpha_{1|1}=0\\
&2^\circ\quad (a_{2|2}+\mathrm{G})\,\mathrm{U}-\alpha_2(\mathrm{V}_{|2}+a_2)+r^2\alpha_{2|2}=0\\
&3^\circ\quad (a_{1|2}+a_{2|1})\,\mathrm{U}-\alpha_2(\mathrm{V}_{|1}+a_1)+r^2(\alpha_{1|2}+\alpha_{2|1})=0
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{C}_{ij}\ \text{antisymétrique});\\
4^\circ\quad \theta^{hk}(a_{1|k}b_{|h}+r^2\alpha_{1|k}\beta_{|h})\,\alpha_2+\beta[\mathrm{EG}+\mathrm{dét}(a_{ij})+r^2\,\mathrm{dét}(\alpha_{i|j})]\\
\qquad\qquad +\mathrm{EG}(\beta a^l{}_{|l}-\alpha^2 b_{|2})+(b\mathrm{U}+\beta r^2)\,\mathrm{EGK}=0.
\end{cases}
$$

b. Introduction de repères locaux orthonormés. — Nous attachons au repère $\mathcal{R}(u^i)$ les deux repères orthonormés suivants :

$\mathrm{M}xyz$ dont les vecteurs unitaires sont $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial u}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial v}$, $\vec{n}$. D'après les hypothèses générales, faites dans l'introduction, ce trièdre orienté est direct.

$\mathrm{M}\xi\eta\zeta$ tel qu'on ait :

— $\overrightarrow{\mathrm{M}\xi}$ confondu avec $\overrightarrow{\mathrm{M}x}$;

— $\overrightarrow{\mathrm{M}\zeta}$ admettant $\vec{i}$ comme vecteur unitaire;

— $\overrightarrow{\mathrm{M}\eta}$ tel que le trièdre orienté $\mathrm{M}\xi\eta\zeta$ soit direct.

Nous posons $\theta=(\overrightarrow{\mathrm{M}z},\ \overrightarrow{\mathrm{M}\zeta})$ autour de $\overrightarrow{\mathrm{M}x}$ et nous introduisons les composantes suivantes

$$
\underset{\mathrm{M}\xi\eta\zeta}{\vec{i}}\begin{cases}0,\\0,\\1;\end{cases}\quad
\underset{\mathrm{M}xyz}{}\begin{cases}0,\\-\sin\theta,\\\cos\theta;\end{cases}\qquad
\underset{\mathrm{M}\xi\eta\zeta}{\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}}\begin{cases}\lambda,\\\mu,\\\nu;\end{cases}\quad
\underset{\mathrm{M}xyz}{}\begin{cases}\lambda,\\\sigma,\\\omega,\end{cases}
$$

avec les relations

$$\mu = \sigma \cos\theta + \omega \sin\theta, \qquad \nu = -\sigma \sin\theta + \omega\cos\theta, \tag{4.7}$$

$$\sigma = \mu \cos\theta - \nu \sin\theta, \qquad \omega = \mu \sin\theta + \nu\cos\theta. \tag{4.8}$$

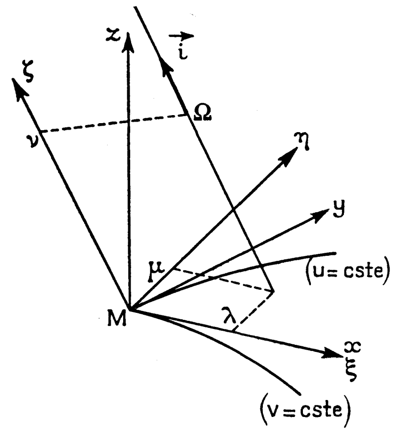

Fig. 2.

Les composantes dans $\mathcal{R}(u^i)$ sont alors données par :

$$\underset{\mathcal{R}}{\vec{i}}\begin{cases} \alpha_1 = 0, & \alpha^1 = 0;\\ \alpha_2 = -\sqrt{G}\sin\theta, & \alpha^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta;\\ \beta = \cos\theta, & \beta = \cos\theta,\end{cases}$$

$$\overrightarrow{M\Omega}\begin{cases} a_1 = \sqrt{E}\lambda, & a^1 = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\lambda;\\ a_2 = \sqrt{G}\sigma, & a^2 = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\sigma;\\ b = \omega, & b = \omega.\end{cases}$$

Les éléments choisis pour déterminer les congruences des cercles [C] qui entreront dans les équations définitives sont :

$$\theta, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad r.$$

Les inconnues du problème sont donc au nombre de sept : les cinq éléments ci-dessus et E, G. Il y a douze équations, mais les exemples de solutions cités dans la partie I montrent que le système admet des solutions.

c. Calculs des éléments intervenant dans les équations.

1. U, V.

Grâce à leur interprétation géométrique (3.9) et (3.10), ils se calculent simplement dans $M\xi\eta\zeta$

$$U = \nu,$$

$$V = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

2. L^i.

$$L^1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\lambda\cos\theta, \qquad L^2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\mu.$$

3. $\alpha_{i|j}$.

En utilisant les symboles de Christoffel de première espèce relatifs au ds^2 de S,

$$[11,1] = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad [12,1] = [21,1] = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad [22,1] = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$[11,2] = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad [12,2] = [21,2] = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad [22,2] = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},$$

on trouve

$$\alpha_{1|1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\sin\theta, \qquad \alpha_{2|1} = -\sqrt{G}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$\alpha_{1|2} = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin\theta, \qquad \alpha_{2|2} = -\sqrt{G}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

$$\text{dét}(\alpha_{i|j}) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right).$$

4. H_i.

On peut le déduire des résultats ci-dessus en remarquant que

$$H_i = \alpha_i + U_{|i} - a^l\alpha_{l|i} - b\beta_{|i}.$$

Un calcul simple donne

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda\sin\theta + \mu\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\nu}{\partial u},$$

$$H_2 = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda\sin\theta + \mu\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\nu}{\partial v} - \sqrt{G}\sin\theta.$$

5. $a_{i|j}$.

A l'aide des symboles de Christoffel de première espèce,

$$a_{1|1} = \sqrt{E}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\sigma, \qquad a_{1|2} = \sqrt{E}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\sigma,$$

$$a_{2|1} = \sqrt{G}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E}}\lambda, \qquad a_{2|2} = \sqrt{G}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\lambda,$$

$$\text{dét}(a_{i|j}) = \sqrt{EG}\frac{D(\lambda,\sigma)}{D(u,v)} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right).$$

6. K.

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

7. $\theta^{hk}r_{|h}a_{1|k}$.

$$\theta^{hk}r_{|h}a_{1|k} = \sqrt{E}\frac{D(r,\lambda)}{D(u,v)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial v}\right)\sigma.$$

8. $\theta^{hk}\alpha_{1|h}H_k$.

$$\theta^{hk}\alpha_{1|h}H_k = -\frac{\sin\theta}{2\sqrt{G}}\left[\mu\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\nu}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\nu}{\partial v}\right] + \frac{1}{2}\sin^2\theta\frac{\partial E}{\partial v}.$$

9. $\theta^{hk}[r_{|h}(\beta a_{2|k}-\alpha_2 b_{|k})]$.

$$\beta a_{2|1}-\alpha_2 b_{|1}=\sqrt{G}\left(\cos\theta\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\sin\theta\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda\cos\theta=\sqrt{G}\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda\cos\theta,$$

de même,

$$\beta a_{2|2}-\alpha_2 b_{|2}=\sqrt{G}\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}-\nu\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}\lambda\cos\theta,$$

$$\theta^{hk}[r_{|h}(\beta a_{2|k}-\alpha_2 b_{|k})]=\sqrt{G}\frac{D(r,\mu)}{D(u,v)}-\nu\frac{D(r,\theta)}{D(u,v)}+\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial v}\right)\lambda\cos\theta.$$

10. $\theta^{hk}[(\beta\alpha_{2|h}-\alpha_2\beta_{|h})H_k]$.

$$\beta\alpha_{2|h}-\alpha_2\beta_{|h}=-\sqrt{G}\frac{\partial\theta}{\partial u^h},$$

$$\theta^{hk}(\beta\alpha_{2|h}-\alpha_2\beta_{|h})H_k=\sqrt{G}\frac{D(\nu,\theta)}{D(u,v)}+\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\lambda\sin\theta+G\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

11. $\theta^{hk}a_{1|k}b_{|h}$.

$$\theta^{hk}b_{|h}a_{1|k}=\sqrt{E}\frac{D(\omega,\lambda)}{D(u,v)}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)\sigma.$$

12. $\theta^{hk}\beta_{|h}\alpha_{1|k}$.

$$\theta^{hk}\beta_{|h}\alpha_{1|k}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}\sin^2\theta\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right).$$

13. $\beta a^l_{\ |l}-\alpha^2 b_{|2}$.

$$\beta a^l_{\ |l}-\alpha^2 b_{|2}=\frac{\beta}{E}a_{1|1}+\frac{1}{G}(\beta a_{2|2}-\alpha_2 b_{|2}),$$

d'après 9,

$$=\cos\theta\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\sigma\right)+\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}-\nu\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\lambda\cos\theta.$$

14. D'après 5 et 11 et en tenant compte de (4.7) et (4.8), on obtient pour l'expression ci-dessous, tirée de (4.6.4) la forme suivante avec les inconnues définitives

$$\begin{aligned}
&\theta^{hk}a_{1|k}b_{|h}\alpha_2+\beta\,\text{dét}(a_{i|j})\\
&\quad=\sqrt{EG}\left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}-\nu\frac{D(\lambda,\theta)}{D(u,v)}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\cos\theta\left[\frac{\partial G}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)+\frac{\partial E}{\partial v}\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)\right]\\
&\quad=-\frac{1}{2}\cos\theta\mu\nu\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\frac{1}{2}\sin\theta\nu^2\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\sin\theta\nu\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

5. Équations du problème. — *a.* En utilisant les expressions ci-dessus et en achevant l'introduction des inconnues définitives θ, λ, μ, ν, r, E, G dans les équations (4.4), (4.5) et (4.6), on obtient le système suivant de douze équations

$$\cos\theta\left(r\frac{\partial\nu}{\partial v}-\nu\frac{\partial r}{\partial v}\right)+\mu\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}-\sin\theta\frac{\partial r}{\partial v}\right)-r\sqrt{\mathrm{G}}\sin\theta\cos\theta=0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\mu\sin\theta=0, \tag{5.2}$$

$$\cos\theta\left(r\frac{\partial\nu}{\partial u}-\nu\frac{\partial r}{\partial u}\right)+\mu\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}-\sin\theta\frac{\partial r}{\partial u}\right)-\frac{1}{2\mathrm{G}}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}r\mu\sin\theta=0 \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}&2\sqrt{\mathrm{EG}}\left[\frac{\mathrm{D}(r,\lambda)}{\mathrm{D}(u,v)}+\sin^2\theta\, r\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}-\sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial r}{\partial v}\right]\\&\quad-r\sin\theta\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial\nu}{\partial u}+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial\nu}{\partial v}\right)-r\mu\sin\theta\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\\&\quad-(\mu\cos\theta-\nu\sin\theta)\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial v}\right)-2\,\mathrm{EG}\,r\mu\cos\theta\,\mathrm{K}=0,\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}-\sin\theta\frac{\partial r}{\partial v}\right)\lambda=0, \tag{5.5}$$

$$r\frac{\partial\nu}{\partial u}-\nu\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}r\lambda\sin\theta=0, \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}&\lambda\sqrt{\mathrm{G}}\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}-\sin\theta\frac{\partial r}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}r\sin\theta\right)\\&\qquad+\sqrt{\mathrm{E}}\left(r\frac{\partial\nu}{\partial v}-\nu\frac{\partial r}{\partial v}\right)-\sqrt{\mathrm{EG}}\,r\sin\theta=0,\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}(r,\mu)}{\mathrm{D}(u,v)}-\nu\frac{\mathrm{D}(r,\theta)}{\mathrm{D}(u,v)}+r\frac{\mathrm{D}(\nu,\theta)}{\mathrm{D}(u,v)}\\&\quad+\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\lambda+\sqrt{\mathrm{G}}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial r}{\partial u}+r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\lambda\left(\cos\theta\frac{\partial r}{\partial v}+r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\sqrt{\mathrm{EG}}\,r\lambda\cos\theta\,\mathrm{K}=0,\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}[\sin\theta(r^2+\nu^2)-\mu\nu\cos\theta]-\sqrt{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\sqrt{\mathrm{E}}\right)\nu=0, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}&(\mu\sin\theta+\nu\cos\theta)\left(\sqrt{\mathrm{G}}\cos\theta+\frac{\partial\mu}{\partial v}-\nu\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\\&\qquad+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\lambda\nu-r^2\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}+\sin\theta\,\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0,\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{\mathrm{G}}(\mu\sin\theta+\nu\cos\theta)\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}-\nu\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}[(r^2+\nu^2)\sin\theta-\mu\nu\cos\theta]\\&\quad-r^2\sqrt{\mathrm{G}}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}+\sqrt{\mathrm{G}}\sin\theta\lambda\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\sqrt{\mathrm{E}}\right)+\left(\sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\lambda\right)\nu=0,\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$(5.12)\quad \frac{1}{2}[(r^2+\nu^2)\sin\theta-\mu\nu\cos\theta]\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\nu\sin\theta\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)+\sqrt{EG}\left[\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}-\nu\frac{D(\lambda,\theta)}{D(u,v)}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\cos\theta\left[\frac{\partial G}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)+\frac{\partial E}{\partial v}\left(\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)\right]$$
$$+E\sqrt{G}\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}-\nu\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\cos\theta\, EG$$
$$+\sqrt{EG}\cos\theta\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\lambda)+\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}(\mu\cos\theta-\nu\sin\theta)\right]$$
$$+[(r^2+\nu^2)\cos\theta+\mu\nu\sin\theta]\,EGK=0.$$

b. La considération de (5.2) et (5.5) permet de diviser l'étude en les cinq cas suivants :

$$1:\quad \theta=0,$$

On peut toujours ramener à cette forme la condition $\sin\theta=0$ en orientant convenablement le vecteur unitaire $\vec{i}$ de l'axe du cercle $C(u, v)$

$$2:\quad \begin{cases}\mu=0,\\ r=f(u)\sin\theta,\end{cases}$$

$f(u)$ étant une fonction arbitraire non identiquement nulle. Nous écarterons aussi le cas où $\sin\theta$ est identiquement nul car r serait identiquement nul, ce qui ne présente pas d'intérêt dans le domaine réel.

$$3:\quad \begin{cases}\mu=0,\\ \lambda=0;\end{cases}$$

$$4:\quad \begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial v}=0\\ r=f(u)\sin\theta\end{cases}$$

(mêmes remarques que pour le 2);

$$5:\quad \begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial v}=0,\\ \lambda=0.\end{cases}$$

Dans chacune de ces hypothèses (5.2) et (5.5) sont vérifiées. On peut d'ailleurs dans les cas 3 et 5 supposer que $\sin\theta$ n'est pas identiquement nul puisque cette éventualité fait l'objet du cas 1.

6. Étude du cas 1. — C'est le cas où le plan du cercle $C(u, v)$ est parallèle au plan tangent à S en $M(u, v)$ au sens large.

a. Quand $\theta = 0$ les équations (5.1), (5.3), (5.9), (5.10) et (5.11) s'écrivent respectivement :

$$r\frac{\partial\nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial r}{\partial v} = 0, \tag{6.1}$$

$$r\frac{\partial\nu}{\partial u} - \nu\frac{\partial r}{\partial u} = 0, \tag{6.2}$$

$$\lambda\left[\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mu + \sqrt{G}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \sqrt{E}\right)\right] = 0, \tag{6.3}$$

$$\nu\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda\right) = 0, \tag{6.4}$$

$$\nu\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu - \sqrt{G}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda - \sqrt{E}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) = 0; \tag{6.5}$$

(5.6) et (5.7) sont respectivement identiques à (6.2) et (6.1).

Deux cas se présentent d'après ces cinq équations :

1_1 : $\nu = 0$ pour lequel elles sont toutes vérifiées;
1_2 : $\nu \not\equiv 0$.

b. Étude du cas 1_1. — C'est le cas des systèmes cycliques de Ribaucour. $\theta = 0$, $\nu = 0$ entraînent en effet que $C(u, v)$ est situé dans le plan tangent à S en $M(u, v)$.

1° S *n'est pas développable.* — Le problème se ramène alors à la résolution de la deuxième équation de l'applicabilité

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + K(\Delta\rho - 2\rho) + 1 = 0, \tag{6.6}$$

d'après un résultat connu qui se rattache au théorème de Darboux, [paragraphe (I.6)]. *A toute solution de* (6.6) *on associe la congruence des sphères* $\Sigma(u^i)$, *centrées en* $M(u^i)$ *et dont les rayons* $R(u^i)$ *vérifient* $R^2 = 2\rho$. *Le cercle* $C(u^i)$ *du système cyclique correspondant est orthogonal à* $\Sigma(u^i)$ *et admet pour axe la corde des contacts; c'est le cercle* $\Gamma_\Sigma(u^i)$ *avec les notations de la partie* I.

Ce résultat peut se déduire des équations en paramétrage le plus général. On a alors $\alpha_i = 0 (i = 1, 2)$, $\beta = 1$, $b = 0$. La condition (3.1) se réduit ici à

$$A_i = 0,$$

c'est-à-dire d'après (3.3),

$$\tau^{hk} r_{|h}(g_{ik} + a_{i|k}) = \tau_{ih} r a^h K \qquad (i = 1, 2). \tag{6.7}$$

(3.9) s'écrit

$$\frac{1}{g}\,\text{dét}(g_{ij} + a_{i|j}) = -r^2 K. \tag{6.8}$$

On résout (6.7) par rapport aux $r_{|h}$ en opérant la multiplication contractée par le tenseur $\tau^{ji}(g_{jl}+a_{j|l})$ dont la matrice est régulière d'après (6.8) car $K \neq 0$. (6.7) est équivalent à

$$\frac{1}{g}\,\text{dét}(g_{ij}+a_{i|j})\,r_{|l} = -rKa^j(g_{jl}+a_{j|l})$$

et en tenant compte de (6.8),

$$a_l = rr_{|l} - a^j a_{j|l}. \tag{6.9}$$

Si l'on pose

$$a^j a_j - r^2 = 2\rho, \tag{6.10}$$

(6.9) et (6.10) équivalent à

$$a_l = -\rho_{|l}, \qquad r^2 = \Delta\rho - 2\rho. \tag{6.11}$$

En substituant dans (6.8), on obtient la deuxième équation de l'applicabilité. (6.10) et (6.11) fournissent immédiatement l'interprétation géométrique.

2° S *est développable*. — $\vec{i}(u^i)$ étant perpendiculaire au plan tangent en $M(u^i)$, tout réseau orthogonal de courbes coordonnées satisfait aux conditions du paragraphe 4 qui conduisent aux équations du paragraphe 5. Nous pouvons utiliser ces équations, S étant rapportée au ds^2 cartésien du plan,

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Le système se réduit aux équations suivantes tirées de (5.4), (5.8), (5.12), où K est nul.

$$\frac{D(\lambda+u,\, r)}{D(u,\, v)} = 0,$$

$$\frac{D(\mu+v,\, r)}{D(u,\, v)} = 0,$$

$$\frac{D(\lambda+u,\, \mu+v)}{D(u,\, v)} = 0.$$

D'où la solution générale

$$\lambda + u = f[\varphi(u, v)], \qquad \mu + v = g[\varphi(u, v)], \qquad r = h[\varphi(u, v)], \tag{6.12}$$

f, g, h fonctions arbitraires d'une variable, φ fonction arbitraire de deux variables.

Le système cyclique correspondant, attaché au plan S′ rapporté aux axes orthonormés Ouv, se réduit à une famille de cercles à un paramètre. Les coordonnées du centre et le rayon étant donnés par :

$$\lambda + u = f(t), \qquad \mu + v = g(t), \qquad r = h(t) \qquad \text{avec} \quad t = \varphi(u, v).$$

Par déformation arbitraire, on obtient des systèmes cycliques dont les centres des cercles décrivent en général une surface moulure. *Ils sont engendrés par une* *famille plane à un paramètre de cercles lorsque son plan, supposé réalisé matériellement, roule sans glisser sur la développable* S, *les cercles lui étant invariablement liés.*

3° *Systèmes cycliques de rayon constant.* — Dans le cas où S n'est pas développable ($K \neq 0$), il est bien connu que le rayon ne peut être constant que si le centre de $C(u^i)$ est en $M(u^i)$ [d'après (6.7)] et si S est une surface à courbure totale constante (négative dans le domaine réel).

$$K = -\frac{1}{r^2}, \qquad \text{d'après (6.8).}$$

Dans le cas où S est développable il existe une infinité de systèmes cycliques de rayon constant répondant à la question. Il suffit de prendre une fonction h constante. Le cercle $C(u^i)$ n'est pas en général centré en $M(u^i)$.

b. Étude du cas 1_2.

$$\theta = 0, \qquad \nu \neq 0,$$

1° C'est le cas où le plan du cercle $C(u, v)$ est parallèle au plan tangent en $M(u, v)$ à S. Les équations (6.1), (6.2) donnent

$$\nu = ar \qquad (a, \text{ constante non nulle}). \tag{6.13}$$

D'après la remarque du début du paragraphe (6.*b*.2°) on peut imposer une condition supplémentaire au réseau orthogonal des lignes coordonnées. Par exemple, on peut supposer que la tangente en $M(u, v)$ à la courbe ($u = \text{Cte}$) coupe l'axe du cercle $C(u, v)$. Dans ce cas,

$$\lambda = 0. \tag{6.14}$$

(6.3), (6.4), (6.5) s'écrivent alors

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\mu + \sqrt{EG} = 0, \tag{6.15}$$

$$\sqrt{G} + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0, \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\mu - \sqrt{G}\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0. \tag{6.17}$$

En tenant compte de ces équations, les trois dernières équations non encore transformées du système 5 : (5.4), (5.8), (5.12) s'écrivent :

$$\mu\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} + 2EGrK\right) = 0, \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0, \tag{6.19}$$

$$\mu\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + 2(r^2 + \nu^2)EGK = 0. \tag{6.20}$$

(6.19) conduit à deux possibilités. Il en est de même pour (6.18), mais d'après (6.16) μ ne peut être identiquement nul. D'où les deux cas

$$1_{21}: \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0,$$

$$1_{22}: \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 0.$$

2° *Étude du cas* $1_{2.1}$ (μ est fonction de v seul). — (6.17) montre que G est fonction de v seul. Par un changement de variables n'altérant pas le réseau des courbes coordonnées $\left(\sqrt{G}\, dv = dV\right)$, on peut se ramener au cas où

$$G = 1. \tag{6.21}$$

(6.16) et l'hypothèse de $1_{2.1}$ donnent

$$\mu = -v. \tag{6.22}$$

On peut toujours, sans modifier les conditions précédentes, se ramener au cas où la constante d'intégration est nulle. (6.15) s'écrit alors

$$\sqrt{E} - v\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$E = f^2(u)v^2.$$

Par un changement de variables on peut, sans modifier les conditions précédente, $[f(u)\,du = dU]$, se ramener à

$$E = v^2. \tag{6.23}$$

S admet alors le ds^2 du plan rapporté à des coordonnées polaires, c'est une développable et $K = 0$. On vérifie que (6.18) et (6.20) sont satisfaites quelle que soit la fonction $r(u, v)$.

D'où la solution générale du cas $1_{2.1}$:

$$ds^2 = v^2\, du^2 + dv^2,$$

$$\theta = 0, \qquad \lambda = 0, \qquad \mu = -v, \qquad \nu = ar$$

(r, fonction arbitraire de u, v; a, constante arbitraire).

On constate que la solution ci-dessus convient, même si a est nulle. Elle coïncide alors avec une solution 1_1.

Toute développable admet une infinité de solutions du type $1_{2.1}$. En effet, elle admet une infinité de paramétrages conduisant au ds^2 utilisé et pour chacun d'eux $r(u, v)$ et a sont arbitraires.

Interprétation géométrique. — Étudions le système cyclique correspondant à une solution de $1_{2.1}$ et attaché au plan S′ rapporté à un système de coordonnées polaires de pôle O; (u, angle polaire, v, rayon vecteur). Son ds^2 est en effet celui de la solution trouvée.

$\lambda = 0$, $\mu = -v$ montrent que tous les cercles du système cyclique [C′] ont le même axe qui est la perpendiculaire en O au plan S′ : Oζ.

$\nu = ar$ montre que tous les cercles C′ sont sur un cône de révolution fixe de sommet O, d'axe Oζ ou exceptionnellement dans le plan S′ si $a = 0$.

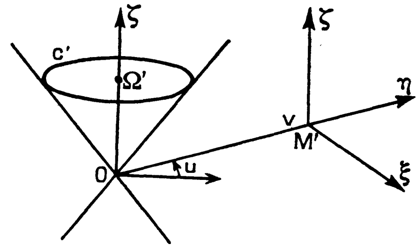

Fig. 3.

Le système cyclique [C′] coïncide avec une famille de cercles à un paramètre. Au point M′(u, v), on peut associer arbitrairement un parallèle du cône de révolution sous réserve des conditions de continuité et de dérivabilité.

Par déformation arbitraire de [C′] on obtient la solution générale de $1_{2.1}$ pour laquelle les cercles ne constituent pas en général une famille à un paramètre.

3° *Étude du cas* $1_{2.2}$ (r fonction de u seul). — (6.17) donne

$$\mu = f(v)\sqrt{G}. \tag{6.24}$$

(6.16) montre que $f(v)$ ne peut être identiquement nulle et devient

$$[1 + f'(v)]\sqrt{G} + f(v)\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v} = 0. \tag{6.25}$$

Cette équation montre que G est de la forme $G = \Phi(u)\Psi(v)$. Par un changement de variable ($\Psi(v)\,dv^2 = dV^2$) n'altérant pas le réseau des courbes coordonnées on peut toujours se ramener au cas où G est fonction de u seul. (6.25) exige alors

$$f'(v) = -1, \qquad \text{donc} \quad f(v) = -v,$$

d'où

$$\mu = -v\sqrt{G(u)}. \tag{6.26}$$

L'élimination de K entre les équations (6.18), (6.20) qui, en tenant compte de (6.13) et du fait que μ n'est pas nul et que r est fonction de u seul dans $1_{2.2}$, s'écrivent

$$\frac{dG}{du}\frac{dr}{du} + 2EGrK = 0,$$

$$\frac{dG}{du}\mu\frac{\partial\mu}{\partial u} + 2EG(1 + a^2)r^2K = 0,$$

conduit à

$$\frac{dG}{du}\left[\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}-(1+a^2)r\frac{dr}{du}\right]=0.$$

Soit d'après (6.26),

$$\frac{dG}{du}\left[v^2\frac{dG}{du}-2(1+a^2)r\frac{dr}{du}\right]=0.$$

Cette identité en u, v ne peut être satisfaite, G et r étant fonctions de u seul que si $\frac{dG}{du}=0$. Dans ce cas, μ n'est fonction que de v.

Le problème se ramène donc au cas $1_{2.1}$.

7. Étude du cas 2.

$$\mu=0, \qquad r=f(u)\sin\theta. \tag{7.1}$$

a. Les équations (1.1) et (1.3) deviennent

$$\cos\theta\left(r\frac{\partial\nu}{\partial v}-\nu\frac{\partial r}{\partial v}-r\sin\theta\sqrt{G}\right)=0 \tag{7.2}$$

$$\cos\theta\left(r\frac{\partial\nu}{\partial v}-\nu\frac{\partial r}{\partial v}\right)=0. \tag{7.3}$$

Ce qui conduit à deux cas :

$$2_1: \quad \theta=\frac{\pi}{2} \quad \text{(le cas } \cos\theta=0 \text{ peut toujours s'y ramener),} \tag{7.4}$$

$$2_2: \quad \begin{cases} r\dfrac{\partial\nu}{\partial u}-\nu\dfrac{\partial r}{\partial u}=0, & (7.5)\\[2mm] r\dfrac{\partial\nu}{\partial v}-\nu\dfrac{\partial r}{\partial v}-r\sin\theta\sqrt{G}=0. & (7.6)\end{cases}$$

b. *Étude du cas* 2_1. — Ce cas est celui où *l'axe du cercle* C(u, v) *est situé dans le plan tangent en* M(u, v) *à* S$\left(\theta=\frac{\pi}{2}, \mu=0\right)$.

Les équations (5.1), (5.2), (5.3), (5.5), (5.8), (5.12) sont vérifiées. L'équation (5.10) s'écrit

$$\lambda\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\nu+\sqrt{E}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)=0.$$

Elle conduit à deux cas.

1° *Cas* $2_{1.1}$.

$$\lambda=0.$$

Ce cas est contenu dans le cas plus général 3 qui sera étudié complètement plus loin.

2° *Cas* $2_{1.2}$. — Il correspond à

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\nu + \sqrt{E}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0. \tag{7.7}$$

En tenant compte de cette équation, (5.9) et (5.11) deviennent

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}r^2 + \nu\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\nu - \sqrt{G}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \sqrt{EG}\right) = 0, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}r^2 - \lambda\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\nu - \sqrt{G}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \sqrt{EG}\right) = 0. \tag{7.9}$$

Ces équations constituent un système linéaire homogène en r^2 et $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\nu - \sqrt{G}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \sqrt{EG}$. Le cas $r = 0$ étant écarté, le déterminant de ce système doit être nul. D'où la condition

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\nu + \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda = 0. \tag{7.10}$$

Le système (7.8), (7.9) peut donc être remplacé par le système (7.9), (7.10) puisqu'on peut toujours supposer dans le cas $2_{1.2}$ que λ n'est pas identiquement nul.

En tenant compte de (7.10), les équations (7.7) et (5.6) s'écrivent

$$\sqrt{E}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda = 0, \tag{7.11}$$

$$r\frac{\partial\nu}{\partial u} - \nu\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}r\nu = 0, \tag{7.12}$$

qui donnent par intégration, en remarquant que dans le cas 2_1, r n'est fonction que de u.

$$\lambda = h(u)\sqrt{E}, \tag{7.13}$$

$$\nu = k(v)\,r(u)\sqrt{G}, \tag{7.14}$$

h, k étant des fonctions, jusqu'ici arbitraires, d'une variable. On peut supposer ici que $h(u)$ n'est pas identiquement nulle.

Remarque sur $h(u)$ et $k(v)$. — Si l'on opère un changement de variables de la forme $u = u(U)$, $v = V$, le réseau de courbes coordonnées ne change pas. Seuls les sens de $\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial\vec{M}}{\partial U}$ sont différents si $\frac{du}{dU}$ est négatif. Par suite, si $\mathcal{H}(U)$, $\mathcal{E}$ sont les fonctions jouant avec le paramétrage U, V, les rôles de $h(u)$ et E, on peut écrire

$$\varepsilon\sqrt{E}\frac{du}{dU} = \sqrt{\mathcal{E}} \qquad \left(\varepsilon = \pm 1,\ \text{du signe de } \frac{du}{dU}\right),$$

$$h(u)\sqrt{E} = \varepsilon\,\mathcal{H}(U)\sqrt{\mathcal{E}},$$

car λ est invariant ou changé en son opposé suivant que $\frac{du}{d\mathrm{U}}$ est positif ou négatif. Il résulte de ces relations

$$\frac{du}{h(u)} = \frac{d\mathrm{U}}{\mathcal{H}(\mathrm{U})}.$$

On peut donc déterminer un changement de variables de ce type de manière que $\mathcal{H}$ soit une fonction non nulle arbitrairement donnée.

Cette remarque nous permettra de particulariser par la suite la fonction $h(u)$ de manière à simplifier le problème sans restreindre sa généralité.

On peut faire la même étude pour $k(v)$ lorsque cette fonction n'est pas identiquement nulle avec des changements de variables du type $u = \mathrm{U}$, $v = v(\mathrm{V})$. En effet

$$\frac{\nu}{r} = -\frac{\sigma}{r}$$

est invariant ou changé en son opposé suivant que $\frac{dv}{d\mathrm{V}}$ est positif ou négatif.

En utilisant les expressions (7.13) et (7.14) pour λ et ν l'équation (5.7) s'écrit

$$hr\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - kr^2\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} = -2(hr' + r - k'r^2)\mathrm{G}. \tag{7.15}$$

De même l'équation (7.10) prend la forme

$$h\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + kr\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = 0. \tag{7.16}$$

L'équation (5.4), qui peut s'écrire

$$2\sqrt{\mathrm{G}}\left(\sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\nu\right)r' + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}r - r\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial \nu}{\partial u} - r\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial \nu}{\partial v} = 0,$$

en tenant compte de (7.7), (7.16), (7.13) et (7.14), devient

$$-kr\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\left[rh\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - kr^2\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} + 2(hr' + r - r^2k')\mathrm{G}\right] = 0.$$

On constate que cette équation est une conséquence de (7.15). De même l'équation (7.9) se transforme en

$$h^2\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = -2h(h'+1)\mathrm{E} - k^2r^2\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}r^2. \tag{7.17}$$

D'après la remarque faite sur $h(u)$ nous pouvons toujours supposer le paramétrage tel que

$$h = -u, \tag{7.18}$$

de manière à rendre nul le coefficient de E dans (7.17).

En divisant les deux membres de (7.15), (7.16), (7.17) par u^2, u, u^2 respectivement et en posant

$$s=\frac{r(u)}{u}, \tag{7.19}$$

la résolution du cas $2_{1.2}$ se ramène à (7.1), (7.4), (7.13), (7.14), à la résolution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire en G

$$s(u)\frac{\partial G}{\partial u}+k\,s^2(u)\frac{\partial G}{\partial v}=-2[s'(u)+k'(v)\,s^2(u)]G \tag{7.20}$$

et à la résolution de l'équation aux différentielles totales en E équivalente à

$$\frac{\partial E}{\partial u}=-k^2s^2\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}s^2, \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial E}{\partial v}=ks\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{7.22}$$

La résolution de l'équation (7.20) conduit à deux cas suivant que k est différent de zéro ou identiquement nul.

Cas $2_{1.2.1}\,k(v)\not\equiv 0$. Le système caractéristique associé à (7.20)

$$\frac{du}{s}=\frac{dv}{ks^2}=\frac{-dG}{2(s'+k's^2)G}$$

admet les combinaisons intégrables :

$$-s(u)\,du+\frac{dv}{k(v)}=0,$$

$$\frac{dG}{G}=-2\frac{s'}{s}du-\frac{2k'}{k}dv.$$

D'où la solution générale

$$G=\frac{\Phi[\mathcal{U}(u)+\mathcal{V}(v)]}{s^2k^2}, \tag{7.23}$$

$\Phi(X)$ étant une fonction arbitraire d'une variable, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ étant telles que

$$\mathcal{U}'(u)=-s(u),\qquad \mathcal{V}'(v)=\frac{1}{k(v)}. \tag{7.24}$$

D'après (7.23), (7.22) s'écrit

$$\frac{\partial E}{\partial v}=-\frac{1}{k}\Phi'-\frac{2s'}{s^2}\frac{1}{k}\Phi.$$

Par intégration relativement à v, en remarquant que $\frac{1}{k}=\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{U}+\mathcal{V})$, $\Psi(X)$ désignant une primitive de $\Phi(X)$:

$$E=-\Psi'-\frac{2s'}{s^2}\Psi+l(u). \tag{7.25}$$

En écrivant que E vérifie (7.21), on obtient la relation

$$2\frac{d}{du}\left(\frac{s'}{s^2}\right)\Psi(X)+s^3\frac{\Psi''(X)}{\Psi'(X)}+2ss'-l'=0. \tag{7.26}$$

Cette équation peut être étudiée en prenant comme variables u et $X=\mathfrak{U}(u)+\mathfrak{V}(v)$. Ces variables sont indépendantes car $\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1}{k}\neq 0$. Pour chaque valeur de u, (7.26) fournit une relation linéaire à coefficients constants entre les fonctions $\Psi(X)$ et $\frac{\Psi''(X)}{\Psi'(X)}\cdot$ L'infinité d'équations correspondant aux diverses valeurs de u doit constituer un système linéaire compatible.

Si le rang de ce système est deux, il y a une solution unique. $\Psi(X)$ est alors une constante. Ce cas doit être écarté car il entraîne $G\equiv 0$.

Si le rang de ce système est un, quel que soit u, les coefficients des équations doivent être proportionnels à trois nombres fixes et cela suffit. $s^3(u)$ n'étant pas identiquement nul (7.26) équivaut alors à

$$\frac{d}{du}\left(\frac{s'}{s^2}\right)=-As^3, \tag{7.27}$$

$$2ss'-l'=-Bs^3 \quad \text{(A, B, constantes arbitraires)}, \tag{7.28}$$

$$\Psi''=2A\Psi\Psi'+B\Psi'. \tag{7.29}$$

Le rang du système ne peut être nul puisque $s^3(u)$ n'est pas identiquement nul.

$A\neq 0$.

Ψ n'intervenant que comme primitive de Φ peut être remplacé par toute fonction qui en diffère d'une constante. Cela revient d'après (7.25) à modifier la fonction $l(u)$. En écrivant (7.29) sous la forme

$$\Psi''=\Psi'(2A\Psi+B).$$

On voit en particulier que si l'on pose $\Psi+\frac{B}{2A}=\overline{\Psi}$, $l+\frac{B}{A}\frac{s'}{s^2}=\bar{l}$, on se ramène au même problème avec $B=0$. *Nous pouvons donc nous limiter au cas où* $B=0$.

Après une intégration, (7.29) donne

$$\Psi'=A\Psi^2+C \quad \text{(C, constante arbitraire)},$$

soit

$$\int\frac{d\Psi}{A\Psi^2+C}=X. \tag{7.30}$$

X étant destiné à être remplacé par

$$\mathfrak{U}(u)+\mathfrak{V}(v)=\int -s(u)\,du+\int\frac{dv}{k(v)}$$

qui n'est défini qu'à une constante additive près, il suffit de calculer une primitive particulière du premier membre de (7.30). Trois cas sont à distinguer :

$$(7.31)\quad \begin{cases} 1^{\circ} & \dfrac{C}{A} > 0 : \quad \Psi(X) = \sqrt{\dfrac{C}{A}}\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{AC}\,X); \\ 2^{\circ} & \dfrac{C}{A} < 0 : \quad \Psi(X) = -\sqrt{-\dfrac{C}{A}}\,\mathrm{th}^{\varepsilon}\,(\sqrt{-AC}\,X), \qquad \varepsilon = \pm 1; \\ 3^{\circ} & C = 0 : \quad \Psi(X) = -\dfrac{1}{AX}. \end{cases}$$

(7.28) s'intègre et donne (B étant nul)

$$(7.32)\qquad l = s^2 + D \qquad (D,\ \text{constante arbitraire}).$$

L'équation (7.27) permet de déterminer $s(u)$. Pour cela nous posons

$$\frac{1}{s(u)} = \frac{u}{r(u)} = t(u).$$

L'équation devient

$$t'' = \frac{A}{t^3}.$$

En multipliant les membres par t', non identiquement nul, et en intégrant on obtient après transformation

$$\frac{tt'}{\sqrt{Ht^2 - A}} = \varepsilon' \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

D'où à nouveau deux cas

$$(7.33)\quad \begin{cases} 1^{\circ} & H \neq 0 : \quad t^2(u) = \dfrac{H^2(u-u_0)^2 + A}{H} \qquad (u_0,\ \text{constante arbitraire}); \\ 2^{\circ} & H = 0 : \quad t^2(u) = \dfrac{\varepsilon'}{2}\sqrt{-A}\,(u - u_0) \qquad (\varepsilon' = \pm 1). \end{cases}$$

D'après la remarque faite sur $k(v)$ on peut toujours supposer cette fonction égale à 1 et par suite

$$X = \mathcal{U}(u) + \mathcal{V}(v) = v - \int s(u)\,du.$$

Il suffit de se limiter à une primitive particulière moyennant un changement de variable de la forme $v = V + \text{Cte}$ qui ne change rien par ailleurs.

D'où la solution générale de ce cas $\mathfrak{Q}_{1.2.1}$ $(A \neq 0)$:

$\Psi(X)$ déterminé par une des équations (7.31),
$t(u)$ » » » (7.33),

$$G = t^2(u)\,\Psi'(X),$$

$$E = 2t'(u)\,\Psi(X) - \Psi'(X) + \frac{1}{t^2(u)} + D,$$

avec

$$X = v - \int \frac{du}{t(u)} \qquad \text{(une primitive particulière)},$$

$$\lambda = -u\sqrt{E}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = \varepsilon'' u \sqrt{\Psi'(X)} \qquad (\varepsilon'' = \pm 1, \text{ du signe de } u),$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{u}{t(u)}.$$

Dans cette solution figurent les cinq constantes A, C, D, H, u_0. En fait, on remarque qu'un changement de variable de la forme $u = \alpha U$, $v = V$ respecte l'hypothèse faite sur $h(u)[h(u) = -u]$, α étant une constante. Ceci ramène à quatre le nombre de paramètres dont dépend la solution dans ce cas. Si de plus on néglige une homothétie le nombre de paramètres se réduit à trois.

$A = 0$, $B \neq 0$.

(7.29) donne par intégration, une constante additive pouvant être négligée, pour Ψ

$$\Psi' = B\Psi \qquad \text{(B, constante arbitraire)},$$

d'où

$$\Psi = \varepsilon\, e^{BX} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

puisqu'une constante additive peut aussi être négligée pour X.

L'équation (7.27) conduit à

$$s = \frac{1}{H(u - u_0)} \qquad (u_0,\ \text{H, constantes arbitraires}),$$

et (7.28)

$$t = \frac{1}{H^2(u-u_0)^2} - \frac{B}{2H}\,\frac{1}{H^2(u-u_0)^2} + D \qquad \text{(D, constante arbitraire)}.$$

D'où la solution générale du cas $2_{1.2.1}$ ($A = 0$, $B \neq 0$) :

$$G = H^2(u-u_0)^2\, \varepsilon B\, e^{BX},$$

$$E = \varepsilon(2H - B)\left[e^{BX} + \frac{\varepsilon}{2H^3(u-u_0)^2}\right] + D \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

avec

$$X = v - \frac{1}{H}\operatorname{Log}|u - u_0|,$$

$$\lambda = -u\sqrt{E}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = \varepsilon' u \sqrt{\varepsilon B}\, e^{\frac{BX}{2}}$$

$$[\varepsilon' = \pm 1 \text{ du signe de } H(u-u_0) \text{ donc de } u(r > 0)],$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{u}{H(u-u_0)}$$

Remarque. — Si $B = 2H$: $E = D$ constante, $G = 2\varepsilon E H^3 e^{2Hv}$, fonction de v seul, S est développable.

$A = B = 0$.

(7.29) donne, en négligeant une constante additive

$$\Psi = C^2 X \qquad [\text{C, constante arbitraire } (\Psi' \text{ doit être } > 0, \text{ car } G > 0)],$$

(7.27) et (7.28) conduisent à

$$s = \frac{1}{H(u-u_0)} \qquad (u_0,\ H,\ \text{constantes arbitraires}),$$

$$l = \frac{1}{H^2(u-u_0)^2} + D \qquad (D,\ \text{constante arbitraire}).$$

D'où la solution générale du cas $2_{1.2.1}(A = B = 0)$:

$$G = H^2(u-u_0)^2 C^2,$$

$$E = (2HX - 1)C^2 + \frac{1}{H^2(u-u_0)^2} + D,$$

avec

$$X = v - \frac{1}{H}\operatorname{Log}|u-u_0|,$$

$$\lambda = -u\sqrt{E}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = Cu \qquad [C \text{ du signe de } H(u-u_0)],$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{u}{H(u-u_0)}.$$

Remarque. — Moyennant l'addition d'une constante à v on peut mettre E sous la forme

$$E = 2C^2H\left[v - \frac{1}{H}\operatorname{Log}|u-u_0|\right] + \frac{1}{H^2(u-u_0)^2}.$$

Cas $2_{1.2.2}$, $k(v) \equiv 0$.

Dans ce cas (7.20), (7.21), (7.22) s'écrivent respectivement

$$\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} = -2\frac{s'(u)}{s(u)}, \tag{7.34}$$

$$\frac{\partial E}{\partial u} = -s^2\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}, \tag{7.35}$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \tag{7.36}$$

d'où

$$G = \frac{l(v)}{s^2} \qquad [l(v),\ \text{fonction arbitraire}],$$

$$E = s^2(u) + A \qquad (A,\ \text{constante arbitraire}).$$

On peut, par un changement de variable de la forme $v = v(V)$ se ramener au cas où $l(v)$ est identique à 1. G est alors une fonction de u seul ainsi que E. S est donc isométrique à une surface de révolution.

On obtient ainsi une première forme pour la solution générale du cas $2_{1.2.2}$:

$$E = \frac{1}{G(u)} + A \qquad [G(u) \text{ fonction arbitraire}],$$

$$\lambda = -u\sqrt{\frac{1}{G} + A}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \varepsilon\frac{u}{\sqrt{G}} \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \text{du signe de } u).$$

Par un changement de variables $\mu = u(\mathrm{U})$, $v = \mathrm{V}$, on peut toujours se ramener au cas où $\mathrm{E} = 1$. Ce changement de variables est déterminé par

$$\sqrt{\mathrm{E}}\, du = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{G}} + \mathrm{A}}\, du = \varepsilon' \, d\mathrm{U} \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

Il laisse invariant le coefficient G.

$$\mathcal{E}(\mathrm{U}) = 1, \qquad \mathcal{G}(\mathrm{U}) = \mathrm{G}(u).$$

Donc,

$$du = \varepsilon' \sqrt{\frac{\mathcal{G}(\mathrm{U})}{1 + \mathrm{A}\,\mathcal{G}(\mathrm{U})}}\, d\mathrm{U},$$

soit

$$u = \varepsilon' \int \sqrt{\frac{\mathcal{G}(\mathrm{U})}{1 + \mathrm{A}\,\mathcal{G}(\mathrm{U})}}\, d\mathrm{U}.$$

λ est invariant ou changé en son opposé suivant que ε' est positif ou négatif, r est invariant. D'où

$$\lambda = -\sqrt{\frac{1 + \mathrm{A}\,\mathcal{G}}{\mathcal{G}}} \int \sqrt{\frac{\mathcal{G}}{1 + \mathrm{A}\,\mathcal{G}}}\, d\mathrm{U}.$$

En revenant ensuite aux notations primitives u, v, E, G *la solution générale du cas* $2_{1.2.2}$ *peut se donner sous la forme suivante :*

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}(u)\, dv^2,$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{1 + \mathrm{AG}}{\mathrm{G}}} \int \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{1 + \mathrm{AG}}}\, du, \qquad \mu = \nu = 0,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{G}}} \int \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{1 + \mathrm{AG}}}\, du \qquad (\varepsilon \pm 1, \text{ tel que } r > 0).$$

Ce cas est celui où l'axe du cercle $\mathrm{C}(u, v)$ est dans le plan tangent à S en $\mathrm{M}(u, v)$, le plan de $\mathrm{C}(u, v)$ contenant $\mathrm{M}(u, v)$.

S *est la surface la plus générale isométrique à une surface de révolution.* En général une telle surface admet un seul réseau de courbes coordonnées pour lequel le ds^2 a la forme donnée ci-dessus. On peut alors lui attacher une famille à deux paramètres de systèmes cycliques du type $2_{,1,2,1}$ arbitrairement déformables. Ces paramètres sont A et la constante additive incluse dans l'intégrale indéfinie.

Si S est une surface à courbure totale constante elle admet une famille à deux paramètres de tels réseaux et par suite on peut lui attacher une famille à quatre paramètres de systèmes cycliques arbitrairement déformables du type $2_{1,2,2}$.

Introduction des congruences de sphères. — Les systèmes cycliques $[\mathrm{C}_\Sigma]$ associés respectivement aux congruences de sphères de Ribaucour arbitrairement déformables admettant S pour déférente et signalés au paragraphe (I.5) entrent dans la catégorie $2_{1,2,2}$ car $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\lambda \neq 0$ avec le paramétrage utilisé dans (I, 5.4) et (I, 5.8).

Examinons si inversement toute solution du type $2_{,1,2,2}$ peut être associée à une congruence de Ribaucour arbitrairement déformable.

Le rayon R de la sphère $\Sigma(u, v)$ centrée en $M(u, v)$ et orthogonale au cercle $C(u, v)$ vérifie

$$R^2 = \lambda^2 - r^2,$$

d'où

$$R = \varepsilon\sqrt{A}\int\sqrt{\frac{G}{1+AG}}\,du \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ce rayon n'est réel que si A est positif. En comparant avec (I, 5.3) et (I, 5.4) on constate que $[\Sigma]$ est une congruence de sphères de Ribaucour arbitrairement déformable.

L'abscisse de I sur $M\vec{\xi}$ est $-R\frac{dR}{du}$, puisque $E = 1$; celle de Ω est λ. On vérifie immédiatement

$$\overline{MI}.\overline{M\Omega} = R^2,$$

ce qui montre que l'axe de $C(u, v)$ est la polaire de la corde de contact associée à $\Sigma(u, v)$. $C(u, v)$ coïncide donc avec $C_\Sigma(u, v)$. Ce dernier raisonnement exige toutefois $A \neq 0$ sinon R est identiquement nul.

Si $A \neq 0$, *les systèmes cycliques arbitrairement déformables de type* $2_{1,2,2}$ *s'identifient avec les systèmes cycliques associés aux congruences de sphères de Ribaucour arbitrairement déformables admettant* S *pour déférente. Si* $A = 0$ *le cercle* $C(u, v)$ *est orthogonal à* S *en* $M(u, v)$.

c. Étude du cas 2_2. — Il correspond aux hypothèses (7.1), (7.5), (7.6).

En tenant compte de (7,5), l'équation (5.6) devient

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} r\lambda\sin\theta = 0.$$

Les cas $r = 0$ et $\sin\theta = 0$ pouvant être écartés cette équation conduit aux cas :

1° $2_{2,1}$: $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial V} = 0$. — Ce cas est un cas particulier du cas 4 qui sera traité complètement plus loin.

2° $2_{2,2}$: $\lambda = 0$. — Ce cas est un cas particulier du cas 3 qui sera traité complètement dans le paragraphe suivant.

8. Étude du cas 3.

(8.1) $$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

Cette hypothèse exprime que l'*axe du cercle* $C(u, v)$ *passe par* $M(u, v)$.

a. Les équations (5.6) et (5.11) s'écrivent

$$r\frac{\partial\nu}{\partial u}-\nu\frac{\partial r}{\partial u}=0,$$

$$(r^2+\nu^2)\left(\sin\theta\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=0.$$

Dans le domaine réel, le cas $r=0$ étant écarté, le facteur $r^2+\nu^2$ n'est pas identiquement nul et ces deux équations conduisent à

$$(8.2)\qquad \nu=g(v)r,$$

$$(8.3)\qquad \sqrt{G}=h(v)\sin\theta,$$

puisqu'on peut supposer que $\sin\theta$ n'est pas identiquement nul. $g(v)$ et $h(v)$ sont deux fonctions jusqu'ici arbitraires.

Remarque. — Dans le domaine complexe le cas $r^2+\nu^2=0$ serait à envisager, mais en vertu de (5.9), il conduirait à $\nu=0$ donc à $r=0$. Ce cas ne présente que peu d'intérêt puisque le cercle $C(u, v)$ est décomposé en deux droites isotropes.

(5.3) est alors vérifiée. (5.7) s'écrit :

$$(8.4)\qquad r\frac{\partial\nu}{\partial v}-\nu\frac{\partial r}{\partial v}-\sqrt{G}\,r\sin\theta=0.$$

Elle entraîne (5.1) et en tenant compte de (8.2) et (8.3), devient

$$(8.5)\qquad r g'(v)-h(v)\sin^2\theta=0.$$

(5.4) peut se mettre sous la forme

$$\sin\theta\left[\frac{\partial G}{\partial u}\left(\nu\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial\nu}{\partial u}\right)+\frac{\partial E}{\partial v}\left(\nu\frac{\partial r}{\partial v}-r\frac{\partial\nu}{\partial v}+\sqrt{G}\,r\sin\theta\right)\right]-2E\sqrt{G}\frac{\partial r}{\partial v}=0.$$

D'après (8.) et (8.4), elle se réduit à

$$(8.6)\qquad \frac{\partial r}{\partial v}=0,\qquad \text{donc}\quad r=r(u).$$

En utilisant (8.2), (5.8) devient

$$r\frac{\partial\theta}{\partial u}\left[\sin\theta\sqrt{G}-r g'(v)\right]+\cos\theta\sqrt{G}\frac{\partial r}{\partial u}=0,$$

et en vertu de (8.3) et (8.5),

$$(8.7)\qquad \cos\theta\frac{\partial r}{\partial u}=0.$$

Cette équation conduit à deux possibilités

$$(8.8)\qquad 3_1:\quad \theta=\frac{\pi}{2},$$

$$(8.9)\qquad 3_2:\quad r=a=\text{Cte}\qquad (\text{d'après } 8.6).$$

b. Étude du cas 3_1. — Ce cas coïncide avec $2_{1,1}$ signalé dans le paragraphe précédent, mais non étudié $\left[\lambda = \mu = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ r = r(u)\right]$. *C'est le cas où l'axe du cercle* $C(u, v)$ *est tangent en* $M(u, v)$ *à* S.

D'après (8.8), G est dans ce cas fonction de v seul. Par un changement de variables on peut se ramener à

$$G(v) = h(v) = 1.$$

(8.5) devient alors

$$r(u)\, g'(v) = 1,$$

ce qui entraîne

$$\left.\begin{aligned} &(8.10) \qquad & r(u) &= a \\ &(8.11) \qquad & g'(v) &= \frac{1}{a} \end{aligned}\right\} \quad (a, \text{ constante non nulle}).$$

Le cas 3_1 *est donc contenu dans* 3_2, mais la solution s'en obtient immédiatement. De (8.2), (8.10), (8.11) il résulte

$$(8.12) \qquad \nu = v,$$

car par un changement de variable de la forme $v = V + v_0$ on peut toujours supposer nulle la constante d'intégration.

Toutes les équations du système 5 sont alors vérifiées, sauf (5.9) qui s'écrit

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{2v}{a^2 + v^2},$$

d'où

$$E = k(u)\,(v^2 + a^2).$$

Par un changement de variable de la forme $u = u(U)$, on peut se ramener au cas

$$(8.13) \qquad E = v^2 + a^2.$$

D'où la solution générale du cas 3_1 :

$$ds^2 = (v^2 + a^2)\, du^2 + dv^2,$$

$$\lambda = \mu = 0, \qquad \nu = v, \qquad r = a, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(a constante arbitraire positive).

S *est applicable sur le caténoïde de paramètre* a. — L'axe de $C(u, v)$ est tangent en $M(u, v)$ à la déformée de méridien passant par ce point. La congruence des axes est une congruence de normales. La représentation sphérique de cette congruence est régulière, sinon les trajectoires orthogonales et la nappe S de leur développée seraient des développables, ce qui n'a pas lieu. Les cercles du système cyclique [C] ayant un rayon constant a, la congruence de leurs axes ayant une représentation sphérique régulière on sait [cela résulte en particulier de (2.15) et (2.16)] que leur centre $\Omega(u, v)$ décrit une surface à courbure totale constante $-\frac{1}{a^2}$, leur plan étant tangent à cette surface.

On retrouve ainsi que toute surface applicable sur le caténoïde de paramètre a est une nappe de la développée d'une surface pseudosphérique de courbure totale $-\frac{1}{a^2}$. La solution 3_1 est fournie par le système cyclique de rayon constant a associé à cette surface pseudo-sphérique (système cyclique de Ribaucour).

c. *Étude du cas* 3_2. — 1° Il correspond aux hypothèses suivantes :

$$\lambda = \nu = 0, \qquad r = a. \tag{8.14}$$

(8.2) et (8.5) montrent que ν et θ ne sont fonctions que de v car, d'après (8.3), $h(v)$ n'est pas identiquement nul. Cette dernière équation montre que G n'est fonction que de v. Ces trois équations se réduisent à

$$v = \nu(v), \qquad G = G(v), \qquad \theta = \theta(v), \tag{8.15}$$

$$\nu' = \sqrt{G}\sin\theta. \tag{8.16}$$

Les équations du système général 5 de (5.1) jusqu'à (5.8) ainsi que (5.11) sont alors vérifiées. En négligeant le facteur $\cos\theta$ puisque le cas $(\cos\theta = 0)$ a été traité dans 3_1 et en utilisant (8.16), le cas $(\sin\theta = 0)$ étant écarté, l'équation (5.10) s'écrit

$$\nu\nu'\cos\theta - (a^2 + \nu^2)\sin\theta\theta' = 0, \tag{8.17}$$

d'où

$$a^2 + \nu^2 = \frac{b^2}{\cos^2\theta} \qquad (b, \text{ constante}). \tag{8.18}$$

En tenant compte de (8.16) l'équation de (5.9) devient

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sin^2\theta(a^2 + \nu^2) - \sqrt{E}\,\nu\nu' = 0.$$

D'après (8.17), cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\theta'}{\sin\theta\cos\theta},$$

d'où

$$E = k_1^2(u)\,\mathrm{tg}^2\theta = k^2(u)(\nu^2 + a^2 - b^2).$$

Un changement de variable de la forme $u = u(U)$ permet de se ramener au cas où $k^2 = 1$. $\nu'(v)$ n'étant pas identiquement nul d'après (8.16) on peut opérer le changement de variable $\nu(v) = V$ qui laisse invariant le réseau de courbes coordonnées ainsi que ν. On peut donc sans restreindre la généralité utiliser un paramétrage tel que

$$\nu = v. \tag{8.19}$$

Il en résulte alors

$$(8.20)\qquad \cos^2\theta = \frac{b^2}{a^2+v^2} \qquad [\sin\theta > 0 \text{ (d'après 8.16)}],$$

$$(8.21)\qquad E = v^2 + a^2 - b^2 = b^2\,\mathrm{tg}^2\theta, \qquad G = \frac{v^2+a^2}{v^2+a^2-b^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

L'équation (5.12) prend la forme

$$\sqrt{E}\,\theta'\left[(a^2+v^2)\sin\theta\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \sqrt{EG}\,v\right] + EG\cos\theta\left[1 - v\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} + (a^2+v^2)K\right] = 0.$$

Le premier terme est nul. D'après les équations ci-dessus (5.12) se réduit à

$$\frac{EG\cos\theta}{a^2+v^2}[a^2 + (v^2+a^2)^2 K] = 0.$$

Or

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}\frac{d}{dv}\left(\sqrt{\frac{v^2+a^2-b^2}{v^2+a^2}}\frac{d}{dv}\sqrt{v^2+a^2-b^2}\right),$$

d'où

$$(8.22)\qquad K = -\frac{a^2}{(v^2+a^2)^2}.$$

(5.12) est donc vérifiée.

D'où la solution générale de 3_2 (*car le cas* 3_1 *s'obtient en remplaçant b par zéro dans le résultat ci-dessous*) :

$$ds^2 = (v^2+a^2-b^2)\,du^2 + \frac{v^2+a^2}{v^2+a^2-b^2}\,dv^2,$$
$$\lambda = \mu = 0, \qquad \nu = v, \qquad r = a$$
$$(a > 0,\ b \geqq 0,\ \text{constantes}),$$
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{G}},$$

En effet, (8.20) équivaut à la dernière équation ci-dessus.

A chaque surface S *rapportée au paramétrage ci-dessus, la solution* 3_2 *fait correspondre deux systèmes cycliques* [C], [C′] *de rayon constant a. Les cercles* C(*u*, *v*), C′(*u*, *v*) *sont symétriques par rapport au plan tangent à* S *en* M(*u*, *v*) car θ(*v*) est déterminé uniquement par son sinus. *Les surfaces* S *sont isométriques à des surfaces de révolution particulières.*

2° *Méridiennes de ces surfaces de révolution.* — Soit S′ une de ces surfaces. Rapportons un de ses plans méridiens aux axes orthonormés OXZ, OZ étant l'axe de révolution. Soit U l'angle polaire à partir de OXZ, autour de $\overrightarrow{OZ}$ dans le système de coordonnées semi-polaires associé.

S' étant rapportée aux paramètres u, v de manière que la correspondance avec S soit une isométrie, d'après l'expression (8.22) de la courbure totale, les courbes $v = \mathrm{Cte}$ sont les parallèles, les courbes $u = \mathrm{Cte}$ sont les méridiens. Ces derniers ont une représentation paramétrique de la forme

$$X = X(v), \qquad Z = Z(v).$$

L'angle polaire U du plan du méridien (u) n'est fonction que de u. L'identification des ds^2 de S et S' avec les paramètres u, v conduit à

$$\begin{aligned}[X'^2(v) + Z'^2(v)]\,dv^2 + X^2(v)\,U'^2(u)\,du^2 \\ = (v^2 + a^2 - b^2)\,du^2 + \frac{v^2 + a^2}{v^2 + a^2 - b^2}\,dv^2,\end{aligned}$$

d'où

$$X^2(v) = l^2(v^2 + a^2 - b^2), \qquad U'^2 = \frac{1}{l^2} \qquad (l \neq 0,\ \text{constante}), \tag{8.23}$$

$$X'^2(v) + Z'^2(v) = \frac{v^2 + a^2}{v^2 + a^2 - b^2}.$$

Il en résulte

$$Z'^2(v) = \frac{(1 - l^2)v^2 + a^2}{v^2 + a^2 - b^2}. \tag{8.24}$$

On obtient des méridiennes simples en prenant $l^2 = 1$. Un calcul sans difficultés conduit aux trois types suivants :

$$\underline{a^2 > b^2} : \quad X = \sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{ch}\,\frac{Z}{a}$$

$$\underline{a^2 < b^2} : \quad X = \sqrt{b^2 - a^2}\,\mathrm{sh}\,\frac{Z}{a}$$

$$\underline{a^2 = b^2} : \quad X = a\,e^{\frac{Z}{a}}.$$

On peut écrire si $l^2 \neq 1$,

$$Z'^2(v) = (1 - l^2)\,\frac{v^2 + \dfrac{a^2}{1 - l^2}}{v^2 + a^2 - b^2}.$$

Si $b \neq 0$, $a \neq b$, on peut déterminer l^2 de sorte que

$$\frac{a^2}{1 - l^2} = a^2 - b^2,$$

d'où

$$Z'^2(v) = \frac{a^2}{a^2 - b^2}.$$

On obtient alors pour méridienne la conique à centre imaginaire.

$$\frac{Z^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Les surfaces S *sont isométriques à une quadrique de révolution à centre, imaginaire, si* $b \neq 0$, $a \neq b$.

3° *Introduction des congruences de sphères.* — Si la représentation sphérique de la congruence des axes de l'un des systèmes cycliques [C] ou [C'] est régulière, la surface décrite par le centre $\Omega(u, v)$, ou $\Omega'(u, v)$ est une surface à courbure totale constante $-\frac{1}{a^2}$. Elle est tangente en $\Omega(u, v)$ ou $\Omega'(u, v)$ au plan du cercle correspondant. Si l'on considère dans ce cas la sphère $\Sigma(u, v)$ centrée en $M(u, v)$ et passant par $\Omega(u, v)$ et $\Omega'(u, v)$, l'un de ces points et par suite le deuxième sont les points de contact de $\Sigma(u, v)$ avec son enveloppe. Cette propriété a effectivement lieu. En effet le rayon $R(u, v)$ de $\Sigma(u, v)$ est donné par

$$R^2 = 2\rho = \nu^2 = v^2. \tag{8.25}$$

Avec les notations de la partie I, les coordonnées du point I dans Mxy sont respectivement

$$x = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u} = 0, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\rho}{\partial v} = -\frac{v}{\sqrt{G}}.$$

Elles coïncident avec les coordonnées de la projection orthogonale de Ω et Ω' sur le plan tangent en M :

$$\lambda = 0, \qquad \sigma = -\nu\sin\theta = \frac{-v}{\sqrt{G}}.$$

L'équation (2.14) sur les systèmes cycliques montre que *si les nappes de l'enveloppe de* $[\Sigma]$ *sont de vraies surfaces, ce sont des surfaces à courbure totale constante* $-\frac{1}{a^2}$. En effet $\vec{i}$ est la normale en Ω à l'enveloppe. Cette propriété est invariante dans une déformation arbitraire.

Inversement, si S est la déférente d'une congruence de sphères $[\Sigma]$ dont l'une des nappes de l'enveloppe est une surface à courbure totale $-\frac{1}{a^2}$ et si cette propriété est invariante dans une déformation arbitraire de S, le cercle de rayon a centré au point de contact et situé dans le plan tangent à cette nappe engendre un système cyclique attaché à S et arbitrairement déformable d'après les propriétés des surfaces pseudo-sphériques. Ce système cyclique est du type 3_2, il en fournit donc un deuxième associé à la deuxième nappe de l'enveloppe qui a aussi par conséquent la courbure totale $-\frac{1}{a^2}$, sauf évidemment si le système est du type particulier 3_1, auquel cas les deux nappes de l'enveloppe sont confondues.

Les congruences des sphères dont une nappe de l'enveloppe est une surface à courbure totale constante $-\frac{1}{a^2}$ et conserve cette propriété dans une déformation arbitraire de la déférente (il en est alors de même pour l'autre nappe) ont été étudiées notamment par Bianchi. La déférente doit avoir un ds^2 de la forme

$$ds^2 = \frac{V^2 + b^2}{V^2 + b^2 - a^2} dV^2 + V^2 \, dU^2, \tag{8.26}$$

et le rayon R de la sphère vérifie

$$R^2 = V^2 + b^2 - a^2 \tag{8.27}$$

Il suffit d'opérer le changement de variables $V^2 + b^2 - a^2 = v^2$, $U = u$ pour retrouver le ds^2 des surfaces S du cas 3_2 et le rayon de $\Sigma(u, v)$.

Les systèmes cycliques arbitrairement déformables du type 3_2 *s'obtiennent à partir des congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe ont une courbure totale constante* $-\frac{1}{a^2}$ *et conservent cette propriété dans une déformation arbitraire de la déférente. Ce sont les systèmes cycliques de rayon constant* a *associés aux deux nappes de l'enveloppe au sens de Ribaucour.*

L'étude de ces congruences de sphères montre de plus que ce sont des congruences de Ribaucour arbitrairement déformables particulières. Donc le cercle $C_\Sigma(u, v)$ associé engendre un troisième système cyclique arbitrairement déformable avec S du type $2_{1,2,2}$. Il y en a une infinité d'autres de ce type, mais celui-ci possède la particularité que $C(u, v)$, $C'(u, v)$, $C_\Sigma(u, v)$ présentent une configuration remarquable :

$C_\Sigma(u, v)$ *passe par les centres de* $C(u, v)$. $C'(u, v)$ *et est tangent à leurs axes.*

Le rayon de C_Σ se calcule sans difficulté grâce à l'orthogonalité en Ω et en Ω' avec Σ

$$r_\Sigma^2 = R^2 \cot g^2 \theta = \frac{b^2 v^2}{v^2 + a^2 - b^2}. \tag{8.28}$$

Le système cyclique $[C_\Sigma]$ *est lui-même à rayon constant si* $a^2 = b^2$. *Le rayon est alors lui aussi égal à* a. *C'est le seul type de système cyclique de rayon constant* a *relatif au cas* $2_{1,2,2}$ *et associé à une congruence de sphères réelles* Σ. En effet, en utilisant la première forme donnée pour la solution $2_{1,2,2}$ on obtient

$$r^2 = a^2 = \frac{u^2}{G}, \qquad R^2 = \lambda^2 - r^2 = u^2 A \qquad (A > 0),$$
$$ds^2 = \left(\frac{a^2}{u^2} + A\right) du^2 + \frac{u^2}{a^2} dv^2.$$

Un quelconque des changements de variables : $Au^2 = V^2$, $\frac{v^2}{Aa^2} = U^2$ conduit à (8.26) et (8.27) dans le cas où $a^2 = b^2$, ce qui démontre la proposition.

4° *Systèmes cycliques du type* 3_2 *associés à une surface donnée.* — Cette surface doit admettre un ds^2 de la forme

$$ds^2 = (v^2 + a^2 - b^2) \, du^2 + \frac{v^2 + a^2}{v^2 + a^2 - b^2} dv^2. \tag{8.29}$$

A ce paramétrage il correspond deux systèmes cycliques donnés par la solution 3_2. Pour étudier tous les systèmes cycliques du type 3_2 qu'on peut associer à une telle surface, il faut examiner si elle peut admettre d'autres paramétrages conduisant à un ds^2 de la forme (8.29) les coefficients a, b, pouvant être remplacés par d'autres coefficients. Si cela se produit, il faut ensuite voir si avec ces nouveaux paramétrages on obtient des solutions nouvelles.

Si l'on désigne par S_{ab} une surface admettant le ds^2 (8.29), la première partie du raisonnement revient à étudier si l'on peut établir une isométrie entre S_{ab} et une surface S_{AB}, dont le ds^2 est

$$dS^2 = (V^2 + A^2 - B^2)\,dU^2 + \frac{V^2 + A^2}{V^2 + A^2 - B^2}\,dV^2. \tag{8.30}$$

Dans cette isométrie, le réseau orthogonal des courbes coordonnées de S_{ab} doit correspondre au réseau des courbes coordonnées de S_{AB} d'après l'expression de la courbure totale de S_{ab} et S_{AB}. La correspondance est donc de la forme

$$U = U(u), \qquad V = V(v).$$

L'identification des ds^2 conduit aux relations

$$U'(u) = \frac{1}{k} \qquad (k,\ \text{constante}), \tag{8.31}$$

$$V^2 + A^2 - B^2 = k^2(v^2 + a^2 - b^2), \tag{8.32}$$

$$\frac{V^2 + A^2}{V^2 + A^2 - B^2}\,dV^2 = \frac{v^2 + a^2}{v^2 + a^2 - b^2}\,dv^2. \tag{8.33}$$

En tenant compte de (8.32), (8.33) conduit à l'identification de deux fonctions homographiques en v^2 :

$$k^2\left[1 + \frac{A^2}{k^2(v^2 + a^2 - b^2) + B^2 - A^2}\right] = 1 + \frac{a^2}{v^2}.$$

D'où

$$k^2 = 1, \qquad A = a, \qquad B = b,$$

car ces quantités peuvent être supposées positives ou nulles.

S_{ab} n'est isométrique qu'aux surfaces de la famille correspondant aux mêmes valeurs respectives des paramètres a et b. Les isométries sont alors données par (8.31) *et* (8.32) *c'est-à-dire*

$$U = \varepsilon(u - u_0) \qquad (\varepsilon = \pm 1), \tag{8.34}$$

$$V = \varepsilon' v \qquad (\varepsilon' = \pm 1). \tag{8.35}$$

On constate que, pour tous ces paramétrages de S, on obtient toujours la même congruence de sphères [Σ] car $R^2 = v^2 = V^2$ et, par suite, le même couple de systèmes cycliques [C] et [C′] de rayon constant a.

A toute surface S_{ab} il correspond donc un couple de systèmes cycliques du type 3_2 et un seul.

9. Étude du cas 4. — *a.* Ce cas correspond à l'hypothèse

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad r = f(u)\sin\theta. \tag{9.1}$$

Par un changement de variable de la forme $u = u(U)$ on peut se ramener au cas où

$$E = 1. \tag{9.2}$$

Les équations (5.2), (5.5) sont vérifiées. D'après (9.2), (5.6) donne

$$\nu = g(v), \qquad r = g(v) f(u)\sin\theta. \tag{9.3}$$

En tenant compte de (9.3), (5.3) devient

$$\mu\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} r\sin\theta\right) = 0, \tag{9.4}$$

d'où deux cas.

1° *Cas* 4_1 :

$$r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} r\sin\theta = 0. \tag{9.5}$$

2° *Cas* 4_2 :

$$\mu = 0. \tag{9.6}$$

ce cas est un cas particulier de 2 (cas $2_{2,1}$) mais doit être étudié, car le cas $2_{2,1}$ avait été réservé.

b. Étude du cas 4_1. — 1° Il conduit à

$$\sqrt{G} = h(v)\frac{\sin\theta}{r} = \frac{h(v)}{f(u)}. \tag{9.7}$$

En vertu de (9.5), (5.7) devient

$$r\frac{\partial\nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial r}{\partial v} - \sqrt{G}\, r\sin\theta = 0. \tag{9.8}$$

En utilisant (9.3), (9.7) et en divisant les deux membres par $r\sin\theta \not\equiv 0$ on obtient

$$f^2(u) g'(v) = h(v). \tag{9.9}$$

D'après (9.7) $h(v)$ ne peut pas être identiquement nulle. L'équation (9.9) où u et v sont variables indépendantes entraîne alors

$$f(u) = a \qquad (a,\ \text{constante non nulle}). \tag{9.10}$$

D'après (9.7), G est donc fonction de v seul. Par un changement de variable de la forme $v = v(V)$ on peut se ramener au cas où

$$G = 1. \tag{9.11}$$

(9.7) et (9.9) conduisent alors à :

$$h(v) = a, \qquad g'(v) = \frac{1}{a}.$$

En intégrant, moyennant un changement de variable de la forme $v = V + v_0$ qui n'altère pas les hypothèses précédentes

$$g(v) = \frac{v}{a}.$$

(9.1) et (9.3) s'écrivent alors

$$r = a \sin\theta, \tag{9.12}$$

$$\nu = v \sin\theta. \tag{9.13}$$

Les surfaces S *sont nécessairement des développables* $(ds^2 = du^2 + dv^2)$. Donc $K = 0$.

(9.8) et (9.1) montrent que (5.1) est vérifié. ν n'étant pas identiquement nul d'après (9.13), (5.9) conduit à

$$1 + \frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0. \tag{9.14}$$

En tenant compte de (9.14) et du fait que K est nul (5.4), (5.12) donnent

$$\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0, \tag{9.15}$$

$$\left(\nu\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial u}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0. \tag{9.16}$$

En utilisant (9.8), (9.3), l'équation (5.8) s'écrit

$$\frac{\partial r}{\partial u}\left(\frac{\partial\mu}{\partial v} + \cos\theta\right) - \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u} = 0.$$

D'après (9.12), cette équation devient

$$\cos\theta\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial v} + \cos\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right] = 0. \tag{9.17}$$

Enfin (5.10) et (5.11) prennent la forme suivante en tenant compte de (9.12), (9.13) :

$$-\sin^2\theta[(a^2 + v^2)\cos\theta + v\mu]\frac{\partial\theta}{\partial v} + (\mu\sin\theta + \nu\cos\theta)\left(\frac{\partial\mu}{\partial v} + \cos\theta\right) + \sin\theta\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0. \tag{9.18}$$

$$-\sin^2\theta[(a^2 + v^2)\cos\theta + v\mu]\frac{\partial\theta}{\partial u} + (\mu\sin\theta + \nu\cos\theta)\frac{\partial\mu}{\partial u} + \nu\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0. \tag{9.19}$$

Si $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$ n'est pas identiquement nul, (9.15) conduit à $\frac{\partial r}{\partial u} = 0$ et d'après (9.12) à $\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0$. (9.16) montre alors que $\frac{\partial\mu}{\partial u}$ est identiquement nul, ce qui entraîne une contradiction pour (9.19) puisque v n'est pas identiquement nul. Il faut donc

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0.$$

(9.14), moyennant un changement de variable de la forme $u = \mathrm{U} + u_0$, compatible avec les hypothèses précédentes, donne

$$\lambda = -u. \tag{9.21}$$

Après division par $\sin\theta$ les équations (9.18), (9.19) se mettent sous la forme

$$(\mu + v\cos\theta)\left(\frac{\partial\mu}{\partial u} - v\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) - a^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0,$$
$$(\mu + v\cos\theta)\left(\frac{\partial\mu}{\partial v} - v\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} + \cos\theta\right) - a^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

Les premiers membres de ces équations sont respectivement les dérivées partielles par rapport à u et v de la fonction $\frac{1}{2}[(\mu + v\cos\theta)^2 + a^2\cos^2\theta]$. Ces équations équivalent donc à

$$(\mu + v\cos\theta)^2 + a^2\cos^2\theta = b^2 \qquad (b,\ \text{constante}). \tag{9.22}$$

Il résulte de cette équation

$$\frac{\mathrm{D}(\mu + v\cos\theta,\ \theta)}{\mathrm{D}(u,\ v)} = 0.$$

Cette condition entraîne que (9.17) est vérifiée. (9.17) est donc une conséquence de (9.22).

Dans l'hypothèse 4_1 le système est équivalent au système des six équations (9.2), (9.11), (9.12), (9.13), (9.21), (9.22).

D'où la solution générale du cas 4_1 :

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \qquad (\text{S, développable})$$
$$(\theta,\ \text{fonction arbitraire de } u,\ v),$$
$$r = a\sin\theta, \qquad \lambda = -u, \qquad \nu = v\sin\theta,$$
$$(\mu + v\cos\theta)^2 + a^2\cos^2\theta = b^2,$$

$a \neq 0$, b, *constantes.*

2° *Interprétation géométrique.* — Nous l'effectuons dans le cas du plan S' rapporté aux axes orthonormés $\mathrm{O}xyz$ directs ($\mathrm{O}z$ normale au plan) dont le ds^2 a la forme requise pour la solution 4_1.

$$\underset{\mathrm{O}xyz}{\mathrm{M}'(u,\ v)}\begin{cases} u, \\ v, \\ 0. \end{cases}$$

Les axes locaux $\mathrm{M}'xyz$ ont la direction et le sens des axes $\mathrm{O}xyz$.

Les coordonnées de $\Omega'(u,\ v)$ dans $\mathrm{O}xyz$ sont

$$\underset{\mathrm{O}xyz}{\Omega'(u,\ v)}\begin{cases} u + \lambda = 0, \\ v + \sigma = (\mu + v\cos\theta)\cos\theta, \\ \omega \quad\ \ = (\mu + v\cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

La première de ces coordonnées montre que les cercles $C'(u, v)$ sont orthogonaux au plan Oyz. Les deux autres montrent que, si ce plan est rapporté au système de coordonnées polaires de pôle O, d'axe polaire $\overrightarrow{Oy}$ avec $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, l'un des systèmes de coordonnées polaires de $\Omega'(u, v)$ est

$$\Omega'(u, v) \begin{cases} \varphi = \theta & \text{(angle polaire)}, \\ \rho = \mu + v\cos\theta = \varepsilon\sqrt{b^2 - a^2\cos^2\theta} & \text{(rayon vecteur)}, \end{cases}$$

d'après (9.22), avec $\varepsilon = \pm 1$. θ est aussi l'angle polaire du diamètre $M'\eta$ de C'. Ce diamètre passe donc par O. *Par suite, les plans des cercles* $C'(u, v)$ *passent tous par l'axe* Ox.

Le cercle $C'(u, v)$ peut être déterminé par les deux points P_1 et P_2 où il coupe Oyz. L'un des systèmes de coordonnées polaires de ces points est

$$P_1 \begin{cases} \varphi_1 = \theta, \\ \rho_1 = \varepsilon\sqrt{b^2 - a^2\cos^2\theta} + a\sin\theta; \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} \varphi_2 = \theta, \\ \rho_2 = \varepsilon\sqrt{b^2 - a^2\cos^2\theta} - a\sin\theta. \end{cases}$$

Condition nécessaire.

$$(9.23) \qquad \rho_1 - \rho_2 = 2a\sin\theta, \qquad \rho_1\rho_2 = b^2 - a^2,$$

ρ_1 et $-\rho_2$ sont les deux racines de l'équation

$$(9.24) \qquad \rho^2 - 2a\sin\theta\rho + a^2 - b^2 = 0.$$

P_1 et le symétrique P'_2 de P_2 par rapport à O sont les deux points de l'axe $\overrightarrow{O\eta}$, d'angle polaire θ qui sont sur le cercle Γ_1 dont (9.24) est l'équation en coordonnées polaires. Son équation cartésienne est

$$(9.25) \qquad y^2 + z^2 - 2az + a^2 - b^2 = 0.$$

D'après (9.23), P_2 est l'inverse de P_1 dans l'inversion de pôle O de puissance $b^2 - a^2$.

Condition suffisante. — Inversement soit Q l'un des points communs à Γ_1 et à l'axe $\overrightarrow{O\eta}$ d'angle polaire θ. Son rayon vecteur est l'une des racines de (9.24)

$$a\sin\theta + \varepsilon\sqrt{b^2 - a^2\cos^2\theta}.$$

Q est donc le point P_1 associé à l'un des deux cercles $C(u, v)$ correspondant à une valeur donnée de $\theta(u, v)$, suivant le signe de ε. Le lieu de P_1 (donc de P'_1) est donc le cercle Γ_1, d'où le résultat :

Les cercles $C'(u, v)$ *sont orthogonaux au plan* Oyz *et leurs plans passent par* Ox.

Le lieu géométrique de P_1 *est le cercle* Γ_1 *d'équation* (9.25). *Le lieu géométrique de* P_2 *est le symétrique de* Γ_1 *par rapport à* $O : \Gamma_2$.

Les points P_1, P_2 *correspondant à un même cercle* C′ *sont homologues dans l'inversion* $(O, b^2 - a^2)$ *qui échange* Γ_1 *et* Γ_2,

Ce qui précède détermine une famille de cercles à un paramètre tous invariants dans l'inversion $(O, b^2 - a^2)$. Tous les systèmes du type 4_1, une fois rattachés (par déformation) au plan $S'(Oxy)$ constituent une famille de cercles à un paramètre. La correspondance de ces cercles avec les points du plan est arbitraire, [$\theta(u, v)$ arbitraire].

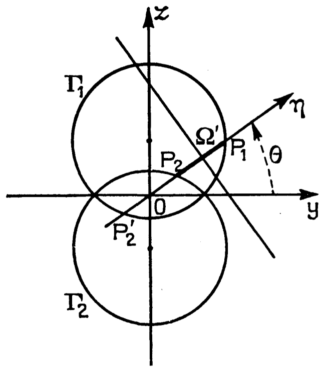

Fig. 4. $b^2 - a^2 > 0$ $(b \neq 0)$.
θ peut prendre toutes les valeurs en choisissant convenablement le signe de a.

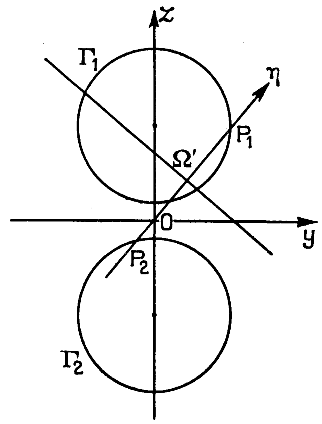

Fig. 5. $b^2 - a^2 < 0$, $(b \neq 0)$.
θ doit vérifier $a^2 \cos^2 \theta \leq b^2$.

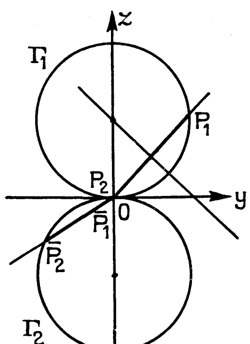

Fig. 6. $b^2 = a^2 \neq 0$.
Les cercles C′ sont situés sur deux sphères.

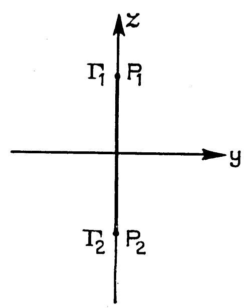

Fig. 7. $b = 0$.
Tous les cercles C′ sont confondus.

c. Étude du cas 4_2. — 1° Il correspond à $\mu = 0$.

En tenant compte de cette condition, (5.1) devient

$$\cos\theta\left(r\frac{\partial \nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial r}{\partial v} - r\sqrt{G}\sin\theta\right) = 0,$$

d'où les deux cas :

Cas $4_{2,1}$,

$$\cos\theta = 0.$$

Cas $4_{2,2}$,

$$r\frac{\partial\nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial r}{\partial v} - r\sqrt{G}\sin\theta = 0. \tag{9.26}$$

2° *Étude du cas* $4_{2,1}$. — C'est un cas particulier du cas 2_1 qui a été complètement étudié grâce à l'étude de 3. D'ailleurs ni 3_1 ni 3_2 ne fournissent de solutions telles que pour le réseau de courbes coordonnées associé on ait E fonction de u seul.

3° *Étude du cas* $4_{2,2}$. — L'équation (9.26) permet de mettre (5.7) sous la forme

$$\lambda\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}r\sin\theta\right) = 0,$$

d'où à nouveau deux cas :

Cas $4_{2,2,1}$,

$$\lambda = 0.$$

Ce cas entre dans le cas 3, mais ne conduit à aucune solution, d'après la remarque du paragraphe précédent.

Cas $4_{2,2,2}$,

$$r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}r\sin\theta = 0.$$

C'est un cas particulier du cas 4_1. Il suffit d'ajouter à l'hypothèse relative à ce cas la condition supplémentaire $\mu = 0$. $\theta(u, v)$ n'est plus arbitraire, mais déterminé par la condition

$$(a^2 + v^2)\cos^2\theta = b^2.$$

10. Étude du cas 5°. — Il peut se ramener à l'hypothèse

$$E = 1, \qquad \lambda = 0. \tag{10.1}$$

L'équation (5.6) s'écrit alors

$$r\frac{\partial\nu}{\partial u} - \nu\frac{\partial r}{\partial u} = 0. \tag{10.2}$$

En tenant compte de (10.2), (5.3) devient

$$\mu\left(r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}r\sin\theta\right) = 0.$$

On peut écarter la possibilité $\mu = 0$ qui conduit au cas 3 qui est incompatible avec l'hypothèse $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$. Il reste la possibilité

$$r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}r\sin\theta = 0. \tag{10.3}$$

En tenant compte de (10.3), (5.7) devient

$$r\frac{\partial \nu}{\partial v} - \nu\frac{\partial r}{\partial v} - \sqrt{G}\, r \sin\theta = 0. \tag{10.4}$$

(5.1) prend alors la forme

$$\mu\left(r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial v} - \sin\theta\frac{\partial r}{\partial v}\right) = 0.$$

Le cas $\mu = 0$ étant écarté cette équation conduit à l'un des deux cas suivants :

Cas 5_1,

$$\sin\theta = 0.$$

C'est un cas particulier du cas 1 qui a été complètement étudié.

Cas 5_2,

$$r = f(u)\sin\theta.$$

C'est un cas particulier du cas 4. Cela ne conduit à aucune solution car 4_1 est incompatible avec $\lambda = 0$ et 4_2 contenant l'hypothèse $\mu = 0$ ramène au cas 3 qui est incompatible avec 5.

Le cas 5 *n'introduit donc aucune solution nouvelle.*

11. Conclusion. — L'ensemble des solutions du problème de la recherche des systèmes cycliques arbitrairement déformables peut, en adoptant une classification suivant la nature de la surface S, être présenté de la façon suivante. Certaines surfaces sont d'ailleurs susceptibles d'intervenir dans des solutions de plusieurs types.

1° S *quelconque*. — Solutions du type 1_1 (de Ribaucour) (paragraphe 6 *b*).
Le cercle $C(u, v)$ est dans le plan tangent à S en $M(u, v)$.

2° S *isométrique à une surface de révolution*. — Solutions du type $2_{1,2,2}$ (paragraphe 7 *b*).

Le cercle $C(u, v)$ est orthogonal au plan tangent à S en $M(u, v)$ et son plan contient $M(u, v)$. Ces solutions sont associées aux congruences de sphères de Ribaucour arbitrairement déformables sauf celles pour lesquelles $C(u, v)$ passe par $M(u, v)$.

3° S *isométrique à certaines surfaces de révolution*. — Solutions du type 3 (paragraphe 8).

Le cercle $C(u, v)$ a un rayon constant, son axe passe par $M(u, v)$. Ces solutions peuvent s'associer à des congruences de sphères de Ribaucour arbitrairement déformables particulières. Le cas 3_2 fournit la solution générale dont le cas 3_1 est un cas particulier.

4° *Le* ds^2 *de* S *appartient à une famille à quatre paramètres*. — Solutions du type $2_{1,2,1}$ (paragraphe 7 *b*).

Le cercle $C(u, v)$ est orthogonal au plan tangent à S en $M(u, v)$, mais son plan ne contient pas $M(u, v)$. Parmi ces surfaces S figurent les développables (cas $A = 0$, $B = 2h$) et, comme l'a montré M. Vincensini, des surfaces isométriques aux quadriques imaginaires de Darboux (tangentes en un point au cercle de l'infini). Ces dernières correspondent aux systèmes cycliques de rayon constant du type $2_{1,2,1}$.

5° S *est développable*. — Solutions du type $1_{2,1}$ (paragraphe $6b$).

Le cercle $C(u, v)$ est dans un plan parallèle an plan tangent à S en $M(u, v)$.

Solutions du type 4_1 (paragraphe $9b$).

Étant donnée une surface trajectoire orthogonale des cercles d'un système cyclique arbitrairement déformable attaché à S, cette surface, envisagée comme une congruence de points attachée à S *cesse en général* d'être une trajectoire orthogonale des cercles du système cyclique envisagé dès qu'on déforme celui-ci en déformant S. L'étude qui précède nous met en mesure de déterminer, pour un système cyclique arbitrairement déformable donné, les trajectoires orthogonales persistantes des cercles du système.

Si $Q(u^i)$ est le point de l'une de ces trajectoires orthogonales, la persistance de la surface (de la congruence de points) $[Q(u^i)]$ comme trajectoire orthogonale s'exprime par les deux conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

— $Q(u^i)$ appartient au cercle $C(u^i)$.

— Le plan tangent en $Q(u^i)$ à la surface décrite par ce point est, et reste normal au cercle $C(u^i)$ lorsque S se déforme arbitrairement. Ce plan tangent en $Q(u^i)$ à $[Q(u^i)]$ est donc lui-même attaché à S et, d'après l'étude faite au paragraphe (I.2), les trajectoires persistantes $[Q]$ appartiennent à l'un des trois types suivants :

1^{er} *type*. — $Q(u^i)$ est l'un des points de contact avec son enveloppe de la sphère $\Sigma(u^i)$ d'une congruence $[\Sigma]$ admettant S pour déférente.

Dans ce cas, *la tangente à* $C(u^i)$ *en* $Q(u^i)$ *passe par* $M(u^i)$.

2^e *type*. — $Q(u^i)$ est dans le plan tangent à S en $M(u^i)$ et le plan tangent à la surface qu'il décrit est perpendiculaire au plan tangent à S.

Dans ce cas, *le cercle* $C(u^i)$ *est tangent en* $Q(u^i)$ *au plan tangent à* S *en* $M(u^i)$.

3^e *type*. — $Q(u^i)$ est en $M(u^i)$.

Dans ce cas, *le cercle* $C(u^i)$ *est orthogonal en* $M(u^i)$ *à* S.

Trajectoires orthogonales du premier type. — La condition nécessaire signalée montre que de telles trajectoires orthogonales ne peuvent se rencontrer que dans le cas $2_{1,2,2}$ qui est le seul cas, autre que le cas de Ribaucour, où le plan de $C(u^i)$ contient $M(u^i)$ ($\nu = 0$).

Dans ce cas, il y a effectivement deux trajectoires orthogonales du premier type si $A \neq 0$. *Ce sont les deux nappes de l'enveloppe de la congruence de sphères de Ribaucour associée à toute solution* $2_{1,2,2}$ *avec* $A \neq 0$.

Trajectoires orthogonales du deuxième type. — Elles se présentent dans le cas 1_1 *où, d'après le théorème de Ribaucour, toutes les trajectoires orthogonales sont du deuxième type.*

Il n'y a pas de trajectoires orthogonales de ce type dans les cas $2_{1,2,1}$ et $2_{1,2,2}$, d'après la condition nécessaire donnée plus haut. De même pour le cas $1_{2,1}$.

Dans le cas 3 elles ne peuvent se présenter que si les cercles $C(u, v)$ et $C'(u, v)$ sont tangents en $Q(u, v)$ au plan tangent en $M(u, v)$ à S. Le cercle $C_\Sigma(u, v)$ introduit au paragraphe (8.c, 3) a alors même rayon a que C et C′. Cela n'a lieu que si $a = b$ dans la solution 3_2.

Mais il suffit de se placer dans le cas où S est de révolution pour voir que $Q(u, v)$ décrit une surface de révolution de même axe, tangente à $C(u, v)$ et $C'(u, v)$, qui n'est donc pas une trajectoire orthogonale de ces cercles.

Il n'y a donc pas de trajectoire orthogonale du deuxième type pour les solutions 3.

Le fait que $\Omega(u, v)$, centre de $C_\Sigma(u, v)$ ne décrive pas une surface orthogonale en ce point à l'axe de ce cercle montre que *le système cyclique de rayon constant* $[C_\Sigma]$ *n'est pas un système de Ribaucour contrairement à ce qui a lieu pour* $[C]$ *et* $[C']$.

Dans le cas 4_1, de telles trajectoires orthogonales ne peuvent exister que dans le cas $b^2 = a^2$. Lorsqu'on prend pour développable particulière un plan S′ les points $Q'(u, v)$ coïncident tous avec le point fixe O. Dans une déformation arbitraire le point $Q(u, v)$ reste invariablement lié à un plan matériel qui roule sans glisser sur la développable S, il décrit donc une courbe trajectoire orthogonale des plans tangents de S.

Dans le cas 4_1 $(a^2 = b^2)$ *il existe une trajectoire orthogonale du deuxième type qui se réduit à une courbe ou exceptionnellement un point. C'est une trajectoire orthogonale des plans tangents de* S.

Trajectoires orthogonales du troisième type. — Il y a une trajectoire orthogonale de ce type (c'est S *elle-même) pour les systèmes cycliques, étudiés par Darboux, pour lesquels* $C(u^i)$ *est orthogonal à* S *en* $M(u^i)$, *c'est-à-dire pour les solutions* $2_{1,2,2}$ *avec* $A = 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages.

L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 3e éd., N. Zanichelli, Bologne.
E. Cartan, *Leçons sur les espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris.
G. Darboux, *Théorie des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris.
J. Favard, *Cours de Géométrie différentielle locale*, Gauthier-Villars, Paris.
Ricci, *Lezioni sulla teoria delle superficie*, Litografia, Padoue.

Notes et Mémoires.

BACKES, *Recherches de Géométrie anallagmatique* (*Mém. Acad. Royale*, t. XXIX, 1956).

BACKES, *Sur les congruences pseudo-sphériques* (*Mém. Acad. Royale*, t. XXXI, 1959).

BELTRAMI, *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* (*Opere*, t. II, Mém. XXX, p. 74-118).

DEMOULIN, *Courbure des congruences de sphères* (*Bull. Acad. de Belgique*, 5e série, t. **19**, 1933 et t. **21**, 1935).

J. DRACH, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* [*C. R. Congrès Sociétés Savantes* 1925 (Sciences)].

S. FINIKOFF, *Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes* (*Bull. Sc. Math.* t. **53**, 1929).

RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie des surfaces courbes* (*J. Math. pures et appl.*, 4e série, t. **7**, 1891).

ROSSINSKI, Différentes Notes présentées à l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., années 1935 à 1938.

SIMONART, *Sur les congruences de Ribaucour* (*Bull. Acad de Belgique*, 1946).

VASSEUR, *Sur la déformation des congruences de normales* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **191**, 1930, p. 819).

P. VINCENSINI, *Courbure des congruences de sphères* (*J. Math. pures et appl.*, t. **16**, 1937).

P. VINCENSINI, *Questions de géométrie liées au caractère invariant de certains réseaux par déformation arbitraire de leur surface support* [*Ann. Éc. Norm.*, (**3**), t. **64**, p. 207)].

P. VINCENSINI, *Sur une généralisation d'un problème de déformation de L. Bianchi* (*Congrès de Géométrie différentielle*, Pise 1953, Éd. Cremonese).