

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. H. LANGE

Sur les cercles de remplissage non-euclidiens

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 77, n° 3 (1960), p. 257-280

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_3_257_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES CERCLES DE REMPLISSAGE NON-EUCLIDIENS

PAR M. L. H. LANGE.

INTRODUCTION. — Les recherches exposées dans ce Mémoire concernent en premier lieu certaines familles de fonctions holomorphes et non bornées dans le cercle unité. Dans la plupart des cas, nous traiterons de fonctions caractérisées par une hypothèse concernant leur comportement sur un chemin spiralé à l'intérieur du cercle-unité qui s'approche asymptotiquement de la frontière de cet ensemble. Quelques-uns des résultats constituent des analogues non euclidiens, semblables à certains théorèmes classiques sur les fonctions entières. (On a annoncé une partie de ce travail dans [10].)

Si $g(z)$ désigne une fonction entière, nous savons que, dans un voisinage arbitraire V de $z = \infty$, la fonction présente le « comportement de Picard », c'est-à-dire que, pour toutes les valeurs complexes et finies, a , avec une exception au plus, l'équation $g(z) = a$ a une infinité de racines dans V . M. Julia a prouvé que, pour $g(z)$, il existe au moins une demi-droite Λ allant de l'origine vers l'infini, ayant la propriété que, dans n'importe quel angle positif ayant son sommet à l'origine et dont Λ est la bissectrice, $g(z)$ présente le comportement de Picard, $g(z) = a$ a des racines dans cette portion du plan ([8]).

Ce théorème a été précisé par M. Milloux ([11] et [12]) qui a prouvé l'existence pour $g(z)$ de ce qu'il a appelé les *cercles de remplissage*, éléments d'une suite $\{C_n\}$ de cercles du plan de z dont les centres z_n s'approchent de $z = \infty$; le cercle C_n est vu de l'origine sous un angle α_n , où $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; dans le domaine C_n ,

$g(z)$ prend toutes les valeurs ω pour lesquelles $|\omega| < \frac{1}{\mu_n}$, avec l'exception possible d'un ensemble de valeurs pouvant être enfermé dans un cercle de rayon $\mu_n > 0$, où $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$.

En 1959, M. W. Seidel, considérant le cercle-unité comme un plan non euclidien de la variété de Poincaré, et se servant de la théorie des familles normales de M. Montel, a prouvé des théorèmes analogues à celui de M. Julia. Il a montré que si $f \in \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est une certaine sous-catégorie de la famille des fonctions holomorphes et non bornées dans $|z| < 1$, il existe une spirale, S_0 , s'approchant de $|z| = 1$ asymptotiquement, ayant la propriété que, dans la réunion de tous les disques non euclidiens ayant leurs centres sur S_0 et tous le même rayon non euclidien positif arbitraire, la fonction $f(z)$ présente encore le comportement de Picard (théorèmes 1 et 3 de [13]).

Parmi les principaux résultats de ce travail, on trouvera, parallèlement, un théorème analogue au théorème de M. Milloux avec introduction du concept «d'ensemble de disques- ρ » défini plus bas (§4) ([10]). On ne s'est pas servi, dans cette étude, de la théorie des familles normales. On a obtenu les résultats, y compris un principe général sur les phénomènes des angles de Stolz, au moyen d'applications variés de certaines formes non euclidiennes du théorème de Schottky.

Comme certains éléments de la méthode utilisée dans cette étude sont dans leur esprit parallèles aux méthodes employées par Valiron dans son traitement des fonctions entières, ce que nous lui devons est évident. Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers M. Seidel qui n'a pas seulement découvert un théorème analogue à celui de M. Julia, mais nous a aussi suggéré d'étudier les cercles de remplissage de M. Milloux.

1. TERMINOLOGIE. — On trouvera certaines des définitions données dans ce paragraphe, dans [13] et dans [6], tandis que d'autres nous sont propres.

Nous allons traiter de fonctions caractérisées par une hypothèse concernant leur comportement sur une spirale, intérieure au cercle-unité, qui s'approche asymptotiquement de la frontière de celui-ci. Une *spirale* sera une courbe simple définie par une équation $z = \zeta(t)$, où $0 \leq t < \infty$, et $\zeta(t)$ est une fonction continue à valeurs complexes ayant les propriétés suivantes :

$$0 < |\zeta(t)| < 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\zeta(t)| = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \arg \zeta(t) = \infty.$$

Nous nous servirons d'une métrique non euclidienne. (Pour une discussion des sujets de géométrie non euclidienne traités dans cette étude, on renvoie le lecteur à [4], [5] et [9].) Ainsi, si z_0 et z sont deux points à l'intérieur du cercle-unité, le nombre $d(z_0, z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$, où $u = \left| \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right|$, est la distance non euclidienne (hyperbolique) entre ces points.

Il importe que cette métrique soit invariante pour des déplacements rigides non euclidiens. C'est-à-dire que, si $h(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta} z}$ alors

$$d(z_1, z_2) = d(h(z_1), h(z_2)).$$

En outre, il importe également que cette métrique soit *additive*, c'est-à-dire que, si le point z_2 est placé sur le segment non euclidien réunissant les points z_1 et z_3 , alors

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3).$$

Si A et B sont deux sous-ensembles non vides de $|z| < 1$, nous posons

$$d(A, B) = \inf \{ d(z, z') \mid z \in A, z' \in B \}.$$

Si $A = \{z_0\}$, c'est-à-dire que, si A consiste en le seul point z_0 , nous écrivons $d(z_0, B)$, au lieu de $d(\{z_0\}, B)$.

Soit la spirale S définie par l'équation $z = \zeta(t)$. Étant donnée une valeur t , il existe une première valeur de t , soit t' , telle que $t < t'$ et $\arg \zeta(t') = \arg \zeta(t) + 2\pi$; dans cette étude, nous utiliserons le symbole t' si, et seulement si l'on attribue à t' ce sens particulier. Ceci fixé, nous définirons avec M. Seidel les expressions pratiques suivantes pour mesurer « l'étroitesse » de la spirale S. Nous posons

$$\underline{\mu}(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\zeta(t), \zeta(t'))$$

et

$$\bar{\mu}(S) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\zeta(t), \zeta(t')).$$

Parfois, lorsque le contexte ne permettra aucun doute, nous remplacerons, $\bar{\mu}(S)$ par $\bar{\mu}$, par exemple.

Comme c'est Valiron ([15] et [16]) qui a prouvé l'existence de fonctions qui, quoique holomorphes et non bornées dans le cercle-unité, *demeurent* néanmoins *bornées sur une spirale*, nous utiliserons le symbole $(V, \underline{\mu} < \infty)$ pour la famille de toutes les fonctions holomorphes et non bornées dans le cercle-unité pour chacune desquelles existe une spirale S pour laquelle $\underline{\mu}(S) < \infty$, et sur laquelle la fonction reste bornée. De même, si le premier terme de notre symbole est V^* , au lieu de V, le symbole indiquera la famille des fonctions holomorphes dans le cercle-unité qui *tendent vers l'infini* sur une spirale de cette sorte. Par exemple, nous pourrions parler de la famille $(V^*, \bar{\mu} = 0)$. En outre, il sera parfois opportun d'utiliser un symbole semblable en parlant d'une spirale *spécifique*. Par exemple, nous écrirons $f \in (V^*, S, \bar{\mu} = 0)$ si la fonction f est holomorphe, non bornée dans le cercle-unité et tend vers l'infini le long de la spirale spécifique S mentionnée dans le symbole. Notons que la famille \mathcal{F} , mentionnée dans l'introduction, est la famille

$$\mathcal{F} = (V, \underline{\mu} < \infty) \cup (V^*, \bar{\mu} < \infty).$$

Dans la suite, \mathcal{F} aura cette signification.

Soient S une spirale donnée par $z = \zeta(t)$, $0 \leq t < \infty$, et $f(z)$ une fonction donnée, définie pour $|z| < 1$, telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\zeta(t)) = v$, nous appelons le nombre v , *la valeur asymptotique* de $f(z)$ le long de S. Les différentes familles de fonctions

dont nous parlerons sont non vides : cela peut se déduire des travaux de MM. F. Bagemihl et W. Seidel, qui ont obtenu des exemples de fonctions holomorphes et non bornées dans le cercle-unité et qui possèdent des valeurs asymptotiques, finies ou infinies, données, sur n'importe quel ensemble dénombrable donné de spirales disjointes (cf. le corollaire 1 de [3]), aussi bien que sur certains ensembles de spirales disjointes ayant la puissance du continu ([2]).

Si S est la spirale mentionnée ci-dessus, nous désignerons par $S(t \geq t_0)$ une certaine « queue » de la spirale S; c'est-à-dire l'ensemble de tous les points sur S pour lesquels $t \geq t_0$. Si $0 < t_0 < \infty$, et si nous posons $S' = S(t \geq t_0)$, alors S' est elle-même une spirale selon notre définition.

Étant donné un point τ sur $|z| = 1$, l'ensemble de tous les points z de $|z| < 1$ pour lesquels

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \arg(1 - \bar{\tau}z) < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad |z - \tau| < \varepsilon,$$

où α et β sont des angles donnés et ε est assez petit pour que la frontière de l'ensemble ainsi défini n'ait que le point τ de commun avec $|z| = 1$, s'appellera un *angle de Stolz* en τ , et sera symbolisé par Δ_τ . Si $\alpha = -\beta$, l'ensemble ainsi défini s'appellera un *angle de Stolz symétrique* de sommet τ et d'ouverture 2β , et sera symbolisé par $\Delta_{\tau, \beta}$.

Si A est un sous-ensemble de $|z| < 1$, \bar{A} représentera la fermeture de A (ou l'adhérence de A), c'est-à-dire, le plus petit ensemble fermé contenant A. Si H est un sous-ensemble quelconque de $|z| < 1$ tel que \bar{H} ait au moins un point commun avec $|z| = 1$, nous désignerons par $R(f, H)$ l'ensemble de toutes les valeurs complexes a pour chacune desquelles il existe une suite de points $\{z_n\}$, avec $z_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, telle que $f(z_n) = a$.

Si F est l'ensemble de tous les nombres complexes finis et si E est un sous-ensemble de F, le symbole $\mathcal{C}E$ désignera le complément de E relatif à F. En outre, le symbole $\Delta(E)$ désignera le diamètre de E, c'est-à-dire

$$\Delta(E) = \sup \{ |z - z'| \mid z, z' \in E \}.$$

Soit d_0 , un nombre positif, nous définirons par le symbole $C(z_0, d_0)$ l'ensemble

$$C(z_0, d_0) = \{ z \mid d(z_0, z) < d_0 \}$$

dans lequel le terme z_0 désigne un point intérieur au cercle-unité. Ainsi, $C(z_0, d_0)$ est le disque non euclidien ouvert dont le centre non euclidien est en $z = z_0$ et dont le rayon non euclidien est d_0 . Pour indiquer la fermeture d'un tel disque, nous utiliserons le symbole $\bar{C}(z_0, d_0)$. Nous adoptons la convention commode que, désormais les termes « disque », « centre », et « rayon » devront être entendus dans le sens non euclidien, sauf s'ils se rapportent au cercle-unité lui-même.

2. LEMME FONDÉ SUR LE THÉORÈME DE SCHOTTKY.

LEMME 1. — Soient η et λ deux nombres tels que $0 < \eta < \lambda < \infty$. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $C(z_0, \lambda)$, ne prenant pas les valeurs 0 et 1 dans $C(z_0, \lambda)$. On a donc

$$(i) \quad |f(z)| < (A \cdot |f(z_0)| + A)^{e^{\lambda+2}} \quad \text{pour } z \in \bar{C}\left(z_0, \frac{\lambda}{2}\right),$$

A étant une constante supérieure à 1. De plus, si la condition

$$|f(z_0)| > (A')^{T(\eta, \lambda)}$$

est vérifiée, avec

$$T(\eta, \lambda) = \frac{\text{th } \lambda}{\text{th } \lambda - \text{th } (\lambda - \eta)}$$

et A' est une constante supérieure à 1, on a

$$(ii) \quad |f(z_0)|^{E(\eta, \lambda)} < |f(z)| \quad \text{pour } z \in \bar{C}(z_0, \lambda - \eta), \quad \text{où } E(\eta, \lambda) = \eta e^{-2\lambda}.$$

[Nous désignerons par $R(\eta, \lambda)$ la réciproque de $E(\eta, \lambda)$.]

Démonstration. — Si $\zeta = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, nous posons $g(\zeta) = f(z)$. La fonction $g(\zeta)$ est alors holomorphe en $|\zeta| < \sigma = \text{th } \lambda$, $g(0) = f(z_0)$, et $g(\zeta)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 pour $|\zeta| < \sigma$.

Posons maintenant $F(\zeta) = g(\sigma\zeta)$. $F(\zeta)$ est holomorphe pour $|\zeta| < 1$ et, puisqu'elle ne prend pas les valeurs 0 et 1, nous pouvons appliquer le théorème de Schottky et écrire

$$(1) \quad |F(\zeta)| < (A \cdot |F(0)| + A)^{\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}},$$

ce qui est valable pour tout $|\zeta| < 1$, A étant une certaine constante supérieure à 1. (Cette forme du théorème de Schottky se trouve dans [14]. Pour la bibliographie, voir [7].)

Revenant à la fonction $g(\zeta)$, nous obtenons

$$(2) \quad |g(\zeta)| < (A \cdot |g(0)| + A)^{\frac{1+\frac{|\zeta|}{\sigma}}{1-\frac{|\zeta|}{\sigma}}},$$

valable pour $|\zeta| < \sigma$.

Si nous prenons σ' fixe vérifiant $0 < \sigma' < \sigma$, nous aurons

$$(3) \quad |g(\zeta)| < (A \cdot |g(0)| + A)^{\frac{1+\frac{\sigma'}{\sigma}}{1-\frac{\sigma'}{\sigma}}}$$

valable pour $|\zeta| \leq \sigma'$.

Posons $\sigma' = \text{th} \frac{\lambda}{2}$, un calcul élémentaire montre que nous pouvons écrire

$$(4) \quad |g(\zeta)| < (A \cdot |g(o)| + A)e^{\lambda+2},$$

pour tout $|\zeta| \leq \text{th} \frac{\lambda}{2}$. La relation (4), traduite dans les termes de notre fonction $f(z)$, donne la relation (i) du lemme.

Afin d'établir la partie (ii) du lemme, nous observerons d'abord que, dans (1), $F(\zeta)$ et $F(o)$ sont permutable. Pour justifier cette remarque, considérons la relation (1) pour une valeur fixe $\zeta = \zeta_1$, $|\zeta_1| < 1$, et utilisons le mouvement non euclidien défini par $t = \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta_1 \zeta}$. Ensuite définissons la fonction $G(t)$ en posant $G(t) = F(\zeta)$. Donc, $G(t)$ est holomorphe pour $|t| < 1$ et n'y prend pas les valeurs 0 et 1. Puisque $G(-\zeta_1) = F(o)$ et $G(o) = F(\zeta_1)$, la relation

$$|G(-\zeta_1)| < (A \cdot |G(o)| + A)^{\frac{1+|\zeta_1|}{1-|\zeta_1|}}$$

montre que nous pouvons écrire

$$|F(o)| < (A \cdot |F(\zeta_1)| + A)^{\frac{1+|\zeta_1|}{1-|\zeta_1|}}.$$

Ceci nous permet de permuter les valeurs $g(\zeta)$ et $g(o)$ de (3), ci-dessus, et en posant maintenant $\sigma' = \text{th}(\lambda - \eta)$, un calcul élémentaire montre que

$$|g(o)| < (A \cdot |g(\zeta)| + A)^{\frac{1}{2}R(\eta, \lambda)} \quad \text{pour tout } |\zeta| \leq \text{th}(\lambda - \eta).$$

Puisque $A \cdot |g(\zeta)| + A < |g(\zeta)|^2$ pour $|g(\zeta)| > 2A$, nous trouvons maintenant que l'inégalité

$$(5) \quad |g(o)| < |g(\zeta)|^{R(\eta, \lambda)}$$

est valable pour tous les ζ de $|\zeta| \leq \text{th}(\lambda - \eta)$ qui vérifient l'inégalité $|g(\zeta)| > 2A$.

Puisque $\frac{1-x}{1+x}$ décroît dans $0 \leq x < 1$, les conditions $|g(o)| > 1$ et $|\zeta| \leq \sigma' = \text{th}(\lambda - \eta)$ entraînent

$$|g(o)|^{\frac{1-\frac{\sigma'}{\sigma}}{1+\frac{\sigma'}{\sigma}}} \leq |g(o)|^{\frac{1-\frac{|\zeta|}{\sigma}}{1+\frac{|\zeta|}{\sigma}}}.$$

Si nous permutons les valeurs $g(o)$ et $g(\zeta)$ de (2) et si $|g(o)| > 1$, nous pouvons écrire

$$(6) \quad \frac{1}{A} \left(|g(o)|^{\frac{1-\frac{\sigma'}{\sigma}}{1+\frac{\sigma'}{\sigma}}} - A \right) \leq \frac{1}{A} \left(|g(o)|^{\frac{1-\frac{|\zeta|}{\sigma}}{1+\frac{|\zeta|}{\sigma}}} - A \right) < |g(\zeta)|.$$

Il s'ensuit que $|g(\zeta)| > 2A$ est vrai pour *tous* les ζ vérifiant $|\zeta| \leq \sigma'$, pourvu que $|g(o)|$ soit assez grand pour vérifier l'inégalité

$$(7) \quad 2A^2 + A < |g(o)|^{1 + \frac{\sigma'}{\sigma}}.$$

Puisque $0 < \frac{\sigma'}{\sigma} < 1$, la relation (7) est vérifiée à condition que

$$2A^2 + A < |g(o)|^{\frac{1 - \sigma'}{\sigma}},$$

valable à son tour si

$$1 < 9 < A' = (2A^2 + A)^2 < |g(o)|^{1 - \frac{\sigma'}{\sigma}}.$$

Enfin, si nous traduisons cette dernière relation et la relation (5) dans les termes de $f(z)$, nous voyons que toutes les propositions du lemme 1 ont été démontrées.

3. LEMME CONCERNANT CERTAINS COUPLES DE POINTS.

LEMME 2. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $|z| < 1$. Soit μ_0 un nombre fixe, $0 < \mu_0 < \infty$, et $\{z_n | n = 1, 2, \dots\}$ une suite de points telle que :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty;$$

(2) pour chaque $n = 1, 2, \dots$, l'ensemble $C_n = C(z_n, \mu_0)$ contient un point ζ_n tel que $f(\zeta_n) = 0$ ou $f(\zeta_n) = 1$;

(3) pour chaque $n = 1, 2, \dots$, le point ζ_n est tel que

$$d(z_n, \zeta_n) = \min \{ d(z_n, z) \mid f(z) = 0 \text{ ou } f(z) = 1 \}.$$

Alors, étant donnés les nombres arbitraires L, ε, δ , pour lesquels on a $0 < L < \infty$, $0 < \varepsilon < \infty$, $0 < \delta < 1$, il existe deux points ζ, Z tels que :

$$(4) \quad \zeta = \zeta_{n_0} \in \{\zeta_n\} \quad \text{pour une certaine valeur } n_0;$$

$$(5) \quad |\zeta| > \delta;$$

(6) le point Z est tel que $d(\zeta, Z) < \varepsilon$ et se trouve sur le segment non euclidien qui joint z_{n_0} à $\zeta_{n_0} = \zeta$;

(7) pour $z \in \overline{C}(z_{n_0}, d(z_{n_0}, Z))$ nous avons $|f(z)| > L$. (Il est possible que ce cercle se réduise au seul point $z_{n_0} = Z$.)

Remarque. — Il découle, en particulier, de la condition (7) que $|f(Z)| > L$ et c'est ce cas particulier que nous utiliserons dans nos premières applications du lemme 2. C'est dans la démonstration du théorème IV, ci-dessous, que nous aurons besoin de la propriété (7) telle qu'elle est exprimée ici.

Démonstration. — Pour chaque $n = 1, 2, \dots$, posons $\tau_n = d(z_n, \zeta_n)$. Puisque $0 \leq \tau_n < \mu_0$, pour $n = 1, 2, \dots$, il existe une suite partielle $\{\tau_{n_k} \mid k = 1, 2, \dots\}$, extraite de la suite $\{\tau_n\}$, qui tend vers un nombre τ , $0 \leq \tau \leq \mu_0$.

Si $\tau = 0$, notre lemme est démontré, par suite de notre définition des nombres τ_n et de notre hypothèse (1). Pour toutes les valeurs assez grandes de k , les choix $\zeta = \zeta_{n_k}$ et $Z = z_{n_k}$ seront suffisants.

Si $0 < \tau \leq \mu_0$, il existe une valeur k_0 de k , telle que, pour tout $k \geq k_0$, nous avons $0 < \frac{1}{2}\tau < \tau_{n_k} < \mu_0$. Pour la commodité dans la suite, nous représenterons la suite partielle $\{\tau_{n_k} \mid k \geq k_0\}$ par $\{\tau_i \mid i = 1, 2, \dots\}$.

Appliquons maintenant le lemme 1 aux disques $C(z_i, \tau_i)$, $i = 1, 2, \dots$, dont chacun ne contient aucun point z pour lequel $f(z) = 0$ ou $f(z) = 1$. Pour cela, prenons ε' tel que $0 < \varepsilon' < \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\tau\right)$. Nous avons alors $0 < \varepsilon' < \tau_i < \mu_0 < \infty$, pour $i = 1, 2, \dots$. Donc, en appliquant le lemme 1 au disque $C(z_i, \tau_i)$, pour $i = 1, 2, \dots$, nous avons

$$(8) \quad F_i = |f(z_i)|^{E(\varepsilon', \mu_0)} \leq |f(z_i)|^{E(\varepsilon', \tau_i)} < |f(z)| \quad \text{pour } z \in \overline{C}(z_i, \tau_i - \varepsilon'),$$

pourvu que

$$(9) \quad |f(z_i)| > (A')^{T(\varepsilon', \tau_i)}$$

soit vérifiée.

Nous montrerons maintenant que (9) est vraie pour toutes les valeurs assez grandes de i . Il en découlera que l'inégalité

$$(10) \quad F_i < |f(z)|$$

est vraie pour $z \in \overline{C}(z_i, \tau_i - \varepsilon')$ et i assez grand.

Puisque

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{th } \tau_i = \text{th } \tau \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \text{th } (\tau_i - \varepsilon') = \text{th } (\tau - \varepsilon'),$$

nous aurons

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T(\varepsilon', \tau_i) = T(\varepsilon', \tau) < \infty.$$

D'une part, la partie droite de l'inégalité (9) est bornée, d'autre part, la partie gauche tend vers l'infini par suite de (1); il s'ensuit que (9) est vérifiée pour i assez grand.

Représentons par Z_i le point du segment de droite non euclidien joignant z_i à ζ_i , point pour lequel $d(z_i, Z_i) = \tau_i - \varepsilon'$, $i = 1, 2, \dots$. Si nous observons maintenant que $\lim_{i \rightarrow \infty} F_i = \infty$ et que $\lim_{i \rightarrow \infty} |\zeta_i| = 1$, nous constatons que, pour i supérieur ou égal à une certaine valeur i_0 , les choix $\zeta = \zeta_i$ et $Z = Z_i$ seront en accord avec les exigences de notre lemme. Le lemme 2 est démontré. [Dans la suite, on utilisera ζ ou ζ_n et Z ou Z_n de façon à rappeler ce lemme; $f(\zeta) = 0$ ou $f(\zeta) = 1$ et $|f(Z)|$ est grand.]

4. L'EXISTENCE DES DISQUES- ρ .

DÉFINITION (R). — Soit $f(z)$ une fonction à valeurs complexes définie pour $|z| < 1$ et prenant ses valeurs dans le plan de ω . Nous dirons que $f(z)$ POSSEDE DES DISQUES- ρ si, étant données les suites $\{L_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ et $\{\varepsilon_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$, où

$$(A) \quad 1 < L_1 < L_2 < \dots < L_\nu < L_{\nu+1} < \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu = \infty,$$

et

$$(B) \quad 1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_\nu > \varepsilon_{\nu+1} > \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

il existe une suite $\{D_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ de disques ouverts, $D_\nu \equiv \{z \mid d(\zeta_\nu, z) < \varepsilon_\nu\}$, dans le cercle-unité, ayant les propriétés suivantes :

$$(C) \quad |\zeta_\nu| < |\zeta_{\nu+1}| \quad (\nu = 1, 2, \dots);$$

$$(D) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(D_\nu, D_{\nu+1}) = \infty;$$

(E) dans chaque disque D_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs ω telles que $|\omega| < L_\nu$, avec l'exception possible d'un ensemble de valeurs, \mathcal{E}_ν , dont le diamètre vérifie l'inégalité $\Delta(\mathcal{E}_\nu) < \frac{2}{L_\nu}$. Nous appellerons une telle suite $\{D_\nu\}$, ou une suite partielle $\{D_{\nu_k} \mid k = 1, 2, \dots\}$, extraite de la suite $\{D_\nu\}$, UN ENSEMBLE DE DISQUES- ρ POUR $f(z)$.

DÉFINITION. — Étant donné un ensemble de disques- ρ pour une fonction $f(z)$, soit $\{\zeta_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des CENTRES de ces disques qui s'appellera UN ENSEMBLE DE POINTS- ρ POUR f et chaque point ζ_ν , s'appellera UN POINT- ρ POUR f .

Remarque 1. — Nous utilisons ici le terme « disque- ρ » à cause de l'analogie avec les cercles de remplissage classiques de M. Milloux.

Remarque 2. — Nous voyons immédiatement que les suites $\{D_\nu\}$ et $\{D_{\nu_k}\}$ vérifient l'équation

$$(F) \quad eR\left(f, \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu\right) = eR\left(f, \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\nu_k}\right)$$

et que cet ensemble ne comprend qu'une seule valeur complexe finie au plus.

Remarque 3. — Il est, bien entendu, possible de donner d'autres définitions pour notre « ensemble de disques- ρ ». Il est par exemple possible d'éviter une mention explicite des conditions (C) et (D), ci-dessus, puisqu'on peut déduire ces propriétés en considérant des sous-ensembles des ensembles de disques- ρ convenablement définis.

Arrivons maintenant à un théorème fondamental :

THÉOREME I. — (Principe d'existence des disques- ρ .) — *Soit $f(z)$, une fonction holomorphe dans $|z| < 1$. S'il existe une constante μ_0 , $0 < \mu_0 < \infty$, et une suite de points $\{z_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ tels que :*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty ;$$

(2) *pour $n = 1, 2, \dots$, il existe un point $\zeta_n \in C_n \equiv C(z_n, \mu_0)$ tel que $f(\zeta_n) = 0$ ou $f(\zeta_n) = 1$;*

(3) *pour $n = 1, 2, \dots$, le point ζ_n satisfait à la condition*

$$d(z_n, \zeta_n) = \min \{ d(z_n, z) \mid f(z) = 0 \text{ ou } f(z) = 1 \},$$

alors, il existe une suite partielle $\{\zeta_{n_\nu} \mid \nu = 1, 2, \dots\}$, extraite de la suite $\{\zeta_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, qui forme un ensemble de points- ρ pour f .

Remarque 1. — Si une fonction $f(z)$, holomorphe dans $|z| < 1$, satisfait à (1) et (2) du théorème I, nous pouvons supposer naturellement qu'elle satisfait aussi à la condition (3). Ceci a pour conséquence immédiate le

COROLLAIRE I. — *Si $f(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$ et satisfait aux conditions (1) et (2) du théorème I, alors $f(z)$ possède des disques- ρ .*

Cependant, le théorème I n'affirme pas seulement l'existence d'un ensemble de disques- ρ pour une fonction donnée mais il renseigne aussi sur la position de cet ensemble.

Démonstration. — Puisque l'hypothèse du théorème I coïncide avec l'hypothèse du lemme 2, nous savons que pour les nombres donnés L^* , $\frac{\varepsilon}{2}$, δ satisfaisant aux conditions $1 < L^* < \infty$, $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \infty$, $0 < \delta < 1$, il existe un couple de points ζ, Z ayant les propriétés suivantes :

$$(4) \quad \zeta = \zeta_{n_0} \in \{\zeta_n\} \text{ pour un certain } n_0 ;$$

$$(5) \quad |\zeta| > \delta ;$$

(6) Z se trouve sur le segment de droite non euclidienne joignant z_{n_0} à $\zeta_{n_0} = \zeta$ et satisfait à $d(\zeta, Z) < \frac{\varepsilon}{2}$;

(7) pour $z \in \overline{C}(z_{n_0}, d(z_{n_0}, Z))$, nous avons

$$|f(z)| > L^*.$$

Si nous admettons maintenant que la fonction $f(z)$ ne prend pas, dans le cercle $C(\zeta, \varepsilon)$, les deux valeurs distinctes a_1 et a_2 , alors la fonction $g(z) = \frac{f(z) - a_1}{a_2 - a_1}$, holomorphe dans ce cercle, n'y prend pas les valeurs 0 et 1.

Donc, en appliquant le lemme 1 à $g(z)$, on voit que, pour $z \in \bar{C}(\zeta, \frac{\varepsilon}{2})$, on a

$$\left| \frac{f(z) - a_1}{a_2 - a_1} \right| < \left(A \cdot \left| \frac{f(\zeta) - a_1}{a_2 - a_1} \right| + A \right)^M, \quad \text{où } M = e^\varepsilon + 2.$$

En tenant compte de (6) et (7) et du fait que $f(\zeta) = 0$ ou $f(\zeta) = 1$, on obtient *en particulier*

$$(8) \quad L^* < |f(Z)| < |a_1| + \frac{A^M}{|a_2 - a_1|^{M-1}} (1 + 2|a_1| + |a_2|)^M.$$

Si nous admettons maintenant que $1 < L < \infty$ et que

$$(9) \quad |a_1| < L, \quad |a_2| < L, \quad |a_2 - a_1| \geq \frac{1}{L},$$

il résulte de (8) que

$$L^* < L + A^M \cdot L^{M-1} (4L)^M < (4AL)^{2M}.$$

Donc il est *nécessaire* que

$$(10) \quad \Lambda(\varepsilon, L^*) \equiv \frac{(L^*)^{\frac{1}{2M}}}{4A} < L.$$

Soient maintenant $\{L_\nu\}$ et $\{\varepsilon_\nu\}$ deux suites remplissant les conditions (A) et (B) de la définition (R). Pour un indice fixe ν , nous considérons les nombres L_ν et ε_ν et nous supposons que δ_ν est un nombre quelconque tel que $0 < \delta_\nu < 1$. Prenons un nombre L_ν^* qui satisfasse à l'inégalité

$$(11) \quad L_\nu < \Lambda(\varepsilon_\nu, L_\nu^*) < L_\nu^*,$$

où

$$\Lambda(\varepsilon_\nu, L_\nu^*) = \frac{(L_\nu^*)^{\frac{1}{2M_\nu}}}{4A} \quad \text{et} \quad M_\nu = e^{\varepsilon_\nu} + 2.$$

Il résulte immédiatement du lemme 2 qu'il existe un couple de points ζ_{n_ν}, Z_ν ayant les propriétés suivantes :

$$(12) \quad \zeta_{n_\nu} \in \{\zeta_n\};$$

$$(13) \quad |\zeta_{n_\nu}| > \delta_\nu;$$

(14) Z_ν se trouve sur le segment de droite non euclidienne joignant z_n à ζ_{n_ν} et satisfait à $d(\zeta_{n_\nu}, Z_\nu) < \frac{\varepsilon_\nu}{2}$;

(15) pour tous $z \in \bar{C}(z_{n_\nu}, d(z_{n_\nu}, Z_\nu))$ nous avons $|f(z)| > L_\nu^* > L_\nu$; en particulier, $|f(Z_\nu)| > L_\nu^*$.

Nous montrerons maintenant que :

(16) dans le disque $D_\nu = C(\zeta_{n_\nu}, \varepsilon_\nu)$, la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs ω qui vérifient $|\omega| < L_\nu$, avec l'exception possible d'un ensemble de valeurs, \mathcal{E}_ν , qui satisfait à l'inégalité $\Delta(\mathcal{E}_\nu) < \frac{2}{L_\nu}$.

S'il n'existe pas de valeur $a \in \mathcal{E}_\nu$, telle que $|a| < L_\nu$, notre affirmation se trouve immédiatement confirmée. S'il existe une telle valeur $a \in \mathcal{E}_\nu$, posons $a = a_1$. S'il n'existe pas de valeur $a_2 \in \mathcal{E}_\nu$, telle que $a_2 \neq a_1$ et $|a_2| < L_\nu$, l'affirmation (16) est vraie encore. Mais s'il existe une telle valeur a_2 , il est nécessaire que $|a_2 - a_1| < \frac{1}{L_\nu}$, car la supposition que l'inégalité $|a_2 - a_1| \geq \frac{1}{L_\nu}$ est vérifiée, conduit à $\Lambda(\varepsilon_\nu, L_\nu^*) < L_\nu$, ce qui contredit (11). Par conséquent (16) est prouvé.

Considérons maintenant tous les termes des suites $\{L_\nu\}$ et $\{\varepsilon_\nu\}$. Ayant obtenu les résultats des trois paragraphes précédents pour le cas $\nu = 1$, nous les obtiendrons pour tous les cas où $\nu \geq 2$, en spécifiant que les δ_ν suivants satisfont à

$$(17) \quad \delta_\nu > |\zeta_{n_{\nu-1}}|$$

et

$$(18) \quad |z| > \delta_\nu \quad \text{entraîne que} \quad d(\zeta_{n_{\nu-1}}, z) \geq \nu.$$

Nous voyons maintenant que la suite $\{D_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ est un ensemble de disques- ρ pour $f(z)$ puisque :

- (19) la propriété (E) de la définition (R) résulte de (16);
- (20) les propriétés (C) et (D) de la définition (R) résultent de (B), (13), (17) et (18). Le théorème I est démontré.

Remarque 5. — Nous n'avons pas épuisé toute la puissance de la condition (15). Il faudra, cependant, utiliser la forme plus générale de cette condition dans la démonstration du théorème IV, plus bas.

5. EXISTENCE DE DISQUES- ρ POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES QUI RESTENT BORNÉES SUR CERTAINES SPIRALES.

LEMME 3. — Soit $f \in (V, \underline{\mu} < \infty)$ et μ_0 un nombre tel que $\underline{\mu} \leq \mu_0$, $0 < \mu_0 < \infty$, il existe alors une suite qui satisfait aux conditions (1) et (2) du théorème I.

D'après ce lemme et le corollaire I, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME II. — Si $f \in (V, \underline{\mu} < \infty)$, f possède des disques- ρ .

Démonstration du lemme 3. — Soit $f \in (V, S, \underline{\mu} < \infty)$ où la spirale S est définie par $z = \zeta(t)$, ($0 \leq t < \infty$) et soit $B < \infty$ une constante telle que, pour $z \in S$, l'inégalité $|f(z)| < B$ soit vérifiée. D'après un théorème de Valiron, il existe une spirale S^* , définie par $z = \zeta^*(t)$, ($0 \leq t < \infty$) sur laquelle la fonction $f(z)$ tend vers l'infini [voir [16]]. A ce propos, on peut déduire du paragraphe 6 de [13] que la proposition suivante, inverse du théorème de Valiron, est fautive : « si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle-unité et qui tend vers l'infini le long d'une spirale S^* , il existe alors une spirale S sur laquelle $f(z)$

demeure bornée ». On peut aussi s'apercevoir de ce fait bien connu, si l'on considère la fonction de Koenigs, discutée dans [1], p. 135-136]. Puisque $|f(z)|$ tend vers l'infini le long de S^* et reste *bornée* sur S , il existe une valeur \bar{t} de t , telle que

$$(1) \quad S(t \geq \bar{t}) \cap S^*(t \geq \bar{t}) = \emptyset.$$

En posant $z^* = \zeta^*(t^*) \in S^*$, admettons maintenant que la fonction $f(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le disque $C(z^*, \mu_0)$. Appliquons le lemme 1 à ce disque, en posant $\lambda = \mu_0$ et $\eta = \frac{3}{8}\mu_0$. Alors, si t^* est suffisamment grand, nous pouvons écrire

$$(2) \quad B < |f(z^*)|^E \left(\frac{3}{8}\mu_0, \mu_0\right) < |f(z)| \quad \text{pour } z \in \bar{C}\left(z^*, \frac{5}{8}\mu_0\right).$$

Le diamètre de $\bar{C}\left(z^*, \frac{5}{8}\mu_0\right)$ est $\frac{5}{4}\mu_0 > \mu_0 \geq \underline{\mu}$; donc, d'après la définition de $\underline{\mu}$, il existe une suite $\{t_j \mid j=1, 2, \dots\}$ de valeurs de t vérifiant

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \infty$$

et

$$d(\zeta(t_j), \zeta(t'_j)) < \frac{5}{4}\mu_0 \quad (j=1, 2, \dots).$$

(Nous employons ici la notation t_j, t'_j dans le sens de la définition du paragraphe 1.)

Soit R_j , le segment *ouvert* du rayon du cercle-unité qui joint le point $\zeta(t_j)$ au point $\zeta(t'_j)$. Il résulte de la condition (1) que pour j suffisamment grand, soit $j \geq j_0$, il existe un point $z_j^* \in S^* \cap R_j$. De plus, pour chaque $j \geq j_0$, l'une ou l'autre des valeurs $d(\zeta(t_j), z_j^*)$ ou $d(z_j^*, \zeta(t'_j))$ est moindre que $\frac{5}{8}\mu_0$. Il résulte de cette remarque que chaque cercle $\bar{C}\left(z_j^*, \frac{5}{8}\mu_0\right)$, $j \geq j_0$, contient un point situé sur la spirale S . Si nous supposons que, pour n'importe quelle valeur de δ , $0 < \delta < 1$, la relation (2) est vérifiée pour tous les $z^* \in S^*$, $\delta < |z^*| < 1$, il s'ensuivrait nécessairement qu'il existe des points $z \in S$ tels que $|f(z)|$ dépasse B , ce qui conduit à une contradiction.

Puisque nous pouvons choisir successivement des valeurs croissantes de δ , le lemme 3 est démontré. La suite $\{z_n \mid n=1, 2, \dots\}$ provient des valeurs successives de $z^* \in S^*$ telles que le disque $C(z^*, \mu_0)$ doive contenir un point pour lequel $f(z)$ prend la valeur 0 ou la valeur 1.

Notre lemme est ainsi démontré et par conséquent aussi le théorème II.

Remarque. — Pour la démonstration du corollaire III, plus bas, le fait suivant est important : les points z_n se trouvent sur une spirale S^* le long de laquelle la fonction $f \in (V, \underline{\mu} < \infty)$ a la valeur asymptotique ∞ .

6. EXISTENCE DE DISQUES- ρ POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES QUI TENDENT VERS L'INFINI LE LONG DE CERTAINES SPIRALES.

LEMME 4. — Soit $f \in (V^*, S^*, \bar{\mu} < \infty)$ où S^* est définie par $z = \zeta^*(t)$, $0 \leq t < \infty$, et soit μ_0 un nombre quelconque tel que $2\bar{\mu} \leq \mu_0$, $0 < \mu_0 < \infty$. Il existe une suite t_n de valeurs de t , telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, et que, dans chaque cercle $C(\zeta^*(t_n), \mu_0)$, la fonction $f(z)$ prenne au moins une des valeurs 0 ou 1.

D'après le corollaire I, ceci a pour conséquence immédiate le

THÉORÈME III. — Si $f \in (V^*, \bar{\mu} < \infty)$, f possède des disques- ρ .

Démonstration du lemme 4. — Soit t_0 une valeur de t telle que, pour tous $t \geq t_0$, on ait

$$(1) \quad |f(\zeta^*(t))| > (A')^p,$$

où A' est la constante absolue supérieure à 1 du lemme 1; et où nous posons

$$p = \frac{\text{th } \mu_0}{\text{th } \mu_0 - \text{th } \frac{3}{4} \mu_0} = T\left(\frac{\mu_0}{4}, \mu_0\right).$$

En choisissant n'importe quel point $\zeta^*(t) = \zeta^* \in S^*(t \geq t_0)$, nous supposons maintenant que $f(z)$ ne prenne ni la valeur 0 ni la valeur 1 dans $C(\zeta^*, \mu_0)$. En tenant compte de (1), il résulte du lemme 1 que l'inégalité

$$(2) \quad g(t) = |f(\zeta^*(t))|^{E\left(\frac{\mu_0}{4}, \mu_0\right)} < |f(z)|$$

est valable pour tout $z \in \bar{C}\left(\zeta^*, \frac{3}{4}\mu_0\right)$.

Soit $t'_0 > 1$, une valeur fixe de t satisfaisant à $t'_0 \geq t_0$. Nous allons montrer que (2) ne peut être valable pour tout $t > t'_0$, car la supposition que (2) est vérifiée pour tout $t > t'_0$ nous forcerait à conclure, comme nous allons le démontrer, que

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = \infty$$

uniformément pour $|z| < 1$, ce qui est impossible pour une fonction holomorphe dans le cercle-unité. Cette uniformité découlerait de la définition de $\bar{\mu}$, puisque pour un certain r_1 , $0 < r_1 < 1$, nous aurions

$$(3) \quad \bigcup_{t'_0 < t} \bar{C}\left(\zeta^*(t), \frac{3}{4}\mu_0\right) \supset \{z \mid r_1 \leq |z| < 1\}.$$

Ainsi, puisque la fonction $g(t)$ de (2) satisfait à $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$, nous savons que, pour tout $M > 0$ donné, il existe un $t''_0 \geq t'_0$ tel que $g(t) > M$ pour tout $t \geq t''_0$ et, par conséquent, $|f(z)| > M$ pour tout $|z| \geq r_2$, où r_2 est une valeur satisfaisant à $r_1 \leq r_2 < 1$.

Ainsi, nous avons montré que, pour un choix quelconque de $t'_0 > 1$, il doit exister un $t_1 > t'_0 > 1$, tel que $f(z)$ prenne au moins une des valeurs 0 ou 1 dans le cercle $C(\zeta^*(t_1), \mu_0)$. C'est le même raisonnement qui, appliqué à nt_{n-1} au lieu de t'_0 , introduit un $t_n > nt_{n-1} > n$, tel que $f(z)$ prenne au moins une des valeurs 0 ou 1 dans le cercle $C(\zeta^*(t_n), \mu_0)$, $n = 2, 3, \dots$. Donc la suite $\{t_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ de notre lemme doit nécessairement exister.

Le lemme 4 est ainsi démontré et, par conséquent, le théorème III l'est aussi.

Remarque. — Notons que nous avons maintenant montré que, si $f \in \mathcal{F}$, où $\mathcal{F} = (V, \underline{\mu} < \infty) \cup (V^*, \bar{\mu} < \infty)$, f possède des disques- ρ .

7. EXISTENCE DE CERTAINES SPIRALES.

DÉFINITION. — Si une spirale est telle qu'un ensemble de points- ρ , pour une fonction déterminée, se trouve sur cette spirale, nous l'appellerons UNE SPIRALE- ρ POUR $f(z)$. Si la spirale- ρ Σ^* possède la propriété que $f(z)$ admet la valeur asymptotique ∞ le long de Σ^* , nous appellerons Σ^* UNE SPIRALE- ρ^* POUR $f(z)$. Si l'ensemble des points- ρ $\{\zeta_\nu^* \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ est tel que ces éléments se trouvent sur une spirale- ρ^* pour $f(z)$, nous appellerons cet ensemble UN ENSEMBLE DE POINTS- ρ^* POUR $f(z)$.

Remarque. — Il est évident que toute fonction possédant des disques- ρ possède une spirale- ρ . Il est également facile de voir qu'on peut modifier une spirale- ρ^* donnée de façon à la transformer en une spirale- ρ qui n'est pas une spirale- ρ^* . Nous allons maintenant démontrer l'existence de spirales- ρ^* . Certains éléments de l'hypothèse et la conclusion de ce théorème correspondent exactement à certains éléments du théorème I. Nous les incorporerons ici afin de simplifier des références ultérieures.

THÉORÈME IV. (Principe d'existence des spirales- ρ^* .) — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $|z| < 1$ et soit Σ une spirale le long de laquelle la fonction $f(z)$ admet la valeur asymptotique ∞ . S'il existe un nombre μ_0 , $0 < \mu_0 < \infty$, et une suite de points, $\{z_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, tels que :

(1) $z_n \in \Sigma \quad (n = 1, 2, \dots); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1;$

(2) pour $n = 1, 2, \dots$, il existe un point $\zeta_n \in C_n = C(z_n, \mu_0)$ tel que $f(\zeta_n) = 0$ ou $f(\zeta_n) = 1$;

(3) pour $n = 1, 2, \dots$, le point ζ_n satisfait à la condition

$$d(z_n, \zeta_n) = \min \{ d(z_n, z) \mid f(z) = 0 \text{ ou } f(z) = 1 \};$$

alors

(4) il existe une suite partielle $\{\zeta_{\nu_n} \mid \nu = 1, 2, \dots\}$, extraite de la suite $\{\zeta_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, qui forme un ensemble de points- ρ pour $f(z)$; [ici nous supposons que notre disque- ρ , D_ν , soit égal à $D_\nu = C(\zeta_{\nu_n}, \frac{\epsilon_\nu}{2})$, $\nu = 1, 2, \dots$];

(5) *il existe un ensemble de points- ρ^* pour $f(z)$, $\{Z_\nu\}$, de sorte que, pour $\nu = 1, 2, \dots$, le point Z_ν se trouve sur le segment de droite non euclidien joignant z_{n_ν} à ζ_{n_ν} et qu'il vérifie l'inégalité $d(\zeta_{n_\nu}, Z_\nu) < \frac{\varepsilon_\nu}{4}$. [Ici les disques- ρ en question sont de la forme $D_\nu^* = C(Z_\nu, \varepsilon_\nu) \supset D_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$.]*

Démonstration. — Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, nous pouvons supposer, en conservant le même caractère de généralité, que les cercles $\{C_n\}$ apparaissant en (2), ci-dessus, possèdent la propriété suivante :

$$(6) \quad m \neq n \quad \text{entraîne} \quad C_m \cap C_n = \emptyset.$$

Soient $\{L_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ et $\{\varepsilon_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$, les deux suites satisfaisant aux conditions (A) et (B) de la définition (R). Puisque les suites $\{L_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ et $\left\{\frac{\varepsilon_\nu}{2} \mid \nu = 1, 2, \dots\right\}$ satisfont aussi à ces conditions et puisque la partie (1) de notre hypothèse implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty$, la partie (4) de la conclusion découle immédiatement du théorème I. Pour chaque ν , le point- ρ , ζ_{n_ν} est le centre d'un disque- ρ , D_ν , où $D_\nu = C\left(\zeta_{n_\nu}, \frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)$. Si nous nous référons à (14) et (15) du paragraphe 4, nous pouvons affirmer l'existence, pour chaque ν , d'un point Z_ν , situé sur le segment de droite non euclidien joignant z_{n_ν} à ζ_{n_ν} , ayant les propriétés suivantes :

$$(7) \quad d(\zeta_{n_\nu}, Z_\nu) < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_\nu}{2}\right) = \frac{\varepsilon_\nu}{4};$$

(8) pour tout $z \in \bar{C}(z_{n_\nu}, d(z_{n_\nu}, Z_\nu))$, on a $|f(z)| > L_\nu$. Si nous posons maintenant $D_\nu^* = C(Z_\nu, \varepsilon_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots$, il est clair que $D_\nu^* \supset D_\nu$ pour $\nu = 1, 2, \dots$. Donc, $\{D_\nu^* \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ constitue aussi un ensemble de disques- ρ pour $f(z)$. Si nous parvenons maintenant à construire une spirale Σ^* , le long de laquelle $f(z)$ ait la valeur asymptotique ∞ , et ayant la propriété que $Z_\nu \in \Sigma^*$ pour $\nu = 1, 2, \dots$, le théorème IV sera entièrement démontré.

Pour construire Σ^* , partons de la spirale donnée Σ . Soient z'_ν et z''_ν , respectivement, le *premier* et le *dernier* point $z \in \Sigma$ qui satisfont à $d(z_{n_\nu}, z) = d(z_{n_\nu}, Z_\nu)$. Si Σ_ν est la partie de Σ qui se trouve *strictement* entre z'_ν et z''_ν , nous écartons maintenant de toute considération ultérieure chacune des parties Σ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$. La nouvelle spirale Σ^* doit coïncider avec la spirale Σ sauf pour la partie de Σ que nous venons d'exclure. Pour compléter notre définition de Σ^* , il faut

maintenant remplacer convenablement la partie exclue $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Sigma_\nu$. Pour chaque ν , remplaçons Σ_ν par Σ'_ν où Σ'_ν est formé des segments de droite non euclidiens joignant z'_ν à Z_ν et Z_ν à z''_ν . (Si, pour quelques valeurs de ν , l'ensemble Σ_ν se trouve vide, nous aurons $z'_\nu = Z_\nu = z''_\nu$; nous n'aurons rien éliminé et Σ'_ν est formé simplement de Z_ν .)

D'après (8), nous savons que $|f(z)| > L_\nu$ pour tout $z \in \Sigma_\nu^*$. Ceci, joint au fait que $L_\nu \rightarrow \infty$ et $\lim_{\substack{|z| \rightarrow 1 \\ z \in \Sigma^*}} |f(z)| = \infty$, nous montre que $f(z)$ a effectivement la valeur asymptotique ∞ le long de Σ^* , où nous avons donné aux parties Σ_ν^* une orientation évidente.

Il n'est pas encore possible d'affirmer que Σ^* est une spirale- ρ^* . La démonstration de notre théorème sera complète si nous prouvons maintenant que Σ^* est une courbe *simple* et que :

(9) en éliminant la partie Σ_ν de Σ , pour une valeur fixe de ν , $\nu = \nu_0$, nous avons écarté tout au plus un nombre *fini* de disques $\{D_\nu^*\}$. Il est facile de voir que la condition (9) est vérifiée, et nous pouvons en déduire que Σ^* est *simple*, d'après les faits suivants :

(10) Σ , notre spirale donnée est simple;

(11) si S_ν^* représente tout Σ_ν^* , sauf les points que Σ_ν^* a en commun avec la frontière de $\bar{C}(z_{n_\nu}, d(z_{n_\nu}, Z_\nu))$, nous savons que S_ν^* ne peut couper la partie restante de Σ après élimination de l'ensemble $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Sigma_\nu$ (si $z_{n_\nu} = Z_\nu$, alors $S_\nu^* = \emptyset$);

(12) $\Sigma_\mu^* \cap \Sigma_\nu^* = \emptyset$, pour $\mu \neq \nu$, puisque $C_{n_\mu} \supset \Sigma_\mu^*$ et $C_{n_\nu} \supset \Sigma_\nu^*$ et $C_{n_\mu} \cap C_{n_\nu} = \emptyset$, à cause de (6). La démonstration du théorème IV est maintenant complète.

Si nous utilisons le lemme 4, nous pouvons énoncer le corollaire suivant qui sera utile plus loin :

COROLLAIRE II. — Si $f \in (V^*, S, \bar{\mu} < \infty)$, il existe une spirale S' , spirale- ρ^* pour f , qui satisfait à la condition suivante : pour une valeur donnée t_0 de t , on a

$$S(t \geq t_0) \cap S'(t \geq t_0) \neq \emptyset.$$

Nous pouvons affirmer aussi le corollaire suivant, si nous employons le lemme 4 et la démonstration du lemme 3 :

COROLLAIRE III. — Si $f \in \mathcal{F}$, f possède une spirale- ρ^* .

En effet, si $f \in (V^*, \bar{\mu} < \infty)$, le résultat découle du lemme 4 et du théorème IV; et si $f \in (V, \underline{\mu} < \infty)$, il découle de la remarque du paragraphe 5 et du théorème IV.

DÉFINITION. — Soit $g(z)$ une fonction à valeurs complexes définie pour $|z| < 1$. Soit S_0 une spirale telle que, pour n'importe quelle valeur $d_0 > 0$, l'ensemble $\mathcal{CR}\left(g, \bigcup_{z \in S_0} C(z, d_0)\right)$ ne contient qu'une valeur au plus. Appelons alors S_0 UNE SPIRALE- d_0 pour cette fonction.

Si pour une fonction, $g(z)$, nous représentons respectivement par $\mathfrak{S}_{\rho^*}(g)$, $\mathfrak{S}_{\rho}(g)$ et $\mathfrak{S}_{d_0}(g)$ les familles de toutes les spirales- ρ^* , spirales- ρ et spirales- d_0 pour $g(z)$, nous aurons

$$(13) \quad \mathfrak{S}_{\rho^*}(g) \subset \mathfrak{S}_{\rho}(g) \subset \mathfrak{S}_{d_0}(g).$$

Nous savons que $\mathfrak{S}_{\rho^*}(g) \neq \mathfrak{S}_{\rho}(g)$. Par contre, on ne sait pas s'il existe des fonctions $g(z)$ holomorphes pour $|z| < 1$, pour lesquelles $\mathfrak{S}_{\rho}(g) \neq \mathfrak{S}_{d_0}(g)$.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, M. Seidel a montré que si $f \in \mathfrak{F}$, f possède une spirale- d_0 . [En fait, il a observé ([13], p. 162) que ce résultat constituait un analogue non euclidien du théorème classique de M. Julia sur les fonctions entières, ce qui fut le point de départ de cette étude.] Il a aussi démontré ([13], p. 166) que, si $\omega(r)$ est une fonction positive arbitraire, croissant strictement pour $0 \leq r < 1$, telle que $\lim_{r \rightarrow 1} \omega(r) = \infty$, il existe une fonction $\Psi \in (V^*, \bar{\mu} = 0)$, telle que, pour tout $r \geq r_0$, où r_0 est une valeur fixe $0 < r_0 < 1$, on ait

$$\max_{|z| \leq r} |\Psi(z)| < \omega(r).$$

(Voir aussi [1], p. 136-141.)

Ainsi, il a montré qu'il existe des fonctions $\Psi \in (V^*, \bar{\mu} = 0)$ dont le maximum du module croît vers l'infini aussi lentement qu'on veut et, puisque $\Psi \in \mathfrak{F}$, il a pu affirmer que Ψ possède une spirale- d_0 (cf. corollaire 2 de [13]). Si nous utilisons maintenant le fait que $\Psi \in \mathfrak{F}$, notre corollaire III permet d'énoncer le :

COROLLAIRE IV. — *Il existe des fonctions, holomorphes pour $|z| < 1$, dont le maximum du module croît vers l'infini aussi lentement qu'on veut, pour lesquelles nous pouvons affirmer l'existence d'une spirale- ρ^* .*

Nous prouverons maintenant le :

THÉORÈME V. — *Il existe des fonctions, holomorphes pour $|z| < 1$, qui possèdent un ensemble dénombrable de spirales- ρ^* sans point commun deux à deux. En effet, soit r_0 un nombre fixe $0 < r_0 < 1$, soit $\bar{C} = \{z \mid |z| \leq r_0\}$ et $\{\theta_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ une suite telle que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} < \dots < 2\pi$. Soit $\{S_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ un ensemble donné de spirales sans point commun deux à deux, où S_n est définie par $z = \zeta_n(t)$, $0 \leq t < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Si*

$$(14) \quad \bar{\mu}(S_n) < \infty \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(15) \quad \zeta_n(0) = a_n = r_0 e^{i\theta_n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(16) \quad S_n \cap \bar{C} = a_n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

il existe une fonction $f \in \mathfrak{F}$ possédant un ensemble de spirales- ρ^ , $\{S_{2r}^* \mid r = 1, 2, \dots\}$ tel que :*

$$(17) \quad r \neq r' \quad \text{entraîne} \quad S_{2r}^* \cap S_{2r'}^* = \emptyset,$$

et

(18) pour n'importe quelle valeur donnée de t , disons $t = t_0$, et pour tout $r = 1, 2, \dots$, nous avons

$$S_{2r}(t \geq t_0) \cap S_{2r}^*(t \geq t_0) \neq \emptyset.$$

Démonstration. — Il est évident qu'il existe un ensemble de spirales $\{S_n\}$ satisfaisant à l'hypothèse de notre théorème. Considérons maintenant l'ensemble des nombres $\{\omega_n \mid n = 1, 2, \dots\}$,

$$\omega_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est impair;} \\ \infty, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Il résulte d'un théorème de MM. Bagemihl et Seidel (*cf.* le corollaire 1 de [3]) qu'il existe une fonction $f(z)$, holomorphe dans $|z| < 1$, telle que pour $n = 1, 2$, le nombre ω_n soit la valeur asymptotique de $f(z)$ le long de S_n . Puisque $\bar{\mu}(S_n) < \infty$ pour tout $n = 1, 2, \dots$, nous savons que $f \in \mathcal{F}$ et nous savons aussi que $f \in (V^*, S_{2r}, \bar{\mu} < \infty)$ pour $r = 1, 2, \dots$. Il découle donc du corollaire II, qu'il existe une spirale- ρ^* de $f(z)$, S'_{2r} , qui vérifie la condition

$$(19) \quad S_{2r}(t \geq t_0) \cap S'_{2r}(t \geq t_0) \neq \emptyset,$$

pour n'importe quelle valeur de t_0 .

Pour construire notre ensemble disjoint de spirales- ρ^* , $\{S_{2r}^*\}$, considérons maintenant une valeur fixe de r . Puisque $f(z)$ est bornée sur S_{2r-1} et S_{2r+1} , et, puisque $f(z)$ tend vers l'infini sur S'_{2r} , il existe une valeur t_r de t , telle que

$$(20) \quad S_{2r-1} \cap S'_{2r}(t \geq t_r) = \emptyset,$$

$$(21) \quad S_{2r+1} \cap S'_{2r}(t \geq t_r) = \emptyset,$$

$$(22) \quad A(r) \cap S'_{2r}(t \geq t_r) = \emptyset,$$

où $A(r)$ est un sous-arc de la circonférence de \bar{C} ; $A(r)$ est le sous-arc fermé contenant a_{2r} et aboutissant en a_{2r-1} et a_{2r+1} . Donc, puisque S'_{2r} est un sous-ensemble connexe de $|z| < 1$, il résulte de la condition (19) que $S'_{2r}(t \geq t_r) \subset G(r)$, où $G(r)$ est l'ensemble ouvert de $|z| < 1$, ensemble contenant S_{2r} — à l'exception du point a_{2r} — et ayant pour frontière la réunion des ensembles S_{2r-1} , S_{2r+1} , et $A(r)$. De la même façon, on voit que

$$S'_{2(r+1)}(t \geq t_{r+1}) \subset G(r+1).$$

Donc, si nous posons $t_r^* = \max(t_r, t_{r+1})$, $r = 1, 2, \dots$, nous avons

$$S'_{2r}(t \geq t_r^*) \cap S'_{2(r+1)}(t \geq t_r^*) = \emptyset, \quad \text{puisque } G(r) \cap G(r+1) = \emptyset.$$

Enfin, pour définir notre ensemble de spirales- ρ^* , $\{S_{2r}^* \mid r = 1, 2, \dots\}$, sans point commun deux à deux, posons $S_{2r}^* = S'_{2r}(t \geq t_r^*)$, $r = 1, 2, \dots$.

Puisque la condition (17) est maintenant vérifiée, nous avons achevé la démonstration du théorème V.

8. EXISTENCE DE CERTAINES DROITES. — Nous obtiendrons maintenant un théorème élémentaire qui nous donnera d'autres renseignements sur la distribution d'un ensemble de disques- ρ .

THÉOREME VI. — Soit $g(z)$ une fonction à valeurs complexes définie pour $|z| < 1$ et possédant des disques- ρ . Il existe alors au moins un rayon $\Lambda = O\tau$, joignant le centre O du cercle-unité à un point $\tau = e^{i\theta}$, et jouissant de la propriété suivante : dans tout angle positif, aussi petit qu'on veut, ayant son sommet à l'origine et dont Λ est la bissectrice, il existe un ensemble de disques- ρ pour la fonction $g(z)$.

Remarque. — Nous appellerons un tel rayon Λ droite- ρ pour $g(z)$. Il est évident que le concept de droites- ρ et celui de spirales- ρ sont, l'un et l'autre, analogues aux classiques droites de Julia; par exemple, la fonction $g(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs complexes finies, avec une exception au plus, dans un tel secteur déterminé par Λ .

Démonstration. — En posant $\zeta_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, où $\{\zeta_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ est un ensemble de points- ρ pour $g(z)$, il existe une suite partielle, extraite de la suite $\{e^{i\varphi_\nu}\}$, tendant vers un point τ sur la frontière du cercle-unité. La démonstration est alors complète puisque presque tous les disques- ρ correspondant à cette suite partielle se trouvent évidemment dans un secteur donné ayant $O\tau$ pour bissectrice.

Soit maintenant $\{R_k \mid k = 1, 2, \dots\}$, un ensemble de spirales- ρ disjointes pour une fonction $\varphi(z)$, définie pour $|z| < 1$. Nous savons qu'il existe une droite- ρ pour $\varphi(z)$, Λ_k , pour chaque $k = 1, 2, \dots$, mais nous n'avons pas la certitude que $\Lambda_k \neq \Lambda_{k'}$ découle de la condition $k \neq k'$. Posons la question de savoir s'il existe une fonction donnant cette certitude. On trouvera la réponse ci-dessous dans le corollaire VI.

9. QUELQUES PROPRIÉTÉS FRONTIÈRES DES POINTS- ρ ET UN PRINCIPE GÉNÉRAL SUR LES PHÉNOMÈNES DES ANGLES DE STOLZ.

THÉOREME VII. — Soit $\eta_1 > 0$ un nombre donné et Δ_τ un angle de Stolz en τ , $|\tau| = 1$. Si $f \in (V^*, S^*, \bar{\mu} < \infty)$ et si l'ensemble $\mathcal{CR}(f, \Delta_\tau)$ comprend une valeur au plus, il existe un ensemble de points- ρ pour $f(z)$, $\{\zeta_\nu \mid \nu = 1, 2, \dots\}$ tel que :

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \zeta_\nu = \tau;$$

$$(2) \quad d(\zeta_\nu, \Delta_\tau) < \bar{\mu}(S^*) + \eta_1 \quad \text{pour } \nu = 1, 2, \dots$$

Il existe en outre un ensemble de points- ρ^* qui jouit des propriétés (1) et (2).

Démonstration. — Nous utiliserons le théorème IV, ci-dessus. Posons $2\mu_0 = \bar{\mu} + \eta_1$, où $\eta_1 > 0$ désigne le nombre donné dans l'hypothèse. Si la spirale S^* est définie par l'équation $z = \zeta(t)$, $0 \leq t < \infty$, il existe, d'après la définition

de $\bar{\mu}$, une valeur t_0 de t , telle que, pour tout $t \geq t_0$, nous ayons $d(\zeta(t), \zeta(t')) < 2\mu_0$. Il est alors aisé de voir que

$$(3) \quad \bigcup_{\substack{t \geq t_0 \\ d(\zeta(t), \Delta_\tau) < \mu_0}} C(\zeta(t), \mu_0) \supset \Delta_\tau.$$

Puisque $\mathcal{C}R(f, \Delta_\tau)$ comprend une valeur en plus, il existe une suite de points en Δ_τ pour lesquels la fonction prend les valeurs 0 ou 1. Donc, à cause de (3), il existe une suite t_n de valeurs de t , avec $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, ayant la propriété que, pour $n = 1, 2, \dots$, l'ensemble $C(\zeta(t_n), \mu_0)$ contient un point ζ_n tel que $f(\zeta_n) = 0$ ou 1. Ainsi, les conditions (1) et (2) du théorème IV sont vérifiées, et, puisque nous pouvons supposer que les points ζ_n satisfont aussi à la condition (3) du théorème IV, nous avons établi l'existence d'un ensemble de points- ρ pour f qui tendent vers τ . Il découle aussi immédiatement de la partie (5) du théorème IV qu'on peut admettre que ces points- ρ sont des points- ρ^* .

Cherchons maintenant des renseignements plus précis concernant la position de ces points- ρ . Il faut prendre soigneusement en considération la condition (3) du théorème IV. Dans le paragraphe précédent, lorsque nous vérifiâmes la condition (2) du théorème IV, ce fut le type de comportement de $f(z)$ en Δ_τ qui nous permit d'affirmer que, pour $n = 1, 2, \dots$, $f(z)$ prend les valeurs 0 ou 1 dans chaque ensemble de la forme $\Delta_\tau \cap C(\zeta(t_n), \mu_0)$. Considérons maintenant une valeur fixe de n , ζ'_n désignant un point quelconque de $\Delta_\tau \cap C(\zeta(t_n), \mu_0)$ tel que $f(\zeta'_n) = 0$ ou 1. Puisqu'il pourrait y avoir un point $\zeta''_n \in C(\zeta(t_n), \mu_0)$ qui satisfasse à

$$(4) \quad \zeta''_n \notin \Delta_\tau;$$

$$(5) \quad f(\zeta''_n) = 0 \text{ ou } 1;$$

$$(6) \quad d(\zeta(t_n), \zeta''_n) < d(\zeta(t_n), \zeta'_n),$$

nous ne pouvons affirmer *a priori* que les points- ρ qui tendent vers τ , se trouvent tous à l'intérieur de Δ_τ . Néanmoins, nous savons que ces points ne peuvent être trop éloignés des côtés de Δ_τ , et c'est cette affirmation qui est précisée par la condition (2) de notre théorème. Le théorème VII est démontré.

Nous allons maintenant considérer le cas où Δ_τ est un angle de Stolz *symétrique* en τ .

Nous définirons d'abord quelques représentations commodes. Soient $\varepsilon > 0$, un nombre quelconque et τ , un point sur $|z| = 1$. Nous posons

$$V_\varepsilon(\tau) = \{z \mid |z - \tau| < \varepsilon\}.$$

Pour un angle γ , $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, nous posons

$$\delta(\gamma) = \frac{1}{2} \log \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right).$$

Si Δ est le diamètre du cercle-unité, d'extrémités τ et $-\tau$, $|\tau|=1$, l'ensemble $\bigcup_{z \in \Delta} C(z, \delta(\gamma))$ est alors le domaine ayant pour frontière les deux hypercycles, symétriques par rapport au diamètre Δ , formant avec Δ en τ les angles γ et $-\gamma$.

Nous admettons maintenant que μ_0 est tel que $0 < \mu_0 < \infty$, et que $\Delta_{\tau, \alpha}$ est un angle de Stolz fixe en τ , $|\tau|=1$. Si β est un angle quelconque tel que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ et $\delta(\alpha) + \mu_0 < \delta(\beta)$, il est facile de voir que la relation

$$V_\varepsilon(\tau) \cap \{z \mid d(z, \Delta_{\tau, \alpha}) < \mu_0\} \subset \Delta_{\tau, \beta}$$

est vérifiée pour les valeurs suffisamment petites de ε . Cette observation nous conduit alors au

THÉORÈME VIII. — *Si $f \in (V^*, S^*, \bar{\mu} < \infty)$, si $\eta > 0$ est donné, et si l'on sait que, pour un certain τ , $|\tau|=1$, l'ensemble $\mathcal{C}R(f, \Delta_{\tau, \alpha})$ comprend une valeur au plus, il existe pour tout angle β , $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, satisfaisant à $\delta(\alpha) + \bar{\mu}(S^*) + \eta \leq \delta(\beta)$ un ensemble de points- ρ pour f dans $\Delta_{\tau, \beta}$. Si l'on veut, on peut admettre que cet ensemble est un ensemble de points- ρ^* pour f .*

Comme exemple du type de résultats auxquels nous pouvons maintenant arriver, énonçons un corollaire fondé sur le théorème suivant de M. Seidel :

Il existe une fonction $\Psi(z)$, holomorphe pour $|z| < 1$, dont le maximum du module croît aussi lentement qu'on veut, telle qu'il existe un nombre fixe α_0 , ($0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$), tel que pour chaque τ , $|\tau|=1$, l'ensemble $\mathcal{C}R(\Psi, \Delta_{\tau, \alpha})$ comprenne une valeur au plus pour tout $\alpha > \alpha_0$ (cf. théorème 6 dans [13]).

Notre corollaire V est fondé sur ce théorème et sur le fait que, dans la démonstration de ce théorème, M. Seidel a établi que la fonction Ψ appartient à la famille $(V^*, \bar{\mu} = 0)$. Appliquons le théorème VIII pour énoncer le

COROLLAIRE V. — *Il existe une fonction $\Psi(z)$, holomorphe pour $|z| < 1$, dont le maximum du module croît aussi lentement qu'on veut, telle qu'il existe un nombre fixe β_0 , ($0 < \beta_0 < \pi$), tel que, pour chaque τ , $|\tau|=1$, il existe un ensemble de disques- ρ pour Ψ dans tout angle de Stolz symétrique en τ d'ouverture supérieure à β_0 .*

Ce résultat, en retour, nous amène directement au

COROLLAIRE VI. — *Il existe des fonctions, holomorphes en $|z| < 1$, pour lesquelles chaque rayon du cercle-unité est une droite- ρ .*

De même façon, d'après le théorème 7 dans [13], notre théorème VIII a pour conséquence immédiate le

COROLLAIRE VII. — *Il existe une fonction $\Psi(z)$, holomorphe en $|z| < 1$, dont le maximum du module croît vers l'infini aussi lentement qu'on veut, ayant comme propriété que, pour presque tous les points τ sur $|z| = 1$, il existe un ensemble de disques- ρ pour Ψ dans un angle de Stolz symétrique en τ d'ouverture arbitrairement petite.*

Le corollaire suivant donne un résultat plus complet que le corollaire VI.

COROLLAIRE VIII. — *Il existe des fonctions, holomorphes pour $|z| < 1$, telles que, τ étant un point arbitraire de $|z| = 1$, il existe, dans un angle de Stolz symétrique d'ouverture arbitrairement petite, un ensemble de points- ρ^* .*

Démonstration. — Utilisons encore le théorème de MM. Bagemihl et Seidel (cf. le corollaire 1 de [3]). Il découle facilement de ce théorème qu'il existe une fonction $\Phi \in (V, \bar{\mu} = 0) \cap (V^*, \bar{\mu} = 0)$. De plus, M. Seidel a démontré que, pour toute fonction $f \in (V, \bar{\mu} = 0)$, l'ensemble $\mathcal{CR}(f, \Delta_{\tau, \alpha})$ comprend une valeur au plus pour tout τ , $|\tau| = 1$, et pour tout $\alpha > 0$ (cf. le corollaire 1 dans [13]). Alors, puisque $\Phi \in (V, \bar{\mu} = 0) \cap (V^*, \bar{\mu} = 0)$, le corollaire VIII découle du théorème de M. Seidel et d'un cas particulier du théorème VIII.

Comme dernier exemple de l'emploi du théorème VIII associé aux théorèmes existants, nous signalerons un résultat fondé sur le théorème 5 dans [13].

COROLLAIRE IX. — *Soit $f \in (V^*, \bar{\mu} = 0)$. Pour chaque τ , $|\tau| = 1$, il existe un nombre α_τ , $(0 \leq \alpha_\tau \leq \frac{\pi}{2})$, tel que :*

- (1) *la fonction f tend uniformément vers l'infini dans tout angle de Stolz $\Delta_{\tau, \beta}$ où $\beta < \alpha_\tau$;*
 (2) *pour tout β , $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$, satisfaisant à $\beta > \alpha_\tau$, il existe un ensemble de points- ρ^* pour f dans $\Delta_{\tau, \beta}$.*

[Si pour un certain τ nous avons $\alpha_\tau = 0$, c'est (2) qui se présente pour tout $\Delta_{\tau, \beta}$. Si $\alpha_\tau = \frac{\pi}{2}$, c'est (1) qui se présente pour tout $\Delta_{\tau, \beta}$.]

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] F. BAGEMIHl, P. ERDÖS et W. SEIDEL, *Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle-unité* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 3^e série, t. 70, 1953, p. 135-147).
 [2] F. BAGEMIHl et W. SEIDEL, *Some boundary properties of analytic functions* (Mathem. Z., t. 61, 1954, p. 186-199).
 [3] F. BAGEMIHl et W. SEIDEL, *Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analytic and meromorphic functions* (Proc. Nat. Acad. Sc., t. 39, 1953, p. 1251-1258).

- [4] C. CARATHÉODORY, *Conformal Representation*, Cambridge, 1952.
- [5] C. CARATHÉODORY, *Theory of Functions*, t. I, New York, 1954.
- [6] E. F. COLLINGWOOD et M. L. CARTWRIGHT, *Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle* (*Acta Mathematica*, t. 87, 1952, p. 83-146).
- [7] J. A. JENKINS, *On explicit bounds in Schottky's theorem* (*Canad. J. Math.*, t. 7, 1955, p. 76-82).
- [8] G. JULIA, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, Paris, 1924, p. 102 et suiv.
- [9] G. JULIA, *Principes géométriques d'Analyse*, t. I et II, Paris, 1930, 1932.
- [10] L. H. LANGE, *A non-Euclidean analogue to a theorem of H. Milloux and its relationship to a theorem of W. Seidel* (*Amer. Mathem. Soc. Not.*, t. 5, 1958, p. 847-848).
- [11] H. MILLOUX, *Le théorème de M. Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières* (*J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 3, 1924, p. 345-401).
- [12] H. MILLOUX, *Sur le théorème de M. Picard* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 53, 1925, p. 181-207).
- [13] W. SEIDEL, *Holomorphic functions with spiral asymptotic paths* (*Nagoya Math. J.*, t. 14, 1959, p. 159-171).
- [14] G. VALIRON, *Compléments au théorème de Picard-Julia* (*Bull. Soc. Math.*, 2^e série, t. 51, 1927, p. 167-183),
- [15] G. VALIRON, *Sur certaines singularités des fonctions holomorphes dans un cercle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 2065-2067).
- [16] G. VALIRON, *Sur les singularités de certaines fonctions holomorphes et de leurs inverses* (*J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 15, 1936, p. 423-435).

