ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. LESIEUR
R. CROISOT

Sur la dualité dans les $(\mathcal{T})$-algèbres. Application aux anneaux, aux modules, aux demi-groupes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, nº 2 (1960), p. 175-194
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_2_175_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 77, 1960, p. 175 à 195.

SUR LA DUALITÉ DANS LES ($\mathfrak{T}$)-ALGÈBRES. APPLICATION AUX ANNEAUX, AUX MODULES, AUX DEMI-GROUPES

PAR MM. L. LESIEUR ET R. CROISOT.
(Poitiers et Besançon)

Le présent Travail a été rédigé en hommage à notre éminent collègue René Garnier à propos de son Jubilé scientifique. C'est en vue de hâter la publication de ce Mémoire, — destiné initialement au Volume du Jubilé R. Garnier, — que ce Mémoire est ici inséré.

INTRODUCTION.

La notion de ($\mathfrak{T}$)-algèbre est une extension de la notion de treillis multiplicatif résidué. Nous l'avons introduite [1] afin de généraliser au cas non commutatif les théorèmes de décomposition d'un idéal d'un anneau nœthérien comme intersection d'idéaux primaires. Elle nous a permis de faire une théorie valable à la fois pour les idéaux bilatères et les idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe ainsi que pour les sous-modules d'un module. Une ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) est constituée par un demi-groupe réticulé complet quasi-entier ($\mathfrak{T}$) et un treillis complet (L); les éléments de ($\mathfrak{T}$) sont opérateurs dans (L), certaines conditions étant imposées à l'opération externe ainsi définie, d'où résulte notamment l'existence d'une résiduation des éléments de (L) par les éléments de ($\mathfrak{T}$) et d'une résiduation des éléments de (L) par les éléments de (L).

L'algèbre duale de la ($\mathfrak{T}$)-algèbre (L) est alors obtenue en considérant ($\mathfrak{T}$)

(1) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot [2], [4] et [7]. C'est seulement dans ce dernier travail que nous utilisons la terminologie de ($\mathfrak{T}$)-algèbre, la notion ainsi recouverte étant d'ailleurs un peu plus particulière que celle introduite dans [2] et [4].

comme demi-groupe par rapport à son antimultiplication tout en conservant sa relation d'ordre et en prenant le treillis dual du treillis (L) avec la résiduation des éléments de (L) par les éléments de $(\mathfrak{T})$ comme opération externe. Cette définition de l'algèbre duale d'une $(\mathfrak{T})$-algèbre (L) est donnée d'une façon précise au paragraphe 1 où nous indiquons également les conditions de chaînes qui permettent d'appliquer à l'algèbre duale toute la théorie des $(\mathfrak{T})$-algèbres. Nous énonçons au paragraphe 2 un certain nombre des résultats qu'on peut ainsi obtenir par dualité.

Ces résultats sont valables notamment pour les anneaux, les demi-groupes et les modules. Nous examinons ces cas particuliers au paragraphe 3, ainsi que quelques exemples. Il y a lieu de noter que les conditions de chaîne imposent à cette théorie duale une portée en général plus faible qu'à la théorie directe.

1. Définition de l'algèbre duale d'une $(\mathfrak{T})$-algèbre (L). — Considérons, comme dans [2] (*cf.* § 1, p. 81), deux ensembles $(\mathfrak{T})$ et (L) dont les éléments sont représentés respectivement par des majuscules surannées et par des majuscules d'imprimerie, les axiomes suivants étant vérifiés :

Axiome (A). — $(\mathfrak{T})$ *est un demi-groupe réticulé quasi-entier avec élément universel* $\mathcal{E}$.

$(\mathfrak{T})$ est donc à la fois un demi-groupe que nous notons multiplicativement et un treillis dont nous notons respectivement $\subseteq$, $\subset$, $+$ et $\cap$, la relation d'ordre, la relation d'ordre strict associée, l'union (ou addition) et l'intersection, avec les conditions suivantes :

(A_1) $$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C});$$

(A_2) $$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C} \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}+\mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{A};$$

(A_3) $$\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

Axiome (B). — (L) *est un treillis avec élément universel* U *et élément nul* N [2].

Nous adoptons pour (L) les mêmes notations que pour $(\mathfrak{T})$: $\subseteq$, $\subset$, $+$ et $\cap$.

Axiome (C). — Les éléments de $(\mathfrak{T})$ sont *opérateurs* dans (L) qui est ainsi muni d'une opération externe faisant correspondre à tout $\mathcal{A} \in (\mathfrak{T})$ et tout $X \in (L)$ un élément noté $\mathcal{A}X \in (L)$, avec les conditions suivantes :

(C_1) $$\mathcal{A}(X+Y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y;$$

(C_2) $$(\mathcal{A}+\mathcal{B})X = \mathcal{A}X + \mathcal{B}X;$$

(C_3) $$(\mathcal{A}\mathcal{B})X = \mathcal{A}(\mathcal{B}X);$$

(C_4) $$\mathcal{A}X \subseteq X;$$

(C_5) Pour tout couple $X \in (L)$, $Y \in (L)$, il existe au moins un $\mathcal{A} \in (\mathfrak{T})$ tel

[2] Dans [2], nous n'imposions pas l'existence de l'élément nul N. Celui-ci nous est nécessaire ici pour définir la dualité.

que $\mathfrak{A}Y \subseteq X$ et l'ensemble des $\mathfrak{A}$ ayant cette propriété possède un élément maximum noté $X \cdot . Y$ qui est appelé *résiduel à gauche de* X *par* Y.

(C_6) Pour tout couple $X \in (L)$, $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$, il existe au moins un $Y \in (L)$ tel que $\mathfrak{A}Y \subseteq X$ et l'ensemble des Y ayant cette propriété possède un élément maximum noté $X .\cdot \mathfrak{A}$ qui est appelé *résiduel à droite de* X *par* $\mathfrak{A}$.

Rappelons les propriétés suivantes des résiduels à droite qui résultent facilement de leur définition et des conditions imposées à l'opération externe :

$$(X \cap Y) .\cdot \mathfrak{A} = (X .\cdot \mathfrak{A}) \cap (Y .\cdot \mathfrak{A});$$
$$X .\cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (X .\cdot \mathfrak{A}) \cap (X .\cdot \mathfrak{B});$$
$$X .\cdot \mathfrak{B}\mathfrak{A} = (X .\cdot \mathfrak{B}) .\cdot \mathfrak{A};$$
$$X .\cdot \mathfrak{A} \supseteq X.$$

Désignons maintenant par $(\overset{\star}{\mathfrak{T}})$ le demi-groupe *opposé* du demi-groupe $(\mathfrak{T})$, la multiplication dans $(\overset{\star}{\mathfrak{T}})$ étant notée*. Autrement dit, nous posons $\mathfrak{A}^\star\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Nous munissons $(\overset{\star}{\mathfrak{T}})$ de la relation d'ordre de $(\mathfrak{T})$. Il est immédiat que $(\overset{\star}{\mathfrak{T}})$ *est un demi-groupe réticulé quasi-entier avec élément universel.*

Nous notons $\overset{\star}{\subseteq}$, $\overset{\star}{\subset}$, $\overset{\star}{+}$ et $\overset{\star}{\cap}$ respectivement la relation d'ordre, la relation d'ordre strict, l'union et l'intersection dans $(\overset{\star}{\mathfrak{T}})$. Il est clair que ces signes ont le même sens que les signes $\subseteq$, $\subset$, $+$ et $\cap$ respectivement. L'élément universel $\overset{\star}{\mathcal{E}}$ de $(\overset{\star}{\mathfrak{T}})$ n'est autre que $\mathcal{E}$.

Soit $(\overset{\star}{L})$ le treillis *dual* du treillis (L). $(\overset{\star}{L})$ *est un treillis avec élément universel et élément nul.* Nous notons $\overset{\star}{\subseteq}$, $\overset{\star}{\subset}$, $\overset{\star}{+}$ et $\overset{\star}{\cap}$ respectivement la relation d'ordre, la relation d'ordre strict, l'union et l'intersection dans $(\overset{\star}{L})$. Ces signes ont le même sens que les signes $\supseteq$, $\supset$, $\cap$ et $+$ respectivement. L'élément universel $\overset{\star}{U}$ de $(\overset{\star}{L})$ est N et son élément nul $\overset{\star}{N}$ est U.

Finalement, à tout $\mathfrak{A} \in (\overset{\star}{\mathfrak{T}}) = (\mathfrak{T})$ et tout $X \in (\overset{\star}{L}) = (L)$, nous faisons correspondre un élément noté $\mathfrak{A}^\star X \in (\overset{\star}{L}) = (L)$ en posant $\mathfrak{A}^\star X = X .\cdot \mathfrak{A}$. Vérifions que les conditions (C_1) à (C_6) sont alors réalisées :

(C_1) $\quad \mathfrak{A}^\star(X \overset{\star}{+} Y) = \mathfrak{A}^\star X \overset{\star}{+} \mathfrak{A}^\star Y$ s'écrit $(X \cap Y) .\cdot \mathfrak{A} = (X .\cdot \mathfrak{A}) \cap (Y .\cdot \mathfrak{A});$

(C_2) $\quad (\mathfrak{A} \overset{\star}{+} \mathfrak{B})^\star X = \mathfrak{A}^\star X \overset{\star}{+} \mathfrak{A}^\star Y$ s'écrit $X .\cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (X .\cdot \mathfrak{A}) \cap (X .\cdot \mathfrak{B});$

(C_3) $\quad (\mathfrak{A}^\star\mathfrak{B})^\star X = \mathfrak{A}^\star(\mathfrak{B}^\star X)$ s'écrit $X .\cdot \mathfrak{B}\mathfrak{A} = (X .\cdot \mathfrak{B}) .\cdot \mathfrak{A};$

(C_4) $\quad \mathfrak{A}^\star X \overset{\star}{\subseteq} X$ s'écrit $X .\cdot \mathfrak{A} \supseteq X;$

(C_5) Étant donné $X \in (\overset{\star}{L}) = (L)$, $Y \in (\overset{\star}{L}) = (L)$, l'élément $\mathfrak{A} = Y \cdot . X$ vérifie $\mathfrak{A}X \subseteq Y$ c'est-à-dire $X \subseteq Y .\cdot \mathfrak{A}$ ou encore $\mathfrak{A}^\star Y \overset{\star}{\subseteq} X$ et c'est le plus grand élément de $(\overset{\star}{\mathfrak{T}}) = (\mathfrak{T})$ ayant cette propriété; nous poserons $X \overset{\star}{\cdot .} Y = Y \cdot . X;$

(C_6) Étant donné $X \in (\overset{*}{L}) = (L)$, $\mathfrak{A} \in (\overset{*}{\mathfrak{T}}) = (\mathfrak{T})$, l'élément $Y = \mathfrak{A}X$ vérifie $\mathfrak{A}X \subseteq Y$ c'est-à-dire $X \subseteq Y \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}$ ou encore $\mathfrak{A}^\star Y \overset{*}{\subseteq} X$ et c'est le plus petit élément de (L), donc le plus grand élément de $(\overset{*}{L})$, ayant cette propriété; nous poserons $X \overset{*}{.\!\cdot} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}X$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Théorème 1.1. — $(\mathfrak{T})$ *étant un demi-groupe réticulé et* (L) *un treillis satisfaisant aux axiomes* (A), (B) *et* (C), *le demi-groupe opposé de* $(\mathfrak{T})$ *muni de la même relation d'ordre et le treillis dual de* (L) *satisfont aussi aux axiomes* (A), (B) *et* (C), *en définissant l'opération externe par* $\mathfrak{A}^\star X = X \,.\!\cdot\, \mathfrak{A}$.

Examinons plus spécialement le cas particulier des $(\mathfrak{T})$-algèbres. Nous avons défini dans [7] (*cf.* chap. III) une $(\mathfrak{T})$-*algèbre* (L) comme étant constituée par deux treillis $(\mathfrak{T})$ et (L) satisfaisant aux axiomes suivants qui remplacent les axiomes (A), (B) et (C) :

Axiome (A′). — $(\mathfrak{T})$ *est un demi-groupe réticulé quasi-entier complet.*

Nous adoptons les mêmes notations que plus haut. De plus, nous représentons par $\mathfrak{Z}$ l'élément zéro de $(\mathfrak{T})$. Remarquons que la condition (A_2) est alors renforcée par la suivante :

$$(A'_2) \qquad \mathfrak{A}\Big(\sum_{i\in I}\mathfrak{B}_i\Big) = \sum_{i\in I}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_i \qquad \text{et} \qquad \Big(\sum_{i\in I}\mathfrak{B}_i\Big)\mathfrak{A} = \sum_{i\in I}\mathfrak{B}_i\mathfrak{A}.$$

Axiome (B′). — (L) *est un treillis complet.*

Nous adoptons encore les mêmes notations que plus haut.

Axiome (C′). — Les éléments de $(\mathfrak{T})$ sont *opérateurs* dans (L), les conditions suivantes étant vérifiées :

$$(C'_1) \qquad \mathfrak{A}\Big(\sum_{i\in I}X_i\Big) = \sum_{i\in I}(\mathfrak{A}X_i) \qquad \text{[renforcement de } (C_1)];$$

$$(C'_2) \qquad \Big(\sum_{i\in I}\mathfrak{A}_i\Big)X = \sum_{i\in I}(\mathfrak{A}_iX) \qquad \text{[renforcement de } (C_2)];$$

$$(C_3) \qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{B})X = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}X);$$

$$(C_4) \qquad \mathfrak{A}X \subseteq X;$$

$$(C'_5) \qquad \mathfrak{Z}X = N.$$

On voit aisément que (C'_5) et (C'_2) entraînent (C_5), que (C_4) et (C'_1) entraînent (C_6) et que, par suite, l'axiome (C) est vérifié. Nous adoptons pour les résiduels les mêmes notations que plus haut.

Remarquons qu'on a

$$\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) .\cdot \mathfrak{A} = \bigcap_{i\in I} (X_i .\cdot \mathfrak{A});$$

$$X .\cdot \left(\sum_{i\in I} \mathfrak{A}_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X .\cdot \mathfrak{A}_i).$$

Étant donnée une $(\mathfrak{G})$-algèbre (L), considérons alors comme plus haut le demi-groupe $(\overset{\star}{\mathfrak{G}})$ opposé du demi-groupe $(\mathfrak{G})$ muni de la même relation d'ordre, le treillis $(\overset{\star}{L})$ dual du treillis (L) et posons $\mathfrak{A}^\star X = X .\cdot \mathfrak{A}$.

Les axiomes (A′), (B′), (C′) sont alors vérifiés. En particulier,

(C'_1) $\quad \mathfrak{A}^\star\left(\overset{\star}{\sum_{i\in I}} X_i\right) = \overset{\star}{\sum_{i\in I}} (\mathfrak{A}^\star X_i)$ s'écrit $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) .\cdot \mathfrak{A} = \bigcap_{i\in I} (X_i .\cdot \mathfrak{A});$

(C'_2) $\quad \left(\overset{\star}{\sum_{i\in I}} \mathfrak{A}_i\right)^\star X = \overset{\star}{\sum_{i\in I}} (\mathfrak{A}_i^\star X)$ s'écrit $X .\cdot \left(\sum_{i\in I} \mathfrak{A}_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X .\cdot \mathfrak{A}_i);$

(C'_5) $\quad \overset{\star}{\mathfrak{Z}}{}^\star X = \overset{\star}{N}$ s'écrit $X .\cdot \mathfrak{Z} = U$.

Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Étant donnée une $(\mathfrak{G})$-algèbre* (L), *l'ensemble constitué par le demi-groupe $(\overset{\star}{\mathfrak{G}})$ opposé du demi-groupe $(\mathfrak{G})$ muni de la même relation d'ordre, et le treillis $(\overset{\star}{L})$ dual de* (L) *constitue une $(\overset{\star}{\mathfrak{G}})$-algèbre $(\overset{\star}{L})$ en définissant l'opération externe par $\mathfrak{A}^\star X = X .\cdot \mathfrak{A}$.*

Définition 1.2. — La $(\overset{\star}{\mathfrak{G}})$-algèbre $(\overset{\star}{L})$ sera appelée *l'algèbre duale* de la $(\mathfrak{G})$-algèbre (L).

Remarque. — L'algèbre duale de la $(\overset{\star}{\mathfrak{G}})$-algèbre $(\overset{\star}{L})$ est la $(\mathfrak{G})$-algèbre (L).

La théorie développée dans [2] et dans [4] nécessite l'axiome supplémentaire suivant :

AXIOME (D). — *L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément* $X \in (L)$ *vérifient la condition de chaîne ascendante.*

D'après la définition de $(\overset{\star}{\mathfrak{G}})$ et de $(\overset{\star}{L})$, il est clair que nous pourrons appliquer nos résultats au cas présent moyennant l'axiome suivant traduit en utilisant les notations de $(\mathfrak{G})$ et de (L).

AXIOME $(\overset{\star}{D})$. — *Pour tout* $X \in (L)$, *l'ensemble des éléments de la forme* $Y \cdot . X$ *avec* $Y \in (L)$ *vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante.*

D'après le corollaire de la propriété 1.1 de [2], l'axiome $(\overset{*}{\mathrm{D}})$ est notamment vérifié dans les cas ci-après :

1° $(\mathfrak{T})$ satisfait à la condition de chaîne ascendante et (L) à la condition de chaîne descendante;

2° $(\mathfrak{T})$ satisfait à la condition de chaîne descendante et (L) à la condition de chaîne ascendante;

3° Toutes les chaînes de (L) sont de longueur finie;

4° Toutes les chaînes de $(\mathfrak{T})$ bornées inférieurement sont de longueur finie.

2. Propriétés des $(\mathfrak{T})$-algèbres résultant de la dualité. — Considérons une $(\mathfrak{T})$-algèbre ou, plus généralement, un ensemble de deux treillis $(\mathfrak{T})$ et (L) satisfaisant aux axiomes (A), (B) et (C).

Supposons également vérifié l'axiome $(\overset{*}{\mathrm{D}})$.

Puisque $(\overset{*}{\mathfrak{T}})$ et $(\overset{*}{\mathrm{L}})$ vérifient les axiomes (A), (B), (C) et (D), tous les résultats de [2] (§ 1 à 6), de [4] et de [5] sont valables pour ces treillis. Nous allons traduire les principaux de ces résultats en utilisant les notations de $(\mathfrak{T})$ et (L).

Définition 2.1. — Pour tout $X \in (L)$, un élément de $(\mathfrak{T})$ de la forme $Y \overset{\cdot}{\cdot} X$ avec $Y \not\supseteq X$ est appelé un *dual résiduel à gauche propre* de X.

Théorème 2.1. — *Tout élément de* (L) *autre que* N *possède un nombre fini de duaux résiduels à gauche propres premiers.*

Théorème 2.2. — *Pour tout* $X \in (L)$, *la condition* $\mathfrak{A}X = X$ *équivaut à la condition* $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{P}$ *pour tout dual résiduel à gauche propre premier* $\mathfrak{P}$ *de* X.

Dual radical primal. Éléments duaux primaux. Théorèmes de représentation :

Théorème 2.3. — *Pour tout* $X \in (L)$, *l'ensemble des éléments* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels qu'on ait*

$$\mathfrak{A}X + \mathfrak{B}X = X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B}X = X$$

a un élément maximal $\overset{*}{\mathfrak{R}}_4(X)$. *Pour* $X \neq N$, *cet élément est l'intersection des duaux résiduels à gauche propres maximaux de* X.

Définition 2.2. — $\overset{*}{\mathfrak{R}}_4(X)$ se nomme le *dual radical primal* de X.

Définition 2.3. — Un élément $X \in (L)$ est dit *dual primal* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subset X, \quad \mathfrak{B}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}X + \mathfrak{B}X \subset X,$$

ce qui équivaut à

$$\mathfrak{A}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \subseteq \overset{*}{\mathfrak{R}}_4(X).$$

Théorème 2.4. — *Pour que* $X (\neq N)$ *soit dual primal, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel à gauche propre maximal.*

Définition 2.4. — L'élément $X(\neq N)$ étant dual primal, son unique dual résiduel à gauche propre maximal $\mathfrak{M}$ est appelé l'élément premier *associé* à X. On dit que X est $\mathfrak{M}$-*dual primal*.

Définition 2.5. — Une représentation d'un élément X de (L) comme somme d'un nombre fini d'éléments de (L), soit $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, est dite *réduite* si aucun X_i n'est superflu et si X_i ne peut être remplacé par un élément de la forme $\mathfrak{A}X_i$ strictement plus petit que lui (3).

Théorème 2.5. — *Tout élément* X *de* (L) *est dual primal ou admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux primaux de la forme* $\mathfrak{A}X$ [*avec* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$] *dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux.*

Théorème 2.6. — *Deux représentations réduites d'un élément* $X(\neq N)$ *comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux primaux dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux ont le même nombre d'éléments et le même ensemble d'éléments premiers associés, cet ensemble coïncidant avec l'ensemble des duaux résiduels maximaux de* X.

Propriété 2.1. — *Pour tout élément* X *de* (L) *et tout élément premier de* ($\mathfrak{T}$) *distinct de* $\mathcal{E}$, *l'ensemble des éléments de la forme* $\mathfrak{A}X$ *avec* $\mathfrak{A} \nsubseteq \mathfrak{P}$ *possède un élément minimum que nous notons* $X^{\star}_{]\mathfrak{P}[}$ (4).

Théorème 2.7. — X *étant un élément non dual primal dont les duqux résiduels à gauche propres maximaux sont* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$, *on a*

$$X = X^{\star}_{]\mathfrak{P}_1[} + X^{\star}_{]\mathfrak{P}_2[} + \ldots + X^{\star}_{]\mathfrak{P}_n[}$$

qui est une représentation réduite de X *comme somme d'éléments duaux primaux dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux. Pour toute autre telle représentation*

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

X_i *étant* $\mathfrak{P}_i$-*dual primal, on a* $X^{\star}_{]\mathfrak{P}_i[} \supseteq X_i$ *pour tout* i (5).

Définition 2.6. — La représentation réduite du théorème 2.7 s'appelle la *représentation réduite maximum* de X comme somme d'éléments duaux primaux (5).

Dual radical primaire. Éléments duaux primaires :

Théorème 2.8. — *Pour tout* $X \in (L)$, *l'ensemble des éléments* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels qu'il*

---

(3) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot [7] (chap. IV, § 2, définition 4.3).

(4) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot [7] (chap. IV, § 3).

(5) *Cf.* L. Lesieur et R. Croisot [7] (chap. IV, § 3).

existe un entier positif m avec $\mathfrak{A}^m \leqq N \cdot . X$ *possède un élément maximum* $\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X)$. *Pour* $X \neq N$, *cet élément est l'intersection des éléments premiers minimaux de* $(\mathfrak{T})$ *contenant* $N \cdot . X$ (6).

Définition 2.7. — $\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X)$ se nomme le *dual radical primaire* de X.

Définition 2.8. — Un élément X de (L) est dit *dual primaire* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \exists\, k \text{ entier positif avec } \mathfrak{A}^k X = N,$$

ce qui équivaut à

$$\mathfrak{A}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_1(X).$$

En particulier, X est dit *dual premier à droite* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}X = N.$$

Théorème 2.9. — *Pour que* $X(\neq N)$ *soit dual primaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel à gauche propre premier qui soit élément premier minimum contenant* $N \cdot . X$.

Définition 2.9. — L'élément $X(\neq N)$ étant dual primaire, son radical primaire étant $\mathfrak{P}$, on dit que X est $\mathfrak{P}$*-dual primaire*.

En particulier, X est dit $\mathfrak{P}$*-dual premier à droite* s'il est, de plus, dual premier à droite.

Dual radical secondaire. Éléments duaux secondaires :

Théorème 2.10. — *Pour tout* $X \in (L)$, *l'ensemble des éléments* $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels qu'il existe des entiers positifs* $k_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n \geqq 0)$ *et des éléments* $\mathcal{L}_i \in (\mathfrak{T})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *vérifiant*

$$\mathfrak{A}^{k_0} \mathcal{L}_1 \mathfrak{A}^{k_1} \mathcal{L}_2 \mathfrak{A}^{k_2} \ldots \mathcal{L}_n \mathfrak{A}^{k_n} X = N, \qquad \textit{avec} \quad \mathcal{L}_i X = X$$

a un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X)$. *Pour* $X \neq N$, *cet élément est l'intersection des éléments premiers minimaux de* $(\mathfrak{T})$ *contenant* $N \cdot . X$ *et contenus dans un dual résiduel à gauche propre premier de* X.

Définition 2.10. — $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X)$ se nomme le *dual radical secondaire* de X.

Définition 2.11. — Un élément X de (L) est dit *dual secondaire* si l'on a

$$\mathfrak{A}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \exists\, k_i \text{ entiers positifs} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$\mathcal{L}_i \in (\mathfrak{T}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

tels que

$$\mathfrak{A}^{k_0} \mathcal{L}_1 \mathfrak{A}^{k_1} \mathcal{L}_2 \mathfrak{A}^{k_2} \ldots \mathcal{L}_n \mathfrak{A}^{k_n} X = N, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{L}_i X = X,$$

(6) $\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X)$ est ainsi le radical primaire de l'élément N de la $(\mathfrak{T})$-algèbre $(L') = (X)$, sous-algèbre de (L) constituée par les éléments Y de (L) inférieurs ou égaux à X (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [7], chap. III, § 5).

ce qui équivaut à

$$\mathcal{A}X \subset X \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X).$$

THÉORÈME 2.11. — *Pour que* $X(\neq N)$ *soit dual secondaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel à gauche propre premier qui soit élément premier minimal contenant* $N \cdot . X$.

Définition 2.12. — L'élément $X(\neq N)$ étant dual secondaire, son radical dual secondaire étant $\mathfrak{T}$, on dit que X est *$\mathfrak{T}$-dual secondaire*.

Dual radical unirésidué. Éléments duaux unirésidués :

THÉORÈME 2.12. — *Pour tout* $X \in (L)$, *l'ensemble des éléments* $\mathcal{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels qu'on ait*

$$\mathcal{A}X \not\subseteq C \Rightarrow \exists \mathcal{B} \in (\mathfrak{T}), \quad \textit{avec} \quad \mathcal{B}X \not\subseteq C \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}\mathcal{B}X \subseteq C$$

a un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}'(X)$. *Pour* $X \neq N$, *cet élément est l'intersection des duaux résiduels à gauche propres premiers de* X.

Définition 2.13. — $\overset{*}{\mathcal{R}}'(X)$ se nomme le *dual radical unirésidué* de X.

Définition 2.14. — Un élément $x \in (L)$ est dit *dual unirésidué* s'il est égal à N ou s'il posséde un seul résiduel à gauche propre premier, ce qui équivaut à

$$\mathcal{A}X \subset X \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}'(X).$$

Définition 2.15. — L'élément $X(\neq N)$ étant dual unirésidué, son radical dual unirésidué étant $\mathfrak{T}$, on dit que X est *$\mathfrak{T}$-dual unirésidué*.

Dual radical tertiaire. Éléments duaux tertiaires :

Définition 2.16. — On appelle *dual résiduel essentiel* de $X \in (L)$ un élément $\mathfrak{T} \in (\mathfrak{T})$ tel qu'il existe $Y \subset X$ satisfaisant à $\mathfrak{T} = Y \cdot . X$ et à $Y \subseteq Z \subset X \Rightarrow \mathfrak{T} = Z \cdot . X$.

Tout dual résiduel à gauche propre maximal est essentiel; tout dual résiduel essentiel est premier.

THÉORÈME 2.13. — *Pour tout* $X \in (L)$, *l'ensemble des éléments* $\mathcal{A} \in (\mathfrak{T})$ *tels qu'on ait*

$$\mathcal{A}X + C = X \Rightarrow C = X$$

a un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(X)$. *Pour* $X \neq N$, *cet élément est l'intersection des duaux résiduels essentiels de* X.

Définition 2.17. — $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(X)$ se nomme le *dual radical tertiaire* de X.

Définition 2.18. — Un élément $X \in (L)$ est dit *dual tertiaire* si l'on a

$$\mathcal{A}X \subset X, \quad C \subset X \Rightarrow \mathcal{A}X + C \subset X,$$

ce qui équivaut à

$$\mathcal{A}X \subset X \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X).$$

THÉORÈME 2.14. — *Pour que* $X(\neq N)$ *soit dual tertiaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel essentiel.*

Définition 2.19. — L'élément $X(\neq N)$ étant dual tertiaire, son radical dual tertiaire étant $\mathfrak{T}$, on dit que X est $\mathfrak{T}$-*dual tertiaire.*

Relation entre les différents duaux radicaux. Cas particuliers. Conséquences :

THÉORÈME 2.15. — *Entre les différents duaux radicaux d'un élément* X, *on a les relations suivantes :*

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X) \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}'(X) \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X) \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_4(X).$$

PROPRIÉTÉ 2.2. — *Si le demi-groupe* $(\mathfrak{G})$ *est commutatif, on a*

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}'(X).$$

Définition 2.20. — Un élément $\mathcal{A}$ de $(\mathfrak{G})$ est dit L-*dual principal* si

$$X' \supseteq B \,.\!\cdot\, \mathcal{A} \text{ entraîne l'existence de } X \supseteq B \text{ tel que } X' = X \,.\!\cdot\, \mathcal{A}.$$

PROPRIÉTÉ 2.3. — *Si le treillis* (L) *est dual semi-modulaire* (7) *et si tout élément de* $(\mathfrak{G})$ *est somme d'éléments* L-*duaux principaux, on a*

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}'(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X).$$

THÉORÈME 2.16. — *Tout élément dual primaire (resp. dual secondaire, dual unirésidué, dual tertiaire) est dual secondaire (resp. dual unirésidué, dual tertiaire, dual primal).*

PROPRIÉTÉ 2.4. — *Pour qu'un élément appartenant à l'une des classes précédentes appartienne à une autre, il faut et il suffit que ses deux duaux radicaux correspondants soient confondus.*

COROLLAIRE 1. — *Si le demi-groupe* $(\mathfrak{G})$ *est commutatif, les notions d'élément dual primaire, dual secondaire et dual unirésidué coïncident.*

COROLLAIRE 2. — *Si le treillis* (L) *est dual semi-modulaire et si tout élément de* $(\mathfrak{G})$ *est somme d'éléments* L-*duaux principaux, les notions d'élément dual primaire, dual secondaire, dual unirésidué et dual tertiaire coïncident.*

PROPRIÉTÉ 2.5. — *Si le treillis* (L) *est dual semi-modulaire, une somme finie*

---

(7) C'est-à-dire que le treillis dual $(\overset{*}{L})$ est semi-modulaire; ceci a lieu notamment si le treillis (L) est modulaire.

d'éléments $\mathfrak{T}$-duaux primaires (resp. $\mathfrak{T}$-duaux secondaires, $\mathfrak{T}$-duaux unirésidués, $\mathfrak{T}$-tertiaires) est un élément $\mathfrak{T}$-dual primaire (resp. $\mathfrak{T}$-dual secondaire, $\mathfrak{T}$-dual unirésidué, $\mathfrak{T}$-dual tertiaire).

Théorème de représentation d'un élément comme somme finie d'éléments duaux tertiaires. — Nous supposons que le treillis (L) est dual semi-modulaire et qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\text{(1)} \qquad X + \left(\bigcap_{i \in I} Y_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X + Y_i)$$

pour tout X et tout sous-ensemble totalement ordonné $\{Y_i\}_{i \in I}$.

Nous supposons que l'axiome $(\check{D})$ est renforcé par l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° ($\mathfrak{T}$) satisfait à la condition de chaîne ascendante et (L) à la condition de chaîne descendante;

2° ($\mathfrak{T}$) satisfait à la condition de chaîne descendante et (L) à la condition de chaîne ascendante;

3° Toutes les chaînes de (L) sont de longueur finie.

(Dans le premier et le troisième cas, la propriété (1) est trivialement vérifiée.)

Moyennant ces conditions, tout élément de (L) est somme d'un nombre fini d'éléments *+-irréductibles*, c'est-à-dire d'éléments qui ne sont pas la somme de deux éléments strictement plus petits qu'eux. On a alors les résultats qui sont la traduction de ceux de [2] (§ 8) et de [6].

Définition 2.21. — Une représentation d'un élément de (L) autre que N comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux tertiaires est dite *réduite* si aucun de ces éléments n'est superflu et si leurs éléments premiers associés sont tous distincts.

Théorème 2.17. — *Tout élément* X *de* (L) *autre que* N *admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux tertiaires.*

Théorème 2.18. — *Deux représentations réduites d'un élément* $X (\neq N)$ *comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux tertiaires ont le même nombre d'éléments et le même ensemble d'éléments premiers associés, cet ensemble coïncidant avec l'ensemble des duaux résiduels essentiels de* X.

Notons encore que les représentations réduites comme somme d'un nombre fini d'éléments *duaux primaires* vérifient, lorsqu'elles existent, le deuxième théorème d'unicité : unicité des éléments duaux primaires auxquels sont associés les *éléments premiers minimaux*.

3. Applications et exemples. — La théorie que nous venons de développer s'applique aux différents cas cités dans [2] (*cf.* § 1) mais il faut assurer l'axiome ($\overset{*}{\mathrm{D}}$) au lieu de l'axiome (D). Nous allons d'abord donner les applications les plus importantes. Puis, nous établirons quelques théorèmes plus forts dans certaines circonstances particulières. Enfin, nous étudierons quelques exemples et contre-exemples.

Auparavant, remarquons que le treillis (L) des idéaux à gauche ou bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro ou bien celui des sous-modules d'un module est modulaire. D'autre part, le treillis (L) des idéaux à gauche ou bilatères d'un demi-groupe avec zéro vérifie la propriété

$$\mathrm{X} + \left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Y}_i\right) = \bigcap_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{X} + \mathrm{Y}_i) \tag{1}$$

pour toute chaîne $\{\mathrm{Y}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$, cette propriété résultant de la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection; par contre, si (L) est le treillis des idéaux à gauche ou bilatères d'un anneau ou bien celui des sous-modules d'un module, nous devrons supposer la condition de chaîne descendante pour assurer (1) si besoin est (dans l'anneau des entiers, il n'y a pas d'idéal $+$-irréductible autre que O).

La plus grande partie des résultats du paragraphe 2 (à l'exception des théorèmes de représentation d'un élément comme somme finie d'éléments duaux tertiaires) s'applique dans les cas suivants :

a. (L) est un demi-groupe réticulé résidué avec élément universel et élément zéro quasi-entier à gauche, ($\mathfrak{T}$) étant l'ensemble des éléments quasi-entiers de (L), la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante étant imposées à ($\mathfrak{T}$). Ces conditions sont réalisées si (L) est le treillis des idéaux à gauche d'un anneau nœthérien bilatère et artinien bilatère ou le treillis des idéaux à gauche d'un demi-groupe avec zéro nœthérien bilatère et artinien bilatère.

Dans le cas particulier où (L) est quasi-entier, ($\mathfrak{T}$) et (L) sont confondus. Ceci a lieu quand (L) est le treillis des idéaux bilatères d'un anneau nœthérien bilatère et artinien bilatère ou le treillis des idéaux bilatères d'un demi-groupe avec zéro nœthérien bilatère et artinien bilatère.

b. ($\mathfrak{T}$) est le treillis des idéaux bilatères d'un anneau A et (L) le treillis des sous-modules d'un A-module M, l'axiome ($\overset{*}{\mathrm{D}}$) étant assuré par l'une ou l'autre des conditions suivantes :

($\mathfrak{T}$) est de longueur finie;
(L) est de longueur finie;
A est artinien bilatère et M nœthérien;
A est nœthérien bilatère et M artinien.

De plus, les théorèmes de représentation d'un élément comme somme finie d'éléments duaux tertiaires seront valables dans les cas suivants :

idéaux à gauche d'un anneau artinien à gauche et nœthérien bilatère;
idéaux à gauche d'un demi-groupe avec zéro artinien à gauche et nœthérien bilatère;
idéaux à gauche d'un demi-groupe avec zéro nœthérien à gauche et artinien bilatère;
idéaux bilatères d'un anneau nœthérien bilatère et artinien bilatère;
idéaux bilatères d'un demi-groupe avec zéro nœthérien bilatère et artinien bilatère;
sous-modules d'un module artinien sur un anneau nœthérien bilatère;
sous-modules d'un module artinien et nœthérien.

Propriété 3.1. — *Soit* (L) *un demi-groupe réticulé résidué avec élément universel* U *et élément zéro* O, *quasi-entier à gauche*, $(\mathfrak{T})$ *l'ensemble des éléments quasi-entiers de* (L). *Pour tout élément* $\mathfrak{X}$ *de* $(\mathfrak{T})$, *l'ensemble de ses duaux résiduels à gauche propres premiers est le même, soit qu'on considère* $\mathfrak{X}$ *comme élément de* $(\mathfrak{T})$ *muni de l'ensemble* $(\mathfrak{T})$ *d'opérateurs, soit qu'on considère* $\mathfrak{X}$ *comme élément de* (L) *muni de l'ensemble* $(\mathfrak{T})$ *d'opérateurs.*

Il suffit évidemment d'établir que tout dual résiduel à gauche propre premier de $\mathfrak{X}$ qui est de la forme $\mathfrak{P} = Y \cdot\!. \, \mathfrak{X}$ avec $Y \in (L)$ est de la forme $\mathfrak{Y} \cdot\!. \, \mathfrak{X}$ avec $\mathfrak{Y} \in (\mathfrak{T})$.

Posons $\mathfrak{Y} = Y \cap (Y \cdot\!. \, U)$. On a d'abord $\mathfrak{Y} \in (\mathfrak{T})$.

En effet, $\mathfrak{Y}\,U \subseteq (Y \cdot\!. \, U)\,U \subseteq Y$ et $\mathfrak{Y}\,U\,U \subseteq \mathfrak{Y}\,U \subseteq Y$, d'où $\mathfrak{Y}\,U \subseteq Y \cdot\!. \, U$ et, par suite, $\mathfrak{Y}\,U \subseteq \mathfrak{Y}$. D'autre part, on a $\mathfrak{P} = \mathfrak{Y} \cdot\!. \, \mathfrak{X}$. En effet, on a $\mathfrak{Y} \cdot\!. \, \mathfrak{X} \subseteq Y \cdot\!. \, \mathfrak{X} = \mathfrak{P}$; d'ailleurs, $\mathfrak{P}\mathfrak{X} \subseteq Y$ entraîne, puisque $\mathfrak{X}$ est élément de $(\mathfrak{T})$, $\mathfrak{P}\mathfrak{X}\,U \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{X} \subseteq Y$, d'où $\mathfrak{P}\mathfrak{X} \subseteq Y \cdot\!. \, U$ et $\mathfrak{P}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ soit $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Y} \cdot\!. \, \mathfrak{X}$.

Corollaire. — *Pour un élément* $\mathfrak{X}$ *de* $(\mathfrak{T})$, *les notions d'élément dual primaire, dual secondaire, dual unirésidué, dual primal sont les mêmes, soit qu'on considère* $\mathfrak{X}$ *comme élément de* $(\mathfrak{T})$ *muni de l'ensemble* $(\mathfrak{T})$ *d'opérateurs, soit qu'on considère* $\mathfrak{X}$ *comme élément de* (L) *muni de l'ensemble* $(\mathfrak{T})$ *d'opérateurs.*

Ceci s'applique notamment aux idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro.

Par contre, s'il est exact qu'un dual résiduel essentiel d'un élément $\mathfrak{X}$ de $(\mathfrak{T})$ considéré comme élément de $(\mathfrak{T})$ est dual résiduel essentiel de $\mathfrak{X}$ considéré comme élément de (L), la réciproque est fausse et un élément de $(\mathfrak{T})$ peut être dual tertiaire quand on le considère dans $(\mathfrak{T})$ sans être dual tertiaire quand on le considère dans (L). Il en est ainsi de l'idéal D dans le demi-groupe de l'exemple 3.7.

Propriété 3.2. — *Soit* A *un anneau commutatif*, M *un* A-*module*, $(\mathfrak{T})$ *l'ensemble des idéaux de* A, (L) *l'ensemble des sous-modules de* M. *Tout élément de* $(\mathfrak{T})$ *est somme d'éléments* L-*duaux principaux*.

Il suffit de montrer que tout idéal principal de A est L-dual principal. Soit (a) un tel idéal et soient B et X′ deux sous-modules de M tels que $X' \supseteq B \mathbin{.\cdot} (a) = B \mathbin{.\cdot} a$. Posons $X = B + aX'$. On a $X \supseteq B$ et $X' = X \mathbin{.\cdot} a = X \mathbin{.\cdot} (a)$. En effet, on a d'abord $X \mathbin{.\cdot} a \supseteq aX' \mathbin{.\cdot} a \supseteq X'$; d'autre part, pour tout $t \in X \mathbin{.\cdot} a$, il existe $b \in B$ et $x' \in X'$ avec $at = b + ax'$, d'où $a(t - x') = b$ et $t - x' \in B \mathbin{.\cdot} a \subseteq X'$; par suite, $t \in X'$ ce qui établit $X \mathbin{.\cdot} a \subseteq X'$, d'où l'égalité $X' = X \mathbin{.\cdot} a$.

D'après le corollaire 2 de la propriété 2.4, il en résulte le théorème suivant :

Théorème 3.1. — *Soit* A *un anneau commutatif nœthérien*, M *un* A-*module artinien. Tout sous-module dual tertiaire* X, *en particulier tout sous-module* $+$-*irréductible, est dual primaire, c'est-à-dire qu'il vérifie la condition*

$$aX \subset X \Rightarrow \exists\ n \text{ entier positif avec } a^n X = 0.$$

Tout sous-module admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini de sous-modules duaux primaires, deux représentations du même sous-module ayant même nombre d'éléments et mêmes idéaux premiers associés.

Corollaire. — *Soit* A *un anneau commutatif nœthérien et artinien. Tout idéal dual tertiaire, en particulier tout idéal* $+$-*irréductible, est dual primaire. Tout idéal admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'idéaux duaux primaires, deux représentations du même idéal ayant même nombre d'éléments et mêmes idéaux premiers associés.*

Si A *est unitaire, la représentation est unique.*

L'unicité résulte du fait que tout idéal propre premier est un idéal propre maximal si A est un anneau commutatif artinien unitaire (*cf.* O Zariski et P. Samuel [1], th. 2, p. 203).

Les exemples 3.1 et 3.2 illustrent le théorème 3.1 et son corollaire.

Par contre, la propriété 3.2 et les conséquences qu'on en déduit (corollaire du théorème 3.1) ne sont pas valables pour un demi-groupe commutatif. On trouvera, dans les exemples 3.6 et 3.8, un idéal d'un tel demi-groupe (artinien et nœthérien) qui est dual tertiaire mais non dual unirésidué. Naturellement, tout idéal dual unirésidué d'un demi-groupe commutatif satisfaisant à l'axiome $(\overset{*}{\mathrm{D}})$ est dual secondaire et dual primaire, d'après le corollaire 1 de la propriété 2.4.

Théorème 3.2. — *Soit* M_n *l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur un anneau commutatif artinien et nœthérien. Tout idéal à gauche dual tertiaire de* M_n *est dual primaire et tout idéal à gauche est somme d'un nombre fini d'idéaux à gauche duaux primaires.*

Pour le voir, il suffit de se reporter à l'étude faite dans L. Lesieur et R. Croisot [2] (*cf.* § 8, exemple 2 p. 116) et d'appliquer le corollaire du théorème 3.1.

THÉORÈME 3.3. — *Soit* A *un anneau artinien à gauche,* M *un* A-*module. Supposons, en outre,* A *nœthérien bilatère ou* M *nœthérien. Soit* X *un sous-module dont le dual radical primal* $\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X)$ *est distinct de* A. *On a alors*

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}'(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X).$$

Par suite, pour $\mathfrak{T} \neq A$, *les notions de sous-module* $\mathfrak{T}$-*dual primal,* $\mathfrak{T}$-*dual tertiaire,* $\mathfrak{T}$-*dual unirésidué et* $\mathfrak{T}$-*dual secondaire coïncident.*

En effet, on sait (*cf.* L. Lesieur et R. Croisot [3], § 8, th. 8.1) que tout idéal bilatère propre premier est un idéal bilatère propre maximal. Si l'on a $\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X) \neq A$, A n'est pas dual résiduel à gauche propre de X. Il en résulte qu'aucun idéal bilatère premier de A n'est contenu strictement dans un dual résiduel à gauche propre maximal de X. On a donc $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_4(X)$ d'où l'on déduit facilement le théorème.

COROLLAIRE. — *Soit* A *un anneau artinien à gauche ayant un élément unité à gauche et* M *un* A-*module. Pour tout sous-module* X, *on a*

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}'(X) = \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X).$$

Par suite, les notions de sous-modules dual primal, dual tertiaire, dual unirésidué et dual secondaire coïncident.

En effet, dans ce cas, il n'y a pas de sous-module admettant A pour dual résiduel à gauche propre.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 3.3.

THÉORÈME 3.4. — *Soit* A *un anneau artinien à gauche, ayant un élément unité à gauche et, par conséquent, nœthérien à gauche. Soit* M *un* A-*module. Tout sous-module dual primal est dual secondaire et tout sous-module admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini de sous-modules duaux secondaires, deux représentations du même sous-module ayant même nombre d'éléments et même idéaux premiers associés.*

COROLLAIRE. — *Soit* A *un anneau artinien à gauche, ayant un élément unité à gauche. Tout idéal à gauche dual primal est dual secondaire et tout idéal à gauche admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'idéaux à gauche duaux secondaires, deux représentations du même idéal à gauche ayant même nombre d'éléments et même idéaux premiers associés.*

Comme conséquence de ce corollaire, on voit qu'un idéal bilatère de A est dual tertiaire en tant qu'idéal bilatère si et seulement si il est dual tertiaire en tant qu'idéal à gauche.

Le théorème 3.4 et son corollaire sont illustrés par les exemples 3.5, 3.3 et 3.4.

Dans les hypothèses du théoréme 3.4 ou de son corollaire, un sous-module ou un idéal à gauche dual secondaire n'est pas nécessairement dual primaire (*voir* les trois exemples cités). De plus, le théorème d'unicité des composants duaux secondaires isolés n'est pas nécessairement valable (*voir* l'exemple 3.4).

Pour un anneau artinien à gauche et nœthérien à gauche A sans élément unité à gauche, on peut avoir $\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X) = A$ et $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(X) \subset A$. Dans l'exemple 3.8, on trouvera un anneau commutatif artinien et nœthérien R pour lequel $\overset{*}{\mathcal{R}}_4(R) = R$ et $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(R) \subset R$. Nous ne savons pas si, dans les mêmes hypothèses, il est possible d'avoir $\overset{*}{\mathcal{R}}'(X) \subset \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X)$ et $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) \subset \overset{*}{\mathcal{R}}'(X)$ (ce dernier cas ne pouvant évidemment avoir lieu que dans un anneau non commutatif).

Dans un demi-groupe commutatif unitaire, artinien et nœthérien, on peut très bien avoir $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(X) \subset \overset{*}{\mathcal{R}}_4(X)$ (*voir* l'idéal D dans l'exemple 3.8 auquel on peut adjoindre un élément unité) et $\overset{*}{\mathcal{R}}'(X) \subset \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X)$ (*voir* les idéaux B et C dans le même exemple ou l'idéal D dans l'exemple 3.6). Nous ne savons pas s'il est possible d'avoir $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) \subset \overset{*}{\mathcal{R}}'(X)$ dans un demi-groupe (non commutatif) artinien et nœthérien.

THÉORÈME 3.5. — *Soit* A *un anneau semi-simple,* M *un* A-*module. Tout sous-module dual primal est dual primaire et tout sous module est d'une manière unique somme d'un nombre fini de sous-modules duaux primaires.*

Il suffit d'appliquer le théorème 3.4 puisque A est artinien à gauche unitaire en remarquant, de plus, que le treillis ($\mathfrak{T}$) des idéaux bilatères de A est commutatif.

COROLLAIRE. — *Soit* A *un anneau semi-simple. Tout idéal à gauche dual primal est dual primaire et tout idéal à gauche est d'une manière unique somme d'un nombre fini d'éléments à gauche duaux primaires.*

Exemple 3.1. — Soit Z l'anneau des entiers et Q/Z le groupe additif des classes de nombres rationnels modulo 1. Q/Z est un Z-module. Soit M le sous-module de Q/Z constitué par les classes modulo 1 des nombres rationnels de la forme $\dfrac{k}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}}$, où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers fixés et $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entiers positifs ou nuls quelconques. Le Z-module M est artinien unitaire. Désignons par M_i le sous-module de M constitué par les classes modulo 1 des nombres rationnels de la forme $\frac{k}{p_i^{\alpha_i}}$, où k et α_i sont quelconques, et par $N_{i\alpha}$ le sous-module de M_i engendré par la classe modulo 1 du nombre rationnel $\frac{1}{p_i^{\alpha}}$. Les sous-modules duaux primaires non nuls de M sont les sommes de sous-modules M_i et les sous-modules $N_{i\alpha}$. Les sommes de sous-modules M_i sont O-duaux primaires et les sous modules $N_{i\alpha}$ sont (p_i)-duaux primaires. Chaque sous-module non nul de M admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini de sous-modules duaux primaires et la représentation est ici unique. Le sous-module $M_1 + N_{21}$ par exemple est (p_2)-dual primal et non dual primaire.

Exemple 3.2. — Soit l'anneau $Z/(m)$ des classes résiduelles d'entiers modulo $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Cet anneau est évidemment commutatif, unitaire, artinien et nœthérien. Les idéaux premiers propres $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont engendrés par les classes résiduelles de $p_1, p_2, \dots, p_n$. Un idéal $+$-irréductible non nul est engendré par la classe résiduelle d'un entier de la forme $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots, p_n^{\beta_n}$ avec $0 \leqq \beta_i < \alpha_i$ pour un i et $\beta_j = \alpha_j$ pour tout $j \neq i$. Un tel idéal est P_i-dual primaire. Il n'y a pas d'autres idéaux duaux primaires que les idéaux $+$-irréductibles. Tout idéal possède une représentation réduite unique comme somme finie d'idéaux duaux primaires.

Exemple 3.3. — Considérons l'exemple 1 du paragraphe 8 de L. Lesieur et R. Croisot ([2], p. 114). Il s'agit d'un anneau unitaire artinien et nœthérien, non commutatif dont le radical primaire n'est pas nul. Il n'est donc pas semi-simple.

Les idéaux à gauche C, N, N_λ et J sont P_1-duaux primaires. B est P_2-dual primaire. L'idéal bilatère premier P_1 est P_2-dual secondaire mais non dual primaire. On a

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_1(P_1) = I, \qquad \overset{*}{\mathcal{R}}_2(P_1) = \overset{*}{\mathcal{R}}'(P_1) = \overset{*}{\mathcal{R}}_3(P_1) = \overset{*}{\mathcal{R}}_4(P_1) = P_2$$

et par suite $P_1 \not\subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_4(P_1)$. *Quant à l'idéal bilatère premier P_2, il n'est même pas dual primal.* On a

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_1(P_2) = \overset{*}{\mathcal{R}}_2(P_2) = \overset{*}{\mathcal{R}}'(P_2) = \overset{*}{\mathcal{R}}_3(P_2) = \overset{*}{\mathcal{R}}_4(P_2) = I, \qquad \text{d'où} \qquad P_2 \not\subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_4(P_2).$$

Exemple 3.4. — Reprenons l'exemple 3 de L. Lesieur et R. Croisot [3], p. 473. Il s'agit de l'anneau A d'endomorphismes du groupe abélien produit du groupe additif des classes résiduelles d'entiers modulo 2 et du groupe additif des classes résiduelles d'entiers modulo 4. C'est encore un anneau unitaire artinien et nœthérien, non commutatif dont le radical primaire n'est pas nul.

Les idéaux à gauche I_0, I_1, I_2 et J sont P_1-duaux primaires; L_0, L_1 et P_2 sont P_1-duaux secondaires mais non duaux primaires. J_0, J_1, J_2 et P_1 sont P_2-duaux secondaires mais non duaux primaires.

On a

$$K_2 = I_0 + J_2 = J + J_2$$

et

$$A = L_0 + J_0 = L_1 + J_0 = P_2 + J_0 = L_0 + J_1 = L_1 + J_1 = P_2 + J_1 = L_0 + P_1 = L_1 + P_1 = P_2 + P_1,$$

ce qui montre que *le théorème d'unicité des composants isolés n'est pas valable pour les représentations comme somme d'éléments duaux secondaires.*

Exemple 3.5. — Reprenons l'exemple 4 de L. Lesieur et R. Croisot [3], p. 475. Il s'agit d'un A-module U nœthérien et artinien unitaire sur un anneau non commutatif fini.

Le sous-module B est $\mathfrak{T}$-dual primaire; M, C et U sont $\mathfrak{T}$-duaux secondaires mais non duaux primaires. N' est $\mathfrak{T}'$-dual primaire.

Exemple 3.6. — Soit D le demi-groupe commutatif dont la table de multiplication est la suivante :

·	o	a	b
o	o	o	o
a	o	a	a
b	o	a	b

Ses idéaux sont $O = \{o\}$, $A = \{o, a\}$ et D. Ils sont tous premiers. Les duaux résiduels à gauche propres de l'idéal D sont $O \cdot . D = O$ et $A \cdot . D = A$. *L'idéal* D *est* $+$*-irréductible donc dual tertiaire* (d'ailleurs, son unique dual résiduel essentiel est A), *mais il n'est pas dual unirésidué, ni à plus forte raison dual primaire.*

Exemple 3.7. — Soit D le demi-groupe dont la table de multiplication est la suivante :

	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	a	b	a
b	o	o	o	o
c	o	a	b	c

Ses idéaux bilatères sont $O = \{o\}$, $B = \{o, b\}$, $A = \{o, a, b\}$ et D, ils sont premiers à l'exception de O. Figurons le diagramme de leur treillis ($\mathfrak{T}$).

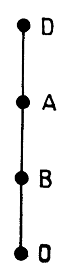

Fig. 1.

Les idéaux à gauche sont, outre les idéaux bilatères, $A' = \{o, a\}$ et $D' = \{o, a, c\}$. Figurons le diagramme de leur treillis (L).

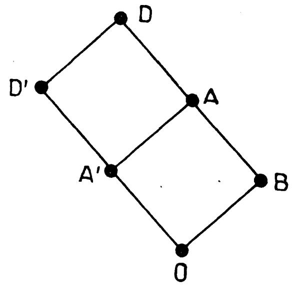

Fig. 2.

L'idéal bilatère D est dual tertiaire en tant qu'idéal bilatère puisqu'il est $+$-irréductible. D'ailleurs, son unique dual résiduel essentiel cst $A \cdot . D = A$. *Par contre, en tant qu'idéal à gauche, il n'est pas dual tertiaire* car il possède deux duaux résiduels essentiels $A \cdot . D = A$ et $D' \cdot . D = B$.

L'idéal à gauche D' est dual tertiaire et non dual unirésidué.

Exemple 3.8. — Considérons le demi-groupe commutatif D dont la table de multiplcation est la suivante :

	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	a	a	a
b	o	a	a	a
c	o	a	a	c

Ses idéaux sont $O = \{o\}$, $A = \{o, a\}$, $B = \{o, a, b\}$, $C = \{o, a, c\}$ et D. Représentons le diagramme de leur treillis ($\mathfrak{T}$).

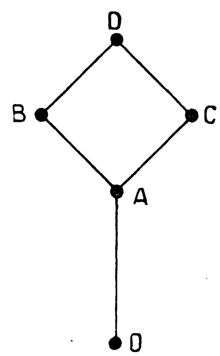

Fig. 3.

Les idéaux premiers sont O, B, D. L'idéal D admet comme duaux résiduels essentiels $B \cdot . D = B$ et $C \cdot . D = D$. Il est donc D-dual primal et non dual tertiaire. L'idéal B admet comme dual résiduel essentiel $A \cdot . B = D$; il admet en outre $O \cdot . B = O$ comme dual résiduel à gauche propre. Il est donc D-dual tertiaire mais non dual unirésidué. De même, l'idéal C qui admet comme dual résiduel essentiel $A \cdot . C = B$ et comme autre dual résiduel à gauche propre $O \cdot . C = O$ est B-dual tertiaire et non dual unirésidué.

Construisons maintenant sur le corps des nombres entiers modulo 2 une algèbre R dont les éléments générateurs a, b, c se muliplient conformément à la table de multiplication de D.

Les idéaux de R sont $O = \{o\}$, $A = (a)$, $B' = (a\text{-}b)$, $C' = (a\text{-}c)$, $C = (a, c)$, $B = (a, b)$, $A' = (a\text{-}c, a\text{-}b)$ et R. Le diagramme de leur treillis ($\mathfrak{T}$) est le suivant :

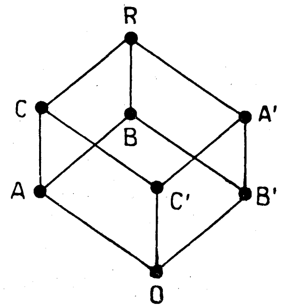

Fig. 4.

Les idéaux premiers sont B, A′ et R. L'idéal R admet trois duaux résiduels essentiels : $C \cdot . R = D$, $B \cdot . R = B$, $A' \cdot . R = A'$. *Il est donc* D-*dual primal mais non dual tertiaire*. De même, les idéaux B et A′ sont D-duaux primaux et non duaux tertiaires.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] O. Zariski et P. Samuel, *Commutative Algebra*, 1, Princeton, 1958.

[2] L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie nœthérienne des anneaux*, *des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, I (*Colloque d'Algèbre supérieure*, C. B. R. M, Bruxelles, 1956, p. 79-121).

[3] L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie nœthérienne des anneaux*, *des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, II (*Math. Annalen*, **134**, 1958, p. 458-476).

[4] L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie nœthérienne des anneaux*, *des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, III (*Académie Royale de Belgique*, **44**, 1958, p. 75-93).

[5] L. Lesieur et R. Croisot, *La notion de résiduel essentiel* (*C. R. Acad. Sc.*, **246**, 1958, p. 357-360).

[6] L. Lesieur et R. Croisot, *Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires* (*C. R. Acad. Sc.*, **246**, 1958, p. 517-520).

[7] L. Lesieur et R. Croisot, *Algèbre nœthérienne non commutative* (*Mém. Sc. math.*, Gauthier-Villars, 1960).