Annales scientifiques de l'É.N.S.

Bach

De l'intégration par les séries de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x-1}{x}\frac{dy}{dx} = y$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 3 (1874), p. 47-68
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__47_0>

DE

L'INTÉGRATION PAR LES SÉRIES

DE L'ÉQUATION $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y$;

PAR M. BACH,

DOYEN HONORAIRE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

L'équation différentielle ci-dessus, qui n'est d'ailleurs qu'une transformation bien connue de l'équation de Riccati, a été l'objet de travaux nombreux dont il est inutile de retracer ici l'historique; mais je ne sache pas que les articles récents insérés par M. Cayley et M. Glaisher dans le *Philosophical Magazine* [1] aient été reproduits dans une publication française; c'est dans ces deux articles que j'ai puisé les éléments de la présente étude.

L'article de M. Glaisher, en particulier, me paraît renfermer des remarques et des rapprochements curieux que je me propose de faire connaître ici, tout en me permettant de changer l'exposition et les notations adoptées par l'auteur.

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y \tag{1}$$

étant linéaire, il suffit d'en connaître deux solutions y_1 et y_2, et alors l'intégrale générale sera

$$y = cy_1 + c'y_2.$$

---

(1) *Voir* le *Philosophical Magazine*, numéros de novembre 1869 et juin 1872.

Pour trouver ces deux solutions, posons

$$y = e^x z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(z + \frac{dz}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x\left(z + \frac{2\,dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), on aura à vérifier la suivante :

$$(2) \qquad x\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2\,dz}{dx}\right) - (n-1)\left(z + \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Cela posé, écrivons

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_i x^i + A_{i+1} x^{i+1} + \ldots.$$

En calculant $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ et substituant dans l'équation (2), qui doit devenir une identité, nous arriverons aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
(n-1)A_1 + (n-1)A &= 0,\\
2(n-2)A_2 + (n-3)A_1 &= 0,\\
3(n-3)A_3 + (n-5)A_2 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots,\\
i(n-i)A_i + (n-2i+1)A_{i-1} &= 0,\\
(i+1)(n-i-1)A_{i+1} + (n-2i-1)A_i &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots;
\end{aligned}$$

d'où, en faisant $A = 1$,

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{1}\,\frac{n-1}{n-1},\\
A_2 &= \frac{1}{1.2}\,\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)},\\
A_3 &= -\frac{1}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_i &= \frac{(-1)^i}{1.2.3.\,i}\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2i+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)},\\
A_{i+1} &= \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3.(i+1)}\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2i-1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-i-1)},
\end{aligned}$$

Or, si $n = 2i + 1$, A_{i+1} sera nul et il en sera de même pour tous les coefficients suivants.

Nous aurons donc, en ayant égard à la valeur ci-dessus de n,

$$y_1 = e^x \left[1 - \frac{n-1}{n-1} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)} \frac{x^2}{1.2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-1)(n-2)\ldots \frac{n+1}{2}} \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1.2\ldots \frac{(n-1)}{2}} \right].$$

Si l'on pose ensuite $y = e^{-x} z$, et que l'on opère comme plus haut, on trouvera

$$y_2 = e^{-x} \left[1 + \frac{n-1}{n-1} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)} \frac{x^2}{1.2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-1)(n-2)\ldots \frac{n+1}{2}} \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1.2.3\ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \right].$$

L'intégrale générale

$$y = cy_1 + c'y_2$$

sera donc, dans le cas où n est un nombre impair positif, exprimable par des fonctions algébriques et exponentielles.

Dans le cas où n est un nombre négatif et égal à $-(2i+1)$, il est également possible d'exprimer l'intégrale en fonctions algébriques et exponentielles.

A cet effet on posera, après avoir fait $y = e^x z$,

$$z = x^n (A + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_i x^i + A_{i+1} x^{i+1} + \ldots);$$

calculant ensuite $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$, on substituera dans l'équation (2), qui après la substitution doit devenir une identité, et l'on arrivera aux relations suivantes :

$$(n+1)A_1+(n+1)A=0,$$
$$2(n+2)A_2+(n+3)A_1=0,$$
$$3(n+3)A_3+(n+5)A_2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$i(n+i)A_i+(n+2i-1)A_{i-1}=0,$$
$$(i+1)(n+i+1)A_{i+1}+(n+2i+1)A_i=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où, en faisant $A=1$,

$$A_1=-\frac{1}{1}\frac{n+1}{n+1},$$
$$A_2=\frac{1}{1.2}\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)},$$
$$A_3=-\frac{1}{1.2.3}\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_i=\frac{(-i)^i}{1.2.3\ldots i}\frac{(n+1)(n+3)\ldots(n+2i-1)}{(n+1)(n+2)\ldots n+i},$$
$$A_{i+1}=\frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3\ldots(i+1)}\frac{(n+1)(n+3)\ldots(n+2i+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+i+1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si $n=-(2i+1)$, A_{i+1} est nul, et il en sera de même pour tous les coefficients suivants.

Nous aurons donc, en ayant égard à la valeur ci-dessus de n, une première intégrale particulière,

$$y_3=x^n e^x\left[1-\frac{n+1}{n+1}x+\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{(n+1)(n+3)\ldots(-2)}{(n+1)(n+2)\ldots\frac{(n-1)}{2}}\frac{x^{\frac{-(n+1)}{2}}}{1.2.3\ldots\frac{(-n-1)}{2}}\right].$$

On trouvera de même une seconde solution,

$$y_4 = x^n e^{-x}\left[1 + \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{2.1} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+3)\dots(-2)}{(n+1)(n+2)\dots\frac{(n-1)}{2}}\frac{x^{\frac{-(n+1)}{2}}}{1.2.3\dots\frac{(-n-1)}{2}}\right].$$

Il ne faut pas perdre de vue que n doit dans ces formules être remplacé par un nombre impair *négatif*.

L'intégrale générale sera, dans ce cas,

$$y = cy_3 + c'y_4.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que n était un nombre impair positif ou négatif; mais la même analyse s'applique évidemment au cas où n est quelconque, pourvu qu'il ne soit pas un nombre pair positif ou négatif. On posera, comme plus haut,

$$y = e^x z$$

avec

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

z n'étant plus ici un polynôme composé d'un nombre limité de termes, mais bien une série illimitée dont la loi de formation est évidente; on trouve ainsi

$$Y_1 = e^x\left[1 - \frac{n-1}{n-1}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right]$$

et de même

$$Y_2 = e^{-x}\left[1 + \frac{n-1}{n-1}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{x^2}{1.2} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right].$$

Posant ensuite

$$z = x^n(A + A_1 x + A_2 x^2 + \dots),$$

on obtiendra

$$Y_3 = x^n e^x \left[1 - \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right],$$

$$Y_4 = x^n e^{-x}\left[1 + \frac{n+1}{n+1}x + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

De là, en apparence du moins, quatre intégrales particulières de l'équation (2); il est à remarquer d'ailleurs que ces intégrales Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, qui représentent des séries indéfiniment prolongées, conviennent, quand bien même n serait un nombre impair positif ou négatif. Il suffira d'avoir la précaution de faire disparaître préalablement, dans les différents termes de ces séries, les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs qui, en s'évanouissant, font prendre aux coefficients de ces termes, à partir du rang $\pm n + 1$, des valeurs illusoires.

Les solutions particulières Y_1 et Y_2, qui conviennent à tous les cas, sont données par des séries illimitées et évidemment convergentes; mais si les solutions y_1 et y_2, qui conviennent au cas spécial où n est un impair positif, sont essentiellement différentes, il n'en est pas de même des solutions Y_1 et Y_2, qui sont égales entre elles, ainsi que nous allons le démontrer.

Le terme général de l'expression que l'on obtient en développant Y_1 en série ordonnée, suivant les puissances ascendantes de n, par la formule de Maclaurin, est

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{d^p Y_1}{dx^p}\right)_0$$

et, puisque

$$Y_1 = e^x z,$$

$$\frac{d^p Y_1}{dx^p} = e^x\left[z + p\frac{dz}{dx} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{d^3 z}{dx^3} + \ldots + \frac{d^p z}{dx^p}\right].$$

En se reportant à la valeur

$$z = 1 - \frac{n-1}{n-1}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\frac{x^2}{1.2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on trouvera, après un calcul des plus simples,

$$\left(\frac{d^pY_1}{dx^p}\right)_0 = (-1)^p\left[1 - \frac{p(n-1)}{n-1} + \frac{p(p-1)}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\right.$$

$$- \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\,\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \ldots$$

$$\left.\pm \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\right].$$

Le coefficient de x^p est donc

$$(-1)^p\left[\frac{1}{1.2.3\ldots p} - \frac{1}{1}\,\frac{n-1}{n-1}\,\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\right.$$

$$+ \frac{1}{1.2}\,\frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-2)}\,\frac{1}{1.2.3\ldots(p-2)} - \ldots$$

$$\left.\pm \frac{1}{1.2.3\ldots p}\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\right],$$

ou encore

$$\frac{(-1)^p}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p} - \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{n-1}{1}\right.$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-2)}\,\frac{(n-1)(n-3)}{1.2}\ldots$$

$$\left.\pm \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}\right].$$

La quantité, entre crochets, que nous désignerons par C_p, peut encore être écrite

$$C_p = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p} - \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{\frac{n-1}{2}}{1}\,2$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-2)}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{1.2}\,2^2 - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{n-1}{2}-p+1\right)}{1.2.3\ldots p}\,2^p.$$

Cela posé, considérons l'expression

$$\left(1-\frac{1+u}{2u}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Cette expression, développée par la formule du binôme, donne

$$\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=1-\frac{2u}{1+u}\,\frac{n-1}{2}+\frac{2^2u^2}{(1+u)^2}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{1.2}$$
$$-\frac{2^3u^3}{(1+u)^3}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{1.2.3}+\ldots$$

et

$$(1+u)^{n-1}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(1+u)^{n-1}-2u\,(1+u)^{n-2}\,\frac{\frac{n-1}{2}}{1}$$
$$+2^2u^2(1+u)^{n-3}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{1.2}$$
$$-2^3u^3(1+u)^{n-4}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{1.2.3}+\ldots.$$

Formons le terme en u^p de ce développement. Ce terme général sera

$$u^p\left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p}-\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{n-1}{2}\,2\right.$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-2)}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)2^2}{1.2}$$
$$+\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots(p-3)}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)2^3}{1.2.3\ldots}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.\pm\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n-1}{2}p+1\right)2^p}{1.2.3\ldots p}\right],$$

ou $C_p\,u^p$.

Mais $C_p\, u^p$ est le terme général du développement en série de

$$(1+u)^{n-1}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(1+u)^{n-1}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Or le développement d'une pareille expression ne renferme que les puissances paires de u et, en supposant p un nombre pair, on aura

$$C_p=\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n-1}{2}-\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p}{2}}.$$

Le coefficient de x^p sera donc finalement

$$\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\,\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n-1}{2}-\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p}{2}},$$

ou encore

$$\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2.4.6\ldots p}\,\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p)},$$

et, donnant à p successivement les valeurs de $2.4.6\ldots$, nous trouverons les coefficients des puissances paires de x, et par suite

$$Y_1=1-\frac{1}{n-2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2}-\frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3}+\ldots,$$

série convergente pour toutes les valeurs de x, et qui ne contient que les puissances paires de cette quantité; mais Y_2 se déduit de Y_1 par le changement de x en $-x$: il en résulte donc que $Y_2=Y_1$.

En suivant la même marche que plus haut, on trouvera

$$Y_3=Y_4=x^n\left[1+\frac{1}{n+2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{(n+2)(n+4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3}+\ldots\right]\ (^1).$$

(1) Il est à remarquer toutefois que la valeur de Y_4 ne dérive pas de celle de Y_3 par le changement de x en $-x$.

Avant d'aller plus loin, nous ferons d'ailleurs observer que ces valeurs de Y_1 et de Y_3 sont précisément celles que l'on obtient quand on développe les solutions de l'équation (1) en séries de la forme

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots$$

En effet, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \delta D x^{\delta-1} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} + \delta(\delta-1)Dx^{\delta-2} + \ldots$$

et, substituant dans l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha-n)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-n)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-n)Cx^{\gamma-2} + \delta(\delta-n)Dx^{\delta-2} + \ldots \\ - Ax^\alpha - Bx^\beta - Cx^\gamma - \ldots\ldots\ldots = 0.\end{aligned}$$

Faisons d'abord

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6;$$

les conditions d'identité seront

$$\begin{aligned}A + 2B(n-2) &= 0,\\ B + 4C(n-4) &= 0,\\ C + 6D(n-6) &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots,\end{aligned}$$

et, en faisant $A = 1$,

$$B = -\frac{1}{n-2}\frac{1}{2},$$

$$C = \frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{1}{2.4},$$

$$D = -\frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{1}{2.4.6},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}y = 1 - \frac{1}{n-2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{1}{1.2}\frac{x^4}{2^2} \\ - \frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{1}{1.2.3}\frac{x^6}{2^3} + \ldots = Y_1.\end{aligned}$$

Faisant ensuite

$$\alpha = n, \quad \beta = n+2, \quad \gamma = n+4, \quad \delta = n+6\ldots,$$

les conditions d'identité seront

$$\begin{aligned} &A - 2(n+2)B = 0,\\ &B - 4(n+4)C = 0,\\ &C - 6(n+6)D = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, prenant $A = 1$,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(n+2)}\,\frac{1}{2},\\ C &= \frac{1}{(n+2)(n+4)}\,\frac{1}{2.4},\\ D &= \frac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\,\frac{1}{2.4.6},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} y = x^n\Bigg[1 &+ \frac{1}{(n+2)}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n+2)(n+4)}\,\frac{1}{1.2}\,\frac{x^4}{2^2}\\ &+ \frac{1}{(n+2)(n+4)(n+6)}\,\frac{1}{1.2.3}\,\frac{x^6}{2^3} + \ldots\Bigg] = Y_3. \end{aligned}$$

Puisque Y_1 et Y_3 sont deux solutions de l'équation (1), l'intégrale générale de cette équation sera

$$y = CY_1 + C'Y_3.$$

Cette intégrale convient encore quand n est un nombre impair, positif ou négatif. Or nous avons trouvé, dans le cas de n impair positif,

$$y = cy_1 + c'y_2.$$

Nous allons montrer que cette intégrale *rentre dans le type*

$$Y = CY_1 + C'Y_3.$$

Considérons, en effet, la série donnant la valeur de Y_1 ; on peut l'écrire

$$Y_1 = y_1 + Ve^x,$$

V désignant le résultat que l'on obtient en faisant $p = n$ dans la suite

$$-\left[\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\right.$$
$$-\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p-1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p-1)}\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p-3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p-2)}\frac{x^{p+2}}{1.2.3\ldots(p+2)}-\ldots\right]$$

et en se rappelant que p, que nous allons faire égal à n, est essentiellement impair.

Après la suppression des facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs, l'expression devient

$$-\left[\frac{(n-p-2)(n-p-4)\ldots(n-2p+1)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p+1)}\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\right.$$
$$-\frac{(n-p-2)(n-p-4)\ldots(n-2p-1)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p-1)}\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}$$
$$+\frac{(n-p-4)\ldots(n-2p-3)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p-1)}\frac{x^{p+2}}{1.2.3\ldots(p+2)}$$
$$\left.-\frac{(n-p-4)\ldots(n-2p-5)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-p-3)}\frac{x^{p+3}}{1.2.3\ldots(p+3)}+\ldots\right],$$

et, si nous faisons actuellement $p = n$, on aura

$$-\left[\frac{(-2)(-4)(-6)\ldots(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right.$$
$$-\frac{(-2)(-4)\ldots(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{(-n-1)}{(-1)}\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$
$$+\frac{(-4)(-6)(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{(-n-1)(-n-3)}{(-1)}\frac{x^{n+2}}{1.2.3\ldots(n+2)}$$
$$\left.-\frac{(-4)(-6)(-n+1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{(-n-1)(-n-3)(-n-5)}{(-1)(-3)}\frac{x^{n+3}}{1.2.3\ldots(n+3)}+\ldots\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(n-2)}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left[1-\frac{n+1}{n+1}\frac{x}{1}+\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2}\right.$$
$$\left.-\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right],$$

ou bien encore

$$-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{(1.3.5\ldots n)^2}x^n\left[1-\frac{n+1}{n+1}x+\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\frac{x^2}{1.2}-\ldots\right];$$

et si nous posons

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{(1.3.5\ldots n)^2}=\mathrm{A},$$

nous aurons

$$\mathrm{V}e^x=-\mathrm{AY}_3$$

et par suite

$$\mathrm{Y}_1=y_1-\mathrm{AY}_3.$$

En répétant identiquement les mêmes calculs sur la série qui donne Y_2, nous trouverons

$$\mathrm{Y}_2=y_2+\mathrm{AY}_4,$$

et puisque

$$\mathrm{Y}_1=\mathrm{Y}_2,\quad \mathrm{Y}_3=\mathrm{Y}_4,$$

il vient

$$\mathrm{Y}_3=\frac{y_1-y_2}{2\mathrm{A}}\quad\text{et}\quad \mathrm{Y}_1=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

La solution

$$y=\mathrm{C}_1\mathrm{Y}_1+\mathrm{C}'\mathrm{Y}_3$$

devient, par conséquent,

$$y=\frac{\mathrm{C}_1}{2}(y_1+y_2)+\frac{\mathrm{C}'}{2\mathrm{A}}(y_1-y_2)=cy_1+c'y_2.$$

Si n est impair négatif, la même analyse est applicable, et l'on aura

$$\mathrm{Y}_3=y_3-\mathrm{AY}_1,$$
$$\mathrm{Y}_4=y_4+\mathrm{AY}_1;$$

la solution

$$y = C_1 Y_1 + C' Y_3$$

deviendra, par conséquent,

$$y = c y_3 + c' y_4.$$

M. Glaisher donne aussi les valeurs de y_1 et y_2 développées en séries illimitées en s'appuyant sur les formules

$$(3) \qquad y_1 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{1.3.5\ldots(n-2)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^x}{x},$$

$$(4) \qquad y_2 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{1.3.5\ldots(n-2)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right) \frac{e}{x},$$

qu'il a démontrées dans le *Quarterly Journal of Mathematik*. On peut les établir comme il suit : les égalités ci-dessous font d'ailleurs suffisamment comprendre la notation

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^1 \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = e^x(x^{-2} - x^{-3}),$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = e^x(x^{-3} - 3x^{-4} + 3x^{-5}),$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = e^x(x^{-4} - 6x^{-5} + 15x^{-6} - 15x^{-7}).$$

Faisant successivement $n = 3, 5, 7$ dans la formule (3) et ayant égard aux relations écrites ci-dessus, nous trouvons

$$\frac{(-1)^1}{1} x^3 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^1 \frac{e^x}{x} = e^x(1 - x),$$

$$\frac{(-1)^2}{1.3} x^5 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{e^x}{x} = e^x\left(1 - x + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1.2}\right),$$

$$\frac{(-1)^3}{1.3.5} x^7 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{e^x}{x} = e^x\left(1 - x + \frac{4}{5}\frac{x^2}{1.2} + \frac{2}{5}\frac{x^3}{1.2.3}\right).$$

Les seconds membres de ces égalités peuvent encore être écrits

$$e^x\left(1-\frac{3-1}{3-1}x\right),$$

$$e^x\left[1-\frac{(5-1)}{(5-1)}x+\frac{(5-1)(5-3)}{(5-1)(5-2)}\frac{x^2}{1.2}\right],$$

$$e^x\left[1-\frac{7-1}{7-1}x+\frac{(7-1)(7-3)}{(7-1)(7-2)}\frac{x^2}{1.2}-\frac{(7-1)(7-3)(7-5)}{(7-1)(7-2)(7-3)}\frac{x^3}{1.2.3}\right];$$

nous reconnaissons les valeurs de y_1 répondant aux valeurs de 3, 5, 7, attribuées à n. Il s'agit de montrer que la formule (3) est vraie pour toutes les valeurs impaires de n : nous avons

$$y_1=e^x\left[1-\frac{n-1}{n-1}x-\ldots\pm\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(n-1)(n-2)\ldots\frac{n+1}{2}}\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1.2.3\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right],$$

et, si la formule (3) est exacte pour la valeur de n considérée, nous aurons, en désignant la valeur du développement par $U_{\frac{n-1}{2}}$,

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{e^x}{x}=U_{\frac{n-1}{2}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}1.3.5(n-2)y_1x^{-n}.$$

Quant au terme général de ce développement, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]\,e^x B_p\, x^{-n+p}$$

avec

$$B_p=(-1)^p\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\frac{1}{1.2.3\ldots p}.$$

Le terme général de

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n+1}{2}}\frac{e^x}{x}\quad\text{ou de}\quad U_{\frac{n+1}{2}},$$

c'est-à-dire celui qui en a p avant lui, contiendra x à la puissance $-n+p-2$, et s'obtiendra comme il suit.

Considérons l'ensemble de deux termes consécutifs de $U_{\frac{n-1}{2}}$, savoir:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)](B_{p-1}x^{-n+p-1}+B_p x^{-n+p}).$$

Prenons la dérivée par rapport à x et divisons le résultat par x, nous trouverons pour le coefficient du terme général, ou de celui qui en a p avant lui,

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]\,e^x[-B_{p-1}+(n-p)B_p],$$

et remplaçant B_{p-1} et B_p par leurs valeurs

$$(-1)^p(-1)^{\frac{n+1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]e^x\left[\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)(n-p)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)}\frac{1}{1.2\ldots p}\right].$$

La quantité entre parenthèses se réduit à

$$\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+1)}\left(1+\frac{n-2p+1}{p}\right)\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}$$
$$=\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+3)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}\frac{1}{1.2.3\ldots p}$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)\ldots(n-2p+3)}{n(n+1)(n-1)\ldots n-p+2}\frac{1}{1.2.3.\,.p};$$

le terme général de $U_{\frac{n+1}{2}}$ sera donc de la forme

$$(-1)^p(-1)^{\frac{n+1}{2}}[1.3.5\ldots(n-2)]\,ne^x\frac{(n+1)(n-1)\ldots(n-2p+3)}{(n+1)n(n-1)\ldots n-p+2}\frac{1}{1.2.3\ldots p},$$

qui se déduit de $U_{\frac{n-1}{2}}$ par le changement de n en $n+2$. L'égalité (3) est donc vraie pour toutes les valeurs impaires de n, puisqu'elle a été vérifiée pour les valeurs 3, 5, 7....

La formule qui donne y_2 s'établirait absolument de la même manière.

Nous allons actuellement former la valeur de y_1 en nous appuyant sur la relation (3) qui vient d'être démontrée; mais nous simplifierons considérablement les calculs au moyen de la remarque suivante :

Si, dans l'expression $\frac{e^x}{x}$, nous faisons $x^2 = t$, il vient

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

et, différentiant par rapport à t,

$$\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Puisque, en vertu de la relation $x^2 = t$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x},$$

il vient

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x} = 2\frac{d}{dt}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Différentiant une seconde fois par rapport à t, nous avons

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x}\frac{dx}{dt} = 2\frac{d^2}{dt^2}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}};$$

remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur, on arrive, en employant la notation ci-dessus, à la relation

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2\frac{e^x}{x} = 2^3\frac{d^2}{dt^2}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

et, en continuant ainsi,

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^3\frac{e^x}{x} = 2^3\frac{d^3}{dt^3}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{e^x}{x} = 2^{\frac{n-1}{2}}\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dt^{\frac{n-1}{2}}}\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Cette transformation établie, écrivons le développement de

$$\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}}{t^{\frac{1}{2}}} = t^{-\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{1.2} t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1.2.3} t + \frac{1}{1.2.3.4} t^{\frac{3}{2}} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots 2p} t^{p-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} t^p + \ldots,$$

et prenons les dérivées de l'ordre $\frac{n-1}{2}$ de chacun des termes $t^{p-\frac{1}{2}}$, t^p.

La dérivée du premier est

$$\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(p-\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots 2p} t^{p-\frac{n}{2}}$$
$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots(2p-n+2)}{1.2.3\ldots 2p} \frac{t^{p-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Si nous faisons successivement

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \frac{n-1}{2},\quad \frac{n+1}{2},\quad \frac{n+3}{2}, \ldots,$$

nous trouverons

pour $p = 0$, $\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{1} \frac{t^{-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$

pour $p = 1$, $\quad -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \times 1.3.5\ldots(n-4)}{1.2} \frac{t^{1-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$

pour $p = 2$, $\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3 \times 1.3\ldots(n-6)}{1.2.3.4} \frac{t^{2-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$

pour $p = 3$, $\quad -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5 \times 1.3\ldots(n-8)}{1.2.3.4.5.6} \frac{t^{3-\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$

$$\text{pour } p = \frac{n-1}{2}, \qquad \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{1.2.3.4\ldots(n-1)} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\text{pour } p = \frac{n+1}{2}, \qquad \frac{n(n-2)(n-4)\ldots 3}{1.2.3.4\ldots(n+1)} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\text{pour } p = \frac{n+3}{2}, \qquad \frac{(n+2)n(n-2)\ldots 5}{1.2.3\ldots(n+3)} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La dérivée de l'ordre $\frac{n-1}{2}$ du terme t^p est

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left(p-\frac{n-1}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots 2p+1} t^{p-\frac{n-1}{2}}$$
$$= \frac{2p(2p-2)(2p-4)\ldots(2p-n+3)}{1.2.3\ldots(2p+1)} t^{p-\frac{n-1}{2}},$$

et si l'on fait successivement

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots \frac{n-3}{2},$$

l'expression s'annulera, et nous n'aurons de termes à considérer qu'à partir de $p = \frac{n-1}{2}$.

$$\text{pour } p = \frac{n-1}{2}, \quad \text{on a} \quad \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{1.2.3\ldots n} t^0,$$

$$\text{pour } p = \frac{n+1}{2}, \quad \text{on a} \quad \frac{(n+1)(n-1)\ldots 4}{1.2.3\ldots(n+2)} t,$$

$$\text{pour } p = \frac{n+3}{2}, \quad \text{on a} \quad \frac{(n+3)(n+1)(n-1)\ldots 6}{1.2.3\ldots(n+4)} t^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, il est facile de former la valeur de y_1 en nous reportant à la formule (3) et en faisant $t=x^2$; on obtient, après une réduction facile,

$$y_1 = 1 - \frac{1}{n-2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n-2)(n-4)}\frac{x^4}{2^2}\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n-2)(n-4)(n-6)}\frac{x^6}{2^3}\frac{1}{1.2.3}$$

$$\pm \frac{1}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}\frac{x^{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}\frac{1}{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}}$$

$$\mp \frac{1}{(n-2)(n-4)\ldots 3.1(-1)}\frac{x^{n+1}}{2^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{1.2.3\ldots\frac{n+1}{2}} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n x^n}{(1.3.5\ldots n)^2}\left[1 + \frac{1}{n+1}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{x^4}{2^2}\frac{1}{1.2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^6}{2^3}\frac{1}{1.2.3} + \ldots\right].$$

La première partie du deuxième membre de l'égalité ci-dessus est Y_1; la seconde est Y_3 multiplié par un coefficient que nous avons déjà rencontré plus haut et que nous avons désigné par A. Il vient par conséquent

$$y_1 = Y_1 + AY_3$$

et de même

$$y_2 = Y_1 - AY_3,$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

Nous venons de considérer le cas où n est un nombre impair positif; s'il était impair négatif, on partirait des valeurs de y_3 et de y_4 que l'on établirait facilement, comme il a été fait ci-dessus. Ces valeurs sont

$$y_3 = \frac{(-1)^{-\frac{(n+1)}{2}}}{1.3.5\ldots(-n-2)}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}\frac{e^x}{x},$$

$$y_4 = \frac{(-1)^{-\frac{(n+1)}{2}}}{1.3.5\ldots(-n-2)}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}\frac{e^{-x}}{x},$$

formules dans lesquelles n doit être remplacé par un nombre impair négatif, et l'on arriverait aux relations

$$y_3 = Y_3 + AY_1,$$
$$y_4 = Y_3 - AY_1,$$

ce qui est également conforme aux résultats trouvés plus haut.

De l'équation de Riccati.

L'équation de Riccati est, comme on sait, de la forme

$$\frac{dz}{dt} + z^2 = t^{2q-2};$$

en posant

$$z = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt},$$

elle se transforme en

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = yt^{2q-2}.$$

Si nous faisons actuellement

$$q = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x = nt^{\frac{1}{n}},$$

nous aurons

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}t^{\frac{1}{n}-1},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}t^{\frac{2}{n}-2} + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{dy}{dx}t^{\frac{1}{n}-2}.$$

Dès lors l'équation (5) devient, après une réduction facile,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y.$$

Elle admet les solutions y_1, y_2, exprimables en fonctions algébriques et exponentielles dans le cas où n est un nombre impair positif, et les solutions y_3 et y_4 quand n est un nombre impair négatif.

Dès lors l'équation (5) admettra les solutions

$$y_1 = e^{\frac{t^q}{q}} \left[1 - \frac{q-1}{q(q-1)} t^q + \frac{(q-1)(3q-1)}{q(q-1)(2q)(2q-1)} t^{2q} \right.$$
$$\left. - \frac{(q-1)(3q-1)(5q-1)}{q(q-1)2q(2q-1)(3q)(3q-1)} t^{3q} - \ldots \right],$$

$$y_2 = e^{-\frac{t^q}{q}} \left[1 + \frac{(q-1)}{q(q-1)} + \frac{(q-1)(3q-1)}{q(q-1)(2q)(2q-1)} t^{2q} - \ldots \right],$$

expressions qui sont terminées quand q est de la forme $\frac{1}{2i+1}$, i étant supposé entier positif. Elle admettra les solutions

$$y_3 = e^{\frac{t^q}{q}} t \left[1 - \frac{q+1}{q(q+1)} t^q + \frac{(q+1)(3q+1)}{q(q+1)(2q)(2q+1)} t^{2q} - \ldots \right],$$

$$y_4 = e^{-\frac{t^q}{q}} t \left[1 + \frac{q+1}{q(q+1)} t^q + \frac{(q+1)(3q+1)}{q(q+1)(2q)(2q+1)} t^{2q} + \ldots \right],$$

lesquelles seront également des expressions terminées si $q = -\frac{1}{2i+1}$. Telles sont les formules données par M. Cayley dans le *Philosophical Magazine* de novembre 1868.

Quant à l'intégrale de l'équation de Riccati, on l'obtient facilement; elle est en effet

$$z = \frac{c\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dy_2}{dt}}{cy_1 + c'y_2} = \frac{\frac{dy_1}{dt} + C\frac{dy_2}{dt}}{y_1 + Cy_2},$$

expression qui ne renferme qu'une seule constante arbitraire.