SZOLEM MANDELBROJT

Sur un problème de Gelfand et Šilov

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, nº 2 (1960), p. 145-166
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_2_145_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e **série**, t. 77, 1960, p. 145 à 166.

SUR UN PROBLÈME DE GELFAND ET ŠILOV

PAR S. MANDELBROJT.

1. Dans leur livre *Fonctions généralisées*, Gelfand et Šilov [3] introduisent les classes $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ de fonctions indéfiniment dérivables sur la droite réelle, R, définies de la façon suivante : $\{M_n\}$ et $\{N_n\}$ étant deux suites de nombres positifs, la classe $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ est l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ (C^∞ est l'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables sur R) satisfaisant aux inégalités

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqq A h^p N_p k^q M_q \qquad (q \geqq 0, p \geqq 0),$$

A, h et k étant des constantes dépendant de f, x étant un point quelconque de R. D'une manière plus générale, ces auteurs sont amenés à étudier les fonctions de C^∞ satisfaisant aux inégalités

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqq A h^p k^q m_{p,q} \qquad (p \geqq 0, q \geqq 0),$$

où $m_{p,q}$ est une suite positive double. Les classes $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ jouent un rôle important lorsqu'on cherche à étendre la notion de fonction (dans le sens de « distribution »). Un usage intéressant des classes S a été récemment fait en France par Roumieu dans sa Thèse [6].

La première question qui se pose est celle de la non-trivialité d'une classe S. Il s'agit autrement dit, de conditions, portant sur les suites $\{M_n\}$, $\{N_n\}$ pour que la classe $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ ne soit pas vide (une telle classe est dite vide si elle ne contient que la fonction identiquement nulle).

Les classes $S(\{n^{\alpha n}\}\{n^{\beta n}\})$ ont déjà été étudiées par Šilov [7] avant la parution du livre de Gelfand et Šilov, Cet auteur a démontré que si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, une condition nécessaire et suffisante pour que la classe correspondante ne soit pas vide est que $\alpha + \beta \geqq 1$. Babenko [1] a bien indiqué, d'une part, des conditions nécessaires, et, d'autre part, des conditions suffisantes, pour qu'une classe $S(\{M_n\}, \{N_n\})$, générale, ne soit pas vide. Ces conditions sont compliquées et nous paraissent peu maniables, bien qu'intéressantes.

Nous donnons, dans ce travail, des conditions simples, suffisantes pour qu'une classe S (générale) ne soit pas vide. Nous construisons alors une fonction appartenant à la classe correspondante. Nous croyons, sans pouvoir le démontrer, que cette condition est aussi nécessaire. Nous indiquons aussi une autre condition, — cette fois-ci nécessaire — pour que la classe ne soit pas vide.

Dans leur livre Gelfand et Šilov indiquent des conditions dont quelques-unes nous paraissent inutiles, pour que les transformées de Fourier des fonctions de la classe $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ appartiennent à $S(\{N_n\}, \{M_n\})$, ou, d'une manière générale, des conditions pour que de (2) résultent des inégalités de la forme :

$$|x^q \hat{f}^{(p)}(x)| \leq h_1^p k_1^q m_{p,q}$$

($\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier f).

Quelques considérations élémentaires et des notions simples sur la régularisation nous permettent de démontrer dans cette direction un théorème d'un caractère plus général.

Le problème de la non-trivialité d'une classe S nous conduit à un autre problème qui, lui aussi, généralise la notion de la quasi-analyticité.

Quelle relation doit exister entre une suite de nombres positifs croissants $\{p_n\}$ et une suite de nombres positifs $\{M_n\}$, pour que la seule fonction indéfiniment dérivable sur une demi-droite $[a, \infty)$ $(a > 0)$ satisfaisant aux inégalités (sur $[a, \infty)$) :

$$|x^{p_n} f^{(n)}(x)| \leq h^n M_n \qquad (n \geq 0)$$

soit la fonction identiquement nulle ?

Quelques résultats de ce travail ont été exposés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [5]. Je désire signaler en passant que dans le corollaire du théorème II de la seconde Note il faut lire $k > 1$ (au lieu de $k > 0$), et dans la ligne qui suit ce corollaire, il faut lire $1 < \alpha$ (au lieu de $0 < \alpha$).

2. Quelques définitions et notations. — Nous désignons par C^∞ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur la droite réelle. C_a^∞ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $[a, \infty)$.

Si f est n fois dérivable dans (a, ∞) (a peut être égal à $-\infty$), on écrira

$$A_{m,n}^{f,a} = \sup_{x > a} |x^m f^{(n)}(x)|$$

(on omettra la lettre f ou la lettre a, ou les deux, si aucune ambiguïté n'est à craindre).

$\{M_n\}$ étant une suite positive, si $\underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$ on posera $c_M = \underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{n}}$, et si $\lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, on désignera par $\{M_n^c\}$ la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$ par l'intermédiaire des logarithmes (c'est-à-dire que la suite $\{\log M_n^c\}$ est la suite régularisée convexe de la suite $\{\log M_n\}$)[4].

On désignera par $C\{M_n\}$ la sous-classe de C^∞ dont chaque fonction f satisfait aux inégalités

$$|f^{(n)}(x)| \leqq h^n M_n \qquad (n \geqq 0).$$

Si pour chaque f de $C\{M_n\}$ on a aussi $f' \in C\{M_n\}$, on dit que la classe $C\{M_n\}$ est dérivable.

Nous désignons par $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ le sous-ensemble de C^∞ dont chaque fonction satisfait aux inégalités

$$|x^q f^{(p)}(x)| \leqq A h^q N_q k^p M_p \qquad (q \geqq 0, p \geqq 0),$$

A, h, k dépendant de f; et par $Q_a(\{p_n\}, \{M_n\})$ la classe des fonctions indéfiniment dérivables sur $[a, \infty)$, $a > 0$, satisfaisant aux conditions

$$|x^{p_n} f^{(n)}(x)| \leqq A h^n M_n \qquad (n \geqq 0),$$

A et h dépendant de f,

$L(r)$ étant une fonction réelle sur $[0, \infty)$, nous désignons par $S(\{M_n\}, L)$ la classe des fonctions appartenant à C^∞ et satisfaisant aux inégalités

$$|f^{(p)}(x)| \leqq A k^p M_p e^{-L(a|x|)}$$

A, k, a ne dépendant que de f.

Dans la définition de $S(\{M_n\}, L)$, la fonction L sera toujours supposée non décroissante dans le sens suivant : $L(r)$, peut être égale à $+\infty$ pour $r \geqq c > 0$, mais alors $L(r)$ tend vers l'infini, en croissant (tout en prenant des valeurs finies) lorsque r tend vers c (en croissant).

Si $f \in L^1$ (sur R) on désignera par $\hat{f}$ sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(u) = \int f(x)\, e^{-ixu}\, dx.$$

On désignera aussi par $\hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\})$ l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de la classe $S(\{M_n\}, \{N_n\})$, autrement dit $\varphi \in \hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\})$ si, et seulement si, $\varphi = \hat{f}$, où $f \in S(\{M_n\}, \{N_n\})$.

3. Quelques lemmes. — Voici d'abord quelques lemmes élémentaires :

Lemme 1. — *Soit f une fonction $n(n \geqq 1)$ fois dérivable sur $[a, \infty)$ $(a > 0)$ et supposons que $\lim_{x=\infty} f^{(n-1)}(x) = 0$. On a, pour $p > 0$,*

$$p\, A_{p,n-1}^{f,a} \leqq A_{p+1,n}^{f,a}.$$

Pour $a < x < N$, on a

$$f^{(n-1)}(N) - f^{(n-1)}(x) = \int_x^N f^{(n)}(t)\, dt,$$

et, pour $p > 0$, $x > a$,

$$|f^{(n-1)}(x)| = \left| \int_x^\infty f^{(n)}(t)\, dt \right| \leq A_{p+1,n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{p+1}} = A_{p+1,n} \frac{1}{p x^p}.$$

Lemme 2. — *Si f est n fois dérivable sur* R$(n \geq 1)$, *et si* $\lim\limits_{|x|=\infty} f^{(n-1)}(x) = 0$, *on a pour* $p > 0$

$$p A^{f,-\infty}_{p,n-1} \leq A^{f,-\infty}_{p+1,n}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 1 pour $a > 0$, quelconque, à la fonction f et à la fonction $f(-x)$.

Lemme 3. — *En posant* $z = x + iy$, *on a*

$$(\alpha) \qquad \left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq \min\left(e^{|y|}, e^{\frac{y^2}{4}}\right),$$

$$(\beta) \qquad |\sin z| \leq \min\left(e^{|y|}, e^{\frac{y^2}{2}}\right)$$

et, pour $|y| < 2$,

$$(\gamma) \qquad |\sin z| \leq \left(2 - \frac{1}{e}\right) e^{\frac{y^2}{4}}.$$

On a, en effet,

$$\left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq \frac{|e^y - e^{-y}|}{2y}, \qquad |\sin z| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

et, pour $|y| < 2$,

$$e^{\frac{y^2}{2}} \leq \left(2 - \frac{1}{e}\right) e^{\frac{y^2}{4}},$$

Lemme 4. — *Soit $\alpha_n (n \geq 1)$ une fonction convexe de (l'indice) n, satisfaisant, pour n assez grand, à l'inégalité*

$$\alpha_n \leq h n^2.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on a, pour n assez grand

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n \leq (4h + \varepsilon) n.$$

Posons

$$A(t) = \operatorname{Sup}_n (nt - \alpha_n).$$

On a, pour t suffisamment grand,

$$A(t) \geq \operatorname{Sup}_n (nt - hn^2) = B(t), \qquad \text{avec} \quad \lim_{t=\infty} \frac{4hB(t)}{t^2} = 1.$$

Si $\varliminf\limits_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{n} < \infty$, la convexité de α_n donne immédiatement

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = O(1),$$

d'où la conclusion du lemme; si, par contre $\lim \frac{\alpha_n}{n} = \infty$, on voit d'après le théorème 1.6.I (a et c) de [4] que

$$\overline{\lim}\,\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{n}\leqq\overline{\lim}\,\frac{t^2}{\mathrm{A}(t)}\leqq 4h,$$

ce qui conduit également à la conclusion du théorème.

Lemme 5. — *Soit $f\in \mathrm{C}^\infty$, avec $\mathrm{A}_{p,q}^{f,-\infty}=\mathrm{A}_{p,q}<\infty$ pour tout $p\geqq 0$, $q\geqq 0$. On a, pour tout $p\geqq 1$, $q\geqq 1$,*

$$|x^q\hat{f}^{(p)}(x)|\leqq 16p\,2^q(\mathrm{A}_{p,q}+\mathrm{A}_{p,q+1}+\mathrm{A}_{p,q-1}+\mathrm{A}_{p+2,q}+\mathrm{A}_{p+2,q+1}+\mathrm{A}_{p+2,q-1}).$$

On a, pour tout $p\geqq 0$,

$$|\hat{f}^{(p)}(x)|\leqq 2(\mathrm{A}_{p+2,0}+\mathrm{A}_{p,0})$$

et pour tout $q\geqq 0$,

$$|x^q\hat{f}(x)|\leqq 2(\mathrm{A}_{2,q}+\mathrm{A}_{0,q}).$$

On a

$$x^q\hat{f}^{(p)}(x)=i^{-p-q}\,\widehat{[u^pf(u)]^{(q)}}=i^{-p-q}\int[u^pf(u)]^{(q)}e^{-iux}\,du.$$

Or

$$\begin{aligned}|[u^pf(u)]^{(q)}|&=|u^pf^{(q)}(u)+\mathrm{C}_q^1pu^{p-1}f^{(q-1)}(u)+\dots|\\&\leqq\mathrm{A}_{p,q}+\mathrm{C}_q^1p\mathrm{A}_{p-1,q-1}+\dots+\mathrm{C}_q^lp(p-1)\dots(p-l+1)\mathrm{A}_{p-l,q-l}+\dots,\end{aligned}$$

l prenant toutes les valeurs entières positives non supérieures à $\min(p,q)$. On a, d'après le lemme 2,

$$(1)\qquad p(p-1)\dots(p-l+1)\mathrm{A}_{p-l,q-l}\leqq\mathrm{A}_{p,q}\frac{p(p-1)\dots(p-l+1)}{(p-1)(p-l+1)\dots(p-1)}=\frac{p}{p-l}\mathrm{A}_{p,q},$$

ce qui permet d'écrire pour $q<p$

$$(2)\qquad |[u^pf(u)]^{(q)}|\leqq 2^q\frac{p}{p-q}\mathrm{A}_{p,q}.$$

On a, d'autre part, pour $r\geqq 0$, $x>0$,

$$\int_x^\infty f^{(r+2)}(t)\,t\,dt=-xf^{(r+1)}(x)+f^{(r)}(x),$$

ce qui permet d'écrire [en utilisant la même égalité pour $f(-x)$]

$$(3)\qquad \mathrm{A}_{0,r}\leqq\mathrm{A}_{1,r+1}+\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}\mathrm{A}_{3,r+2}+\mathrm{A}_{1,r+2}=\mathrm{A}_{1,r+1}+\mathrm{A}_{1,r+2}+\mathrm{A}_{3,r+2}$$

et l'inégalité (1) permet encore d'écrire, lorsque $0<p\leqq q$ (en posant $r=q-p$)

$$p(p-1)\dots1.\mathrm{A}_{0,q-p}\leqq p!\,(\mathrm{A}_{1,q-p+1}+\mathrm{A}_{1,q-p+2}+\mathrm{A}_{3,q-p+2})\leqq 2p(\mathrm{A}_{p,q}+\mathrm{A}_{p,q+1}+\mathrm{A}_{p,q-1}).$$

Ainsi, pour $p>0$, on a, quel que soit $q>0$,

$$(4)\qquad |[u^pf(u)]^{(q)}|\leqq 2^{1+q}p(\mathrm{A}_{p,q}+\mathrm{A}_{p,q+1}+\mathrm{A}_{p,q-1}).$$

On a aussi évidemment

$$(5)\qquad |\hat{f}^{(p)}(x)| \leqq \int_1^\infty u^p(|f(x)|+|f(-x)|)\,dx + \int_0^1 u^p(|f(x)|+|f(-x)|)\,dx$$
$$\leqq 2\mathrm{A}_{p+2,0}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} + 2\mathrm{A}_{p,0} = 2(\mathrm{A}_{p+2,0}+\mathrm{A}_{p,0}),$$

et aussi

$$(6)\qquad |x^q\hat{f}(x)| \leqq \int_1^\infty (|f^{(q)}(x)|+|f^{(q)}(-x)|)\,dx$$
$$+\int_0^1 |f^{(q)}(x)|+|f^{(q)}(-x)|\,dx \leqq 2(\mathrm{A}_{2,q}+\mathrm{A}_{0,q}).$$

Le même raisonnement qui a servi pour établir (4) permet aussi d'écrire :

$$(7)\qquad |u^2[u^p f(u)]^{(q)}| \leqq 2^{1+q}(p+2)(\mathrm{A}_{p+2,q}+\mathrm{A}_{p+2,q+1}+\mathrm{A}_{p+2,q-1}),$$

On obtient ainsi pour $p \geqq 1$, $q \geqq 1$, en nous servant de (4) et de (7),

$$|x^q\hat{f}^{(p)}(x)| \leqq \int_{-1}^1 |[u^p f(u)]^{(q)}|\,du + \int_{-\infty}^1 \frac{u^2|[u^p f(u)]^{(q)}|}{u^2} + \int_1^\infty \frac{u^2|[u^p f(u)]^{(q)}|}{u^2}\,du$$
$$\leqq 4\cdot 2^q p(\mathrm{A}_{p,q}+\mathrm{A}_{p,q+1}+\mathrm{A}_{p,q-1}) + 4\cdot 2^q(p+2)(\mathrm{A}_{p+2,q}+\mathrm{A}_{p+2,q+1}+\mathrm{A}_{p+2,q-1})$$
$$\leqq 16p\cdot 2^q(\mathrm{A}_{p,q}+\mathrm{A}_{p,q+1}+\mathrm{A}_{p,q-1}+\mathrm{A}_{p+2,q}+\mathrm{A}_{p+2,q+1}+\mathrm{A}_{p+2,q-1}),$$

ce qui correspond à la première partie de l'énoncé. Les inégalités (5) et (6) constituent la dernière partie de l'énoncé.

Lemme 6. — *Soit $m_{p,q}$ une fonction croissante de p et de $q (p \geqq 0, q \geqq 0)$, et soit $f \in \mathrm{C}^\infty$. Si*

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqq m_{p,q} \qquad (p \geqq 0,\ q \geqq 0),$$

on a

$$|x^q\hat{f}^{(p)}(x)| \leqq 96p\cdot 2^q m_{p+2,q+1} \qquad (p \geqq 1,\ q \geqq 0),$$
$$|x^q\hat{f}(x)| \leqq 4m_{2,q} \qquad (q \geqq 0);$$

Ce lemme est un corollaire immédiat du lemme 5.

Lemme 7. — *Soient $\{\mathrm{M}_n\}$ et $\{\mathrm{N}_n\}$ deux suites positives; si $\varliminf \mathrm{N}_p^{\frac{1}{p}} = c_\mathrm{N} < \infty$, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un A_ε (dépendant seulement de ε) tel que toute fonction de f de C^∞ satisfaisant aux inégalités*

$$(8)\qquad |x^p f^{(q)}(x)| \leqq \mathrm{A}\,h^p\mathrm{N}_p k^q\mathrm{M}_q (p \geqq 0,\ q \geqq 0)$$

satisfait aussi aux inégalités

$$(9)\qquad |x^p f^{(q)}(x)| \leqq \mathrm{A}.\mathrm{A}_\varepsilon[h(c_\mathrm{N}+\varepsilon)]^p k^q\mathrm{M}_q \qquad (p \geqq 0,\ q \geqq 0).$$

Si, par contre, $\lim \mathrm{N}_p^{\frac{1}{p}} = \infty$, toute fonction f de C^∞ qui satisfait à (8) satisfait aussi aux inégalités

$$(10)\qquad |x^p f^{(q)}(x)| \leqq \mathrm{A}\,h^p\mathrm{N}_p^c k^q\mathrm{M}_q \qquad (p \geqq 0,\ q \geqq 0).$$

Supposons donc d'abord que $c_N < \infty$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'entiers positifs $\{p_j\}$ tels que $N_{p_j} < (c_N + \varepsilon)^{p_j}$. Soit $A_\varepsilon > \max(1, N_0)$. Les inégalités (9) ont alors lieu pour $p = 0$ et $p = p_j (j \geqq 1)$. Une considération géométrique très élémentaire montre alors que (9) a lieu pour tout $p \geqq 0$.

Supposons maintenant que $\lim N_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, et posons

$$T(r) = \operatorname*{Sup}_n \frac{r^n}{N_n}.$$

On sait (*voir* [4]) qu'on a aussi

$$T(r) = \operatorname*{Sup}_n \frac{r^n}{N_n^c}. \tag{11}$$

Comme il résulte de (8) que

$$\operatorname*{Sup}_p \frac{|x|^p}{h^p N_p} |f^{(q)}(x)| = T\left(\frac{x}{h}\right) |f^{(q)}(x)| \leqq k^q M_q \qquad (q \geqq 0), \tag{12}$$

on voit d'après (11), qu'on a aussi

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqq A h^p N_p^c k^q M_q.$$

Lemme 8. — *Soit $\{M_n\}$ une suite positive. Si*

$$c_M = \underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{n}} < \infty,$$

la classe $C\{M_n\}$ (sur R) est dérivable. Si

$$\lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty,$$

chacune des conditions équivalentes suivantes :

$$1^\circ \quad (M_{n+1}^c)^{\frac{1}{n}} = O(M_n^c)^{\frac{1}{n}}; \qquad 2^\circ \quad \log M_n^c = O(n^2)$$

est nécessaire et suffisante pour que la classe $C\{M_n\}$ soit dérivable.

Pour la démonstration, *voir* [4].

4. Avant d'aborder le sujet principal, c'est-à-dire la question de la non-trivialité d'une classe $S\{M_n\}, \{N_n\})$, nous allons démontrer un théorème donnant des conditions simples pour que l'ensemble des transformées de Fourier d'une telle classe coïncide avec la classe $S(\{N_n\{, \{M_n\})$.

Nous supposons dans les théorèmes 1 et 2 que M_n *ne décroit pas*.

Théorème 1 *a*. — *Soient $\{M_n\}$ et $\{N_n\}$ deux suites positives telles que les classes $C\{M_n\}$ et $C\{N_n\}$ soient dérivables. On a*

$$\hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\}) = S(\{N_n\}, \{M_n\}).$$

On voit d'après (11), et la définition de la classe S, que si $c_N = 0$, la classe S est vide.

D'après le lemme 8, le théorème 1 *a* peut aussi s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 1 *b*. — *Si chacune des suites positives* $\{M_n\}$ *et* $\{N_n\}$ *satisfait à une des conditions suivantes* (1° *ou* 2°)

$$1^\circ\quad c_M = \underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{n}} < \infty\,; \qquad 2^\circ\quad \lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \quad \log M_n^c = O(n^2)\,;$$
$$1^\circ\quad c_N = \underline{\lim}\, N_n^{\frac{1}{n}} < \infty\,; \qquad 2^\circ\quad \lim N_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \quad \log N_n^c = O(n^2)\,;$$

on a

$$\hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\}) = S(\{N_n\}, \{M_n\}).$$

D'une manière plus précise, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1 *c*. — *Si* $c_M < \infty$, $c_N < \infty$, *la classe* $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ *est vide. Supposons donc que l'une des conditions* $\lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, $\lim N_n^{\frac{1}{n}} = \infty$ *soit satisfaite et soit* $f \in S(\{M_n\}, \{N_n\})$ *telle que*

$$(13)\qquad |x^p f^{(q)}(x)| \leq A h^p k^q N_p M_q \qquad (p \geq 0,\ q \geq 0).$$

A. *Si* $c_N < \infty$, et $\lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *avec*

$$(14)\qquad \overline{\lim}\, \frac{\log M_n^c}{n^2} = \mu < \infty,$$

à tout $\varepsilon > 0$ *correspond une constante* A_ε *telle que*

$$|x^q \hat{f}^{(p)}(x)| \leq 2^q A A_\varepsilon h^p k^q (1+\varepsilon)^{p+q} c_N^p e^{4\mu q} M_q^c.$$

B. *Si* $c_M < \infty$ *et* $\underline{\lim}\, N_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *avec*

$$(15)\qquad \overline{\lim}\, \frac{\log N_n^c}{n^2} = \nu < \infty,$$

on a

$$|x^q \hat{f}^{(p)}(x)| \leq 2^q A A_\varepsilon h^p k^q (1+\varepsilon)^{p+q} c_M^q e^{8\nu p} N_p^c.$$

C. *et, enfin, si* $\lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, $\lim N_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *avec*

$$(16)\qquad \overline{\lim}\, \frac{\log M_n^c}{n^2} = \mu < \infty, \qquad \overline{\lim}\, \frac{\log N_n^c}{n^2} = \nu < \infty.$$

on a

$$|x^q \hat{f}^{(p)}(x)| \leq 2^q A A_\varepsilon h^p k^q (1+\varepsilon)^{p+q} e^{8\nu p + 4\mu q} M_q^c N_p^c.$$

Il est clair que du théorème 1 *c* résulte que les hypothèses du théorème 1 *a*, ou 1 *b*, impliquent

$$\hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\}) \subset S(\{N_n\}, \{M_n\}).$$

Mais, comme ces mêmes hypothèses conduisent aussi, d'après le théorème 1 c, à la conclusion

$$\hat{S}(\{N_n\}, \{M_n\}) \subset S(\{M_n\}, \{N_n\}),$$

on a

$$\hat{\hat{S}}(\{N_n\}, \{M_n\}) = S(\{N_n\}, \{M_n\}) \subset \hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\}).$$

Ces mêmes hypothèses conduisent donc à l'égalité

$$S(\{N_n\}, \{M_n\}) = \hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\}),$$

c'est-à-dire la conclusion des théorèmes 1 a et 1 b.

Pour démontrer le théorème 1 c il suffit d'appliquer, dans l'ordre qui suit, les lemmes suivants : lemme 7, lemme 6, de nouveau lemme 7, et lemme 4 [trois fois lorsqu'il s'agit, par exemple, de démontrer la partie C) du théorème 1 c : deux fois pour passer de M^c_{q+2} à M^c_q, et une troisième fois pour passer de N^c_{p+1} à N^c_p].

Le théorème 1 c permet de *régulariser* la classe $S(\{M_n\}, \{N_n\})$. En appliquant ce théorème d'abord à $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ et ensuite à $\hat{S}(\{M_n\}, \{N_n\})$ [lorsque ce dernier ensemble est $S(\{N_n\}, \{M_n\})$], on obtient le théorème suivant :

Théorème 2 *a*. — *Si*

$$c_N < \infty, \qquad \lim_n M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim} \frac{\log M^c_n}{n^2} = \mu,$$

toute fonction satisfaisant à (13) *satisfait aussi, pour tout* $\varepsilon > 0$, *à*

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq A\, 2^{p+q} A_\varepsilon h^p k^q (1+\varepsilon)^{p+q} c_N^p\, e^{12\mu q} M^c_q.$$

Si

$$c_M < \infty, \qquad \lim_n N_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim} \frac{\log N^c_n}{n^2} = \nu,$$

on a

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq A\, 2^{p+q} A_\varepsilon h^p k^q (1+\varepsilon)^{p+q} c_M^q\, e^{12\nu p} N^c_p,$$

Si

$$\lim_n M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim} \frac{\log M^c_n}{n^2} = \mu, \qquad \lim_n N_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim} \frac{\log N^c_n}{n^2} = \nu,$$

on a

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq A\, 2^{p+q} A_\varepsilon h^p k^q (1+\varepsilon)^{p+q} e^{12\mu q + 12\nu p} M^c_q N^c_p.$$

Ainsi, en particulier, on a le théorème

Théorème 2 *b*. — *Si*

$$\lim_n M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim} \frac{\log M^c_n}{n^2} < \infty, \qquad \lim_n N_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim} \frac{\log N^c_n}{n^2} < \infty,$$

les deux classes

$$S(\{M_n\}, \{N_n\}), \quad S(\{M^c_n\}, \{N^c_n\})$$

sont équivalentes.

Si, par contre,

$$\underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{n}} < \infty, \qquad \lim N_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \qquad \overline{\lim}\, \frac{\log N_n^c}{n^2} < \infty$$

$\left(\textit{respectivement } \underline{\lim}\, N_n^{\frac{1}{n}} < \infty,\ \lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty,\ \overline{\lim}\, \frac{\log M_n^c}{n^2} < \infty \right)$ *la classe* $S(\{M_n\}, \{N_n\})$ *est équivalente à* $S(\{1\}, \{N_n^c\})$ [*respectivement à* $S(\{M_n^c\}, \{1\})$].

5. Nous allons maintenant énoncer un théorème qui fait correspondre à une suite $\{M_n\}$ une fonction $L(r)$ telle que la classe $S(\{M_n\}, L)$ ne soit pas « triviale ». Cette fonction $L(r)$ nous paraît, à un certain point de vue, une « fonction optima » possédant une telle propriété. Toute fonction $L_1(r)$ qui croît moins vite que $L(r)$ est, bien entendu, « bonne » à plus forte raison. Mais, en tout cas, dans des cas simples, comme par exemple dans ceux étudiés par Šilov, cette fonction ne peut pas être essentiellement augmentée, sans rendre la classe vide.

Théorème 3. — *Soit* $\{M_n\}$ *une suite de nombres positifs* $(M_0 = 1)$; *posons*

$$\mu_n = \frac{M_{n-1}}{M_n} \quad (n \geqq 1), \qquad \mu_0 = 1.$$

Supposons que

$$\sum \mu_n^2 < \infty. \tag{17}$$

Soit $\Delta(u) = 1$ *pour* $|u| < \frac{1}{2}$, $\Delta(u) = 0$ *pour* $|u| > \frac{1}{2}$, *et posons*

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt \int_{-\mu_1}^{\mu_1} dt_1 \ldots \int_{-\mu_n}^{\mu_n} \Delta(x + t + t_1 + \ldots + t_n)\, dt_n.$$

La suite $f_n(x)$ *tend vers une fonction* $f(x)$ *lorsque* n *tend vers l'infini. Cette fonction* f *possède les propriétés suivantes :* 1° $f(x)$ *n'est pas identiquement nulle ;* 2° $f \in C^\infty$; 3° *en posant*

$$L(x) = \operatorname{Sup}_y \left[xy - \left(y \sum_{\mu_n y > 1} \mu_n + \frac{y^2}{2} \sum_{\mu_n y \leqq 1} \mu_n^2 \right) \right] \qquad (x > 0), \tag{18}$$

on a

$$|f^{(n)}(x)| \leqq M_n e^{-L(|x|)} \qquad (n \geqq 0). \tag{19}$$

En désignant par $m(x)$ *la fonction inverse de la fonction* (*strictement croissante*)

$$\sum_{\mu_n y > 2} \mu_n + \frac{y}{2} \sum_{\mu_n y \leqq 2} \mu_n^2 \qquad (y \geqq 0) \tag{20}$$

et en posant $M(x) = \int_0^x m(t)\, dt$, *on a*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq M_n \left(2 - \frac{1}{e}\right)^n e^{-M(|x|)}. \tag{21}$$

Démonstration. — On a

$$(22)\quad \hat{f}_n(u) = \frac{1}{2^n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \int e^{-iux}\, dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt \int_{-\mu_1}^{\mu_1} dt_1 \dots \int_{-\mu_n}^{\mu_n} \Delta(x + t + \dots + t_n)\, dt_n$$

$$= \frac{1}{2^n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{iut}\, dt \int_{-\mu_1}^{\mu_1} e^{iut_1}\, dt_1 \dots \int_{-\mu_n}^{\mu_n} e^{iut_n}\, dt_n \int e^{-iu(x+t+t_1+\dots+t_n)}\, \Delta(x + t_1 + \dots + t_n)\, dx$$

$$= 4\,\hat{\Delta}(u)\,\frac{\sin\frac{1}{2}u}{u}\,\frac{\sin\mu_1 u}{\mu_1 u}\dots\frac{\sin\mu_n u}{\mu_n u} = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^2 \frac{\sin\mu_1 u}{\mu_1 u}\dots\frac{\sin\mu_n u}{\mu_n u}.$$

On a donc

$$(23)\qquad f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ixu}\hat{f}_n(u)\, du = \frac{2}{\pi}\int e^{ixu}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^2 \frac{\sin\mu_1 u}{\mu_1 u}\dots\frac{\sin\mu_n u}{\mu_n u}\, du.$$

En vertu de (17) le produit infini

$$(24)\qquad \mathrm{F}(w) = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}w}{w}\right)^2 \prod_1^{\infty} \frac{\sin\mu_n w}{\mu_n w}$$

converge uniformément dans chaque compact du plan complexe $w = u + iv$. Il représente donc une fonction entière $\mathrm{F}(w)$. On a

$$\mathrm{F}(u) = \lim_n \hat{f}_n(u).$$

Comme $|\hat{f}_n(u)| \leqq \left(\frac{\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^2$, on voit, d'après (13), que $f_n(x)$ tend vers une limite $f(x)$, et que $\hat{f} = \mathrm{F}(u)$; on a donc aussi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ixu}\,\mathrm{F}(u)\, du.$$

Il est clair que $f(x) \not\equiv 0$. On a, de même,

$$(25)\qquad f^{(n)}(x) = \frac{i^n}{2\pi}\int e^{ixu} u^n\, \mathrm{F}(u)\, du,$$

car $u^n\,\mathrm{F}(u) \in \mathrm{L}^1$, pour chaque $n \geqq 0$. Donc $f \in \mathrm{C}^\infty$.

On voit immédiatement, d'après le lemme 3 et le théorème de Cauchy, que, pour chaque v_0, on a

$$(26)\qquad f^{(n)}(x) = \frac{i^n}{2\pi}\int e^{ixw} w^n\, \mathrm{F}(w)\, dw,$$

l'intégration étant effectuée sur la droite $v = v_0$.

Posons $x > 0$, $v_0 > 0$.

Évaluons maintenant $|\mathrm{F}(w)|$ sur $v = v_0$, en appliquant le lemme 3. Si $n \geqq 1$, on écrira pour $1 \leqq k \leqq n$

$$|\sin \mu_k w| \leqq e^{\mu_k v_0} \qquad \text{ou} \qquad |\sin \mu_k w| \leqq e^{\frac{\mu_k^2 v_0^2}{2}}$$

selon que $\mu_k v_0 > 1$ ou $\mu_k v_0 \leqq 1$; on écrira pour $k \geqq n (n \geqq 0)$

$$\left|\frac{\sin \mu_k w}{\mu_k w}\right| \leqq e^{\mu_k v_0} \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{\sin_k w}{\mu_k w}\right| \leqq e^{\frac{\mu_k^2 v_0^2}{2}},$$

selon que $\mu_k v_0 > 1$ ou $\mu_k v_0 \leqq 1$. Ainsi on obtient

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} e^{v_0 \sum'_{v_0 \mu_k > 1} \mu_n + \frac{v_0}{2} \sum'_{\mu_n v_0 \leqq 1} \mu_n^2 - x v_0} \int \left|\frac{\sin \frac{w}{2}}{w}\right|^2 du;$$

nous avons employé les signes $\sum'$ pour indiquer que μ_0 n'intervenait pas.

On a

$$\int \left|\frac{\sin \frac{w}{2}}{w}\right|^2 du = \frac{\pi}{4} \frac{e^v - e^{-v}}{v} \leqq \frac{\pi}{2} \min\left(e^{|v|}, e^{\frac{v^2}{4}}\right), \tag{27}$$

ce qui permet d'écrire $\Big($en rappelant que $\mu_0 = 1$, et que ce μ_0 intervient sous le premier signe $\sum$, ou sous le second, selon que $v_0 > 1$, ou $v_0 \leqq 1\Big)$, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$:

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} e^{y \sum_{y \mu_n > 1} \mu_n + \frac{y^2}{2} \sum_{\mu y_n \leqq 1} \mu_n^2 - xy}. \tag{28}$$

L'inégalité (19) en résulte immédiatement [$f(x)$ est une fonction paire].

D'après le lemme 3, on peut aussi écrire

$$|\sin \mu_k w| \leqq e^{\mu_k v_0} \qquad \text{ou} \qquad |\sin \mu_k w| \leqq \left(2 - \frac{1}{e}\right) e^{\frac{\mu_k^2 v_0^2}{4}},$$

selon que $\mu_k v_0 > 2$ ou $\mu_k v_0 \leqq 2$; on peut de même écrire

$$\left|\frac{\sin \mu_k w}{\mu_k w}\right| \leqq e^{\mu_k v_0} \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{\sin \mu_k w}{\mu_k w}\right| \leqq e^{\frac{\mu_k^2 v_0^2}{4}},$$

selon que $\mu_k v_0 > 2$ ou $\mu_k v_0 \leqq 2$, et l'on voit que (28) peut être remplacé par

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \frac{\left(2 - \frac{1}{e}\right)^n}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} e^{y \sum_{y \mu_n > 2} \mu_n + \frac{y^2}{4} \sum_{y \mu_n \leqq 2} \mu_n^2 - xy}. \tag{29}$$

Or, en posant

$$A(y) = y \sum_{y \mu_n > 2} \mu_n + \frac{y^2}{4} \sum_{\mu y_n \leqq 2} \mu_n^2, \tag{30}$$

on voit que

$$\frac{d\mathrm{A}(y)}{dy} = a(y) = \sum_{y\mu_n > 2} \mu_n + \frac{y}{2} \sum_{y\mu_n \leq 2} \mu_n^2$$

$\left(\right.$bien que y intervienne aussi sous les signes $\left.\sum\right)$, $a(y)$ étant une fonction strictement croissante. $\mathrm{A}(y)$ est donc une fonction convexe. Il résulte de (29) que

$$|f^{(n)}(x)| \leq \left(2 - \frac{1}{e}\right)^n \mathrm{M}_n e^{-\mathrm{M}(|x|)},$$

où

$$\mathrm{M}(r) = \operatorname*{Sup}_{y>0} (ry - \mathrm{A}(y));$$

or $\mathrm{A}(y)$ étant convexe, on sait (d'ailleurs on le voit immédiatement) qu'on a aussi

$$\mathrm{M}(r) = \int_0^r m(t)\, dt,$$

où $m(t)$ est la fonction inverse de la fonction strictement croissante, $a(t) = \mathrm{A}'(t)$. Le théorème est ainsi démontré.

Théorème 4. — *Soit* $\{\mathrm{M}_n\}$ $(\mathrm{M}_0 = 1)$ *une suite positive, et soit*

$$\mu_n = \frac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n} \quad (n \geq 1) \quad (\mu_0 = 1);$$

supposons que $\sum \mu_n^2 < \infty$.

Posons

$$\mathfrak{M}(y) = y \sum_{y\mu_n > 1} \mu_n + \frac{y^2}{2} \sum_{y\mu_n \leq 1} \mu_n^2 \qquad (y > 0) \tag{31}$$

et soit $\mu(x)$ *la fonction inverse de la fonction (strictement croissante)* $\mathfrak{M}(y)\,(y > 0)$.

En posant $\mathrm{N}_n = \dfrac{n^n}{[\mu(n)]^n}$, *la classe* $\mathrm{S}(\{\mathrm{M}_n\}, \{\mathrm{N}_n\})$ *n'est pas vide. En particulier la fonction* $f(x)$ *de l'énoncé du théorème* 3 *appartient à cette classe et l'on a*

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \mathrm{M}_q \mathrm{N}_p. \tag{32}$$

Démonstration. — Il résulte de (19) que

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \mathrm{M}_q e^{-\operatorname*{Sup}_{y>0} (|x|y - \mathfrak{M}(y)) + p\log|x|} \leq \mathrm{M}_q e^{p\log|x| - |x|y + \mathfrak{M}(y)}$$

pour tout $y > 0$. On a donc, pour tout $y > 0$,

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \mathrm{M}_q e^{\mathfrak{M}(y) + \operatorname*{Sup}_{x>0}(p\log x - xy)} = \mathrm{M}_q e^{\mathfrak{M}(y) + p(\log p - \log y) - p} \qquad (y > 0).$$

Il suffit donc de poser $y = \mu(p)$ pour avoir (32).

Remarque 1. — Il est clair que *dans l'énoncé du théorème* 4 *on peut remplacer* $\mu(n)$ *par la fonction* $\nu(n)$, *où* $\nu(x)$ *est la fonction inverse de la fonction*

$$\mathfrak{M}(y) = y \sum_{\mu_n y > 2} \mu_n + \frac{y^2}{4} \sum_{\mu_n y \leq 2} \mu_n^2,$$

à condition d'ajouter au second membre de l'inégalité (32) *le facteur* $\left(2 - \frac{1}{e}\right)^q$.

Remarque 2. — Le théorème 4 (et, bien entendu, le théorème 3) contient comme cas particulier le théorème de Šilov, d'après lequel la classe $S(\{(n!)^\alpha\}, \{(n!)^\beta\})$ n'est pas triviale si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta \geq 1$. D'après le théorème 1 *a*, il suffit de supposer $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = 1$; et comme e^{-x^2} appartient à une telle classe avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il suffit de poser $\alpha > \frac{1}{2}$, $\beta = 1 - \alpha$; de telles remarques ont été faites aussi dans [3], où il est démontré, en particulier, que

$$\hat{S}(\{(n!)^\alpha\}, \{(n!)^\beta\}) = S(\{(n!)^\beta\}, \{(n!)^\beta\}).$$

En effet, on a, si $\mu_n = n^{-\alpha} (n \geq 1)$, $1 > \alpha > \frac{1}{2}$:

$$\mathfrak{M}(y) \leq A y^{\frac{1}{\alpha}},$$

et $\mu(x) \geq B x^\alpha$; on a, par conséquent, avec N_n défini dans l'énoncé du théorème 4,

$$N_n \leq c^n (n!)^{1-\alpha}.$$

Nous allons maintenant indiquer des conditions pour qu'une classe S soit vide. Nous pouvons, en effet, démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit* $\{M_n\}$ $(M_0 = 1)$ *une suite positive, et posons*

$$\mu_n = \frac{M_{n-1}}{M_n} \qquad (n \geq 1).$$

Supposons que $\sum \mu_n = \infty$, *la suite* μ_n *étant décroissante. Soit* $\{a_n\}$ *une suite de nombres positifs tels que* $a_n = o\left(\sum_1^n \mu_k\right)$, *et soit* $L(x)$ *une fonction croissante définie sur* $[0, \infty)$. *Si*

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_0^n \frac{M_k}{k!} a_n^k\right) e^{-L(a_n)} = 0$$

toute fonction f de C_0^∞ *satisfaisant aux inégalités*

$$(33) \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M_n e^{-L(x)} \qquad (x > 0,\ n \geq 0)$$

est identiquement nulle.

Il est clair que la condition $\sum \mu_n = \infty$ n'est pas une restriction, car, si $\sum \mu_n < \infty$, la classe $S(\{M_n\}, L)$ n'est pas vide quelle que soit la fonction $L(x)$ (finie dans le voisinage de l'origine). En effet, la classe $C\{M_n\}$ est alors non quasi analytique, et il existe une fonction, non identiquement nulle, satisfaisant aux inégalités $|f^{(n)}(x)| \leqq M_n$, le support de f étant un compact.

Démonstration. — La majeure partie de cette démonstration est une reproduction de celle donnée par Bang pour le théorème (direct) de Denjoy-Carleman [2] (*voir* aussi [4], où cette démonstration de Bang est donnée).

Rappelons la formule de Bang; ξ_0. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ étant $n+1$ points sur la droite, f étant n fois dérivable, on a

$$(34) \qquad \begin{aligned} f(\xi_0) = & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(\xi_n) \int_{\xi_k}^{\xi_n} \int_{\xi_{k-1}} \cdots \int_{\xi_1} d\xi^k \\ & + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f^{(k)}(t) \int_{\xi_{k-1}}^{t} \int_{\xi_{k-2}} \cdots \int_{\xi_1} d\xi^{k-1}\, dt = S_n + R_n \end{aligned}$$

(pour le sens de cette intégrale, *voir* [4]). Cette égalité a donc lieu pour f de C^∞, quel que soit n, les points ξ étant choisis arbitrairement. La fonction f satisfaisant à (33) choisissons les points ξ de la façon suivante : en posant

$$\sigma_n = \sum_1^n \mu_k, \qquad \alpha_n = \frac{a_n}{\sigma_n},$$

on écrira, en fixant d'abord n, $\xi_k = \alpha_n \sigma_k (1 \leqq k \leqq n)$, $\xi_0 = 0$. On a pour R_n $\left[\text{le deuxième } \sum \text{ dans } (34)\right]$ l'inégalité

$$\begin{aligned} |R_n| & \leqq \sum_{p=1}^{n} M_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \int_{\xi_{k-1}} \cdots \int_{\xi_1} d\xi^k \leqq \sum_{p-1}^{n} M_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \int_{\xi_{k-3}} \cdots \int_{\xi_0} d\xi^k \\ & = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n^k \prod_{q=1}^{k} \frac{1}{\xi_q - \xi_{q-1}} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \int_{\xi_{k-2}} \cdots \int_{\xi_0} d\xi^k, \end{aligned}$$

Le raisonnement conduit par Bang (*voir* [4]; du fait que μ_n décroît, on peut prendre, en utilisant les notations de ce livre, $p = n$ et, $n_p = n$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2, \ldots, n_{p-1} = n - 1$) montre alors que

$$|R_n| \leqq \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n e)^k.$$

En revenant maintenant à (33) on trouve

$$|f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(a_n)| \int_{\xi_k}^{a_n} \int_{\xi_{k-1}} \cdots \int_{\xi_1} d\xi^k + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n e)^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} M_k e^{-L(|a_n|)} \int_0^{a_n} \int_0 \cdots \int_0 d\xi^k + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n e)^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k}{k!} a_n^k e^{-L(a_n)} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n e)^k.$$

Comme $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$, le second terme du dernier membre de l'inégalité tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini; et la condition (33) fournit immédiatement $f(0) = 0$. Si $\operatorname{Inf} a_n = a > 0$, il suffit de remplacer $f(x)$ par $f_\alpha(x) = f(\alpha + x)$, où $0 < \alpha < a$, pour voir qu'on a

$$|f_\alpha^{(n)}(x)| \leq M_n e^{-L_1(x)} \qquad (x > 0,\ n \geq 0),$$

où $L_1(x) = L(\alpha + x)$. En posant $a'_n = a_n - \alpha$, on a encore

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_0^n \frac{M_k}{k!} a'^n_n \right) e^{-L(a'_n)} = 0.$$

avec $0 < a - \alpha < a'_n$, $a'_n = o(\sigma_n)$; on a, par conséquent, $f(x) = 0$ pour $0 \leq x < a$. Comme, du fait de l'égalité $\sum \mu_n = \infty$, la classe $C\{M_n\}$ est quasi analytique, on voit que $f(x) \equiv 0$. Si, par contre, $\operatorname{Inf} a_n = 0$, on voit alors que la condition du théorème implique que $L(0) = \infty$, ce qui prouve alors que $f^{(n)}(0) = 0 (n \geq 0)$, et, étant donnée la quasi-analyticité de $C\{M_n\}$, on en conclut encore que $f(x) \equiv 0$.

Le théorème 5 conduit au théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Les* M_n *et les* μ_n *étant définis comme dans le théorème* 5 *avec* $\sum \mu_n = \infty$, *désignons respectivement par* m_n^a *et* m_n^g *la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de* $\mu_1, \ldots, \mu_n$

$$m_n^a = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{n},$$

$$m_n^g = (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n)^{\frac{1}{n}},$$

et soit $\{a_n\}$ *une suite de nombres positifs tels que*

$$a_n = o(\sigma_n) \qquad (n \to \infty).$$

Si, pour une suite $\{n_j\}$

(35) $$e^{-\frac{L(a_{n_j})}{n_j}} = o\left(\frac{m_{n_j}^g}{m_{n_j}^a}\right)$$

la classe $S(\{M_n\}, L)$ *est vide.*

Démonstration. — Soit $f \in S(\{M_n\}, L)$, avec

$$|f^{(n)}(x)| \leq a^n M_k e^{-L(b|x|)} = M'_n e^{-L_1(|x|)} \qquad (n \geq 0),$$

où l'on a posé

$$a^n M_n = M'_n, \qquad L(bx) = L_1(x) \qquad (x > 0).$$

Posons $ba'_n = a_n$. On a $a'_n > 0$, $a'_n = o(\sigma_n)$ et $(\mu_0 = 1)$,

$$\sum_0^n \frac{M'_k}{k!} a'^k_n e^{-L_1(a'_n)} = \sum_0^n \frac{a^k M_k}{k!} \frac{a^k_n}{b^k} e^{-L(a_n)}$$

$$\leq \sum_0^n \frac{a^k}{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_k} \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n)^k}{k!\, b^k} e^{-L(a_n)}.$$

Mais comme, du fait que μ_n décroît, on a

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \geq k\mu_k \qquad (1 \leq k \leq n)$$

et, par conséquent, l'expression $\dfrac{(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)^k}{k!\ \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$ croît avec k; on peut donc écrire

$$\sum_0^n \frac{M'_k}{k!} a'^k_k e^{-L_1(a'_n)} \leq n A^n \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)^n}{n!\ \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} e^{-L(a_n)} \leq C^n \left(\frac{m_n^a}{m_n^g}\right)^n e^{-L(a_n)}.$$

Il résulte alors de (35) que

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^n \frac{M'_k}{k!} a'_k e^{-L(a'_n)} = 0$$

et le théorème 5 fournit immédiatement le résultat voulu.

Passons maintenant aux classes Q_a.

THÉORÈME 7. — *Soit $\{p_n\}$ une suite croissante, avec $p_n \geq n\,(n \geq 0)$, et soit $\{M_n\}$ une suite positive. Si la classe* $C\left\{\dfrac{M_n}{\left(\dfrac{p_n}{n} - 1\right)^{2n}}\right\}$ *est quasi analytique et si $a \geq 1$, la classe $Q_a(\{p_n\}, \{M_n\})$ est vide.*

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le théorème pour le cas où $n < p_n \leq 2n\,(n \geq 1)$.

Partageons, en effet, la suite $\{p_n\}\,(n \geq 1)$ (de l'énoncé) en deux suites : $\{p_{n_j}\}$, $\{p_{m_k}\}$ définies de la manière suivante : $p_{n_j} > 2n_j$, $p_{m_k} \leq 2m_k$; posons, d'autre part

$$N_{n_j} = M_{n_j} c^{2n_j - p_{n_j}}, \qquad N_{m_k} = M_{m_k},$$

c étant une constante, $c > a$. Si

$$|x^{p_n} f^{(n)}(x)| \leq h^n M_n \qquad (x \geq a,\ n \geq 0),$$

on peut aussi écrire, pour $x \geqq c$,

$$|x^{2n_j} f^{(n_j)}(x)| \leqq h^{n_j} M_{n_j} c^{2n_j - p_{n_j}} = h^{n_j} N_{n_j},$$
$$|x^{p_{m_k}} f^{(m_k)}(x)| \leqq h^{m_k} M_{m_k} = h^{m_k} N_{m_k}$$

et, par conséquent, $f \in Q_c(\{q_n\}, \{N_n\})$, où

$$q_{n_j} = 2n_j, \quad q_{m_k} = p_{m_k}, \qquad \text{donc} \quad n < q_n \leqq 2n \quad (n \geqq 1).$$

On a, avec un choix convenable de la constante $b > 0$,

$$\frac{N_{n_j}}{\left(\frac{q_{n_j}}{n_j} - 1\right)^{2n_j}} = M_{n_j} c^{2n_j - p_{n_j}} \leqq \frac{b^{n_j} M_{n_j}}{\left(\frac{p_{n_j}}{n_j} - 1\right)^{2n_j}}.$$

Ainsi, il résulte de nos hypothèses que la classe $C\left\{\frac{N_n}{\left(\frac{q_n}{n} - 1\right)^{2n}}\right\}$ est certainement quasi analytique. Si donc, le théorème était démontré pour le cas où $n < p_n \leqq 2n$, il en résulterait que $f(x) = 0$, pour tout $x \geqq c > a$, et l'on aurait $f(x) = 0$ pour $x \geqq a$. Démontrons donc notre théorème, en supposant $n < p_n \leqq 2n \, (n \geqq 1)$.

Rappelons maintenant la formule de Fàa di Bruno (*voir* [2], voir aussi Goursat, *Cours d'Analyse*, 5e édition, vol. I, p. 78, exercice 16)

$$\frac{d^n g[\varphi(x)]}{dx^n} = \sum k(\nu) g^{(\mu)} [\varphi']^{\nu_1} [\varphi'']^{\nu_2} \ldots, \tag{36}$$

les μ et les ν étant des entiers non négatifs satisfaisant aux conditions

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + = \mu, \qquad \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots = n,$$

$k(\nu)$ étant une fonction des ν telle que

$$\sum k(\nu) \mu! (1!)^{\nu_1} (2!)^{\nu_2} \ldots = n! \, 2^{n-1}. \tag{37}$$

Posons maintenant $F(x) = f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ pour $0 < x < \frac{1}{\log a} = b$, et soit $F(0) = 0$. La fonction F est indéfiniment dérivable dans $(0, b)$. Mais, comme on a

$$|F(x)| e^{\frac{p_0}{x}} = \left|f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right| e^{\frac{p_0}{x}} \leqq M_0 < \infty,$$

pour $0 < x < b$, avec $p_0 > 0$, on voit que $F(x)$ est continue aussi à l'origine.

On a, d'après (36), pour $0 < x < b$,

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n} = \sum k(\nu) f^{(\mu)}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \left(\frac{de^{\frac{1}{x}}}{dx}\right)^{\nu_1} \left(\frac{d^2 e^{\frac{1}{x}}}{dx^2}\right)^{\nu_2} \ldots, \tag{38}$$

$f^{(\mu)}$ désignant la dérivée par rapport à $e^{\frac{1}{x}}$, les μ, ν et $k(\nu)$ satisfaisant à (37).

Or, en utilisant cette même formule (36) pour $g(y) = e^y$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, on trouve pour $x > 0$

$$\frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \sum k(\nu) \frac{1}{x^{\mu+n}} (1\,!)^{\nu_1} \ldots (p\,!)^{\nu_p} \ldots,$$

et, par conséquent, on peut écrire, quel que soit $0 < t < 1$,

$$(39)\qquad \left| \frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} \right| \leqq e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^n} \frac{1}{t^n} \sum \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \frac{1}{\mu\,!} k(\nu)\, \mu\,! \,(1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots$$
$$\leqq 2^{n-1}\, n\,! \frac{1}{x^n} \frac{1}{t^n} e^{\frac{1+t}{x}}.$$

L'égalité (38) et l'inégalité (39) permettent ainsi d'écrire pour $0 < x < b$

$$(40)\qquad \left| \frac{d^n \mathrm{F}(x)}{dx^n} \right| \leqq \sum k(\nu) \left| f^{(\mu)}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \right|$$
$$\times \left(1\,! \frac{1}{tx} e^{\frac{1+t}{x}}\right)^{\nu_1} \left(2\,!\, 2 \frac{1}{t^2 x^2} e^{\frac{1+t}{x}}\right)^{\nu_2} \ldots \left(p\,!\, 2^{p-1} \frac{1}{t^p x^p} e^{\frac{1+t}{x}}\right)^{\nu_p} \ldots$$
$$\leqq 2^n \frac{1}{t^n x^n} \sum k(\nu)\, \mu\,! \left| f^{(\mu)}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \right| e^{\frac{\mu(1+t)}{x}} \frac{1}{\mu\,!} (1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots.$$

Remarquons que si $\mu < q_\mu < p_\mu$, on a certainement (puisque $|f^{(\mu)}(x) x^{p_\mu}| \leqq \mathrm{M}_\mu < \infty$

$$\lim_{x=\infty} x^{q_\mu} f^{(\mu)}(x) = 0.$$

Par conséquent, en choisissant t positif, assez petit, on voit que le dernier membre de l'inégalité (40) tend vers zéro plus vite que (toute puissance de) x, lorsque x décroît vers zéro. Comme on sait déjà que $f(x)$ est continue aussi à l'origine, on voit immédiatement que F est indéfiniment dérivable dans $[0, b)$, avec $\mathrm{F}^{(n)}(0) = 0\,(n \geqq 0.)$ [Cette remarque aurait pu aussi être faite sans le recours à (40).] On a, en utilisant maintenant (40), d'une manière essentielle,

$$\left| \frac{d^n \mathrm{F}(x)}{dx^n} \right| \leqq 2^n \frac{1}{t^{2n}} \sum k(\nu)\, \mu\,! \, f^{(\mu)}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) e^{\frac{\mu(1+t)+nt}{x}} \frac{1}{\mu!} (1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots$$
$$\leqq 2^n \frac{1}{t^{2n}} \sum \mathrm{A}^{f,a}_{\mu(1+t)+nt,\mu} \frac{1}{\mu\,!} k(\nu)\, \mu\,! \,(1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots$$
$$\leqq 2^n \frac{1}{t^{2n}} \sum \mathrm{A}^{f,a}_{\mu+2nt,\mu} \frac{1}{\mu\,!} k(\nu)\, \mu\,! \,(1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots$$

(car $\mathrm{A}^{f,a}_{p,q}$ croît avec p, si $a \geqq 1$). En utilisant alors le lemme 1 (on remarquera que $\mu \geqq 1$) on obtient

$$\left| \frac{d^n \mathrm{F}(x)}{dx^n} \right| \leqq 2^n \frac{1}{t^{2n}} \sum \frac{1}{\mu} \mathrm{A}^{f,a}_{n+2nt,n} \frac{k(\nu)}{(n-1)\,!} \mu\,! \,(1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots \leqq 2^{2n-1} \frac{n}{t^{2n}} \mathrm{A}^{f,a}_{n(1+2t),n}.$$

Posons alors $2t = \frac{p_n}{n} - 1$, il vient

$$\left| \frac{d^n \mathrm{F}(x)}{dx^n} \right| \leqq \mathrm{C}^n \frac{\mathrm{A}_{p_n,n}}{\left(\frac{p^n}{n} - 1\right)^{2n}} \leqq \mathrm{C}^n \frac{\mathrm{M}_n}{\left(\frac{p^n}{n} - 1\right)^{2n}} \qquad (n \geqq 1),$$

où C est une constante positive. Comme la classe $C\left\{\frac{M_n}{\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{2n}}\right\}$ est quasi analytique, et comme $F^{(n)}(0)=0\ (n\geqq 0)$, on voit que $F(x)\equiv 0$, ce qui prouve aussi que $f\equiv 0$. Notre théorème est ainsi démontré.

Remarque. — Le théorème cesse d'être vrai, si l'on remplace dans son énoncé $\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{2n}$ *par* $\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{n}$.

Posons $f(x)=e^{-x}$. On a, pour $p>0$,

$$A_{p,n}=A^{f,1}_{p,n}=\operatorname*{Sup}_{x\geqq 1}|x^p f^{(n)}(x)|=p^p e^{-p}.$$

En choisissant $p_n=n\left(1+\frac{1}{\log n}\right)(n\geqq 2)$, $p_0=1$, $p_1=2$, on a

$$A_{p_n,n}\leqq A^n n^n=M_n,$$

A étant une constante finie.

La classe $C\left\{\frac{M_n}{\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{n}}\right\}=C\{(n\log n)^n\}$ est quasi analytique, il existe pourtant une fonction non identiquement nulle $[f(x)=e^{-x},\ x\geqq 1]$, appartenant à $Q_1(\{p_n\},\{M_n\})$.

La classe $C\left\{\frac{M_n}{\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{2n}}\right\}=C\{(n\log^2 n)^n\}$ n'est pas quasi analytique.

Corollaire du théorème 7. — *Quelle que soit la quantité* $a\geqq 1$, *et quel que soit* $k>1$, *une condition nécessaire et suffisante pour que la classe* $Q_a(\{kn\},\{M_n\})$ *soit vide est que la classe* $C\{M_n\}$ *soit quasi analytique.*

Que la condition est suffisante résulte du fait que $C\{M_n\}$ et $C\left\{\frac{M_n}{(k-1)^n}\right\}$ sont identiques, il suffit donc d'appliquer le théorème 7, avec $p_n=kn$. Si $C\{M_n\}$ n'est pas quasi analytique, il suffit de construire la fonction f, non nulle sur $[a,\ a+1)$, nulle pour $x\geqq a+1$, et appartenant à $C\{M_n\}$ (ce qui est possible, *voir* [4]) pour voir que cette fonction appartient à $Q_a(\{kn\},\{M_n\})$ avec k quelconque.

Remarque. — Le corollaire précédent ainsi que les théorèmes 5 *et* 6, *contiennent le théorème de Šilov d'après lequel* $S=S(\{n^{\alpha n}\},\{n^{\beta n}\})$, *avec* $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<1$ *est vide.*

Il suffit pour le voir de remarquer que si $f\in S$, on a aussi

$$f\in Q_1(\{(1-\alpha)n/\beta\},\{n^n\}).$$

Or cette dernière classe est vide, d'après le corollaire du théorème 7. f a donc un support fini et appartient à la classe $C\{n^{\alpha n}\}$ $(0<\alpha<1)$, elle est donc identiquement nulle.

Le raisonnement pour obtenir le théorème de Šilov à partir des théorèmes 5 ou 6 est évident.

D'ailleurs *la classe* $S\left(\{n^{\alpha n}\}, \left\{\left(\frac{n^{1-\alpha}}{\log n}\right)^n\right\}\right)$ $(0<\alpha<1)$ ***est vide.***

Ceci résulte du théorème 7 : il suffit de poser $p_n = n\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$, et de remarquer que la classe $C\{(n\log n)\}^n$ est quasi analytique.

On peut améliorer le théorème 7 en introduisant une nouvelle classe de fonctions : si $a \geqq 1$, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{M_n\}$ étant des suites positives, on désignera par $S_a(\{p_n\}, \{q_n\}, \{M_n\})$ l'ensemble des fonctions f appartenant à C_a^∞ et satisfaisant aux inégalités

$$|f^{(n)}(x)\, x^{p_n} \log^{q_n} x| \leqq k^n M_n \qquad (n \geqq 0),$$

On peut alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Si les suites $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ sont telles que $p_n > n$, $0 \leqq q_n \leqq n$ $(n \geqq 0)$, et si la classe $C\left\{\frac{M_n}{\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{2n-q_n}}\right\}$ est quasi analytique, la classe $S_a(\{p_n\}, \{q_n\}, \{M_n\})$, où $a \geqq 1$, est vide.*

Démonstration. — La fonction f appartenant à S_a, posons

$$A_{p,l,q} = \sup_{x \geqq a} |x^p \log^l x\, f^{(q)}(x)|,$$

On a, pour $x > a \geqq 1$,

$$\begin{aligned}
|f^{(q)}(x)| &\leqq \int_x^\infty |f^{(q+1)}(y)|\, dy \leqq A_{p+1,l,q+1} \int_x^\infty \frac{dy}{y^{p+1}\log^l y} \\
&= A_{p+1,l,q+1}\left[-\frac{1}{p}\int_x^\infty \left(\frac{1}{y^p \log^l y}\right)' dy - \frac{l}{p}\int_x^\infty \frac{dy}{y^{p+1}\log^{l+1} y}\right] \\
&\leqq A_{p+1,l,q+1}\frac{1}{p}\,\frac{1}{x^p \log^l x},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$p A_{p,l,q} \leqq A_{p+1,l,q+1}. \tag{41}$$

En utilisant la formule de Fàa di Bruno, on a, en posant $F(x) = f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$, $0<h<1$, $0<x<\frac{1}{\log a}$,

$$\left|\frac{d^p F(x)}{dx^n}\right| \leqq 2^n (xh)^{-n} \sum k(\nu) \left|f^{(\mu)}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right| e^{\frac{\mu(1+h)}{x}}\, 2^{-\mu} (1\,!)^{\nu_1} (2\,!)^{\nu_2} \ldots \tag{42}$$

(*voir*, pour les détails, la démonstration du théorème 7). On a, à partir de (41) et (42),

$$\left|\frac{d^n F(x)}{dx^n}\right| \leqq 2^n h^{-2n+q_n} \frac{h^{n-q_n}}{x^{n-q_n}} \frac{1}{x^{q_n}} \sum k(\nu)\,\mu!\,\left|f^{(\mu)}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right| e^{\frac{\mu(1+h)}{x}} \frac{1}{\mu!}(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots$$
$$\leqq 2^n h^{-2n+q_n} \sum k(\nu)\,\mu!\,\frac{A_{\mu(1+h)+(n-q_n)h,\, q_n.\, h}}{\mu!}(1!)^{\nu_1}(2!)^{\nu_2}\ldots$$
$$\leqq 2^{2n} h^{-2n+q_n} A_{n+2nh-q_n h, q_n, n} \leqq 2^{2n} h^{-2n+q_n} A_{n+2nh, q_n, n}.$$

Et, en posant $2h = \frac{p_n}{n} - 1$, on voit que

$$|F^{(n)}(x)| \leqq A^n M_n \left(\frac{p_n}{n} - 1\right)^{q_n - 2n}.$$

Comme, dans la démonstration du théorème 7, on voit que $F^{(n)}(0) = 0$; et, comme la classe $C\left\{\frac{M_n}{\left(\frac{p_n}{n}-1\right)^{2n-q_n}}\right\}$ est quasi analytique, on voit que $F(x) \equiv 0$, donc aussi $f(x) \equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Babenko, *Trudy de la Société Mathématique de l'Université de Moscou*, vol. 5, 1956, p. 523-542.

[2] Bang, *Om quasi-analytiske Funktionen*, *Kjøbenhavn*, *nyt nordisk forlag*, arnold busck 1946.

[3] Gelfand et Šilov, *Fonctions généralisées*, vol. 2, Édition d'État de la Littérature physico-mathématique, Moscou, 1958.

[4] Mandelbrojt, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[5] Mandelbrojt, *C. R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 2144 et 2465.

[6] Roumieu, *Ann. Éc. Norm.*, (3) LXXVII, fasc. 1, 1960.

[7] Šilov, *Dokl. Acad. U. R. S. S.*, t. 102, nº 5, 1955, p. 893-896.