ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

Sur des systèmes différentiels du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, no 2 (1960), p. 123-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_2_123_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 77. 1960, p. 123 à 144.

SUR DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNIFORME

PAR M. RENÉ GARNIER.

1. Dans son *Cours d'Analyse Mathématique* [1], E. Goursat observe qu'en partant d'un système de Riccati généralisé

$$Y' + a\,Y + b\;Z + c\; - Y(a_2Y + b_2Z + c_2) = 0,$$
$$Z' + a_1Y + b_1Z + c_1 - Z(a_2Y + b_2Z + c_2) = 0,$$

et en lui appliquant une transformation de Cremona, on obtiendra un système différentiel dont la solution générale n'admet plus que des pôles comme singularités mobiles. Plus généralement, la question se pose de *former tous les systèmes* (Σ)

$$(\Sigma)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(y, z; x),\\ \frac{dz}{dx} &= g(y, z; x)\end{aligned}\right.$$

$(f, g$, rationnels en y, z et analytiques en $x)$ *birationnellement distincts et dont la solution générale a ses points critiques fixes*. C'est là un problème difficile, que Goursat nous a signalé autrefois, et qui comprend comme cas très particuliers celui que Painlevé [2], puis Gambier [3] ont résolu pour les équations du second ordre : par exemple, le système très simple

$$y' = z, \qquad z' = 6y^2 + x$$

est équivalent à l'équation (I), qui définit une fonction méromorphe, irréductible aux transcendantes classiques, et qui a été découverte par Painlevé. Il serait intéressant de savoir si les systèmes (Σ) peuvent définir des transcendantes uniformes, irréductibles aux transcendantes classiques, et ne rentrant pas dans la classification de Painlevé (*cf.* [2], p. 66).

Or, si l'on cherche à résoudre le problème posé plus haut, on est conduit à déterminer d'abord *les systèmes* (Σ) — *soit* (S) — *dont les seconds membres sont homogènes en y et z et indépendants de x et dont l'intégrale générale est uniforme.* C'est ce problème que nous allons traiter dans le Mémoire actuel. Annonçons immédiatement que les solutions des systèmes (S) sont des fonctions elliptiques de x, ou s'expriment rationnellement au moyen de $e^{\rho(x)}$, $e^{\rho(e^x)}$ (ρ, fonction rationnelle) ou de x. Les systèmes (S) se répartissent en classes de systèmes birationnellement distincts. On trouvera au nº 7 un ensemble de représentants de ces classes, ainsi que la construction des solutions correspondantes. De plus, en vue de la détermination des systèmes (Σ) du début, nous avons construit tous les systèmes (S) dont les seconds membres sont des polynomes en y et z (nºs 10 à 12). Ajoutons qu'un résumé d'une partie des résultats actuels a été donné aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [4].

2. Montrons d'abord comment on est amené à se poser le second problème. Écrivons Σ sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum_{i=0}^{M} P_i(y, z; x)}{\sum_{j=0}^{N} R_j(y, z; x)}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\sum_{i=0}^{M} Q_i(y, z; x)}{\sum_{j=0}^{N} R_j(y, z; x)},$$

les P_i, Q_i, R_j étant des polynomes homogènes, d'ordres i, i, j en y et z, à coefficients analytiques en x, holomorphes pour $x = x_0$. Supposons $M > N + 1$, *ce qui comprend le cas où $f(y, z; x)$ et $g(y, z; x)$ sont des polynomes en y et z de degré* ≥ 2, et remplaçons respectivement x, y, z par

$$x_0 + \alpha^{M-N-1}X, \quad \frac{Y}{\alpha} \text{ et } \frac{Z}{\alpha};$$

si l'on fait tendre le paramètre α vers o, le système-limite devra avoir son intégrale générale uniforme [5]. Or ce système s'écrit, après un changement de notations,

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = Q(y, z), \end{cases}$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de y et z, indépendantes de x, d'ordre $M - N$; nous désignerons désormais cet ordre par m, et nous admettrons qu'il puisse prendre une valeur entière quelconque (< 0, $= 0$ ou > 0).

3. Le cas de $m = 1$ se traite immédiatement. Posons

$$(1) \qquad z = vy;$$

le système (S) s'écrira, pour $m = 1$,

$$y' = P(1, v) y, \tag{2}$$

$$v' = Q(1, v) - v P(1, v); \tag{3}$$

l'équation (3) devant avoir son intégrale générale uniforme, son second membre est un polynome du second degré au plus en v; moyennant une transformation homographique sur v, c'est-à-dire moyennant une transformation linéaire sur y et z, on peut supposer que (3) est de l'une des formes

$$v' = v, \qquad v' = 1 \qquad \text{ou} \qquad v' = 0;$$

donc (3) s'intègre par

$$v = e^x, \qquad v = x \qquad \text{ou} \qquad v = C, \tag{4}$$

en laissant désormais de côté la constante additive de x. On a ensuite dans le premier cas

$$\operatorname{Log} y = \int \frac{P(1, v)}{v} dv = \rho(v) + \Sigma n_h \operatorname{Log}(v - a_h) + \operatorname{Log} C',$$

$\rho(v)$ étant une fonction rationnelle et

$$y = C' e^{\rho(e^x)} \Pi (e^x - a_h)^{n_h} \qquad (n_h, \text{ entier}).$$

Dans le second et le troisième cas,

$$y = C' e^{\rho(x)} \Pi (x - a_h)^{n_h}$$

et

$$y = C' e^{x P(1, C)}.$$

Dans les trois cas, on déduit z de y à l'aide de (1) et (4).

4. Supposons donc $m \neq 1$. Posons

$$P(1, v) = P, \qquad Q(1, v) = Q, \qquad Q - vP = R(v).$$

$$z = vy. \tag{1}$$

On trouve

$$v' = R y^{m-1}. \tag{2}$$

Pour $R(v) \equiv 0$ ou $Q \equiv vP$, on a $v = \text{Cte}$, soit $v = C$ et $y' = P(1, C) y^m$; y n'est uniforme que si $m = 0, 1, 2$; écartons toujours le cas $m = 1$; pour $m = 1 - \varepsilon (\varepsilon = \pm 1)$, on a

$$\varepsilon y^\varepsilon = x P(1, C),$$

et $z = Cy$; (S) est de la forme

$$(S_1^2) \qquad \begin{cases} y' = y^{1-\varepsilon} f_1\left(\dfrac{z}{y}\right) = y f(y, z), \\[2mm] z' = y^{-\varepsilon} z f_1\left(\dfrac{z}{y}\right) = z f(y, z), \end{cases}$$

$f(y, z)$ étant une fonction rationnelle homogène d'ordre $-\varepsilon$.

Supposons maintenant que $R(v)$ ne soit pas identiquement nul. On déduit de (2)

$$v'' = v'^2 f(v), \tag{3}$$

avec

$$f(v) = \frac{R'}{R} + (m-1)\frac{P}{R} \qquad \left(R' = \frac{dR}{dv}\right). \tag{4}$$

L'équation (3) une fois intégrée, on aura y et z par (2) et (1), à condition qu'on n'ait pas à la fois $v' \equiv 0$ et $R[v(x)] \equiv 0$, soit $v = v_0$, avec $R(v_0) = 0$. Puisque $R(v) \not\equiv 0$, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de telles valeurs v_0; elles donnent effectivement des solutions de (S), définies par

$$y' = y^m P(1, v_0), \qquad \text{d'où} \qquad y^{1-m} = (1-m)x P(1, v_0)$$

et $z = v_0 y$. *Sauf pour* $m = 0, 2$ (et 1) *ces solutions ne sont pas uniformes.* Montrons que *ce sont des solutions singulières de* (S).

Soit $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ une solution particulière de (S); cherchons à déterminer les fonctions inconnues $\alpha(x)$, $\beta(x)$ de manière que

$$y = \alpha\,\varphi(\alpha^{m-1}x + \beta) \qquad \text{et} \qquad z = \alpha\,\psi(\alpha^{m-1}x + \beta)$$

définissent une solution de (S). Il viendra

$$\alpha'\varphi + \alpha^m \varphi' + (m-1)\,\alpha^{m-1} x \varphi' \alpha' + \alpha\varphi'\beta' = \alpha^m P(\varphi, \psi) = \alpha^m \varphi',$$

φ et φ' étant toujours exprimés en $\alpha^{m-1}x + \beta$, et l'on aura ainsi

$$\begin{gathered}[\varphi + (m-1)\,\alpha^{m-1} x \varphi']\,\alpha' + \alpha\varphi'\beta' = 0,\\ [\psi + (m-1)\,\alpha^{m-1} x \psi']\,\alpha' + \alpha\psi'\beta' = 0,\end{gathered}$$

d'où l'on tire $\alpha' = 0 = \beta'$, sauf si

$$\alpha(\varphi\psi' - \psi\varphi') = 0; \tag{5}$$

si donc $[\varphi(x), \psi(x)]$ est une solution de (S) telle que $\psi(x) : \varphi(x)$ ne se réduise pas à une constante, la solution générale de (S) sera donnée par

$$\begin{cases} y = A\,\varphi(A^{m-1}x + B), \\ z = A\,\psi(A^{m-1}x + B), \end{cases} \tag{6}$$

A et B étant des constantes arbitraires. Si (S) admet d'autres solutions, elles seront telles que $\psi : \varphi$ se réduise à une constante (en laissant de côté la solution banale — et particulière — $\alpha = 0$ ou $y = 0$, $z = 0$).

Or (5) détermine le point de contact de la courbe (6) avec la surface focale de la congruence des courbes (6); (5) pouvant s'écrire (pour $\alpha \neq 0$)

$$y\,Q(y, z) - z\,P(y, z) = 0 \qquad \text{ou} \qquad R\left(\frac{z}{y}\right) = 0, \tag{7}$$

les solutions du second type sont bien les solutions $v = v_0$ rencontrées tout à l'heure; elles sont situées sur les plans (7) ou $z = v_0 y$ qui constituent la surface focale : ce sont donc bien des solutions singulières de (S). On ne peut en déduire l'intégrale générale par des formules (6) — et inversement [1]. Nous conviendrons de regarder comme solution de notre problème tout système (S) qui a son intégrale générale uniforme, même s'il admet des intégrales singulières qui ne le sont pas, circonstance déjà signalée (pour les *équations* différentielles) par J. Chazy [6].

Revenons à l'équation (3). Ses intégrales satisfont à l'équation

$$v' = \mathrm{C}\, e^{\int f(v)\,dv} \qquad (\mathrm{C}, \text{ constante arbitraire}).$$

Comme $v(x)$ doit être uniforme, l'équation précédente doit être [5] une équation de Briot et Bouquet

$$v' = \mathrm{C} \prod_{\nu=1}^{4} (\alpha_\nu v - \beta_\nu)^{1-\frac{1}{p_\nu}}, \tag{8}$$

les α_ν et les β_ν étant des nombres fixes, et les entiers p_ν coïncidant avec l'une des colonnes du tableau

(T)

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
p_1	-1	p	∞	2	3	4	2	2
p_2	1	$-p$	∞	2	3	4	3	2
p_3	1	1	1	∞	3	2	6	2
p_4	1	1	1	1	1	1	1	2

(p, entier fini $\neq 1$), de sorte que

$$\sum_{\nu=1}^{4} \left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) \leqq 2, \tag{9}$$

le signe $<$ n'étant valable que s'il existe une valeur de ν telle que $\alpha_\nu = 0$, $p_\nu \neq 1$.

Dans les cas I et II, l'intégrale générale de (3) est une fonction rationnelle de x;

---

[1] Les fonctions (6), où $[\varphi(x), \psi(x)]$ désigne actuellement une intégrale singulière ne dépendent d'ailleurs que d'une constante, BA^{1-m}, comme l'ensemble des intégrales singulières. On peut se demander s'il existe des systèmes (S) pour lesquels les fonctions (6), formées à partir d'une intégrale non singulière ne dépendraient que d'une seule fonction de A et B. En appliquant une règle classique [7] on écrira que la matrice $\begin{pmatrix} y'_\mathrm{A} & z'_\mathrm{A} \\ y'_\mathrm{B} & z'_\mathrm{B} \end{pmatrix}$ est de rang 1 pour x quelconque. Or ceci exige que $z:y$ se réduise à une constante, et comme l'intégrale n'est pas singulière, *le système* (S) *est un système* $(\mathrm{S}_\mathrm{I}^2)$. Et en effet pour $m = 2$, par exemple, les intégrales sont de la forme

$$y = \frac{a}{x}, \qquad z = \frac{b}{x};$$

$\dfrac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}$ et $\dfrac{\mathrm{A}b}{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}$ ne dépendent que de B:A et ne représentent pas l'intégrale générale.

dans les cas III et IV, c'est une fonction rationnelle de e^{Ax}; et dans les cas V à VIII, une fonction elliptique de x.

On observera que *dans tous les cas*

$$(10)\qquad \left(\frac{\alpha_j v - \beta_j}{\alpha_i v - \beta_i}\right)^{\frac{1}{p_{ij}}}$$

est une fonction uniforme de x, p_{ij} *étant le p. g. c. d. de* p_i *et* p_j (ou un entier quelconque, si $p_i = \infty = p_j$). Pour le vérifier, on notera que la transformation

$$\frac{v-a}{v-b} = w^{\lambda}$$

change l'équation

$$v' = \mathrm{A}(v-a)^{1-\frac{1}{\alpha}}(v-b)^{1-\frac{1}{\beta}}(v-c)^{1-\frac{1}{\gamma}}(v-d)^{1-\frac{1}{\delta}},$$

où α, β, γ, δ coïncident avec une colonne de (T) — et, par conséquent, vérifient la formule (9) (écrite avec le signe =) — en l'équation

$$(11)\qquad w' = \mathrm{A}_1 w^{1-\frac{\lambda}{\alpha}}[a-c-(b-c)w^{\lambda}]^{1-\frac{1}{\gamma}}[a-d-(b-d)w^{\lambda}]^{1-\frac{1}{\delta}};$$

or, si l'on prend $\alpha = p_i$, $\beta = p_j$ (avec $p_i \leqq p_j$) et $\lambda = p_{ij}$, on aura $\lambda = p_i = \alpha$ [sauf dans les deux cas suivants : 1° $p_i = \infty = p_j$, λ entier quelconque; mais (11) s'écrit alors $w' = \mathrm{A}_1 w$, et son intégrale générale est uniforme; 2° $p_i = 2$, $p_j = 3$; mais on a alors $p_{ij} = 1$ et (10) est évidemment uniforme]; l'équation (11) coïncide alors avec une équation (8) de Briot et Bouquet, ce qui entraîne l'uniformité de (10), et ce qui montre, de plus, que les fonctions $w(x)$ sont du type rationnel, exponentiel ou elliptique.

Or, moyennant une transformation homographique sur v, c'est-à-dire moyennant une transformation linéaire sur y et z, on peut supposer $\alpha_j = 0$; dans ce cas, l'expression

$$(\alpha_i v - \beta_i)^{\frac{1}{p_{ij}}}$$

sera uniforme. Désormais, afin de simplifier les énoncés, *nous supposerons essentiellement qu'on a pris* $\alpha_2 = 0$ *dans les cas* I, II, III, $\alpha_3 = 0$ *dans les cas* IV, V, VI, VII *et* $\alpha_4 = 0$ *dans le cas* VIII (hypothèse H); nous poserons, pour $\alpha_\nu \neq 0$ (et à partir du cas II)

$$e_\nu = \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}.$$

Le tableau (T) montre que si l'on prend $\alpha_i \neq 0$ et $\alpha_j = 0$, avec p_i en dessus et $p_j (\neq 1)$ en dessous de la ligne brisée ponctuée, avec, on a (VI excepté) $p_{ij} = p_i$ (²) et $u_i = (v - e_i)^{\frac{1}{p_i}}$ sera uniforme dans chacun des cas II-VIII (VI excepté).

(²) On aurait évité ce cas d'exception en prenant dans (T) : $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 4$ pour la colonne VI; mais les systèmes S correspondants auraient eu une forme moins simple qu'avec le choix actuel.

D'ailleurs, si $v(x_0) = e_i$ [ce qui ne peut se produire dans le cas III ($p_1 = \infty$, $v - e_1 = e^x$)], il résulte aussitôt de (8) que $u_i(x)$ admet x_0 comme zéro d'ordre 1. On observera enfin que dans (9), d'après l'hypothèse H, le signe $=$ devra désormais être remplacé par $<$.

5. Cela étant, on peut écrire, en négligeant un facteur numérique, et les a_h étant différents des e_ν,

$$(1)\qquad R = \prod_{n=1}^{\mathfrak{N}} (v - a_h)^{K_h} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{k_\nu},$$

les K_h, k_ν étant des entiers, et e_ν, k_ν ne se rapportant qu'à un des $M(=1, 2, 3)$ entiers p_ν situés au-dessus de la ligne brisée de (T); en particulier, dans le cas I, les e_ν sont absents, et l'on doit remplacer dans (1) le second produit par l'unité. Cherchons les *conditions d'uniformité de y et z*. Tout d'abord, en un point x_0 où $v(x) = a_h$, on a, d'après (4; 8), $v'(x) \neq 0$ et, d'après (4; 2), l'uniformité de y exige

$$K_h = (m-1)\, n_h,$$

n_h étant entier, d'où

$$(2)\qquad R = \prod_{h=1}^{\mathfrak{N}} (v - a_h)^{(m-1)n_h} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{k_\nu}.$$

D'autre part, si $v(x_0) = e_\nu$ — ce qui exclut le cas III — il résulte de la remarque faite à la fin du n° 4 que l'uniformité de y entraîne les relations

$$(3)\qquad p_\nu - 1 - k_\nu p_\nu = -\mu_\nu (m-1) \qquad (\nu = 1, \ldots, M),$$

μ_ν étant un entier, et d'après (4; 4) il viendra

$$(4)\qquad (m-1)\sum_{h=1}^{\mathfrak{N}} \frac{n_h}{v - a_h} + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{k_\nu}{v - e_\nu} + (m-1)\frac{P}{R} = \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1 - \dfrac{1}{p_\nu}}{v - e_\nu},$$

soit d'après (3), et puisque $m \neq 1$,

$$(5)\qquad \frac{P}{R} = -\sum_{h=1}^{\mathfrak{N}} \frac{n_h}{v - a_h} - \sum_{\nu=1}^{M} \frac{\dfrac{\mu_\nu}{p_\nu}}{v - e_\nu},$$

ce qui fait connaître P; $Q(= vP + R)$ en résulte aussitôt, et l'on pourra ainsi former le système (S). On aura d'ailleurs

$$(6)\qquad y^{m-1} = A^{m-1} \frac{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{1 - \frac{1}{p_\nu}}}{\displaystyle\prod_{h=1}^{\mathfrak{N}} (v - a_h)^{n_h(m-1)} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{k_\nu}},$$

en écrivant maintenant (4; 8) sous la forme

$$(7) \qquad v' = A^{m-1} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{1-\frac{1}{p_\nu}}$$

[A, constante arbitraire introduite par l'intégration de (4; 3)]. On déduit alors de (6), grâce à (3)

$$(8) \qquad y = A \prod_{h=1}^{\mathfrak{N}} (v - a_h)^{-n_h} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{-\frac{\mu_\nu}{p_\nu}},$$

en négligeant une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, sans intérêt, car si (y, z) est une solution de (S), il en sera de même de $(\varepsilon y, \varepsilon z)$ où $\varepsilon^{m-1} = 1$. Or, l'uniformité de $(v - e_\nu)^{\frac{1}{p_\nu}}$ entraîne celle de y et de $z (= vy)$, quels que soient d'ailleurs les entiers μ_ν; toutefois dans le cas VI, $\left(\frac{v - e_2}{v - e_1}\right)^{\frac{\mu_1}{4}} (v - e_2)^{-\frac{\mu_1 + \mu_2}{4}}$ devra être uniforme, ce qui exige (n° 4) que μ_1 et μ_2 soient de même parité. On voit de plus que si $v(x_0) = e_\nu$, x_0 sera pour y un zéro d'ordre $-\mu_\nu$ et pour z un zéro d'ordre $-\mu_\nu$ ou $p_\nu - \mu_\nu$, selon que e_ν sera $\neq 0$ ou $= 0$.

Ainsi, *les conditions d'uniformité* (3) *sont suffisantes*; mais (3) montre que $m - 1$ *ne peut pas être quelconque* : il doit être premier aux p_ν. De plus, μ_ν devra être premier à p_ν, qui est égal à 2, 3, 4, 6 à partir du cas IV; μ_ν devra donc être congru, mod p_ν. à 1 ou à $p_\nu - 1$ à partir du cas IV. Si $(k_{\nu 0}, \mu_{\nu 0})$ désigne (pour m donné et à partir du cas II) une solution particulière de (3), la solution générale de (3) sera donnée par

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} k_\nu = k_{\nu 0} + \rho_\nu (m - 1) \\ \mu_\nu = \mu_{\nu 0} + \rho_\nu p_\nu \end{array} \right\} \quad (\nu = 1, \ldots, M),$$

ρ_ν étant un entier arbitraire. La fonction R_0 étant construite à l'aide de (2) et des entiers $n_h = 0$ et $\rho_\nu = 0$, on aura pour R (correspondant à n_h et ρ_ν quelconques)

$$(10) \qquad R = R_0 \left[\prod_{h=1}^{\mathfrak{N}} (v - a_h)^{n_h} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{\rho_\nu} \right]^{m-1}.$$

Si l'on pose

$$(11) \qquad y_0 = A \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{-\frac{\mu_{\nu 0}}{p_\nu}},$$

y_0 et $z_0 (= vy_0)$ définiront une solution du système (S_0) formé à partir de R_0 et des $\mu_{\nu 0}$, tandis que

$$(12) \qquad y = y_0 \prod_{h=1}^{\mathfrak{N}} (v - a_h)^{-n_h} \prod_{\nu=1}^{M} (v - e_\nu)^{-\rho_\nu}$$

et $z(=vy)$ définiront une solution du système (S), construit à partir de R et des μ_ν résultant de (9) [bien entendu, l'équation (7) reste la même pour (S) et (S_0)]. Ainsi, les systèmes (S) et (S_0) sont reliés par une transformation de Cremona

$$(13) \qquad \frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=\prod_{h=1}^{\mathfrak{N}}\left(\frac{z_0}{y_0}-a_h\right)^{-n_h}\prod_{\nu=1}^{\mathrm{M}}\left(\frac{z_0}{y_0}-e_\nu\right)^{-\rho_\nu}$$

et

$$(14) \qquad \frac{y_0}{y}=\frac{z_0}{z}=\prod_{h=1}^{\mathfrak{N}}\left(\frac{z}{y}-a_h\right)^{n_h}\prod_{\nu=1}^{\mathrm{M}}\left(\frac{z}{y}-e_\nu\right)^{\rho_\nu};$$

à un même choix de m et des $\mu_{\nu 0}$ [permettant de définir une solution des équations (3)] *correspond, par variation des* n_h *et des* ρ_ν *une classe de systèmes* (S) *birationnellement équivalents* [et l'on pourra appliquer le résultat au cas I, en remplaçant par l'unité les seconds produits de (13) et (14)].

Les entiers p_ν, m et $\mu_{\nu 0}$ une fois choisis, la détermination de R_0 dépend encore du choix des e_ν. Mais, moyennant une transformation homographique sur v, donc *moyennant une transformation linéaire sur y et z, on peut attribuer aux* e_ν *des valeurs numériques quelconques, sauf dans le cas* VIII où la transformation linéaire ne peut modifier le birapport $(e_1 e_2 e_3 \infty)$. La classe des systèmes (S) birationnellement équivalents qui se trouve ainsi définie, ne dépend donc que du choix des p_ν, de m et des $\mu_{\nu 0}$, sauf dans le cas VIII, où elle dépend, en outre, du choix du birapport $(e_1 e_2 e_3 \infty)$.

D'après (11) et (12), y et $z(=vy)$ sont des fonctions algébriques de v; *chaque système différentiel* (S) *possède donc une intégrale première* $\mathfrak{A}(y, z)=$ Cte, *algébrique et indépendante de* x (et une seule). Cette intégrale définit dans le plan (y, z) une famille de courbes intégrales algébriques $\mathcal{C}$; les courbes relatives à une même classe de systèmes (S) sont birationnellement équivalentes. Il résulte de (11) et (12) et de la remarque faite au n° 4 sur les fonctions $w(x)$ que *les solutions* $y(x)$, $z(x)$ *des systèmes* (S) *sont du type rationnel, exponentiel ou elliptique*. Les courbes $\mathcal{C}$ sont donc de genre 0 (cas I-IV) ou $\leqq 1$ (cas V-VIII); nous verrons d'ailleurs que dans ces derniers cas, le genre est effectivement égal à 1.

6. Nous allons former maintenant, dans chaque cas, des représentants des classes correspondantes. Commençons par les cas I, II et III. Les cas I et III peuvent être envisagés comme un cas particulier $(p=1)$ et comme cas limite $(p=\infty)$ du cas II que nous examinerons d'abord.

Pour $f(v)=\dfrac{1-\frac{1}{p}}{v}$ et $\mathfrak{N}=0$, on a, d'après (5; 1), (5; 5), et en faisant $e_1=0$,

$$\mathrm{R}=v^k, \quad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}=-\frac{\mu}{pv}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{P}=-\frac{\mu}{p}v^{k-1}, \quad \mathrm{Q}=\left(1-\frac{\mu}{p}\right)v^k,$$

avec

$$kp - p + 1 = \mu(m - 1).$$

Posons

$$k = s + 1, \qquad m = r + s + 1,$$

d'où

$$(1) \qquad \mu r + (\mu - p)s = 1$$

ou

$$\frac{\mu}{\mu - p} = \frac{1 + ps}{1 - pr}.$$

Changeant x en $-p(m-1)x$, on pourra écrire (S) sous la forme

$$(\mathrm{S_{II}}) \qquad \begin{cases} y' = (1 + ps)\, y^{r+1} z^s, \\ z' = (1 - pr)\, y^r z^{s+1}. \end{cases}$$

Pour former un tel système, on choisira r et s premiers entre eux, puis μ et $\mu - p$ — donc p — à l'aide de (1) ([3]).

La transformation de Cremona

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{Y} = y^{p-\mu} z^{\mu}, & y = \mathrm{Y}^{-s} \mathrm{Z}^{-\mu}, \\ \mathrm{Z} = y^{-r} z^{-s}, & z = \mathrm{Y}^{r} \mathrm{Z}^{p-\mu}; \end{cases}$$

et le changement de $(m-1)x$ en x changent $(\mathrm{S_{II}})$ en

$$(\mathrm{S_{II}^0}) \qquad \begin{cases} \mathrm{Y}' = 0, \\ \mathrm{Z}' = -1 \end{cases}$$

et montrent que *les systèmes* $(\mathrm{S_{II}})$ *ne forment qu'une seule classe*; de plus, elle donne aussitôt l'intégrale générale de $(\mathrm{S_{II}})$.

Dans le cas I, avec $\mathfrak{N} = 0$, on a $\mathrm{R} = \mathrm{Cte}$, soit $\mathrm{R} = 1$ ou $\mathrm{R} = 0$ (par changement de x en λx). Le premier cas conduit à un cas particulier de $(\mathrm{S_{II}})$, avec $p = 1$, $k = 0$, $s = -1$, $\mu = 0$, r quelconque

$$(\mathrm{S_I^1}) \qquad \begin{cases} y' = 0, \\ z' = y^m. \end{cases}$$

Le deuxième cas donne $\mathrm{Q} = v\mathrm{P}$, d'où le système $(\mathrm{S_I^2})$ déjà rencontré au n°4. Or, la transformation de Cremona [$f(y, z)$, fonction rationnelle homogène d'ordre m]

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Y} &= \frac{z}{y}, & y^{m-1} &= \frac{1}{\mathrm{Z} f(1, \mathrm{Y})} \\ \mathrm{Z} &= \frac{1}{f(y, z)}, & z^{m-1} &= \frac{\mathrm{Y}^{m-1}}{\mathrm{Z} f(1, \mathrm{Y})} \end{aligned}\right\} \quad (m = 0 \text{ ou } 2)$$

et le remplacement de $(m-1)x$ par x changent $(\mathrm{S_I^2})$ en $(\mathrm{S_{II}^0})$. *Les cas rationnels* (cas I et II) *introduisent donc une seule classe de systèmes* (S).

([3]) On peut encore écrire $(\mathrm{S_{II}})$ sous la forme

$$y' = \alpha y^{r+1} z^s, \qquad z' = \beta y^r z^{s+1}, \qquad \text{avec} \quad \alpha r + \beta s = 1 \ (\alpha, \beta, \text{ entiers}).$$

Dans le cas III, en prenant $\mathfrak{N}=0$, $R=v^k$ et en remplaçant x par $(1-m)\,x$, on trouve, avec $k=s+1$, $m-k=r$,

$$(S_{III})\qquad \begin{cases} y'= & sy^{r+1}z^s, \\ z'= & -ry^r z^{s+1}. \end{cases}$$

Ce système est un cas limite de (S_{II}) : on l'obtient en remplaçant dans (S_{II}) x par $x:p$ et en faisant tendre p vers ∞. La condition (1) n'a plus de raison d'être.

Les systèmes (S_{III}) *appartiennent à une infinité de classes distinctes.* Car soit δ le p. g. c. d. de r et s; posons $r=r'\delta$, $s=s'\delta$ et soit (λ, ρ) une solution entière de l'équation

$$\lambda r'+\rho s'=1.$$

Si l'on fait la transformation de Cremona

$$Y=y^{r'}z^{s'}, \qquad y=Y^\lambda Z^{-s'};$$
$$Z=y^{-\rho}z^\lambda, \qquad z=Y^\rho Z^{r'},$$

on obtient le système

$$(S_{III}^0)\qquad \begin{cases} Y'=0, \\ Z'=-\delta Y^\delta Z. \end{cases}$$

L'intégration de (S_{III}) en résulte aussitôt.

Montrons que les classes correspondant à deux valeurs différentes δ_1 et δ_2 de δ sont distinctes (δ_1 et $\delta_2>0$). Supposons, en effet, que (Y_1, Z_1), relatif à δ_1, puisse se déduire de (Y_2, Z_2), relatif à δ_2, par une transformation de Cremona. On aura nécessairement

$$Y_1=f(Y_2), \qquad Z_1=g(Y_2, Z_2),$$

f étant une fonction homographique de Y_2 et g étant homographique en Z_2. L'identification des valeurs de Z'_1 montre d'abord que

$$g(Y_2, Z_2)=\alpha(Y_2)\,Z_2^\varepsilon \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

puis, que $\delta_1=\varepsilon'\delta_2$, avec $f(Y_2)=a\,Y_2^{\varepsilon'}$ $(\varepsilon'=\pm 1)$; mais δ_1 et δ_2 étant >0, on a

$$\varepsilon'=1, \qquad \text{d'où} \qquad \delta_1=\delta_2.$$

7. Examinons maintenant les cas IV-VIII. Comme on l'a vu au n° 5, il suffira de donner à $\mu_{\nu 0}$ les valeurs 1 ou $p_\nu-1$ (qui sont bien de même parité dans le cas VI). Dans le cas V on exclura le choix $\mu_{10}=1$, $\mu_{20}=2$, qui entraînerait, d'après (5; 3), les relations

$$3\,k_1-2=m-1, \qquad 3\,k_2-2=2(m-1)$$

sans solution entière en k_1, k_2, m. De même, dans le cas VI, on exclura le choix $\mu_{10}=1$, $\mu_{20}=3$. On formera ainsi, dans les cas IV-VII le tableau suivant (où q est un entier quelconque) :

S.	μ_1.	μ_2.	R.	m.
S_{IV}	1	1	$(1-v^2)^{q+1}$	$2q+2$
S_V^1	1	1	$3(1-v^2)^{q+1}$	$3q+2$
S_V^2	2	2	$3(1-v^2)^{2q}$	$3q$
S_{VI}^1	1	1	$2(1-v^2)^{q+1}$	$4q+2$
S_{VI}^2	3	3	$2(1-v^2)^{3q}$	$4q$
S_{VII}^1	1	1	$6v^{1+3q}(1-v)^{1+2q}$	$6q+2$
S_{VII}^2	1	2	$6v^{3q}(1-v)^{4q}$	$6q$

(Les facteurs numériques figurant dans les expressions de R ont été introduits pour simplifier l'écriture des systèmes S.) Dans le cas VIII on trouvera de même, en prenant

	μ_1.	μ_2.	μ_3.	R.	m.
S_{VIII}	1	1	1	$(4v^3-g_2v-g_3)^q$	$2q$;

on a posé d'ailleurs

$$4(v-e_1)(v-e_2)(v-e_3)=4v^3-g_2v-g_3.$$

Les formules (5; 5) — ou (5; 4) — permettront ensuite de former P, $Q=vP+R$ et, par suite, les systèmes S correspondants. On les trouvera dans le tableau suivant, ainsi que la construction de leurs solutions et l'équation de leurs courbes intégrales $\mathcal{C}$. Les intégrales premières qui définissent les courbes $\mathcal{C}$ sont d'une vérification aisée; elles fourniraient un second procédé pour l'intégration des systèmes S.

	Intégration.
$S_I^1\ \begin{cases} y'=0 \\ z'=y^m \end{cases}$	$\begin{cases} \text{(Cas particulier de } S_{II}: \\ \quad r=m,\ s=-1,\ p=1,\ \mu=0.) \\ \quad\quad \mathcal{C}:\ y=C \end{cases}$
$S_I^2\ \begin{cases} y'=yf(y,z) \\ z'=zf(y,z) \end{cases}$ $\left[\begin{array}{c} f,\ \text{homogène} \\ \text{d'ordre } -\varepsilon(\varepsilon=\pm 1) \end{array}\right]$	$\begin{cases} u'=1, \quad y=\varepsilon u^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(1,C), \quad z=\varepsilon C u^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(1,C) \\ u=\dfrac{\varepsilon}{f(y,z)} \\ \quad\quad \mathcal{C}:\ \dfrac{z}{y}=C \end{cases}$
$S_{II}\ \begin{cases} y'=(1+ps)y^{r+1}z^s \\ z'=(1-pr)y^r z^{s+1} \end{cases}$ $[\mu r+(\mu-p)s=1]$	$\begin{cases} u'=-(r+s)C^{r+s}, \quad y=\dfrac{C}{u^{\mu}}, \quad z=Cu^{p-\mu} \\ u=C^{r+s}y^{-r}z^{-s} \\ \quad\quad \mathcal{C}:\ y^{p-\mu}z^{\mu}=C^p \end{cases}$
$S_{III}\ \begin{cases} y'=\quad sy^{r+1}z^s \\ z'=-ry^r z^{s+1} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{c} r=r'\delta,\ s=s'\delta \\ \delta=\text{p. g. c. d. de } r \text{ et } s;\ \lambda r'+\rho s'=1 \end{array}\right]$	$\begin{cases} \quad u'=-\delta C^{r+s}u \\ y=Cu^{-s'}, \quad z=\quad Cu^{r'} \\ u=C^{\rho-\lambda}y^{-\rho}z^{\lambda}, \quad u'=-\delta C^{r+s+\rho-\lambda}y^{-\rho}z^{\lambda} \\ \quad \mathcal{C}:\ y^{r'}z^{s'}=C^{r'+s'} \end{cases}$

$$S_{IV}\ \begin{cases} y' = yz(y^2 - z^2)^q \\ z' = y^2(y^2 - z^2)^q \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u' = -C^{2q+1}(u^2+1) \\ y = C\dfrac{1+u^2}{2u}, \quad z = C\dfrac{1-u^2}{2u} \\ u = \dfrac{y-z}{C}, \quad u' = -C^{2q+1}\dfrac{y}{y+z} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad y^2 - z^2 = C^2$$

$$S_V^1\ \begin{cases} y' = 2zy^{q+1}(y^2 - z^2)^q \\ z' = (3y^2 - z^2)y^q(y^2 - z^2)^q \end{cases} \qquad \begin{cases} u'^2 = 4(1 - C^{3q+1}u^3) \\ y = \dfrac{1}{C^q u}, \quad z = -\dfrac{u'}{2C^q u} \\ u = \dfrac{1}{C^q y}, \quad u' = -\dfrac{2z}{y} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad y(y^2 - z^2) = C$$

$$S_V^2\ \begin{cases} y' = 4y^{1-q}z(y^2 - z^2)^{2q-1} \\ z' = (3y^2 + z^2)y^{-q}(y^2 - z^2)^{2q-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'^2 = 4(1 - C^{3q-1}u^3) \\ y = \dfrac{C^{1-2q}}{u^2}, \quad z = -\dfrac{C^{1-2q}u'}{2u^2} \\ u = \dfrac{C^{1-q}}{y^2 - z^2}, \quad u' = -\dfrac{2z}{y} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad \frac{(y^2 - z^2)^2}{y} = C$$

$$S_{VI}^1\ \begin{cases} y' = zy^{2q+1}(y^2 - z^2)^q \\ z' = (2y^2 - z^2)y^{2q}(y^2 - z^2)^q \end{cases} \qquad \begin{cases} u'^2 = 2C^{4q+1}u(u^2+1) \\ y = \dfrac{u'}{2C^{2q}u}, \quad z = \dfrac{C^{2q+1}(u^2-1)}{u'} \\ u = \dfrac{C}{y(y-z)}, \quad u' = \dfrac{2C^{2q+1}}{y-z} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad y^2(y^2 - z^2) = C^2$$

$$S_{VI}^2\ \begin{cases} y' = 3zy^{1-2q}(y^2 - z^2)^{3q-1} \\ z' = (2y^2 + z^2)y^{-2q}(y^2 - z^2)^{3q-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'^2 = -2C^{4q-1}u(u^2+1) \\ y = \dfrac{u'(u^2+1)}{4C^{2q-1}u^2}, \quad z = \dfrac{u'(1-u^2)}{4C^{2q-1}u^2} \\ u = -\dfrac{(y-z)^2(y+z)}{Cy}, \quad u' = 2C^{2q-1}(y-z) \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad \frac{(y^2 - z^2)^3}{y^2} = C^2$$

$$S_{VII}^1\ \begin{cases} y' = (-3y + 5z)y^{q+1}z^{3q}(y-z)^{2q} \\ z' = (3y - z)y^q z^{3q+1}(y-z)^{2q} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'^2 = 4C^{6q+1}(1 - u^3) \\ y = -\dfrac{2C^{3q+1}}{uu'}, \quad z = \dfrac{-u'}{2C^{3q}u} \\ u = \dfrac{z(y-z)}{C}, \quad u' = -2C^{3q-1}z^2(y-z) \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad yz^3(y-z)^2 = C^3$$

$$S_{VII}^2\ \begin{cases} y' = (-3y + 7z)y^{1-q}z^{3q-1}(y-z)^{4q-1} \\ z' = (3y + z)y^{-q}z^{3q}(y-z)^{4q-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'^2 = 4C^{6q-1}(1 + u^3) \\ y = \dfrac{2C^{3q}}{u^2u'}, \quad z = \dfrac{u'}{2C^{3q-1}u^2} \\ u = -\dfrac{C}{z(y-z)}, \quad u' = \dfrac{2C^{3q+1}}{z(y-z)^2} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}:\quad \frac{(y-z)^4 z^3}{y} = C^3$$

$$S_{VII}\ \begin{cases} y' = -\left(6z^2 - \dfrac{g_2}{2}y^2\right)y^{1-q}(4z^3 - g_2y^2z - g_3y^3)^{q-1} \\ z' = -\left(2z^3 - \dfrac{g_2}{2}y^2z - g_3y^3\right)y^{-q}(4z^3 - g_2y^2z - g_3y^3)^{q-1} \end{cases}$$

$$v'^2 = C^{2q-1}(4v^3 - g_2v - g_3)$$

$$y = \frac{C^q}{v'}, \qquad z = \frac{C^q v}{v'}, \qquad v = \frac{z}{y}, \qquad v' = \frac{C^q}{y}$$

$$\mathcal{C}:\quad \frac{4z^3 - g_2y^2z - g_3y^3}{y} = C$$

Dans les cas V-VIII, on observera que les courbes $\mathcal{C}$, étant des transformées birationnelles de courbes $\varphi(u, u') = 0$ ou $\varphi(v, v') = 0$ de genre 1, sont elles-mêmes de genre 1, comme nous l'avions annoncé.

8. Nous avons vu que les systèmes S_{I} et S_{II} appartiennent tous à une même classe, et que les systèmes S_{III} appartiennent à une infinité de classes différentes. Nous allons rechercher, de même, si deux systèmes S, correspondant à une même équation de Briot et Bouquet peuvent appartenir à une même classe.

Envisageons d'abord les systèmes S_{IV}. Désignons par (y_j, z_j) les solutions : par q_j, u_j, u'_j, $C_j (j = 1, 2)$ les symboles relatifs à deux systèmes S_{IV} se correspondant birationnellement. Le symbole $\leftrightarrow$ désignant une correspondance birationnelle, on a

$$u_1 \leftrightarrow (y_1, z_1) \leftrightarrow (y_2, z_2) \leftrightarrow u_2.$$

Ainsi, u_2 est une fonction homographique de u_1 :

$$u_2 = \frac{\alpha u_1 + \beta}{\gamma u_1 + \delta},$$

d'où

$$2 \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma u_1 + \delta)^2} u'_1 = 2 u'_2 = - C_2^{2q_2+1} \frac{(\alpha u_1 + \beta)^2 + (\gamma u_1 + \delta)^2}{(\gamma u_1 + \delta)^2};$$

mais on a

$$2 u'_1 = - C_1^{2q_1+1} (u_1^2 + 1),$$

d'où l'identité en u_1

$$C_1^{2q_1+1} (\alpha\delta - \beta\gamma)(u_1^2 + 1) = C_2^{2q_2+1} [(\alpha u_1 + \beta)^2 + (\gamma u_1 + \delta)^2],$$

qui entraîne

$$\delta = \varepsilon\alpha, \qquad \gamma = -\varepsilon\beta \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et

$$(1) \qquad C_1^{2q_1+1} = (\varepsilon C_2)^{2q_2+1}.$$

Mais les courbes $y_1^2 - z_1^2 = C_1^2$ sont nécessairement les transformées birationnelles des courbes $y_2^2 - z_2^2 = C_2^2$; C_1^2 et C_2^2 sont donc liés algébriquement; et comme la correspondance entre deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ résulte d'une transformation de Cremona entre les plans (y_1, z_1) et (y_2, z_2), elle est biunivoque, de sorte que C_2^2 est une fonction homographique de C_1^2, et d'après (1) on peut écrire

$$\varepsilon C_2 = \lambda C_1^{\eta} \qquad (\eta = \pm 1);$$

le choix $\eta = +1$ donne $q_2 = q_1$; pour $\eta = -1$, on a

$$(2) \qquad q_1 + q_2 + 1 = 0, \qquad \lambda^{2q_2+1} = 1.$$

d'où

$$\frac{C_2}{y_2} = \frac{2 u_2}{1 + u_2^2} = \frac{2\varepsilon(\alpha u_1 + \beta)(-\beta u_1 + \alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)(u_1^2 + 1)}$$
$$= \varepsilon \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{C_1}{y_1} + \frac{2\varepsilon\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{z_1}{y_1},$$

et

$$\frac{C_2^2}{\lambda y_2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{y_1} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{C_1} \frac{z_1}{y_1}.$$

Or C_2^2 est rationnel en (y_1, z_1) tandis que C_1 ne l'est pas. Pour que y_2 soit rationnel en (y_1, z_1) il faut donc que $\alpha\beta = 0$. En négligeant devant y_2 une racine $(2q_2+1)^{\text{ième}}$ ou $(m_2-1)^{\text{ième}}$ de l'unité (*cf.* n° 5) on trouve pour $\beta = 0$ la transformation de Cremona :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{y_1^2 - z_1^2} = \frac{y_2^2 - z_2^2}{1} \tag{3}$$

qui, effectivement, échange les systèmes S_{IV} correspondant aux valeurs q_1 et q_2 de l'entier q liées par (2) [4].

9. Considérons maintenant les systèmes à intégrales elliptiques, et d'abord les systèmes S_V^1. Les notations ayant la même signification qu'au n° 8, nous observerons encore que la transformation de Cremona entre les plans (y_1, z_1) et (y_2, z_2) transforme birationnellement une courbe intégrale $\mathcal{C}_1$ du premier système en une courbe intégrale $\mathcal{C}_2$ du second système; or $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont elles-mêmes des transformées birationnelles des courbes Γ_j, d'équations

$$u_j'^2 = 4(1 - C_j^{3q_j+1} u_j^3) \qquad (j = 1, 2);$$

on peut donc écrire

$$(u_1, u_1') \leftrightarrow (y_1, z_1) \leftrightarrow (y_2, z_2) \leftrightarrow (u_2, u_2').$$

Or on a sur les courbes Γ_j

$$\frac{du_1}{u_1'} = dx = \frac{du_2}{u_2'},$$

et en posant

$$C_1^{q_1+\frac{1}{3}} u_1 = C_2^{q_2+\frac{1}{3}} u_3,$$
$$u_1' = u_3',$$

on définit une transformation birationnelle particulière entre Γ_1 et Γ_2; elle entraîne

$$\frac{du_1}{u_1'} = \frac{C_2^{q_2+\frac{1}{3}}}{C_1^{q_1+\frac{1}{3}}} \frac{du_3}{u_3'}$$

et l'on obtiendra la transformation birationnelle la plus générale entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (abstraction faite de la multiplication de u_2 par une racine cubique de l'unité)

---

[4] La même méthode permettrait de rechercher si un système S_{III} et un système S_{IV} peuvent se déduire l'un de l'autre par une transformation de Cremona; le résultat est négatif : on trouve une transformation algébrique qui n'est rationnelle que dans un sens.

en multipliant la transformation précédente par une transformation $x_3 = x_2 + c$ (c, constante) qui change $\frac{du_3}{u'_3}$ en $\frac{du_2}{u'_2}$. On doit donc avoir

$$C_2^{3q_2+1} = C_1^{3q_1+1}.$$

Mais on voit, comme au n° 8, que C_2 doit être une fonction homographique de C_1; ainsi $C_2 = C_1$ ou C_1^{-1}, ce qui entraîne $q_2 = q_1$ ou

$$3q_1 + 1 + 3q_2 + 1 = 0,$$

relation qui n'admet aucune solution entière. *Deux systèmes* S_V^1 *correspondant à deux valeurs différentes de* q *ne peuvent donc appartenir à une même classe*; et un raisonnement identique montrerait *qu'il en est de même pour les systèmes* S_V^2, S_{VI}^j, S_{VII}^j ($j = 1$ ou 2).

Par contre, *deux systèmes* S_V^1 *et* S_V^2 *convenablement choisis appartiennent à une même classe*. En effet, les indices 1 et 2 se rapportant respectivement aux symboles relatifs à S_V^1 et à S_V^2, le raisonnement de tout à l'heure montre qu'on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = C_1^{\varepsilon} \\ C_2^{3q_2-1} = C_1^{3q_1+1} \end{array}\right\} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'où

$$3q_2 - 1 = \varepsilon(3q_1 + 1),$$

ce qui est possible avec $\varepsilon = -1$; ainsi $q_2 = -q_1$ et la transformation birationnelle entre Γ_1 et Γ_2 s'effectuera par les relations $u_2 = u_1$, $u'_2 = u'_1$ (en laissant de côté les multiplicateurs racines de l'unité). Or ceci entraîne

$$y_2 = \frac{C_2^{1-2q_2}}{u_2^2} = \frac{C_1^{-1-2q_1}}{u_1^2} = C_1^{-1} y_1^2 = \frac{y_1}{y_1^2 - z_1^2},$$

$$z_2 = -\frac{C_2^{1-2q_2} u'_2}{2u_2^2} = C_1^{-1} y_1^2 \frac{z_1}{y_1} = \frac{z_1}{y_1^2 - z_1^2}.$$

On retrouve ainsi entre les systèmes S_V^1 et S_V^2 correspondant aux valeurs q_1 et $q_2 = -q_1$ de l'entier q, la transformation (8; 3).

Le même résultat s'applique aux systèmes S_{VI}^1 et S_{VI}^2. En ce qui concerne les systèmes S_{VII}^1 et S_{VII}^2, on trouve que la transformation de Cremona

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{z_1(y_1 - z_1)} = \frac{z_2(y_2 - z_2)}{1}$$

échange les systèmes précédents correspondant aux valeurs q_1 et $q_2 = -q_1$ de l'entier q.

Enfin, la transformation de Cremona

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{y_1}{4z_1^3 - g_2 z_1 y_1^2 - g_3 y_1^3} = \frac{4z_2^3 - g_2 z_2 y_2^2 - g_3 y_2^3}{y_2}$$

échange les systèmes S_{VIII} correspondant aux valeurs q_1 et $q_2 = 1 - q_1$ de l'entier q.

10. En vue des applications au problème de Goursat (n° 1), il y a intérêt à déterminer les *systèmes* S *polynomaux*, c'est-à-dire ceux où $P(y, z)$ et $Q(y, z)$ sont des polynomes homogènes en y et z, de degré m. P, Q et R sont alors des polynomes en v. Nous nous placerons toujours dans l'hypothèse H du n° 4.

Tout d'abord k_ν (nécessairement $\geqq 0$) *ne saurait être nul* : sinon, le premier membre de (5; 4) serait holomorphe pour $v = e_\nu$, et l'on aurait $p_\nu = 1$. Il en résulte $p_\nu(k_\nu - 1) \geqq 0$, d'où, d'après (5; 3), $\mu_\nu > 0$; ainsi μ_ν *est au moins égal à* 1.

Désignons maintenant par $(\mathfrak{T})$ le degré d'un polynome $\mathfrak{T}(v)$; *a priori* $(R) \leqq m + 1$; nous allons voir que *cette inégalité doit être remplacée par*

$$(R) \leqq m. \tag{1}$$

En effet, supposons $(R) = m + 1$; d'après (5; 2) nous aurions, en posant

$$\sum_{h=1}^{\mathfrak{N}} n_h = N,$$

la relation

$$N(m-1) + \sum_{\nu=1}^{M} k_\nu = m + 1. \tag{2}$$

Écrivons maintenant que $(Q) \leqq m$. Dans les cas II, et IV-VIII, ceci donne, d'après (5; 5)

$$N + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{\mu_\nu}{p_\nu} = 1\,; \tag{3}$$

or, d'après (5; 3), (2) peut s'écrire

$$N(m-1) + \sum_{\nu=1}^{M}\left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) + (m-1)\sum_{\nu=1}^{M} \frac{\mu_\nu}{p_\nu} = m + 1,$$

d'où, d'après (3),

$$\sum_{\nu=1}^{M}\left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) = 2,$$

ce qui est impossible (fin du n° 4).

Dans le cas I, (5; 4) et $(Q) \leqq m$ entraînent $N = 1$, ce qui est exclu par (2) (où Σk_ν doit être remplacé par 0).

Enfin, dans le cas III, où (5; 3) disparaît, (5; 4) et $(Q) \leqq m$ entraînent

$$N(m-1) + k_1 - 1 = m - 1,$$

ce qui est encore incompatible avec (2).

Or l'inégalité (1), ainsi établie, donne, dans le cas I,

$$(m-1)N \leqq m,$$

d'où, pour $m = 2$: $N = 0$, 1 ou 2, et pour $m \geqq 3$: $N = 0$ ou 1.

Dans les cas II et III on aura

$$(m-1)\,\mathrm{N} + k_1 \leqq m,$$

et, comme $k_1 \geqq 1$,

$$(m-1)(\mathrm{N}-1) \leqq 0,$$

soit $\mathrm{N}=0$ ou 1. Enfin dans les cas IV-VIII, on a nécessairement

$$(m-1)\,\mathrm{N} + k_1 + k_2 \leqq m, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N}=0.$$

Nous allons examiner successivement ces différents cas.

11. Dans le cas I, l'hypothèse $m=2$, $\mathrm{N}=2$ entraîne, moyennant une transformation linéaire sur y et z,

$$\mathrm{R} = 1 - v^2 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R} = -v^2.$$

Le premier choix donne le système

$$(s_{\mathrm{I}}^1) \qquad \begin{cases} y' = 2yz, \\ z' = y^2 + z^2. \end{cases}$$

On fera la transformation de Cremona $(5\,;\,13)$, soit actuellement

$$\frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \frac{y_0^2}{y_0^2 - z_0^2} = \frac{y^2}{y^2 - z^2}$$

qui ramènera à un système $\mathrm{S}_{\mathrm{I}}^1$ (n° 6) et, finalement, la transformation de Cremona

$$y = \frac{\mathrm{Y}}{1 - \mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{y^2 - z^2}{y},$$
$$z = -\frac{\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}}{1 - \mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2}, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{z}{y^2 - z^2},$$

change (s_{I}^1) en $(\mathrm{S}_{\mathrm{II}}^0)$ (n° 6).

Le choix $\mathrm{R} = v^2$ conduit au système

$$(s_{\mathrm{I}}^2) \qquad \begin{cases} y' = 2yz, \\ z' = z^2, \end{cases}$$

cas particulier de $(\mathrm{S}_{\mathrm{II}})$ $(r=0,\ s=1,\ p=1,\ \mu=2)$. — Une transformation $(6\,;\,2)$ le change en $(\mathrm{S}_{\mathrm{II}}^0)$.

L'hypothèse $\mathrm{N}=1$ donne $\mathrm{R} = -v^{m-1}$, moyennant une transformation linéaire sur y et z, et l'on a le système

$$(s_{\mathrm{I}}^3) \qquad \begin{cases} y' = y^2 z^{m-2}, \\ z' = 0, \end{cases}$$

cas particulier de $(\mathrm{S}_{\mathrm{II}})$ $(r=1,\ s=m-2,\ p=1,\ \mu=1)$. — Enfin, l'hypothèse $\mathrm{N}=0$ a été envisagée au n° 6 ; rappelons qu'on trouve les systèmes $\mathrm{S}_{\mathrm{I}}^1$ (où, actuellement $m=2$) et $\mathrm{S}_{\mathrm{I}}^2$, où actuellement, $f(y, z)$ est un polynome homogène de degré 1 et, moyennant une transformation linéaire sur y et z,

S_I^2 peut s'écrire sous la forme

$$(s_I^1)\qquad \begin{cases} y' = y^2, \\ z' = yz. \end{cases}$$

Dans le cas II, l'hypothèse $N = 1$ donne, moyennant une transformation linéaire sur y et z, $R = (v-1)^{m-1} v^k$, c'est-à-dire (n° 10)

$$R = (v-1)^{m-1} v,$$

et d'après (5 ; 3) $\mu(m-1) = 1$: ainsi $m = 2$ et $\mu = 1$. On obtient le système

$$(s_{II}^1)\qquad \begin{cases} y' = y^2 - (1+p)yz, \\ z' = (1-p)yz - z^2 \end{cases}$$

que la transformation de Cremona

$$(1)\qquad \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \frac{y_0}{y_0 - z_0} = \frac{y}{y-z}$$

change en un système $(S_{II})(r = 1, s = 0, \mu = 1)$. L'hypothèse $N = 0$ conduit d'ailleurs aux systèmes (S_{II}), avec $r \geqq 0$, $s \geqq 0$.

Dans le cas III, avec $N = 1$, $R = (v-1)^{m-1} v$, on trouvera le système

$$(s_{III}^1)\qquad \begin{cases} y' = yz(y-z)^q \\ z' = yz(y-z)^q \end{cases} \quad (m = q+2);$$

la transformation (1) le change en un système $(S_{III})(r = m-1, s = 0)$, où $(1-m)x$ aurait été remplacé par x. Intégration :

$$v' = C^{q+1} v, \qquad y = \frac{C}{1-v}, \qquad z = \frac{Cv}{1-v}, \qquad v = \frac{z}{y}, \qquad y - z = C.$$

L'hypothèse $N = 0$ ramène à (S_{III}) (avec $r \geqq 0$, $s \geqq 0$).

Examinons maintenant les cas IV-VIII. On a alors $N = 0$, et l'on tire ainsi de (10; 1) et (5 ; 3)

$$(m-1)\sum_{\nu=1}^{M} \frac{\mu_\nu}{p_\nu} + \sum_{\nu=1}^{M}\left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) \leqq m$$

ou

$$(2)\qquad (m-1)\left(\sum_{\nu=1}^{M} \frac{\mu_\nu}{p_\nu} - 1\right) \leqq 1 - M + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{p_\nu}.$$

Ceci exclut déjà le cas VIII où le second membre est < 0, tandis que

$$\sum_{\nu=1}^{M} \frac{\mu_\nu}{p_\nu} - 1 \geqq \frac{1}{2}.$$

Dans les cas IV-VII, (2) s'écrira d'après (5 ; 9)

$$(m-1)\left(\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\mu_{\nu 0}}{p_\nu} - 1 + \sum_{\nu=1}^{2}\rho_\nu\right) \leqq \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1, \tag{3}$$

relation où l'on peut prendre $\mu_{\nu 0}=1$ ou $p_\nu-1$ (n° 5) et où $\rho_\nu \geqq 0$, puisque $\mu_\nu \geqq 1$ (n° 10). Mais si ρ_1 ou $\rho_2 \geqq 1$, le premier membre de (3) est >0, le second étant $\leqq 0$. Les ρ_ν sont donc nuls. Dans les cas V, VI, VII, si l'on exclut $\mu_{10}=1=\mu_{20}$, on a

$$\frac{\mu_{10}}{p_1}+\frac{\mu_{20}}{p_2}\geqq 1,$$

tandis que le second membre de (3) est <0. Il faut donc prendre $\mu_1=1=\mu_2$, ce qui est d'ailleurs la seule hypothèse possible dans le cas IV.

Ainsi, il n'y a pas de systèmes polynomaux dans le cas VIII, et dans les cas IV-VII, les seuls systèmes polynomaux sont les systèmes S_{IV}, S_{V}^1, S_{VI}^1, S_{VII}^1, avec $q\geqq 0$. On voit que dans les formes obtenues le degré m n'est pas limité, sauf dans les cas I et II où l'on trouve des systèmes de degré 2 seulement.

12. Terminons en donnant un tableau de systèmes de forme simple auxquels peuvent se réduire pour $m=2$ les sytèmes polynomaux moyennant une transformation linéaire.

		Intégration.
σ_{I}	$\begin{cases} y'=0 \\ z'=y^2 \end{cases}$	*voir* n° 7 : S_{I}^1 et S_{II}
σ_{II}^1	$\begin{cases} y'=y^2 \\ z'=(1-p)yz \end{cases}$	
σ_{II}^2	$\begin{cases} y'=y^2 \\ z'=\dfrac{1-p^2}{4}y^2+z^2 \end{cases}$	$u'=-C, \quad y=\dfrac{C}{u}, \quad z=\dfrac{C}{u}\dfrac{\alpha u^p-\beta}{u^p-1}$ $\mathcal{C}: \; y^p\dfrac{z-\beta y}{z-\alpha y}=C^p$ $\left(\alpha=\dfrac{1+p}{2}, \quad \beta=\dfrac{1-p}{2}\right)$
σ_{III}^1	$\begin{cases} y'=0 \\ z'=yz \end{cases}$	*voir* n° 7 : S_{III}
σ_{III}^2	$\begin{cases} y'=yz \\ z'=yz \end{cases}$	*voir* n° 11 : s_{III}^1
σ_{IV}	$\begin{cases} y'=yz \\ z'=y^2 \end{cases}$	*voir* n° 17 : S_{IV}
σ_{V}	$\begin{cases} y'=z^2 \\ z'=y^2 \end{cases}$	$3u'^2=4Cu^3-1$ $y=\dfrac{u'+1}{2u}, \quad z=\dfrac{u'-1}{2u}$ $u=\dfrac{1}{y-z}, \quad u'=\dfrac{y+z}{y-z}$ $\mathcal{C}: \; y^3-z^3=C$

$$\sigma_{\mathrm{VI}} \begin{cases} y' = y^2 + 3z^2 \\ z' = 3y^2 + z^2 \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{c} u'^2 = 2(Cu^4 - 1) \\ y = \dfrac{u'+2}{4u}, \qquad z = \dfrac{u'-2}{4u} \\ u = \dfrac{1}{y-z}, \qquad u' = 2\dfrac{y+z}{y-z}. \\ \mathcal{C}: \quad (3y^2 + 2yz + 3z^2)(y-z)^2 = C \end{array} \right.$$

$$\sigma_{\mathrm{VII}} \begin{cases} y' = y(2z - y) \\ z' = z(y - z) \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{c} 3u'^2 = C(4u^3 + 3) \\ y = \dfrac{2Cu^2}{u'}, \qquad z = \dfrac{u'}{u} \\ u = \dfrac{yz}{2C}, \qquad u' = \dfrac{yz^2}{2C} \\ \mathcal{C}: \quad y^2 z^3 (3z - 2y) = 12C^3 \end{array} \right.$$

Désignons par (y, z) la solution d'un système du n° 11, par (η, ζ) la solution d'un système actuel σ; σ_{I} est un cas particulier de $S_{\mathrm{I}}(m=2)$. La transformation

$$\eta = z - y,$$
$$\zeta = z + y$$

change (s_{I}^1) en (σ_{II}^2) (où $p = 1$); (s_{I}^2), (s_{I}^3) et (s_{I}^4) $(m = 2)$ sont des cas particuliers de $(\sigma_{\mathrm{II}}^1)(p = -1,\ p = 1$ et $p = 0)$, qui, lui-même, est un cas particulier de $(S_{\mathrm{II}})(r = 1, s = 0)$. On a déjà observé (n° 11) que pour $N = 0$, $m = 2$, le système (S_{I}^2) peut s'écrire, moyennant une transformation linéaire immédiate,

$$y' = y^2,$$
$$z' = yz;$$

c'est un cas particulier de (σ_{II}^1) $(p = 0)$.

La transformation linéaire

$$\eta = y - z$$
$$\eta - 2\zeta = p(y + z)$$

change (s_{II}^1) en (σ_{II}^2).

Les systèmes σ_{III}^1, σ_{III}^2 sont des cas particuliers de $(S_{\mathrm{III}})(r = 1, s = 0)$ et de (s_{III}^1) $(q = 0)$; (σ_{IV}) est un cas particulier de $(S_{\mathrm{IV}})(q = 0)$. Le système (σ_{V}) se déduit du système (S_{V}^1), où $q = 0$, par la transformation

$$\eta = -iy\sqrt{3} - z,$$
$$\zeta = iy\sqrt{3} - z.$$

(σ_{VI}) se déduit de (S_{VI}^1), où $q = 0$, par

$$\eta = -\frac{iy}{2\sqrt{2}} - \frac{z}{4},$$
$$\zeta = \frac{iy}{2\sqrt{2}} - \frac{z}{4}.$$

Enfin (σ_{VII}) se déduit de (S^1_{VII}), où $q = 0$, par la transformation

$$\eta = 3(y - z),$$
$$\zeta = -2z.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. II, 7e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1949, p. 565.

[2] *Acta Math.*, t. **25**, 1902, p. 1.

[3] *Acta Math.*, t. **33**, 1910, p. 1.

[4] *C. R. Acad. Sc.*, t. **249**, p. 1982-1986.

[5] P. Painlevé, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **28**, 1900, p. 214.

[6] J. Chazy, *Acta Math.*, t. **34**, 1911, p. 358.

[7] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri Pisa, 1918, p. 34.