ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DANIEL PHAM

Sur les anneaux indexables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, nº 2 (1958), p. 81-105

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_2_81_0>

SUR

LES ANNEAUX INDEXABLES

Par M. Daniel PHAM.

Les anneaux considérés dans ce travail comprennent comme cas particulier les anneaux semi-simples. Aucune hypothèse *a priori* n'est faite quant aux conditions de chaîne descendante ou ascendante relatives aux idéaux unilatères.

Les propriétés obtenues, à partir d'hypothèses assez générales, relèvent des concepts élémentaires qu'on trouve exposés dans des traités comme ceux de Van der Waerden (*Modern Algebra*) et N. Jacobson (*The Theory of Rings et Structure of Rings*).

Ce travail est divisé en trois parties. Dans la première partie, j'exposerai la définition de l'indexabilité et je montrerai que certains anneaux élémentaires qu'on rencontre souvent en Algèbre rentrent dans cette catégorie. Dans la seconde partie, j'indiquerai comment, à partir d'un anneau indexable, il est possible d'en construire d'autres, plus simples ou plus généraux. Enfin, la dernière partie est consacrée à la décomposition d'un anneau indexable en composantes plus simples. La structure d'un tel anneau se révèle assez complexe et ne sera pas complètement éclaircie dans ce premier travail.

PREMIÈRE PARTIE.

1.1. Je considère une classe d'anneaux $\mathfrak{A}$ possédant une identité 1. Les applications $x \to \lambda x \mu$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ (λ, μ représentent deux unités dans $\mathfrak{A}$) forment visiblement un groupe $\mathfrak{G}$ de transformation. La classe de transitivité déterminée par l'élément $x \in \mathfrak{A}$ relative au groupe $\mathfrak{G}$ sera désignée par $\{x\}$.

Je suppose qu'il est possible de munir l'ensemble des classes $\{x\}$ d'une structure d'ordre total $\preceq$ vérifiant les deux axiomes suivants :

A1. $\{0\} \prec \{x\}$ si $x \neq 0$;

A2. $\{x.y\} \preceq \{x\}$, $\{x.y\} \preceq \{y\}$.

On voit immédiatement que si une telle structure d'ordre total existe, les deux relations

$$(\mathrm{R}) \qquad x = ayb, \qquad y = cxd \qquad (a, b, c, d \in \mathfrak{A})$$

exigent que x, y appartiennent à une même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$.

Cette condition est suffisante pour qu'on puisse munir d'une structure d'ordre total vérifiant les axiomes A 1, A 2 l'ensemble des classes $\{x\}$ dans le cas particulier où le nombre de ces classes est au plus dénombrable. En effet, deux élément $x, y \in \mathfrak{A}$ appartenant à deux classes de transitivité différentes, ou bien sont liés par une seule relation du type (R) et je dirai que les classes $\{x\}$ et $\{y\}$ sont comparables, ou bien ne sont liés par aucune relation du type (R) et je dirai que les classes $\{x\}$ et $\{y\}$ ne sont pas comparables. Si un élément $p \in \mathfrak{A}$ est premier (c'est-à-dire si p n'est pas le produit de deux éléments distincts des unités) on ne peut trouver aucun élément q d'une classe différente de p telle que $p = aqb$ $(a, b \in \mathfrak{A})$. Je dirai que la classe $\{p\}$ est une classe première. L'ensemble des classes premières est en nombre au plus dénombrable et ces classes ne sont pas comparables deux à deux.

Ceci posé, rangeons, avec $\{0\}$ les classes premières dans un ordre quelconque, $\{0\}$ étant le premier élément :

$$\{0\} \prec \{p_1\} \prec \{p_2\} \prec \ldots \prec \{p_n\} \prec \ldots.$$

Soit $\{x\}$ une classe donnée ; on ne peut avoir

$$p_i = axb \qquad (a, b \in \mathfrak{A}).$$

Donc on peut insérer $\{x\}$ dans la chaîne précédente en respectant les axiomes A 1 et A 2 : $\{x\}$ sera insérée avant toute $\{p_i\}$ telle que

$$(x = ap_ib \qquad (a, b \in \mathfrak{A}).$$

Supposant placées n classes $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$ conformément aux axiomes A 1 et A 2, je dis qu'il est possible de placer une classe donnée $\{x\}$ conformément aux mêmes axiomes. Il suffit pour cela, de montrer qu'il est possible d'insérer $\{x\}$ entre deux classes quelconques $\{x_i\} \prec \{x_j\}$ déjà placées tout en respectant les axiomes A 1 et A 2.

En effet, de deux choses l'une :

a. ou bien $\{x_i\}$ et $\{x\}$ sont comparables et l'on a soit

$$x = ax_ib (a, b \in \mathfrak{A}), \qquad \text{soit} \quad x_i = axb\,;$$

dans le premier cas on prendra

$$\{x\} \prec \{x_i\} \prec \{x_j\}$$

et comme on ne peut avoir $x_j = cxd (c, d \in \mathfrak{A})$ car alors $x_j = cax_ibd$, ce qui serait en contradiction avec $\{x_i\} \prec \{x_j\}$, les axiomes A 1 et A2 sont bien respectés quant aux classes $\{0\}$, $\{x\}$, $\{x_i\}$, $\{x_j\}$; dans le second cas, on prendra $\{x_i\} \prec \{x\}$ quitte à placer $\{x\}$ par rapport à $\{x_j\}$;

b. ou bien $\{x_i\}$ et $\{x\}$ ne sont pas comparables et comme précédemment on peut placer $\{x\}$ par rapport à $\{x_j\}$ conformément aux axiomes A 1 et A 2.

Comme le nombre total de classes de transitivité $\{x\}$ est dénombrable, on peut ainsi placer toute classe donnée et l'on obtiendra une structure d'ordre satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2.

On remarquera que dès qu'il existe deux classes non comparables, la structure d'ordre total respectant A 1 et A 2, quand elle existe, n'est pas unique.

En effet, soit $\{x\} \prec \{y\}$ dans une structure, $\{x\}$, $\{y\}$ n'étant pas comparables. Je dis qu'il est possible de déterminer une seconde structure analogue dans laquelle $\{y\} \prec \{x\}$. Il suffit de conserver, dans la détermination de cette seconde structure la place relative par rapport à $\{x\}$ et à $\{y\}$ de toute classe placée avant $\{x\}$ et $\{y\}$ ou après $\{x\}$ et $\{y\}$ dans la première structure. Quant à une classe $\{z\}$ intermédiaire entre $\{x\}$ et $\{y\}$ dans la première structure, elle ne peut être comparable à la fois à $\{x\}$ et à $\{y\}$. Par exemple si $\{z\}$ est comparable à $\{x\}$, on prendra, dans la seconde structure

$$\{y\} \prec \{x\} \prec \{z\}$$

une classe intermédiaire entre $\{z\}$ et $\{y\}$ dans la première structure sera placée comme on a placé $\{z\}$ par rapport à $\{x\}$ et $\{y\}$ car $\{y\}$ et $\{z\}$ ne sont par comparables.

Ainsi, pour l'anneau N des entiers, le nombre de classes de transitivité relatives au groupe $\mathfrak{G}$ (qui se compose ici de la transformation identique et de la multiplication par -1) est dénombrable, chaque classe comprend un entier a et son opposé $-a$. Les classes premières sont fournies par les nombres premiers et l'on peut munir N d'une infinité de structures d'ordre satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2. Dans l'une quelconque de ces structures, entre $\{0\}$ et $\{x\}$ il y a une infinité de classes, par exemple

$$\{2x\}, \quad 2^2x\}, \quad \ldots, \quad \{2^n x\}, \quad \ldots.$$

1.2. Définition. — Pour éviter une trop grande généralité, je considère seulement les anneaux $\mathfrak{A}$ tels que les classes de transitivité $\{x\}$ sont passibles d'une structure d'ordre total vérifiant les axiomes A 1 et A 2 précédents et, en plus, l'axiome A 3 suivant :

A 3. Il y a un nombre fini de classes entre

$$\{0\} \quad \text{et} \quad \{x\} \neq \{1\}.$$

L'anneau N ne vérifie pas A 3.

Tout anneau vérifiant A 1, A 2 et A 3 sera dit indexable, l'ensemble des classes de transitivité $\{x\}$ est au plus dénombrable.

A une relation d'ordre vérifiant les conditions précédentes j'associe l'application $\{x\} \to \varphi(\{x\}) = \varphi(x) = n$ de l'ensemble des classes $\{x\}$ sur l'ensemble N^+ des entiers non négatifs (ou sur l'ensemble $0, 1, 2, \ldots, n$ si le nombre des classes $\{x\}$ est fini) muni de la structure d'ordre naturel; cette application constitue un isomorphisme de ces deux structures d'ordre et attache à chaque x de l'anneau un entier n tel $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) \leqq \text{Min}[\varphi(x), \varphi(y)]$, $\varphi(1) = \infty$ si le nombre des classes $\{x\}$ est infini. La fonction $\varphi(x)$ ainsi définie sera appelée fonction index (ou simplement index) des éléments de l'anneau $\mathfrak{A}$.

Un anneau indexable est dit à index fini si le nombre des classes $\{x\}$ est fini. Ce nombre, diminué d'une unité $[\text{soit} = \varphi(1)]$ sera appelé index de l'anneau.

1.3. Anneaux a index strict. — Si la structure d'ordre total vérifiant les axiomes A1, A2 et A3 est unique, l'anneau est dit à index strict ou strictement indexable. Dans un tel anneau, deux classes quelconques sont comparables.

Un anneau donné, ne comportant qu'un nombre fini de classes de transitivité est strictement indexable si et seulement si deux éléments x, y n'appartenant pas à une même classe vérifient l'une et l'une seulement de ces deux relations

$$(\text{R}) \qquad x = ayb, \qquad y = cxd \qquad (a, b, c, d \in \mathfrak{A}).$$

Dans le cas particulier où $\mathfrak{A}$ est commutatif et comporte un nombre fini de classes de transitivité, une condition nécessaire et suffisante d'indexabilité stricte est la suivante :

Étant donné deux idéaux principaux (x), (y), on a toujours l'une au moins des deux relations d'inclusion

$$(x) \subseteq (y), \qquad (y) \subseteq (x);$$

et si $(x) = (y)$, x et y appartiennent à une même classe de transitivité.

Si l'anneau commutatif $\mathfrak{A}$ comporte une infinité dénombrable de classes de transitivité, la condition précédente n'est plus suffisante pour l'indexabilité de $\mathfrak{A}$ comme le prouve l'exemple de l'anneau N; il faut ajouter, en plus, la condition minimale pour les idéaux. Ces deux conditions suffisent visiblement pour assurer l'indexabilité et l'indexabilité stricte de $\mathfrak{A}$.

1.4. Exemples. — A. *Anneau* C_m *des* $m \times m$ *matrices sur un corps gauche* C. — Chaque classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$ est composée de toutes les matrices de même rang. Il y a $m + 1$ de ces classes. Deux classes quelconques sont comparables :

Soient x_p, x_q deux matrices de C_m, de rang p et q respectivement $(p < q)$,

$$\{x_p\} = \{\text{diag}(p, 0\},$$

où $\operatorname{diag}(p, 0)$ désigne la matrice dont les p premiers éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 (identité de C), les autres éléments étant des zéros.

On a visiblement

$$\{\operatorname{diag}(p, 0)\} = \{\operatorname{diag}(p, 0).\operatorname{diag}(q, 0)\}$$

donc

$$\{x_p\} = \{x_p.\lambda x_q \mu\} \qquad (\lambda, \mu \text{ désignent deux unités de } C_m).$$

D'autre part, on sait qu'une relation de la forme

$$x_q = a x_p b \qquad (a, b \in C_m ; p < q)$$

n'est pas possible. Par suite C_m est indexable et à index strict. La fonction index ici est confondue avec le rang.

B. *L'anneau* $N/(p)$ *des classes résiduelles des entiers* mod p. — Le cas p premier est trivial, l'anneau considéré est un corps et est évidemment indexable. Supposons p non premier. Dans un tel anneau, les unités sont les classes $\bar{x} (\bmod p)$ où x est premier avec p.

Pour montrer que l'anneau $N/(p)$ est indexable, il suffit de montrer que l'égalité $(\bar{x}) = (\bar{y})$ entre deux idéaux principaux entraîne l'appartenance de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ à la même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$. Soient

$$x = ky + ap, \qquad y = hx + bp.$$

La première égalité montre que le plus grand commun diviseur de y et p soit $d = (y, p)$ divise x, la seconde que $\delta = (x, p)$ divise y, donc $d = \delta$.

Posons $x = x'd$, $y = y'd$, $p = p'd$, où

$$(x', p') = (y', p') = 1,$$

on a, en particulier

$$x' = ky' + ap' \qquad \text{et} \qquad (k, p') = 1,$$

sans quoi $(x', p') \neq 1$.

De là,

$$x = (k + tp')b' + (a - tb')p',$$
$$x \equiv \lambda p \qquad (\bmod p).$$

Il suffit de prouver qu'on peut déterminer t tel que $\lambda = k + tp'$ soit premier avec p. [D'où il résultera que $\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{y}$, $\bar{\lambda}$ étant une unité de $N/(p)$.]

Posons

$$D(t) = (k + tp', p'd) = (k + tp', d)$$

L'égalité résulte de ce que les diviseurs de p' ne peuvent diviser $k + tp'$.

Soient $(k, d) = u$; $d = d'vu$ où v désigne le produit des facteurs premiers de $d'v = \frac{d}{u}$ qui divisent u. Il est clair que

$$(d', v) = 1, \qquad (d', uv) = 1, \qquad (d', k) = 1.$$

Pour $t = d'$, on a

$$\mathrm{D}(d') = (k + d'p',\ d'vu).$$

Tout diviseur premier de $\mathrm{D}(d')$ divise soit vu soit d'. Mais un diviseur de vu divise k et ne divise pas $d'p'$; et un diviseur de d' divise $d'p'$ et ne divise pas k. Donc

$$\mathrm{D}(d') = 1.$$

Pour ce choix $t = d'$, λ est premier avec p.

Il est facile de chercher la condition pour que l'anneau $\mathrm{N}/(p)$ soit strictement indexable : il faut et il suffit pour cela que deux classes $\{\bar{x}\}$, $\{\bar{y}\}$ soient toujours comparables.

a. Si $p = a^n$ où a est un nombre premier, deux éléments x et y non premiers avec p, sont de la forme

$$x = \mathrm{A}a^k, \qquad y = \mathrm{B}a^h \qquad (h < k).$$

A et B étant premiers avec a, donc avec p. On a visiblement

$$\mathrm{B}x = \mathrm{AB}a^k = \mathrm{A}(\mathrm{B}a^h)a^{k-h} = uy,$$

d'où, puisque B est premier avec p :

$$\bar{x} = \bar{\mathrm{B}}^{-1}\bar{u}.\bar{y} = \bar{b}.\bar{y}.$$

$\{\bar{x}\}$ et $\{\bar{y}\}$ sont donc comparables.

b. Si $p = ab$, a et b étant premiers entre eux; pour $x = a$, $y = b$ aucune des équations en $\bar{z}$,

$$\bar{x}.\bar{z} = \bar{y}, \qquad \bar{y}.\bar{z} = \bar{x}$$

n'est résoluble, puisque, par exemple a divise x et p mais ne divise pas y. De là, le résultat suivant :

L'anneau $\mathrm{N}/(p)$ est indexable; il est à index strict si et seulement si p est la puissance d'un nombre premier.

DEUXIÈME PARTIE.

2.1. Dans un anneau indexable $\mathfrak{A}$ si un idéal bilatère $\mathfrak{B}$ contient un élément x il contient toute la classe de transitivité $\{x\}$; et si $\mathfrak{A}$ est strictement indexable, $\mathfrak{B}$ contient toutes les classes de transitivité d'index inférieur à l'index de x. Par suite, de deux choses l'une, ou $\mathfrak{B}$ contient tous les éléments différents des unités (on suppose naturellement que $\mathfrak{B}$ n'est pas confondu avec l'idéal unité), ou $\mathfrak{B}$ contient un index maximum fini.

La condition de chaîne descendante et la condition de chaîne ascendante ne sont pas en général vérifiées pour les idéaux bilatères, sauf dans le cas trivial où l'anneau $\mathfrak{A}$ est à index fini.

Si l'anneau $\mathfrak{A}$ est strictement indexable et à index fini, tout idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est principal et peut être engendré par l'un quelconque des éléments d'index maximum dans $\mathfrak{B}$. En particulier, tout anneau commutatif strictement indexable et à index fini est un anneau à idéaux principaux. Il en est ainsi des anneaux $N/(p)$ où p est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre premier.

Il est facile de voir que dans un anneau indexable commutatif quelconque tout élément distinct d'une unité est diviseur de zéro. En effet, soit x un élément distinct d'une unité, p son index (qui est fini); les éléments de la suite

$$x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad \ldots, \quad x^n, \quad \ldots$$

ont tous un index inférieur ou au plus égal à p. Par suite, de deux choses l'une, ou $x^n = 0$ pour un certain entier n, ou tous les éléments de la suite précédente ont même index (non nul) à partir d'un certain rang. Dans le premier cas $x^n = 0$ donne $x.x^{n-1} = 0$; dans le second cas, il existe une unité λ de $\mathfrak{A}$ et un entier n tels que $x^n = \lambda x^{n+1}$, c'est-à-dire $(1 - \lambda x)x^{n-1}\,x = 0$. L'élément x est bien un diviseur de zéro.

Il résulte de là qu'un anneau d'intégrité qui ne soit pas un corps n'est pas indexable.

2.2. Extension d'un anneau indexable. — Étant donné un anneau indexable $\mathfrak{A}$, je me propose de construire un anneau indexable $\mathfrak{A}^\star$ comprenant $\mathfrak{A}$ comme sous-anneau. Soit un second anneau indexable $\mathfrak{A}'$ (qui peut être identique à $\mathfrak{A}$). Soit $x^\star = (x, x')(x \in \mathfrak{A},\ x' \in \mathfrak{A}')$ un élément de l'ensemble-produit $\mathfrak{A}^\star = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$. Définissons dans cet ensemble l'addition et la multiplication par les lois

$$(x, x') + (y, y') = (x + y,\ x' + y'),$$
$$(x, x').(y, y') = (x.y,\ x'.y').$$

Il est visible que l'ensemble $\mathfrak{A}^\star$ est ainsi muni d'une structure d'anneau; l'identité dans $\mathfrak{A}^\star$ est $(1, 1)$; $\lambda^\star$ est une unité si et seulement si λ et λ' sont des unités dans $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ respectivement. Je suppose essentiellement que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sont à index fini.

Je dis que $\mathfrak{A}^\star$ est indexable. En effet $x^\star = a^\star y^\star b^\star$ entraîne à la fois

$$x = ayb \qquad \text{et} \qquad x' = a'y'b'.$$

Comme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sont des anneaux indexables, les relations simultanées

$$x^\star = a^\star y^\star b^\star, \qquad y^\star = c^\star x^\star d^\star$$

exigent que $x^\star$ et $y^\star$ appartiennent à une même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}^\star = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$. D'après le paragraphe 1.1 cette condition suffit pour qu'on puisse munir l'ensemble des classes $\{x^\star\}$ d'une structure d'ordre total satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2. Reste à satisfaire à l'axiome A 3.

Soient p, p' les index de x, x' dans $x^\star = (x, x')$ pour une certaine indexation de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$. La classe de transitivité $\{x\}$ est entièrement déterminée par la donnée de p et p', car $x^\star = (x, x')$ et $(y^\star = y, y')$ appartiennent à une même classe de transitivité si et seulement si x et y appartiennent à une même classe et x' et y' à une même classe.

Posons

$$\{x^\star\} = [p, p']$$

et définissons la structure d'ordre total par

$$[p, p'] \prec [q, q']$$

si l'on a l'une des éventualités suivantes :

a. $\quad p + p' < q + q'$;

b. $\quad p + p' = q + q', \quad$ avec $\quad p < q$.

Il est clair qu'on a ainsi une structure d'ordre total satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2. Ainsi les premières classes sont :

$$[0, 0] \prec [0, 1] \prec [1, 0] \prec [0, 2] \prec [1, 1] \prec [2, 0] \prec [0, 3] \prec [1, 2], \quad \ldots.$$

On voit immédiatement qu'entre la classe $[0, 0]$ et la classe $[p, p']$ il y a un nombre fini de classes.

Ceci prouve que la structure d'ordre considérée satisfait à l'axiome A 3. L'anneau $\mathfrak{A}^\star$ est donc indexable.

Cette structure d'ordre n'est évidemment pas unique quel que soit l'anneau $\mathfrak{A}$ considéré puisque deux classes telles que $[0, 1]$ et $[1, 0]$ ne sont pas comparables au sens du paragraphe 1.1.

L'ensemble des éléments $(x, 0)$ forme visiblement un sous-anneau de $\mathfrak{A}^\star$ isomorphe à $\mathfrak{A}$. On a ainsi une extension de l'anneau indexable $\mathfrak{A}$.

On généralise sans peine au cas de l'ensemble-produit $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ de k anneaux indexables.

Comme application, considérons un anneau semi-simple (anneau sans radical vérifiant la condition de chaîne descendante pour les idéaux unilatères), somme directe de k idéaux bilatères simples

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

Si chacun des idéaux $\mathfrak{A}_i$ qui est un sous-anneau de $\mathfrak{A}$ est un anneau indexable, $\mathfrak{A}$ est lui-même indexable. En effet, l'ensemble-produit $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \mathfrak{A}_k$ muni comme précédemment de la structure d'anneau par les opérations

$$(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k),$$
$$(x_1, \ldots, x_k) . (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 . y_1, \ldots, x_k . y_k)$$

est visiblement isomorphe à $\mathfrak{A}$ puisque $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j (i \neq j)$ s'annihilent mutuellement. Comme on sait que tout anneau simple, non nilpotent ($\mathfrak{A}^2 \neq 0$) est isomorphe à un anneau de matrices carrées d'ordre fini construites sur un corps gauche, anneau qui est indexable d'après le paragraphe 1.4, il résulte que :

Tout anneau semi-simple est indexable, et l'indexation n'est pas stricte.

Si donc un anneau strictement indexable n'est pas un anneau simple, il ne peut être non plus semi-simple.

Remarque. — La démonstration précédente suppose essentiellement que les index des anneaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont finis. S'il en était autrement, l'axiome A 3 ne serait plus satistait, quelle que soit la relation d'ordre total qu'on puisse établir entre les classes de transitivité de l'anneau $\mathfrak{A}^\star$.

En effet, supposons que l'index de $\mathfrak{A}$ ne soit pas fini. L'élément $(1, 0)$ (où 1 désigne l'identité dans $\mathfrak{A}$ et $0 \in \mathfrak{A}'$) n'est pas une unité dans $\mathfrak{A}^\star$. Si $\mathfrak{A}^\star$ était indexable, il n'existerait entre la classe $\{(0, 0)\}$ et la classe $\{(1, 0)\}$ qu'un nombre fini de classes. Or les éléments $(x, 0)(y, 0)$ n'appartiennent pas à une même classe dans $\mathfrak{A}^\star$ si x, y n'appartiennent pas à une même classe dans $\mathfrak{A}$. Toute classe $\{(x, 0)\}$ est comparable à la classe $\{(1, 0)\}$ car $(x, 0) = (x, 0).(1, 0)$. Pour toute indexation admissible de $\mathfrak{A}^\star$ on doit avoir $\{(x, 0)\} \prec \{(1, 0)\}$. Comme il y a une infinité de classes telles que $\{(x, 0)\}$ par hypothèse, l'anneau $\mathfrak{A}^\star$ n'est pas indexable.

Ainsi :

Un anneau indexable qui n'est pas à index fini n'est pas décomposable en somme directe de plusieurs anneaux séparément indexables.

2.3. Sous-anneau indexable. — Soit $\mathfrak{A}$ un anneau indexable, $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère, admettant, en tant que sous-anneau, une identité e (qui n'est pas égale à l'identité de $\mathfrak{A}$). Je me propose de montrer que $\mathfrak{B}$ considéré comme anneau est indexable.

Soit ξ une unité dans $\mathfrak{B}$, η son inverse :

$$\xi\eta = e, \qquad \xi e = \xi.$$

Ces égalités montrent que dans l'anneau $\mathfrak{A}$, ξ appartient à la même classe de transitivité que e. Réciproquement, je dis que tout élément de $\mathfrak{A}$ appartenant à la même classe que e appartient à $\mathfrak{B}$ et est une unité dans $\mathfrak{B}$. En effet, soit

$$f = \lambda e \lambda^{-1} \in \mathfrak{B} \qquad (\lambda \text{ unité dans } \mathfrak{A}).$$

Pour tout $x \in \mathfrak{B}$, on a

$$xf = x\lambda e\lambda^{-1} = (x\lambda)\, e\lambda^{-1} = x\lambda\lambda^{-1} = x,$$
$$fx = \lambda e\lambda^{-1}x = \lambda e(\lambda^{-1}x) = \lambda\lambda^{-1}x = x.$$

Comme l'identité est unique dans tout anneau :

$$f = e \quad \text{et} \quad e\lambda = \lambda e;$$

l'identité e de $\mathfrak{B}$ est commutable avec toute unité de $\mathfrak{A}$. Soit ξ un élément de $\mathfrak{A}$ appartenant à la même classe que e :

$$\xi = \lambda e\mu = \lambda\mu e = \nu e = e\nu.$$

ξ appartient à $\mathfrak{B}$ et la classe $\{e\}$ dans $\mathfrak{A}$ est composée des éléments de la forme $e\lambda = \lambda e$ où λ est une unité de $\mathfrak{A}$. Si donc $\xi = \lambda e$, $\eta = e\lambda^{-1}$, on a

$$\xi\eta = \lambda ee\lambda^{-1} = \lambda e\lambda^{-1} = \lambda\lambda^{-1}e = e.$$

Tout élément de $\{e\}$ est donc bien une unité dans $\mathfrak{B}$.

Le groupe $\mathfrak{H}$ agissant sur l'anneau $\mathfrak{B}(x \to \xi x\eta$ où ξ et η sont deux unités de $\mathfrak{B})$ fournira, à partir de l'élément $x \in \mathfrak{B}$ la classe de transitivité

$$\{x\} = \{\lambda exe\mu\} = \{\lambda x\mu\}$$

qui coïncide avec la classe de transitivité de x relative au groupe $\mathfrak{G}$ agissant sur $\mathfrak{A}$.

D'autre part, dans $\mathfrak{B}$ les relations

$$x = ayb, \qquad y = cxd \qquad (a,\ b,\ c,\ d \in \mathfrak{B})$$

entraînent les mêmes dans $\mathfrak{A}$, par suite x et y appartiennent à une même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$ c'est-à-dire au groupe $\mathfrak{H}$. Comme l'axiome A3 est visiblement satisfait pour toute relation d'ordre total entre les classes $\{x\}$ induite dans $\mathfrak{B}$ par une relation d'ordre dans $\mathfrak{A}$, l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$ considéré comme anneau est indexable.

Remarque. — Il est facile de montrer que l'identité e de $\mathfrak{B}$ appartient au centre de l'anneau $\mathfrak{A}$. En effet, pour tout $x \in \mathfrak{A}$, ex comme xe appartiennent à $\mathfrak{B}$. D'où

$$ex = (ex)e = e(xe) = xe.$$

Si l'on pose $e' = 1 - e$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}e'\mathfrak{A}$, un calcul évident montre que l'idéal bilatère $\mathfrak{B}'$ admet e' comme identité, que les deux idéaux bilatères $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ s'annihilent mutuellement et enfin que l'anneau $\mathfrak{A}$ donné est la somme directe de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{B}'$.

Ce résultat, joint à celui qui a été obtenu au paragraphe précédent montre que dans un anneau indexable qui n'est pas à index fini, aucun idéal bilatère ne peut posséder une identité.

Si l'on remarque que tout élément idempotent appartenant au centre d'un anneau engendre un idéal bilatère admettant cet élément idempotent comme identité, le résultat précédent peut encore s'énoncer comme suit :

Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ ne peut admettre d'élément central idempotent (autre que 0 et 1) que si $\mathfrak{A}$ est à index fini et non strict.

2.4. ANNEAU QUOTIENT D'UN ANNEAU INDEXABLE. — Soient $\mathfrak{A}$ un anneau indexable, $\varphi(x)$ une fonction index dans une certaine indexation, $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{A}$. Je dis que l'anneau quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}}$ est indexable. La classe résiduelle $\bar{1}$ de l'identité 1 de $\mathfrak{A}$ est l'identité de $\overline{\mathfrak{A}}$. $\bar{x}$ étant la classe résiduelle de x, soit la fonction

$$\Phi(\bar{x}) = \operatorname{Min} \varphi(x + \mathfrak{B}).$$

$\Phi(\bar{x}) = 0$ si et seulement si la classe résiduelle de x contient 0, c'est-à-dire si $x \in \mathfrak{B}$ ou encore $\bar{x} = \bar{0}$.

$$\Phi(\bar{x}.\bar{y}) = \operatorname{Min} \varphi(xy + \mathfrak{B}).$$

Soit b un élément de $\mathfrak{B}$ réalisant le minimum et t un élément *arbitraire* de $\mathfrak{B}$.

$$\Phi(\bar{x}.\bar{y}) = \varphi(xy + b) \leqq \varphi(xy + ty) = \varphi[(x + t)y] \leqq \varphi(x + t);$$

comme t est arbitraire dans $\mathfrak{B}$:

$$\Phi(\bar{x}.\bar{y}) \leqq \operatorname{Min} \varphi(x + \mathfrak{B}) = \Phi(\bar{x}).$$

Ensuite si $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{y})$, où

$$\operatorname{Min} \varphi(x + \mathfrak{B}) = \operatorname{Min} \varphi(y + \mathfrak{B}),$$

on peut trouver b, $c \in \mathfrak{B}$ tels que

$$\varphi(x + b) = \varphi(y + c),$$

donc un couple d'unités λ, $\mu \in \mathfrak{A}$ tels que

$$y + c = \lambda(x + b)\mu; \qquad y - \lambda x \mu \in \mathfrak{B};$$

donc $\bar{y} = \bar{\lambda}.\bar{x}.\bar{\mu}$ où $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ représentent deux unités de $\overline{\mathfrak{A}}$.

Réciproquement, il est clair que $\bar{y} = \bar{\lambda}.\bar{x}.\bar{\mu}$ entraîne $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{y})$ puisque $\Phi(\bar{y}) \leqq \Phi(\bar{x})$ et en écrivant $\bar{x} = \bar{\lambda}^{-1}.\bar{y}.\bar{\mu}^{-1}$ on obtient de même $\Phi(\bar{x}) \leqq \Phi(\bar{y})$.

En conséquence, les classes de transitivité de $\overline{\mathfrak{A}}$ relatives au groupe $\overline{\mathfrak{G}}$ peuveut être munies de la relation d'ordre total fournie par l'application $\{\bar{x}\} \to \Phi(\{\bar{x}\}) = \Phi(\bar{x})$. Cette relation d'ordre satisfait visiblement aux axiomes A 1, A 2 et A 3. L'anneau quotient est indexable.

Remarque. — Si l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est nilpotent ($\mathfrak{B}^s = 0$,), dès qu'une classe résiduelle de $\overline{\mathfrak{A}}$, soit $\bar{\lambda}$, comporte une unité, elle est composée entièrement d'unités de $\mathfrak{A}$. En effet, de $\bar{\lambda}.\bar{\mu} = \bar{1}$ on déduit, pour tout λ de la classe résiduelle $\bar{\lambda}$, et tout μ de la classe résiduelle $\bar{\mu}$:

$$\lambda\mu = 1 + x \qquad (x \in \mathfrak{B})$$

et

$$(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots) = 1 - x^s = 1.$$

Donc $1 + x$ est une unité et il en est de même de λ.

TROISIÈME PARTIE.

3.1. Classe minimale. Noyau. — Soit $\mathfrak{A}$ un anneau indexable, soit $\{a\}$ la classe d'index 1 dans une certaine indexation; je l'appelle classe minimale de $\mathfrak{A}$. Un élément quelconque de cette classe est appelé élément minimal et l'idéal bilatère $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}a\mathfrak{A}$ engendré par un tel élément minimal a est appelé un noyau de $\mathfrak{A}$. Le noyau $\mathfrak{N}$ contient évidemment toute la classe minimale $\{a\}$. On verra qu'un noyau $\mathfrak{N}$ peut contenir d'autres classes minimales que $\{a\}$; afin d'éviter des confusions, j'appelle classe minimale principale de $\mathfrak{N}$ la classe $\{a\}$ qui engendre effectivement $\mathfrak{N}$.

Un anneau indexable possédant une seule classe minimale est appelé anneau uninodulaire; un anneau strictement indexable est uninodulaire.

Quand un anneau indexable possède plusieurs classes minimales, ces classes ne sont pas comparables deux à deux.

3.2. Théorème. — *Toute classe $\{x\}$ non comparable à une classe minimale $\{a\}$ est elle-même minimale ou comparable à une autre classe minimale $\{b\}$ différente de $\{a\}$.*

a. Si dans l'indexation considérée, aucune classe placée avant $\{x\}$ n'est comparable à $\{x\}$, la classe $\{x\}$ est visiblement minimale, car la relation d'ordre total :

$$\{0\} \prec \{x\} \prec \{a\} \prec \ldots$$

se déduisant de l'indexation donnée par placement de $\{x\}$ entre $\{0\}$ et $\{a\}$, les places relatives des autres classes restant inchangées, vérifie les axiomes A1, A2 et A3.

b. S'il existe une classe $\{b\}$ placée avant $\{x\}$ et comparable à $\{x\}$, $\{b\}$ n'est pas comparable à $\{a\}$ autrement $\{a\}$ et $\{x\}$ seraient comparables. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\{b\}$ est la « première » classe (de gauche à droite) non comparable à $\{a\}$. $\{b\}$ est alors minimale d'après ce qui précède.

3.3. Théorème. — *Soient $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère, $\mathfrak{N}$ un noyau quelconque d'un anneau indexable $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{N}$ n'est pas inclus dans $\mathfrak{B}$*, on a

$$\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{N} = 0, \qquad (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B})^2 = 0.$$

En effet, soient x un élément quelconque de $\mathfrak{B}$, a un élément minimal principal de $\mathfrak{N}$; ax (resp. xa) est minimal ou nul. Si ax (resp. xa) n'est pas nul, on peut trouver deux unités $\lambda\mu$ de $\mathfrak{A}$ telles que

$$a = \lambda(ax)\mu \qquad [\text{resp.}\, \lambda(xa)\mu];$$

donc $a \in \mathfrak{B}$, par suite $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B}$. Si $ax = xa = 0$ pour tout a minimal principal de $\mathfrak{N}$ et tout $x \in \mathfrak{B}$, on a visiblement

$$\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{N} = 0.$$

Dans ce dernier cas si

$$x, y \in \mathfrak{B}; \qquad x, y \in \mathfrak{N},$$
$$xy \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = 0,$$

on a

$$xy \in \mathfrak{B}\mathfrak{N} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N})^2 = 0.$$

Conséquences. — *a.* Tout idéal bilatère $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{N}$ et non identique à $\mathfrak{N}$ est nilpotent et

$$\mathfrak{B}^2 = 0.$$

b. Si $\mathfrak{A}$ possède deux noyaux differents $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$,

$$\mathfrak{N}\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'\mathfrak{N} = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')^2 = 0.$$

c. Si deux noyaux différents $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ ont une intersection non nulle, ou bien l'un est inclus dans l'autre, par exemple $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}^2 = 0$, on bien il existe un troisième noyau $\mathfrak{N}''$ nilpotent ($\mathfrak{N}''^2 = 0$) inclus dans $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ à la fois.

Les deux premières conséquences sont immédiates, pour la troisième, soit $x \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}' (x \neq 0)$, x ne peut être comparable à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$ et à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}'$ à la fois, car s'il en était ainsi, l'idéal bilatère $\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ et comme $\mathfrak{A}x\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$, on aurait

$$\mathfrak{A}x\mathfrak{A} = \mathfrak{N} = \mathfrak{N}',$$

donc ou bien $\{x\}$ est comparable à la classe minimale principale $\{a\}$ de $\mathfrak{N}$ et

$$\mathfrak{A}x\mathfrak{A} = \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}',$$

ou bien $\{x\}$ n'est comparable ni à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$ ni à celle de $\mathfrak{N}'$ et d'après le théorème du paragraphe 3.2, $\{x\}$ est comparable à une troisième classe minimale $\{a''\}$ qui engendre un noyau $\mathfrak{N}''$ et

$$\mathfrak{N}'' \subseteq \mathfrak{A}x\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'; \qquad \mathfrak{N}''^2 = 0.$$

3.4. Théorème. — *Si un noyau $\mathfrak{N}$ d'un anneau indexable $\mathfrak{A}$ n'est pas idempotent, il est nilpotent et de carré nul,* $\mathfrak{N}^2 = 0$.

En effet, on a

$$\mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{N},$$

si $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}^2$ est différent de $\mathfrak{N}$, d'après le théorème du 3.3,

$$\mathfrak{B}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^3 = 0,$$

$\mathfrak{N}$ est donc nilpotent.

Je dis que $\mathfrak{N}^2 = 0$. En effet, soient a, b deux éléments minimaux principaux arbitraires de $\mathfrak{N}$; il suffit de prouver que le produit $ab = 0$.

Supposons $ab \neq 0$, le produit ab est évidemment un élément minimal principal de $\mathfrak{N}$. Donc on peut trouver deux unités $\lambda\mu$ telles que $a = \lambda ab\mu$, d'où

$$ab = \lambda ab\mu b = (\lambda a) b (\mu b);$$

le dernier produit appartient à $\mathfrak{N}^3$, donc $ab = 0$.

La supposition $ab \neq 0$ conduit ainsi à une contradiction.

Remarque. — S'il existe un seul élément minimal principal de $\mathfrak{N}$ tel que $a\mathfrak{N} = 0$, on peut affirmer que le noyau $\mathfrak{N}$ est nilpotent. Car $a\mu\mathfrak{N} \subseteq a\mathfrak{N} = 0$ pour toute unité μ, donc $\lambda a\mu\mathfrak{N} = 0$ pour tout couple d'unités, c'est-à-dire $b\mathfrak{N} = 0$ pour tout élément minimal principal de $\mathfrak{N}$.

3.5. Idéaux nilpotents. — Dans un anneau uninodulaire, toute classe $\{x\}$ est comparable à la classe minimale $\{a\}$. Donc tout idéal bilatère contient le noyau $\mathfrak{N}$ et ce noyau peut être engendré par n'importe lequel de ses éléments, c'est un idéal bilatère minimal.

Dans un anneau indexable quelconque, tout idéal bilatère contient au moins un noyau puisque tout élément est comparable à un élément minimal.

En particulier, un idéal bilatère nilpotent contient au moins un noyau, lequel, étant nilpotent, est de carré nul.

Soit, dans un anneau indexable $\mathfrak{A}$, un anneau bilatère nilpotent $\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I}^s = 0$). Soit $\mathfrak{N}$ un noyau *non inclus dans* $\mathfrak{I}$. Considérons une indexation dans laquelle la classe minimale principale $\{a\}$ de $\mathfrak{N}$ a pour index 1. Je dis que tout élément d'index p annihile la puissance $p^{\text{ième}}$ de l'idéal $\mathfrak{I}$:

La propriété est vraie pour les éléments d'index 1; supposons-la vraie jusqu'aux éléments d'index $p-1$. Soient u un élément quelconque d'index p, x un élément arbitraire de $\mathfrak{I}$; le produit ux (resp. xu) est d'index p au plus; s'il est d'index p, on peut trouver deux unités $\lambda\mu$ telles que

$$u = \lambda ux\mu = \lambda uk; \qquad k = x\mu \in \mathfrak{I}$$

puis

$$u = \lambda^2 uk^2 = \ldots = \lambda^s uk^s = 0,$$

ceci est absurde, par suite le produit ux est d'index $p-1$ au plus, ux (resp. xu) annihile la puissance $(p-1)^{\text{ième}}$ de $\mathfrak{I}$ en d'autres termes u annihile la puissance $p^{\text{ième}}$ de $\mathfrak{I}$.

Dans le cas particulier où l'anneau $\mathfrak{A}$ est à index fini n, tout idéal bilatère nilpotent ne contenant pas tous les noyaux vérifie $\mathfrak{I}^s = 0$ avec $s \leqq n$, et il existe une indexation dans laquelle la puissance $(p+1)^{\text{ième}}$ d'un élément d'index p de ce même idéal bilatère nilpotent est nulle.

3.6. Annihilateur d'un noyau. — Soit un ensemble B quelconque d'un anneau $\mathfrak{A}$. Appelons $\mathcal{F}(B)$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ tels que $xB = Bx = 0$. Dans le cas général $\mathcal{F}(B)$ n'est pas un idéal; mais si $B = \mathfrak{B}$ est un idéal bilatère, $\mathcal{F}(\mathfrak{B})$ est aussi un idéal bilatère puisque

$$x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x = 0, \qquad y\mathfrak{B} = \mathfrak{B}y = 0$$

entraînent visiblement

$$(x+y)\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x+y) = 0$$

et

$$kx\mathfrak{B} = 0; \qquad \mathfrak{B}kx = (\mathfrak{B}k)x \subseteq \mathfrak{B}x = 0,$$
$$\mathfrak{B}xk = 0; \qquad xk\mathfrak{B} = x(k\mathfrak{B}) \subseteq x\mathfrak{B} = 0.$$

L'idéal bilatère $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ s'appellera annihilateur du noyau $\mathfrak{N}$. Cet idéal est évidemment inclus dans l'intersection de l'idéal à gauche, annihilateur (à gauche) et de l'idéal à droite, annihilateur (à droite) de $\mathfrak{N}$. Soient $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ ces idéaux unilatères.

Posons encore

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{N}) = \{x \mid x \in \mathfrak{A};\ \mathfrak{N} \not\subseteq \mathfrak{A}x\mathfrak{A}\}$$

(ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ tels que $\mathfrak{N}$ ne soit pas inclus dans l'idéal bilatère engendré par x).

Théorème. — *Si le noyau $\mathfrak{N}$ n'est pas nilpotent, on a*

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}) = \mathcal{F}(\mathfrak{N}).$$

Soit $x \in \mathfrak{C}(\mathfrak{N})$, si $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}x\mathfrak{A}$, tout élément $a \in \mathfrak{N}$ s'écrit $a = \sum bxc$, et si l'on prend un autre élément a' de $\mathfrak{N}$, on a

$$aa' = \sum (bx)(ca');$$

comme $bx \in \mathfrak{C}$, $ca' \in \mathfrak{N}$,

$$aa' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\mathfrak{N}, \qquad \text{donc} \quad aa' = 0,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{N}^2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse, par suite $x \in \mathfrak{E}(\mathfrak{N})$.

On montre de même que tout élément de $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ appartient à $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$.

Ensuite tout élément x appartenant à $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ vérifie $x\mathfrak{N} = \mathfrak{N}x = 0$. Le théorème en résulte.

Remarques. — A. $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$ contient tous les noyaux différents de $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{N}$ n'est pas nilpotent et contient également $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{N}$ est nilpotent.

B. Si $\mathfrak{N}$ est nilpotent; l'intersection $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ qui n'est pas un idéal en général) contient l'ensemble $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$, donc tous les noyaux de l'anneau.

C. Quel que soit $\mathfrak{N}$, un élément $x \in \mathfrak{E}(\mathfrak{N})$ n'est pas comparable à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$ est composé uniquement de classes non comparables à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$.

3.7. Les noyaux dans la décomposition de $\mathfrak{A}$. — Soit un anneau quelconque possédant une identité. Supposons qu'on puisse décomposer $\mathfrak{A}$ en une somme directe de k idéaux bilatères :

$$\mathfrak{A} = \sum_{p=1}^{k} \oplus \mathfrak{A}_p.$$

On sait que chaque $\mathfrak{A}_p$ considéré comme sous-anneau possède également une identité. Si donc l'anneau $\mathfrak{A}$ est indexable, d'après le résultat du paragraphe 2.3 chaque anneau $\mathfrak{A}_p$ est indexable et $\mathfrak{A}$ est à index fini.

Un idéal bilatère de l'anneau $\mathfrak{A}_p$ est aussi idéal bilatère dans l'anneau $\mathfrak{A}$ car

$$\mathfrak{A}_p x \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A} x \mathfrak{A} \qquad \text{si} \quad x \in \mathfrak{A}_p$$

puisque $\mathfrak{A}_p$ annihile tous les $\mathfrak{A}_q (q \neq p)$.

Je dis que toute classe minimale dans $\mathfrak{A}_p$ est aussi une classe minimale dans $\mathfrak{A}$. En effet, soit x une telle classe; si elle n'est pas minimale dans $\mathfrak{A}$, on peut trouver une classe minimale $\{y\} \in \mathfrak{A}$ telle que $y = axb$. Donc $\mathfrak{A}_p$ contient y et dans $\mathfrak{A}_p$ on aura une relation de la forme $y = a'xb'$, égalité qui exprime ou bien que x et y sont de la même classe dans $\mathfrak{A}_p$, par suite dans $\mathfrak{A}$, ce qui est impossible, ou bien que x n'est pas minimale dans $\mathfrak{A}_p$, ce qui contredit l'hypothèse.

Il résulte de ce qui précède que tout noyau de $\mathfrak{A}_p$ est un noyau de $\mathfrak{A}$.

Réciproquement soit $\mathfrak{N}$ un noyau de $\mathfrak{A}$. On sait qu'on peut le décomposer d'une façon unique en somme directe d'idéaux bilatères contenus dans les $\mathfrak{A}_p$, soit

$$\mathfrak{N} = \sum_{p=1}^{k} \oplus \mathfrak{M}_p.$$

Je dis que $\mathfrak{M}_p$, s'il n'est pas nul, est un noyau de $\mathfrak{A}_p$. Écartons le cas banal où tous les $\mathfrak{M}_q (q \neq p)$ sont nuls. Si a est un élément minimal principal de $\mathfrak{N}$:

$$a = a_1 + \ldots + a_p + \ldots + a_k.$$

On a

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} x \mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_p = \mathfrak{A}\, a_p \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_p a_p \mathfrak{A}_p.$$

Si a_p n'est pas minimal dans $\mathfrak{A}_p$, il existe un élément (minimal) $b_p \in \mathfrak{A}_n$ et appartenant à une classe différente de a_p tel que

$$b_p = c_p a_p d_p \neq 0, \qquad c_p\, d_p \in \mathfrak{A}_p.$$

Dans $\mathfrak{A}$, a_p, b_p appartiennent à deux classes différentes. Visiblement

$$b_p = c_p (a_p + a_1 + \ldots) d_p = c_p a\, dp,$$

égalité qui exige, puisque a est minimal dans $\mathfrak{A}$, que $b_p = 0$ appartienne à la même classe que a; par suite $\mathfrak{A}_p$ contient $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_p$, cas qui a été écarté.

Par suite a_p est bien minimal dans $\mathfrak{A}_p$ et $\mathfrak{M}_p$ est bien un noyau dans $\mathfrak{A}_p$ et par suite dans $\mathfrak{A}$.

Si donc $\mathfrak{N}$ peut se décomposer en au moins deux composantes différentes de zéro, ces composantes sont des noyaux nilpotents et leur somme directe, c'est-à-dire $\mathfrak{N}$, est aussi un noyau nilpotent. On voit aussi qu'un noyau nilpotent n'est décomposable que s'il contient au moins deux autres noyaux nilpotents différents de lui-même.

3.8. Décomposition. — Dans ce qui suit, je suppose que l'anneau indexable est à index fini et je me propose de chercher les conditions de la décomposition en somme directe d'idéaux bilatères indexables.

J'utilise ici une forme légèrement modifiée d'une propriété classique :

Théorème. — *Tout anneau possédant une identité est décomposable en somme directe d'au moins deux idéaux bilatères si et seulement si l'anneau possède au moins un idéal bilatère contenant une identité, un tel anneau est complètement réductible si et seulement si chaque idéal bilatère possède une identité.*

(La notion de complète réductibilité est prise dans le sens de complète réductibilité du treillis modulaire des idéaux bilatères.)

Il suffit de reprendre une décomposition déduite de celle de Pierce pour tout élément u de l'anneau

$$u = (u - ue - eu + eue) + (ue + eu - eue),$$

où e est l'identité de l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$. On vérifie immédiatement que

$$(u - ue - eu + eue) \in \mathfrak{I}(\mathfrak{B}),$$

d'où

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{I}(\mathfrak{B}).$$

La deuxième partie du théorème est manifeste.

Dans un anneau indexable complètement réductible, aucun noyau n'est nilpotent; chaque noyau est idéal principal à gauche et à droite; un idéal bilatère contenant p noyaux donnés, à l'exclusion d'autres noyaux, est identique à la somme directe de ces p noyaux.

La remarque suivante est utile :

Dans un anneau $\mathfrak{A}$ quelconque, un élément e est une identité pour un certain idéal bilatère si et seulement si e est un élément central idempotent.

On a vu au paragraphe 2.3 que si e est l'identité de l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$, e est un élément central idempotent. Réciproquement si e est un élément central idempotent, l'idéal $\mathfrak{A}e = e\mathfrak{A}$ est bilatère, de même l'idéal $\mathfrak{A}(1-e) = (1-e)\mathfrak{A}$

et un calcul élémentaire montre que

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}e \oplus \mathfrak{A}(1-e).$$

Application. — Supposons qu'on ait une décomposition de la forme

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{A}_p$$

d'un anneau indexable en composantes uninodulaires. On sait que le centre $\mathfrak{Z}$ de l'anneau $\mathfrak{A}$ se décompose en

$$\mathfrak{Z} = \sum \oplus \mathfrak{Z}_p,$$

où $\mathfrak{Z}_p$ est le centre de $\mathfrak{A}_p$. Comme $\mathfrak{A}_p$ est uninodulaire, donc non décomposable, $\mathfrak{Z}_p$ ne contient comme idempotents que zéro et e_p (identité de $\mathfrak{A}_p$). Par suite $\mathfrak{Z}$ comporte en tout

$$1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{p} + \ldots + 1 = 2^k$$

idempotents (0 et 1 compris), puisque la somme de plusieurs éléments centraux idempotents est aussi un élément central idempotent. A chaque couple d'idempotents centraux e et $(1-e)$, il correspond une décomposition de la forme

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}e \oplus \mathfrak{A}(1-e).$$

On sait d'autre part que la décomposition d'un anneau possédant une identité en somme directe de k idéaux bilatères indécomposables, si elle est possible, est unique. Comme un idéal bilatère uninodulaire est indécomposable en somme directe d'idéaux bilatères, il résulte que :

Si une décomposition d'un anneau indexable en somme directe de sous-anneaux uninodulaires est possible, elle est unique. Une condition nécessaire est évidemment que l'anneau indexable comporte seulement k noyaux deux à deux « séparables » dans le sens $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = 0$.

3.9. Décomposition d'un anneau commutatif indexable. — Comme la condition de chaîne descendante est vérifiée pour $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A}$ ne comporte pas de noyaux nilpotents, il est sans radical, par suite, d'après le théorème de Dedekind, $\mathfrak{A}$ est décomposable en somme directe de corps commutatifs s'annihilant mutuellement. Il résulte de là que tout anneau commutatif comporte au moins un noyau nilpotent ou bien se réduit à une somme directe de corps commutatifs s'annihilant mutuellement.

Comme la condition de chaîne ascendante est aussi vérifiée (l'anneau est à index fini), si $\mathfrak{R}$ est le radical de $\mathfrak{A}$, l'anneau quotient $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ est un anneau commutatif indexable sans radical, donc $\overline{\mathfrak{A}}$ est la somme directe de corps commutatifs s'annihilant mutuellement.

Ainsi l'anneau $N/(p)$, où p est le produit d'un certain nombre de facteurs premiers non égaux, est sans radical (puisque aucun élément non nul n'est nilpotent). Dès que deux des facteurs premiers de p sont égaux, l'anneau $N/(p)$ possède un radical.

3.10. Lemme. — *Étant donné un anneau $\mathfrak{A}$ possédant une identité, tout idéal bilatère idempotent $\mathfrak{B}$ qui est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite engendré par* un même élément ξ *possède une identité.*

Démonstration. — Soit
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\xi = \xi\mathfrak{A}.$$
On a
$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\xi) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\xi = \mathfrak{B}\xi = \xi\mathfrak{B}.$$
En particulier, il existe $e \in \mathfrak{B}$ tel que $\xi = e\xi$, d'où
$$(1-e)\xi = 0, \qquad (1-e)\xi\mathfrak{B} = (1-e)\mathfrak{B} = 0;$$
par suite $(1-e)e = 0$, l'élément e est idempotent. Puis pour tout $x \in \mathfrak{B}$, $(1-e)x = 0$, c'est-à-dire $x = ex$, l'élément e est une identité à gauche pour $\mathfrak{B}$. De même, de $\mathfrak{B} = \xi\mathfrak{B}$, on déduit l'existence d'une identité à droite pour $\mathfrak{B}$. Ces deux identités sont donc égales.

Théorème. — *Dans un anneau indexable $\mathfrak{A}$, tout idéal bilatère $\mathfrak{B}$ idempotent, qui est idéal principal à droite et idéal principal à gauche, possède une identité.*

On a
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\xi = \eta\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\xi = \eta\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\xi = \eta\mathfrak{B}.$$
De là
$$\xi = \eta a, \qquad \eta = b\xi;$$
d'où il résulte que ξ et η ont même index. Il existe deux unités de $\mathfrak{A}$, soient $\lambda\mu$ telles que $\eta = \lambda\xi\mu$. Puis
$$\mathfrak{B} = \eta\mathfrak{B} = \lambda\xi\mu\mathfrak{B} = \lambda\xi(\mu\mathfrak{B}) = \lambda\xi\mathfrak{B}.$$
Donc soit $x \in \mathfrak{B}$ et comme $\lambda x \in \mathfrak{B}$, on a
$$\lambda x = \lambda\xi c (c \in \mathfrak{B})$$
et puisque λ est une unité, $x = \xi c$, c'est-à-dire $x \in \xi\mathfrak{B}$.

Comme $\xi\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, il résulte
$$\mathfrak{B} = \xi\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\xi.$$
L'idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est engendré par le même élément, en tant qu'idéal principal à droite et idéal principal à gauche. Le lemme précédent fournit par suite le résultat annoncé.

Applications. — *a.* Un anneau uninodulaire est simple si et seulement si son noyau est idempotent et est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite

En effet si l'anneau indexable $\mathfrak{A}$ est simple, son noyau est identique à $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.1 = 1.\mathfrak{A}$. Réciproquement si le noyau d'un anneau uninodulaire est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite, il possède une identité et est indexable; on a donc

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{B}.$$

Comme $\mathfrak{A}$ est uninodulaire par hypothèse, $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$. Comme $\mathfrak{N}$ est évidemment minimal, $\mathfrak{A}$ est simple.

b. Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ est complètement réductible si et seulement si chaque noyau est idempotent et est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite.

La propriété résulte du théorème précédent ainsi que du théorème du paragraphe 3.8.

3.11. Décomposition d'un anneau indexable a noyaux idempotents. — Chaque noyau $\mathfrak{N}$ est un idéal bilatère principal engendré par l'un quelconque de ses éléments; car si $x \in \mathfrak{N}$ l'idéal $\mathfrak{A}x\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$, si $\mathfrak{N}$ n'est pas inclus dans $\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$, ce dernier contient un noyau $\mathfrak{N}'$ qui serait nilpotent, puisque inclus dans $\mathfrak{N}$. Il résulte aussi de là que tout noyau est un idéal bilatère minimal et que les noyaux sont deux à deux séparables.

L'idéal annihilateur d'un noyau $\mathfrak{N}$ ne contient pas ce noyau, car autrement $\mathfrak{N}$ serait nilpotent. L'idéal annihilateur de l'ensemble des noyaux est donc l'idéal nul.

Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ les noyaux de $\mathfrak{A}$. Désignons par $\mathfrak{I}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3,, \ldots, \mathfrak{N}_k)$ l'annihilateur de l'ensemble des noyaux d'indices $2, 3, \ldots, k$. Je dis qu'on a

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{N}_1) \cap \mathfrak{I}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots, \mathfrak{N}_k) = 0,$$
$$\mathfrak{I}(\mathfrak{N}_1) . \mathfrak{I}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots, \mathfrak{N}_k) = 0.$$

En effet tout élément commun à ces deux idéaux annihile tous les noyaux, donc se réduit à zéro; ceci démontre la première égalité. Ensuite si x est un élément du premier idéal, y un élément du second, le produit xy est un élément commun à ces deux idéaux, donc se réduit à zéro; ceci démontre la seconde égalité.

Théorème. — *Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ à noyaux idempotents est décomposable en somme directe d'anneaux uninodulaires s'annihilant mutuellement si et seulement si l'idéal bilatère annihilateur d'un noyau quelconque est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite.*

Démonstration. — Soit un anneau indexable $\mathfrak{A}$, somme directe de k anneaux uninodulaires à noyau idempotent :

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{A}_p.$$

L'idéal annihilateur de $\mathfrak{N}_1$ (noyau de $\mathfrak{A}_1$) ne contient aucun élément de $\mathfrak{A}_1$ puisque $\mathfrak{N}_1$ est idempotent. Cet idéal n'est autre que

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{A}_2 \oplus \mathfrak{A}_3 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

Cette somme n'est autre qu'un anneau indexable, elle représente dans $\mathfrak{A}$ un idéal bilatère qui est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite puisqu'elle possède une identité.

Réciproquement soit $\mathfrak{N}$ un noyau, $\mathfrak{M}$ l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des noyaux autres que $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{J}(\mathfrak{N})$ contient visiblement $\mathfrak{M}$. Il est clair également que $\mathfrak{M}$ est idempotent. On a, pour tout entier n,

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{J}^2 \supseteq \mathfrak{J}^3 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{J}^n \supseteq \mathfrak{M}.$$

Comme la condition de chaîne descendante est valable pour les idéaux bilatères de tout anneau indexable à index fini, on peut trouver un entier n tel que

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J}^{n-1} = \mathfrak{J}^n \supseteq \mathfrak{M}.$$

Par hypothèse

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{A}\xi = \eta\mathfrak{A},$$

d'où

$$\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}(\mathfrak{A}\xi) = (\eta\mathfrak{A})\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\xi = \eta\mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{J}^3 = \mathfrak{J}^2\xi = \eta\mathfrak{J}^2, \qquad \mathfrak{J}^n = \mathfrak{J}^{n-1}\xi = \eta\mathfrak{J}^{n-1}.$$

D'où

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\xi = \eta\mathfrak{B}$$

et $\mathfrak{B}$ est évidemment idempotent. D'après le théorème du paragraphe 3.10 $\mathfrak{B}$ possède une identité, donc

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{B},$$

où $\mathfrak{A}_1$ désigne un anneau indexable contenant le seul noyau $\mathfrak{N}$.

On raisonne ensuite sur $\mathfrak{B}$ comme on a raisonné sur $\mathfrak{A}$ car dans l'anneau $\mathfrak{B}$ l'idéal annihilateur d'un noyau est toujours idéal principal à gauche et idéal principal à droite puisque cette condition est réalisée dans $\mathfrak{A}$.

3.12. Noyaux liés. — Remarquons d'abord que dans un anneau quelconque qui vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux bilatères, tout idéal bilatère non nilpotent admet une puissance (non nulle) idempotente. Il suffit de considérer la chaîne

$$\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{B}^n \supseteq \ldots.$$

Il en est ainsi pour les anneaux indexables à index fini.

Avant d'aborder le cas de décomposition d'un anneau indexable (à index fini) comportant des noyaux nilpotents, il est nécessaire d'étudier la distribution des noyaux dans le cas général. La notion de séparabilité n'est pas suffisante dans l'étude de la décomposition en somme directe d'anneaux indexables.

Soient deux noyaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, s'il existe une chaîne de noyaux $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_l$ telle que les couples $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_l\mathfrak{N}'$ ont des intersections non nulles (non séparables), je dirai que les noyaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ sont liés. Si deux noyaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ (nilpotents) sont inclus respectivement dans deux noyaux liés, $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'$ sont liés (ce cas se ramène visiblement au précédent).

Les diagrammes suivants donnent l'idée d'un ensemble de noyaux liés :

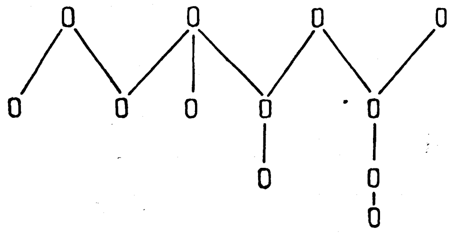

Fig. 1.

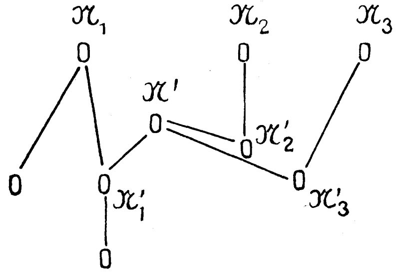

Fig. 2.

La rangée des zéros supérieurs désigne des noyaux idempotents; les rangées suivantes représentent des noyaux nilpotents. Les lignes verticales et obliques représentent des relations d'inclusion.

Un ensemble E représenté par la figure 1 ou la figure 2 est entièrement déterminé par la connaissance d'un seul de ses noyaux.

Deux noyaux non liés sont dits indépendants.

Appelons $\mathfrak{T}(E)$ l'idéal bilatère engendré par les noyaux de l'ensemble E.

Un ensemble E est dit de première catégorie s'il ne comporte aucun noyau nilpotent qui soit somme directe de plusieurs noyaux nilpotents ou s'il ne comporte aucun noyau nilpotent qui ne soit pas inclus dans un noyau idempotent. Ainsi, l'ensemble représenté par la figure 1 est de première catégorie.

Un ensemble E est dit de seconde catégorie, dans les autres cas. Ainsi, l'ensemble représenté par la figure 2 est de seconde catégorie.

Ceci posé, soit un anneau indexable $\mathfrak{A}$ décomposable en somme directe de composantes indexables :

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{A}_p.$$

Si une composante $\mathfrak{A}_1$ contient un noyau $\mathfrak{N}$ d'un ensemble E, elle contient tous les noyaux qui sont inclus dans $\mathfrak{N}$. Elle contient aussi tout $\mathfrak{N}'$ tel que $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$, *si* $\mathfrak{N}'$ *n'est pas nilpotent* car alors $\mathfrak{N}'$ n'est pas décomposable et figure dans une des composantes, soit $\mathfrak{A}_p$, mais si $p \neq 1$, l'intersection de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ serait nulle, ce qui est absurde.

Si $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$ et si $\mathfrak{N}'$ est nilpotent, $\mathfrak{A}_1$ qui contient $\mathfrak{N}$ peut ne pas contenir $\mathfrak{N}'$ (si par exemple $\mathfrak{N}'$ est somme directe de noyaux nilpotents contenus respectivement dans les $\mathfrak{A}_p$).

Il résulte de là que si l'ensemble E est de première catégorie, $\mathfrak{A}_1$ contient $\mathfrak{T}(E)$ dès que $\mathfrak{A}_1$ contient un seul noyau de E (nilpotent ou idempotent). Mais si E est de seconde catégorie, $\mathfrak{A}_1$ peut ne pas contenir tous les noyaux de E.

Examinons d'abord le cas où $\mathfrak{A}$ ne comporte que des ensembles de première catégorie et est décomposable en somme directe de composantes indexables indécomposables et contenant chacun un seul idéal $\mathfrak{T}(E)$. Soit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

Il y a k ensembles E. Posons

$$\mathfrak{T}_p = \mathfrak{T}(E_p) \subseteq \mathfrak{A}_p.$$

L'annihilateur de $\mathfrak{T}_1$ dans $\mathfrak{A}$ contient

$$\mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k$$

ainsi que $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ annihilateur de $\mathfrak{T}_1$ dans le sous-anneau $\mathfrak{A}_1$.

$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ contient tous les noyaux nilpotents de l'ensemble E_1. De deux choses l'une :

— ou bien $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ est nilpotent, et comme

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1) \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k,$$

on a, pour une certaine valeur de l'entier s :

$$\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

En d'autres termes, l'annihilateur de $\mathfrak{T}_1$ admet une puissance indexable;

— ou bien $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ n'est pas nilpotent, donc admet une puissance idempotente et

$$\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{F}_1^s(\mathfrak{T}_1) \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k$$

est idempotent et n'est indexable pour aucune valeur de s.

Supposons maintenant que l'anneau indexable $\mathfrak{A}$ comporte un noyau nilpotent somme directe de plusieurs noyaux nilpotents. Par exemple, conformément à la figure 2, $\mathfrak{N}'$ est somme directe de $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{N}'_3$ et $\mathfrak{N}'$ n'est contenu dans aucun autre noyau. Un tel ensemble pourrait être « éclaté » en trois ensembles comportant, entre autres, respectivement $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{N}_3\mathfrak{N}'_3$; quant au noyau $\mathfrak{N}'$, il ne figure dans aucun des ensembles partiels.

L'étude de la décomposition dans le cas général paraît donc assez complexe. Je me contente d'indiquer une condition suffisante de décomposition dans le cas simple où tous les ensembles E sont de première catégorie :

3.13. Théorème. — *Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ (d'indice fini) est décomposable en somme directe de sous-anneaux indexables et indécomposables si les conditions* *suivantes sont réalisées :*

— *Les ensembles* E *sont tous de première catégorie :*

— *L'annihilateur de l'idéal* $\mathfrak{T}(\mathrm{E})$ *admet, pour tout ensemble* E, *une puissance idempotente qui est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite.*

Démonstration. — Soit E_1 un ensemble quelconque de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$ est, par hypothèse, et pour une certaine valeur de l'entier s, idempotent et est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite. Par suite cet idéal bilatère possède une identité e et est indexable. On a

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1).$$

Je dis que $\mathfrak{A}_1$ contient tous les noyaux de l'ensemble E_1. Soit $\mathfrak{N}$ un tel noyau : $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$ annihile $\mathfrak{N}$; si donc ces deux idéaux ont des éléments communs, ces éléments sont annihilés en particulier par l'identité e du premier, ce qui est impossible : $\mathfrak{N}$ figure par suite dans $\mathfrak{A}_1$. Comme d'autre part un ensemble E de première catégorie contient toujours un noyau idempotent, l'idéal $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_1)$ contient tous les ensembles autres que E_1 en particulier tous les noyaux idempotents ne figurant pas dans E_1. Une puissance quelconque de cet idéal contient donc tous ces noyaux idempotents, par suite tous les ensembles autres que E. Ceci prouve que $\mathfrak{A}_1$ ne contient que le seul ensemble E_1 et est par suite indécomposable (en somme directe de sous-anneaux indexables).

On continue ensuite la décomposition de l'anneau $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$ comme on a fait pour $\mathfrak{A}$ en remarquant que les hypothèses faites sur $\mathfrak{A}$ restent valables pour cet anneau car si E est un ensemble distinct de E_1, l'annihilateur de $\mathfrak{T}(\mathrm{E})$ dans $\mathfrak{A}$ est la somme directe de $\mathfrak{A}_1$ et de l'annihilateur de $\mathfrak{T}(\mathrm{E})$ dans le sous-anneau $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$.

Remarque. — On peut, dans le théorème précédent, lever quelque peu la restriction selon laquelle les ensembles E sont tous de première catégorie.

S'il existe un noyau $\mathfrak{N}$ nilpotent, non inclus dans un autre noyau et somme directe de h noyaux nilpotents, ces derniers sont complètement déterminés et l'on peut supprimer le noyau $\mathfrak{N}$ dans l'ensemble des noyaux de l'anneau $\mathfrak{A}$. L'ensemble E qui comprend $\mathfrak{N}$ peut être « éclaté » en h ensembles possédant les mêmes propriétés que les ensembles de première catégorie, une fois $\mathfrak{N}$ supprimé, à supposer que chacun de ces ensembles partiels possède un noyau idempotent au moins. Dans ces conditions, le théorème précédent reste valable.

3.14. Unicité de la décomposition. — Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème précédent. Je dis que la décomposition en sous-anneaux indexables et indécomposables ne peut se faire que d'une seule manière.

Soit

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{B}_p$$

une autre décomposition de l'anneau $\mathfrak{A}$ en sous-anneaux indexables et indécomposables. Si $\mathfrak{B}_1$ comporte un noyau de l'ensemble E_1 on a vu que $\mathfrak{B}_1$ contient tout E_1, donc $\mathfrak{T}(E_1)$. Supposons que $\mathfrak{B}_1$ contient aussi $\mathfrak{T}(E_2)$. Comme l'hypothèse sur l'annihilateur de $\mathfrak{T}(E)$ dans le théorème précédent s'applique à l'anneau $\mathfrak{B}_1$, ce dernier serait décomposable en somme directe d'au moins deux sous-anneaux indexables, ce qui contredit l'hypothèse, par suite $\mathfrak{B}_1$ ne contient que $\mathfrak{T}(E_1)$ et il y a autant de composantes $\mathfrak{B}_p$ que de composantes $\mathfrak{A}_p$. Supposons que $\mathfrak{B}_p$ contient $\mathfrak{T}(E_p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$. L'égalité

$$\mathfrak{B}_p = \mathfrak{A}_p$$

résulte alors immédiatement des égalités

$$\mathfrak{L}^s(\mathfrak{T}_p) = \sum_{q \neq p} \oplus \mathfrak{A}_q = \sum_{q \neq p} \oplus \mathfrak{B}_q$$

valables pour toute valeur de l'entier p.