Annales scientifiques de l'É.N.S.

Silviu Teleman

Sur la représentation linéaire des groupes topologiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, nº 4 (1957), p. 319-339

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_4_319_0>

SUR LA REPRÉSENTATION LINÉAIRE

DES

GROUPES TOPOLOGIQUES

PAR M. SILVIU TELEMAN.

Nous nous proposons de démontrer dans ce Mémoire que tout groupe topologique séparé est isomorphe à un groupe d'automorphismes de l'algèbre de Banach des fonctions complexes continues définies sur un espace compact, le groupe étant pris avec la topologie de la convergence simple. Nous prouvons ensuite quelques propriétés de la représentation trouvée.

Dans le premier paragraphe, nous montrons (¹) que la structure uniforme gauche d'un groupe topologique est définie par une famille d'écarts, invariants à gauche (c'est-à-dire, par les translations à gauche du groupe).

Dans le deuxième paragraphe, nous construisons une compactification (²) d'un groupe topologique séparé quelconque, en général strictement plus restreinte que la compactification de Čech.

Dans le troisième paragraphe, nous montrons que toute translation à gauche du groupe se prolonge, d'une manière unique, par continuité, sur la compactification construite dans le deuxième paragraphe.

Dans le quatrième paragraphe, après avoir topologisé le groupe des translations prolongées, nous étudions la relation de ce groupe avec l'espace sur lequel il opère. Nous démontrons aussi que tout groupe topologique séparé est isomorphe à un groupe d'homéomorphismes d'un espace compact, le groupe étant pris avec la topologie de la convergence uniforme (théorème 2).

Dans le cinquième paragraphe (théorème 3) nous montrons que tout groupe topologique séparé est isomorphe à un groupe Γ d'automorphismes de l'algèbre de Banach des fonctions continues complexes, définies sur un espace compact, la structure uniforme gauche du groupe étant isomorphe à la structure uniforme

(¹) Ce théorème est énoncé dans [1] sans démonstration.

(²) C'est-à-dire une extension compacte de l'espace complètement régulier (du groupe).

de la convergence simple. Les théorèmes 2 et 3 sont les principaux résultats de ce Mémoire.

Dans le sixième paragraphe nous considérons une certaine compactification d'un groupe topologique séparé, que nous avons nommé compactification naturelle du groupe. Nous étudions ensuite la liaison de cette compactification avec les fonctions presque périodiques du groupe.

Le septième paragraphe est dédié à l'algèbre définie par le groupe Γ.

Le huitième paragraphe contient des théorèmes sur les caractères du groupe.

Dans le neuvième paragraphe, nous démontrons quelques théorèmes sur la complétion d'un groupe topologique séparé, par rapport à la structure uniforme gauche, retrouvant, en particulier, des résultats connus.

Dans le dixième paragraphe, nous étudions le groupe des opérateurs adjoints des opérateurs de Γ, en obtenant un théorème de représentation sur le dual de l'algèbre du paragraphe 5.

On sait que tout groupe localement compact admet un système complet de représentations unitaires irréductibles ([3]); ce théorème s'établit grâce à l'existence de la mesure de Haar, ce qui n'a pas lieu pour un groupe topologique quelconque.

On peut soupçonner que ce théorème ne soit plus vrai pour tout groupe topologique séparé, mais on peut espérer que tout groupe topologique séparé admette un système complet de représentations irréductibles, isométriques (c'est-à-dire dans les groupes des isométries d'une famille d'espaces de Banach).

Pour établir ce théorème, on devrait trouver les composantes irréductibles de la représentation linéaire décrite plus bas (théorème 3), mais cette question paraît assez difficile et nous ne sommes parvenu à aucun résultat.

Ce Mémoire a été présenté pour obtenir le diplôme d'État, en juin 1957, sous la direction du Professeur Alexandre Ghika. Nous le remercions pour les indications et les conseils précieux qu'il nous a donnés.

1. Les écarts invariants a gauche associés a un groupe topologique. — Soit G un groupe topologique, e l'élément unité du groupe et $\mathcal{V}$ le filtre des voisinages de e. On sait qu'au groupe G on associe la structure uniforme gauche $\mathcal{U}_l$, dont un système fondamental d'entourages est formé de toutes les parties de $G \times G$, définies par

$$U(V) = \{(x, y);\ x^{-1}y \in V\},$$

V étant un élément arbitraire de $\mathcal{V}$; la structure uniforme $\mathcal{U}_l$ est compatible avec la topologie de G, et les entourages U(V) sont invariés par les extensions des translations à gauche de G[4]. On sait aussi [1], que la structure uniforme $\mathcal{U}_l$ peut être définie par une famille d'écarts bornés, invariants à gauche. Parce

([3]) Théorème de Gelfand-Raïkov.

que, dans [1], cette affirmation est faite sans démonstration, étant proposée comme exercice, nous allons lui esquisser la démonstration.

En effet, soit V un voisinage symétrique de e, et soit V_i, $i \in N$, une suite de voisinages symétriques de e, obtenus par récurrence et soumis aux conditions suivantes : $V_1 = V$, $V_n^2 \subset V_{n-1}$, $i \in N$. Les ensembles $V_i (i \in N)$ forment un système fondamental de voisinages de e, dans une topologie $\mathcal{T}_V$, moins finie que la topologie $\mathcal{T}$ de G.

La topologie $\mathcal{T}$ coïncide avec la borne supérieure des topologies $\mathcal{T}_V$, $V \in \mathcal{V}$, et la structure uniforme gauche du groupe G, pris avec la topologie $\mathcal{T}$, coïncide avec la borne supérieure des structures uniformes gauches du groupe G, correspondantes aux topologies $\mathcal{T}_V$, avec $V \in \mathcal{V}$.

Soit I_V le plus petit ensemble fermé (dans $\mathcal{T}_V$) du groupe G, contenant e. I_V est un diviseur normal du groupe G, topologisé avec $\mathcal{T}_V$, et G/I_V est un groupe topologique séparé, ayant un système fondamental dénombrable de voisinages pour son élément unité, donc il est métrisable [1], et admet par suite une distance invariante à gauche, bornée, définissant la structure uniforme gauche. Nous en tirons immédiatement que la structure uniforme gauche du groupe G, pris avec la topologie $\mathcal{T}_V$, est définie par un écart borné, invariant à gauche. Ceci suffit pour en déduire l'affirmation faite plus haut.

2. LA COMPACTIFICATION ASSOCIÉE A UNE FAMILLE D'ÉCARTS. — Soit $\mathcal{F} = (f_\iota)_{\iota \in I}$ une famille saturée d'écarts bornés, invariants à gauche, définissant la structure uniforme gauche du groupe G, lequel, désormais, sera supposé séparé. Évidemment, nous pouvons supposer que tous les écarts sont majorés sur $G \times G$ par la constante 1, sans en restreindre la généralité. Donc, les fonctions f_ι ont les propriétés suivantes :

$$f_\iota(x, x) = 0 \qquad (\iota \in I;\ x \in G),$$

$$f_\iota(x, y) = f_\iota(y, x) \qquad (\iota \in I;\ x, y \in G),$$

$$f_\iota(x, y) \leqq f_\iota(x, z) + f_\iota(z, y) \qquad (\iota \in I;\ x, y, z \in G),$$

$$f_\iota(x, y) = 0 \qquad \text{pour tout } \iota \in I \Rightarrow x = y,$$

$$f_\iota(x, y) \leqq 1 \qquad (\iota \in I;\ x, y \in G),$$

$$f_\iota(ax, ay) = f_\iota(x, y) \qquad (\iota \in I;\ a, x, y \in G).$$

Il y a, évidemment plusieurs familles $\mathcal{F}$ de cette sorte, et il y en a une famille $\mathcal{F}_0$, composée de tous les écarts continus sur G, invariants à gauche, et bornés sur $G \times G$ par 1.

Nous allons considérer maintenant une famille $\mathcal{F}$ d'écarts, ayant les propriétés déjà écrites, saturée, mais en reste quelconque. A l'aide de $\mathcal{F}$ nous allons construire une compactification de l'espace G.

Pour cela nous formons le produit cartésion $G \times I$, et, à chaque paire $(x, \iota) \in G \times I$, nous attachons une fonction $\varphi_{x,\iota}$, définie sur G, prenant des valeurs de $[0, 1]$, donnée par $\varphi_{x,\iota}(y) = f_\iota(x, y)$; $\varphi_{x,\iota}$ est une application uniformément continue de G, uniformisé avec $\mathfrak{U}_l$, dans $[0, 1]$. Pour chaque $(x, \iota) \in G \times I$, prenons un exemplaire de l'intervalle $[0, 1]$ et, en le notant avec $K_{x,\iota}$, formons le produit $K = \prod_{(x,\iota) \in G \times I} K_{x,\iota}$. Soit φ l'application de G dans K, définie par $\varphi(y) = (\varphi_{x,\iota}(y))_{(x,\iota) \in G \times I}$, pour $y \in G$. φ est une application continue de G dans K. Elle est aussi biunivoque, parce que, si l'on avait $\varphi_{x,\iota}(y) = \varphi_{x,\iota}(z)$ pour tout $(x, \iota) \in G \times I$, on aurait $\varphi_{y,\iota}(z) = 0$, pour tout $\iota \in I$, donc $z = y$.

Soit $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$ la structure uniforme la moins fine sur G, pour laquelle toutes les applications $\varphi_{x,\iota}$, sont uniformément continues. On en déduit des considérations faites plus haut, que la structure uniforme $\mathfrak{U}_l$ est plus fine que la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$: $\mathfrak{U}_l \geqq \mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, et, comme on peut l'observer immédiatement, la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$ est l'image, par l'application φ^{-1}, de la trace sur $\varphi(G)$, de la structure uniforme d'espace compact, de l'espace K. Nous en tirons que l'espace G, uniformisé avec $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, est précompact.

Soit $G_{\mathcal{F}}$ l'espace compact obtenu par la complétion de G par rapport à la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$. D'après ce qu'on sait, $G_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des filtres de Cauchy sur G, l'équivalence étant établie de la manière suivante : deux filtres de Cauchy $\mathring{x}_1$ et $\mathring{x}_2$ (par rapport à la structure $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$) sont équivalents si, et seulement si, on a $\lim_{\mathring{x}_1} \varphi_{x,\iota}(y) = \lim_{\mathring{x}_2} \varphi_{x,\iota}(y)$ pour tout $(x, \iota) \in G \times I$. Nous écrirons $\lim_{\mathring{x}} \varphi_{x,\iota}(y) = \mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{x})$, pour tout filtre de Cauchy $\mathring{x}$. Évidemment, les fonctions $\varphi_{x,\iota}$ étant uniformément continues dans la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, ces limites existent.

Si $\dot{x}$ est une classe de filtres de Cauchy équivalents, nous posons $\dot{\varphi}_{x,\iota}(\dot{x}) = \mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{x})$, où $\mathring{x}$ est un représentant de $\dot{x}$; la définition de $\dot{\varphi}_{x,\iota}$ est correcte, étant indépendante du choix de $\mathring{x}$ dans $\dot{x}$.

Si $x \in G$ est un point quelconque de G, et $\mathcal{V}(x)$ le filtre de voisinages de x (dans $\mathfrak{T}$), $\mathcal{V}(x)$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$; en notant avec $\psi(x) = \dot{x}$ la classe qui lui correspond dans G, l'application ψ est un isomorphisme de G, uniformisé avec $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, avec un espace $\psi(G) \subset G_{\mathcal{F}}$, dense dans $G_{\mathcal{F}}$. Dans les considérations suivantes, pour simplifier le langage, nous identifierons quelquefois G avec $\psi(G)$, par cet isomorphisme ψ.

L'espace $G_{\mathcal{F}}$, uniformisé avec la structure uniforme la moins fine, pour laquelle toutes les applications $\dot{\varphi}_{x,\iota}$ sont uniformément continues, est un espace compact.

Montrons que la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, sur G, est compatible avec la topologie $\mathfrak{T}$ de G. Pour cela, soit $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$ la topologie induite sur G par la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$. De $\mathfrak{U}_l \geqq \mathfrak{U}_{\mathcal{F}}$, nous obtenons $\mathfrak{T} \geqq \mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$. Pour montrer qu'on a $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}} \geqq \mathfrak{T}$, soit $x \in G$ et U un voisinage de x dans la topologie $\mathfrak{T}$. Il y a alors un indice $\iota \in I$, et un nombre $\varepsilon > 0$, tels que U contienne l'ensemble $V = \{y; y \in G, f_\iota(x, y) < \varepsilon\}$.

Soit

$$V_{x,\iota}(\varepsilon) = \{(y, z);\ (y, z) \in G \times G,\ |\varphi_{x,\iota}(y) - \varphi_{x,\iota}(z)| < \varepsilon\},$$

entourage de la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$. Nous avons évidemment $V_{x,\iota}(\varepsilon)(x) = V$, et donc U est un voisinage de x dans $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$, ce qui prouve que $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}} \geq \mathfrak{T}$, donc on a $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{T}$. Nous dirons que $G_{\mathcal{F}}$ est la compactification de G, associée à la famille $\mathcal{F}$.

3. Le prolongement des translations a gauche du groupe G, de l'espace G, a l'espace $G_{\mathcal{F}}$. — Considérons maintenant les translations à gauche du groupe G, c'est-à-dire, pour chaque $a \in G$, la transformation T_a de G sur G, définie par $T_a x = ax$, $x \in G$. L'ensemble de toutes les translations T_a, avec $a \in G$, avec la composition des applications comme loi interne de composition, devient un groupe Γ de transformations de G, algébriquement isomorphe à G. Nous topologisons Γ en transportant sur Γ la topologie de G, par l'isomorphisme $a \to T_a$.

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les transformations de Γ peuvent être prolongées sur $G_{\mathcal{F}}$, devenant ainsi des homéomorphismes de l'espace $G_{\mathcal{F}}$.

En effet, soit $\dot{x} \in G_{\mathcal{F}}$, et soit $\mathring{x} \in \dot{x}$; soit $\mathring{T}_a$ la transformation qui porte le filtre $\mathring{x}$ sur le filtre $\mathring{T}_a(\mathring{x})$, dont les ensembles sont tous les ensembles de la forme aX, où $X \in \mathring{x}$. $\mathring{x}$ étant un filtre de Cauchy sur G, par rapport à $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, $\mathring{T}_a(\mathring{x})$ est un filtre de Cauchy sur G, par rapport à la même structure uniforme.

En effet, quel que soit le nombre naturel n et quels que soient $x_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\iota_l \in I$, $l = 1, 2, \ldots, n$, il y a dans $\mathring{x}$ un ensemble A, tel que si y', $y'' \in A$, on ait

$$|\varphi_{a^{-1}x_k,\iota_k}(y') - \varphi_{a^{-1}x_k,\iota_k}(y'')| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

ε étant un nombre positif donné *a priori*. Mais ceci signifie qu'on a

$$|\varphi_{x_k,\iota_k}(ay') - \varphi_{x_k,\iota_k}(ay'')| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

pour toute paire y', $y'' \in A$, donc $|\varphi_{x_k,\iota_k}(z') - \varphi_{x_k,\iota_k}(z'')| < \varepsilon$ pour toute paire z', $z'' \in aA$. Ceci suffit pour avoir démontré que $\mathring{T}_a(\mathring{x})$ est un filtre de Cauchy sur G, par rapport à $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$.

Montrons maintenant que si $\mathring{x}_1$ et $\mathring{x}_2$ sont deux filtres de Cauchy équivalents, alors les filtres $\mathring{T}_a(\mathring{x}_1)$ et $\mathring{T}_a(\mathring{x}_2)$ sont aussi équivalents. En effet l'équivalence est exprimée par la relation

$$\mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{x}_1) = \mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{x}_2) \qquad \text{pour tout } (x, \iota) \in G \times I,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\mathring{x}_1} f_\iota(x, y) = \lim_{\mathring{x}_2} f_\iota(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, \iota) \in G \times I.$$

Mais on a

$$\lim_{\mathring{T}_a(\mathring{x})} f_\iota(x, y) = \lim_{\mathring{x}} f_\iota(x, ay) = \lim_{\mathring{x}} f_\iota(a^{-1}x, y) = \mathring{\varphi}_{a^{-1}x,\iota}(\mathring{x}) = \mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{T}_a(\mathring{x})),$$

donc, si l'on a

$$\mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{x}_1) = \mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{x}_2), \qquad \text{pour tout } (x, \iota) \in G \times I,$$

on a aussi

$$\mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{T}_a(\mathring{x}_1)) = \mathring{\varphi}_{x,\iota}(\mathring{T}_a(\mathring{x}_2)) \qquad \text{pour tout } (x, \iota) \in G \times I,$$

et réciproquement. Par suite, les filtres $\mathring{T}_a(\mathring{x}_1)$ et $\mathring{T}_a(\mathring{x}_2)$ sont équivalents si et seulement si les filtres $\mathring{x}_1$ et $\mathring{x}_2$ sont équivalents.

Nous en déduisons que si nous faisons correspondre à $T_a \in \Gamma$ la transformation $\dot{T}_a$ qui porte la classe de filtres de Cauchy équivalents $\dot{x} \in G_{\mathcal{F}}$ sur la classe $\dot{T}_a(\dot{x})$, ayant $\mathring{T}_a(\mathring{x})$ pour représentant, $\mathring{x}$ étant un représentant quelconque de la classe $\dot{x}$, nous aurons établi une application univoque de $G_{\mathcal{F}}$ dans lui-même. Si $\mathcal{V}(x)$ est le filtre des voisinages d'un point quelconque de G, il lui correspond un point $\psi(x) = \dot{x}$ dans $G_{\mathcal{F}}$, et nous avons $\dot{T}_a(\dot{x}) = \psi(ax)$, ce qui montre que $\dot{T}_a$ peut être considéré comme un prolongement de T_a, si nous identifions G avec $\dot{G} = \psi(G)$, par l'isomorphisme $x \to \psi(x)$.

Montrons maintenant que pour tout $a \in G$, $\dot{T}_a$ est un homéomorphisme de $G_{\mathcal{F}}$ sur lui-même. En effet, en premier lieu, $\dot{T}_a$ est une application continue : soit $x_0 \in G_{\mathcal{F}}$ et soit $y_0 = \dot{T}_a(x_0)$. Un voisinage quelconque V de y_0, d'un système fondamental de voisinages, est formé par l'ensemble de tous les points y qui vérifient les relations $|\dot{\varphi}_{x_k,\iota_k}(y) - \dot{\varphi}_{x_k,\iota_k}(y_0)| < \varepsilon$, avec $k = 1, 2, \ldots, n$, n étant un nombre naturel, ε un nombre positif, x_k et ι_k respectivement n points de G et n indices de I, choisis arbitrairement, mais fixés avec V.

L'ensemble des points $x \in G_{\mathcal{F}}$, vérifiant les relations

$$|\dot{\varphi}_{a^{-1}x_k,\iota_k}(x) - \dot{\varphi}_{a^{-1}x_k,\iota_k}(x_0)| < \varepsilon,$$

est un voisinage de x_0, qui, par l'application $\dot{T}_a$, vient sur V, ce qui prouve que $\dot{T}_a$ est une application continue, ouverte, quel que soit $a \in G$.

En tenant compte qu'on a $\dot{T}_a\dot{T}_b = \dot{T}_{ab}$, $\dot{T}_a^{-1} = \dot{T}_{a^{-1}}$, ce qu'on montre aisément, nous déduisons que $\dot{T}_a$ est une application biunivoque de $G_{\mathcal{F}}$ sur lui-même, continue et ouverte, donc elle est un homéomorphisme de $G_{\mathcal{F}}$ sur lui-même.

Des dernières relations on déduit que l'ensemble des transformations $\dot{T}_a (a \in G)$, forme un groupe $\dot{\Gamma}$, algébriquement isomorphe à G, ce qu'on voit du fait que le groupe $\dot{\Gamma}$ est un groupe effectif.

Nous avons obtenu par suite le résultat suivant :

Tout groupe est algébriquement isomorphe à un groupe effectif de transformations d'un espace compact.

Nous transporterons maintenant sur $\dot{\Gamma}$ la topologie de G, par l'isomorphisme $a \to \dot{T}_a$.

La liaison de la topologie de $\dot{\Gamma}$ avec celle de l'espace $G_{\mathcal{F}}$ sera étudiée dans le paragraphe suivant.

4. LA CONTINUITÉ DU GROUPE $\dot{\Gamma}$. — On peut démontrer qu'une opération analogue à celle faite pour $G_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire le prolongement des homéomorphismes $x \rightarrow ax$ de l'espace G à la compactification $G_{\mathcal{F}}$, peut être faite aussi bien si l'on prend au lieu de la compactification $G_{\mathcal{F}}$, la compactification de Čech de l'espace G, en obtenant ainsi un groupe d'homéomorphismes de cette compactification, isomorphe à G. En topologisant ce groupe d'homéomorphismes avec l'image de la topologie de G par l'isomorphisme de ces deux groupes, on obtient un groupe topologique d'homéomorphismes de la compactification de Čech, mais sur cette compactification la continuité du groupe d'homéomorphismes est trop faible.

Le groupe $\dot{\Gamma}$, opérant sur $G_{\mathcal{F}}$, est un groupe continu de transformations de cet espace, ce que l'on déduit du théorème 2, en tenant compte que si l'on topologise un groupe d'homéomorphismes d'un espace uniforme à l'aide de la structure de la convergence uniforme, on obtient un groupe continu de transformations, de l'espace considéré.

Pour tout $x \in G_{\mathcal{F}}$, nous noterons avec H_x l'application de $\dot{\Gamma}$ dans $G_{\mathcal{F}}$ définie par $H_x(T) = T^{-1}(x)$ pour $T \in \dot{\Gamma}$. Nous démontrerons maintenant le

THÉORÈME 1. — *La structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$ est la moins fine de toutes les structures uniformes sur $\dot{\Gamma}$, pour lesquelles la famille d'applications $(H_x)_{x \in G_{\mathcal{F}}}$ est uniformément équicontinue.*

Démonstration. — L'espace $G_{\mathcal{F}}$ étant compact, il est uniformisable d'une seule manière. Sa structure uniforme est la moins fine de toutes les structures uniformes pour lesquelles les applications $\dot{\varphi}_{x,\iota}$ avec $(x, \iota) \in G \times I$, sont uniformément continues.

Il en résulte que l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$ des fonctions continues complexes définies sur $G_{\mathcal{F}}$, normée avec $\| \varphi \| = \sup\limits_{x \in G_{\mathcal{F}}} | \varphi(x) |$, est générée par les fonctions $\dot{\varphi}_{x,\iota}$. En effet, les fonctions de la famille $(\dot{\varphi}_{x,\iota})_{(x,\iota) \in G \times I}$ séparent l'espace $G_{\mathcal{F}}$, ce qui résulte même de la définition de l'espace $G_{\mathcal{F}}$. Puis, pour tout $x \in G_{\mathcal{F}}$, il y a une fonction $\dot{\varphi}_{x,\iota}$, non nulle en ce point parce que, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait un point $x_0 \in G_{\mathcal{F}}$ tel que $\dot{\varphi}_{x,\iota}(x_0) = 0$, quel que soit $(x, \iota) \in G \times I$, donc x_0 serait une classe de filtres de Cauchy relativement à la structure uniforme $\mathcal{U}_l$, équivalents, par cette structure, au filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x, quel que soit $x \in G$, ce qu'est absurde si G ne se réduit pas à l'élément unité, cas que nous écarterons; avec le théorème de Weierstrass-Stone, l'affirmation faite plus haut devient évidente.

Donc nous obtenons un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de l'espace $G_{\mathcal{F}}$ en considérant toutes les parties de $G \times G$, données par

$$V = \{ (x_1, x_2) ; (x_1, x_2) \in G_{\mathcal{F}} \times G_{\mathcal{F}'} \mid \dot{\varphi}_{x_k, \iota_k}(x_1) - \dot{\varphi}_{x_k, \iota_k}(x_2) \mid < \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, n \},$$

n étant un nombre naturel, ε un nombre positif, $x_k n$ points de G, $\iota_k n$ indices de I, dont le choix est arbitraire, mais fixé avec V.

Démontrons maintenant que les fonctions $\dot{\varphi}_{x, \iota}(\dot{x})$, avec $\iota \in I$, $\dot{x} \in G_{\mathcal{F}}$ fixés, sont des applications uniformément continues de G dans $[0, 1]$, G étant uniformisé avec $\mathfrak{U}_l$, l'uniformité étant égale par rapport à $\dot{x} \in G_{\mathcal{F}}$. En effet, nous avons

$$\dot{\varphi}_{a, \iota}(\dot{x}) = \mathring{\varphi}_{a, \iota}(\mathring{x}) = \lim_{\mathring{x}} \varphi_{a, \iota}(x) = \lim_{\mathring{x}} f_\iota(a, x),$$

où $\mathring{x}$ est un représentant de la classe $\dot{x}$. Mais on a

$$| f_\iota(a_1, x) - f_\iota(a_2, x) | \leqq f_\iota(a_1, a_2)$$

donc, en passant à la limite, par le filtre $\mathring{x}$, on aura

$$| \dot{\varphi}_{a_1, \iota}(\dot{x}) - \dot{\varphi}_{a_2, \iota}(\dot{x}) | \leqq f_\iota(a_1, a_2),$$

ce que prouve l'affirmation.

Observons maintenant qu'on a

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{x, \iota}(\dot{T}_a(\dot{x})) &= \mathring{\varphi}_{x, \iota}(\mathring{T}_a(\mathring{x})) = \lim_{\mathring{T}_a(\mathring{x})} f_\iota(x, y) \\ &= \lim_{\mathring{x}} f_\iota(x, az) = \lim_{\mathring{x}} f_\iota(a^{-1}x, z) = \mathring{\varphi}_{a^{-1}x, \iota}(\mathring{x}) = \dot{\varphi}_{a^{-1}x, \iota}(\dot{x}), \end{aligned}$$

donc

$$| \dot{\varphi}_{x_k, \iota_k}(\dot{T}_a^{-1}(\dot{x})) - \dot{\varphi}_{x_k, \iota_k}(\dot{T}_a^{-1}(\dot{x})) | = | \dot{\varphi}_{a_1 x_k, \iota_k}(\dot{x}) - \dot{\varphi}_{a_2 x_k, \iota_k}(\dot{x}) | \leqq f_{\iota_k}(a_1 x_k, a_2 x_k)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons maintenant l'ensemble

$$U = \{ (a_1, a_2) ; f_{\iota_k}(a_1 x_k, a_2 x_k) < \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, n \},$$

U est un entourage de la structure uniforme gauche du groupe G. En effet, soit

$$\mathfrak{U} = \{ a ; a \in G, f_{\iota_k}(a x_k, x_k) < \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, n \}.$$

$\mathfrak{U}$ est un voisinage de e dans G. Soit $\mathcal{V}$ l'entourage de la structure uniforme gauche du groupe G, correspondant au voisinage $\mathfrak{U}$. On a

$$(a_1, a_2) \in \mathcal{V} \Leftrightarrow a_2^{-1} a_1 \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow f_{\iota_k}(a_2^{-1} a_1 x_k, x_k) < \varepsilon$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in U$, donc on a $U = \mathcal{V}$.

Il en résulte que, quel que soit l'entourage V de la structure uniforme de l'espace $G_{\mathcal{F}}$, il y a un entourage U de la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$, tel que

$$(T_1, T_2) \in U \Rightarrow (H_x(T_1), H_x(T_2)) \in V, \qquad x \in G_{\mathcal{F}},$$

U étant indépendant de x. Donc nous avons démontré que la famille d'applications $(H_x)_{x\in G}$ est uniformément équicontinue dans la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$, donc la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$ est plus fine que la moins fine des structures uniformes sur $\dot{\Gamma}$ pour lesquelles la famille d'applications $(H_x)_{x\in G_{\mathcal{F}}}$ est uniformément équicontinue. Pour montrer la coïncidence des deux structures, soit V un entourage, d'un système fondamental d'entourages, de la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$, donné par

$$V = \{ (T_1, T_2) ; T_i \in \dot{\Gamma}, i = 1, 2 ; T_1^{-1} T_2 \in \mathcal{V}_0 \},$$

où $\mathcal{V}_0$ est un voisinage arbitraire de l'élément unité du groupe $\dot{\Gamma}$.

Un entourage d'un système fondamental d'entourages de la structure uniforme la moins fine, sur $\dot{\Gamma}$, pour laquelle la famille d'applications $(H_x)_{x\in G_{\mathcal{F}}}$ est uniformément équicontinue, est donné par

$$W = \{ (T_1, T_2) ; (T_1^{-1}(x), T_2^{-1}(x)) \in U_0, x \in G_{\mathcal{F}} \},$$

où U_0 est un entourage arbitraire de la structure uniforme de $G_{\mathcal{F}}$. En identifiant maintenant G à son image dans $G_{\mathcal{F}}$ par ψ, (§ 2), choisissons U_0 de telle manière que la section $U_0(e)$ intersecte G dans $\mathcal{V}_0$: $U_0(e) \cap G \subset \mathcal{V}_0$. Par suite, si $(T_1, T_2) \in W$, nous aurons $(T_1^{-1}(x), T_2^{-1}(x)) \in U_0$ pour tout $x \in G_{\mathcal{F}}$. Si l'on a $T_i = T_{a_i} (i = 1, 2)$, a_i étant un élément convenable de G, en prenant $x = a_2$, on aura $(T_1^{-1} T_2(e), e) \in U_0$, donc $a_1^{-1} a_2 \in \mathcal{V}_0$, c'est-à-dire $(T_1, T_2) \in V$, donc $W \subset V$.

Ceci prouve que tout entourage de la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$ contient un entourage de la structure uniforme la moins fine des structures uniformes sur $\dot{\Gamma}$, pour lesquelles la famille $(H_x)_{x\in G_{\mathcal{F}}}$ est uniformément équicontinue ; donc cette dernière est plus fine que la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$. Le théorème 1 est démontré.

Nous prouverons maintenant la variante suivante du théorème précédent :

THÉORÈME 2. — *Tout groupe topologique séparé est isomorphe à un groupe effectif d'homéomorphismes d'un certain espace compact, la structure uniforme droite du groupe étant isomorphe à la structure uniforme de la convergence uniforme sur l'espace compact.*

Démonstration. — Le groupe G est, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, isomorphe à un groupe $\dot{\Gamma}$ effectif d'homéomorphismes de l'espace compact $G_{\mathcal{F}}$. De la démonstration du théorème 1 il en résulte qu'un système fondamental d'entourages de la structure uniforme droite du groupe $\dot{\Gamma}$ est donné par l'ensemble des parties de $\dot{\Gamma} \times \dot{\Gamma}$ définies par

$$W = \{ (T_1, T_2) ; (T_1^{-1}(x), T_2^{-1}(x)) \in U_0, x \in G_{\mathcal{F}} \},$$

où U_0 parcourt la structure uniforme de l'espace $G_{\mathcal{F}}$.

En tenant compte de ce que l'application $T \to T^{-1}$ établit un isomorphisme de la structure uniforme gauche du groupe $\dot{\Gamma}$ sur sa structure uniforme droite, nous déduisons que l'ensemble de toutes les parties de $\dot{\Gamma} \times \dot{\Gamma}$, données par

$$W = \{ (T_1, T_2) ; (T_1(x), T_2(x)) \in U_0, x \in G_{\mathcal{F}} \},$$

où U_0 parcourt le filtre de la structure uniforme de l'espace $G_{\mathcal{F}}$, est un système fondamental d'entourages de la structure uniforme droite du groupe $\dot{\Gamma}$, donc cette structure coïncide avec la structure uniforme de la convergence uniforme sur $G_{\mathcal{F}}$, comme on le voit immédiatement. Le théorème 2 est prouvé.

5. La représentation linéaire des groupes topologiques séparés. — Dans ce paragraphe nous montrerons que tout groupe topologique séparé est isomorphe à un groupe linéaire.

Nous faisons quelques considérations préliminaires.

Soit K un espace compact, C(K) l'algèbre de Banach des fonctions continues complexes définies sur K; C(K) est normée par $\| \varphi \| = \sup_{x \in K} | \varphi(x) |$, $\varphi \in C(K)$.

On appelle automorphisme de l'algèbre C(K) une application biunivoque A de C(K) sur elle-même, ayant encore les propriétés

$$A(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 A \varphi_1 + \lambda_2 A \varphi_2,$$
$$A(\varphi_1 \varphi_2) = A\varphi_1 A\varphi_2.$$

L'algèbre C(K) étant semi-simple, d'un théorème connu [3] il en résulte que tout automorphisme est continu, donc les automorphismes de l'algèbre C(K) forment un groupe (multiplicatif) contenu dans l'algèbre des opérateurs linéaires continus de l'algèbre C(K). On montre aisément que ce groupe est contenu dans la frontière de la boule unité de l'algèbre normée des opérateurs linéaires sur C(K); en effet, tout automorphisme étant continu, avec le théorème de Gelfand, on voit que tout automorphisme de C(K) est produit par un homéomorphisme de K sur lui-même. Il est alors évident que pour tout automorphisme A et pour tout $\varphi \in C(K)$, on a $\| A\varphi \| = \| \varphi \|$, ce qui montre que tout automorphisme est une isométrie de l'agèbre C(K).

Comme on le fait d'habitude pour la représentation linéaire des groupes topologiques, nous considérerons que l'algèbre des opérateurs linéaires continus de C(K) est topologisée avec la structure uniforme de la convergence simple sur C(K).

L'algèbre $\mathcal{L}$ des opérateurs linéaires sur C(K), considérée comme espace vectoriel, devient ainsi un espace localement convexe avec les semi-normes $p_\varphi(T) = \| T\varphi \|$, $\varphi \in C(K)$. Dans ce qui suit, la place de K sera prise par $G_{\mathcal{F}}$.

Nous démontrons maintenant le

THÉORÈME 3. — *Tout groupe topologique séparé* G *est isomorphe à un groupe d'automorphismes* Γ *de l'algèbre* $C(G_{\mathcal{F}})$, $G_{\mathcal{F}}$ *étant un espace compact qui contient l'espace* G *comme sous-espace dense. La structure uniforme gauche du groupe* G *est isomorphe à la trace sur* Γ *de la structure uniforme de la convergence simple.*

Démonstration. — Le groupe $\dot{\Gamma}$ est algébriquement isomorphe à un groupe Γ d'automorphismes de $C(G_{\mathcal{F}})$. En effet, pour $\dot{T}_a \in \dot{\Gamma}$, et $\varphi \in C(G_{\mathcal{F}})$, posons $A_a\varphi$ pour désigner la fonction définie sur $G_{\mathcal{F}}$ par $(A_a\varphi)(x) = \varphi(\dot{T}_a^{-1}(x))$, avec $x \in G_{\mathcal{F}}$.

$\dot{T}_a$ étant un homéomorphisme de $G_{\mathcal{F}}$, A_a est une application de $C(G_{\mathcal{F}})$ dans elle-même. L'application est biunivoque et applique $C(G_{\mathcal{F}})$ sur elle-même, parce que A_a a comme inverse l'opérateur A_{a-1}.

Tout A_a est un automorphisme de $C(G_{\mathcal{F}})$, comme on le voit aisément. De même, on montre immédiatement qu'on a $A_aA_b = A_{ab}$, $A_a^{-1} = A_{a-1}$, par suite l'application $a \to A_a$ est un homomorphisme algébrique du groupe G. L'homomorphisme est un isomorphisme parce que le noyau d'ineffectivité du groupe Γ est banal. En effet, si l'on avait $A_a\varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in C(G_{\mathcal{F}})$, on aurait $a = e$.

Transportons sur Γ la topologie de G par l'isomorphisme $a \to A_a$. De cette manière Γ devient un groupe topologique isomorphe à G.

Comparons maintenant la structure uniforme gauche du groupe Γ à la trace, sur ce groupe, de la structure uniforme de la convergence simple sur $C(G_{\mathcal{F}})$. Nous montrerons que ces structures uniformes coïncident, donc le théorème sera démontré.

Un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de la convergence simple est donné par l'ensemble des parties de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ intersections finies d'ensembles de la forme

$$W(\varphi, \varepsilon) = \{(A_1, A_2);\ A_i \in \mathcal{L},\ i = 1, 2,\ \|A\varphi_1 - A_2\varphi\| < \varepsilon\},$$

où ε est un nombre positif et φ un élément quelconque de $C(G_{\mathcal{F}})$. Soit $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(\varphi_i, \varepsilon)$ un tel entourage, donné. $G_{\mathcal{F}}$ étant compact, et φ_i étant continue sur $G_{\mathcal{F}}$, elle est uniformément continue, donc, pour $\varepsilon > 0$, donné, il y a un entourage V de la structure uniforme de $G_{\mathcal{F}}$, tel que si $(x_1, x_2) \in V$, on ait $|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \varepsilon$. Du théorème 1 il en résulte qu'il y a un entourage U de la structure uniforme gauche du groupe Γ, tel que si $(\dot{T}_{a_1}, \dot{T}_{a_2}) \in U$, on ait $(\dot{T}_{a_1}^{-1}(x), \dot{T}_{a_2}^{-1}(x)) \in V$, pour tout $x \in G_{\mathcal{F}}$. Nous en déduisons qu'il y a un entourage de la structure uniforme gauche du groupe Γ, tel que si (A_{a_1}, A_{a_2}) lui appartient, on ait $|(A_{a_1}\varphi_i)(x) - (A_{a_2}\varphi_i)(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in G_{\mathcal{F}}$, et l'on aura par conséquence $\|A_{a_1}\varphi_i - A_{a_2}\varphi_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$; ceci signifie que la structure uniforme gauche de Γ est plus fine que la trace sur Γ de la structure uniforme de la convergence simple.

Pour démontrer l'identité des deux structures, nous montrerons maintenant que tout entourage V de la structure uniforme gauche du groupe Γ contient un entourage de la structure uniforme de la convergence simple.

Soit V un entourage de la structure uniforme gauche de Γ. Parce que nous avons supposé que la famille $\mathcal{F}$ est saturée, nous pouvons supposer que V est l'ensemble des paires (A_{a_1}, A_{a_2}) satisfaisant à la relation $f_\iota(a_1, a_2) < \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$. Soit $W = \{(A_{a_1}, A_{a_2});\ \| A_{a_1}\dot{\varphi}_{e,\iota} - A_{a_2}\dot{\varphi}_{e,\iota} \| < \varepsilon\}$. Si $(A_{a_1}, A_{a_2}) \in W$ nous aurons $|\dot{\varphi}_{e,\iota}(\dot{T}_{a_1}^{-1}(x)) - \dot{\varphi}_{e,\iota}(\dot{T}_{a_2}^{-1}(x))| < \varepsilon$, pour tout $x \in G_{\mathcal{F}}$, donc, si nous prenons $x = \dot{T}_{a_2}(e)$, nous aurons $\dot{\varphi}_{e,\iota}(\dot{T}_{a_2}^{-1}(x)) = \dot{\varphi}_{e,\iota}(e) = 0$, donc $\dot{\varphi}_{e,\iota}(\dot{T}_{a_1}^{-1}\dot{T}_{a_2}(e)) < \varepsilon$, c'est-à-dire $f_\iota(e, a_1^{-1}a_2) = f_\iota(a_1, a_2) < \varepsilon$, ce que montre que tout entourage de la structure uniforme gauche de Γ contient un entourage de la trace sur Γ de la structure uniforme de la convergence simple. Le théorème 3 est démontré.

Observons encore que si nous posons

$$g_\varphi(a_1, a_2) = \| A_{a_1}\varphi - A_{a_2}\varphi \|,$$

avec $a_1, a_2 \in G$, $\varphi \in C(G_{\mathcal{F}})$, l'ensemble $(g_\varphi)_{g \in C(G_{\mathcal{F}})}$ est une famille d'écarts sur G, bornés, invariants à gauche, définissant la structure uniforme gauche de G.

Le paragraphe suivant est dédié à l'étude de la compactification naturelle d'un groupe topologique séparé.

6. La compactification naturelle associée a un groupe topologique séparé. — Nous considérerons maintenant l'ensemble $\mathfrak{M}$ de toutes les fonctions définies sur G, à valeurs complexes, bornées, ayant encore la propriété que pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}$, l'ensemble des fonctions φ_s, $s \in G$, où $\varphi_s(x) = \varphi(x^{-1}s)$, $x \in G$, est uniformément équicontinu. Topologisant l'ensemble $\mathfrak{M}$ à l'aide de la norme $\| \varphi \| = \sup_{x \in G} |\varphi(x)|$, $\mathfrak{M}$ devient une algèbre de Banach qui contient toutes les fonctions presque périodiques, et toutes les fonctions φ de la forme $\varphi(y) = f(x, y)$, x étant un élément quelconque fixe de G, et f un écart entrant dans la définition de la structure uniforme gauche de G, borné sur $G \times G$.

Soit $G_{\mathfrak{M}}$ la compactification de l'espace G, réalisée par l'ensemble $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux maximaux de l'algèbre $\mathfrak{M}$, topologisé avec la topologie faible, ou, ce qui est la même chose, l'espace qu'on obtient par la complétion de G par rapport à la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$ la moins fine des structures uniformes sur G pour lesquelles toutes les applications de $\mathfrak{M}$ sont uniformément continues.

Comme au paragraphe 3, nous pouvons démontrer que les translations à gauche de G se prolongent jusqu'à des homéomorphismes de l'espace $G_{\mathfrak{M}}$ sur lui-même, d'une manière unique, obtenant un groupe $\dot{\Gamma}$ d'homéomorphismes de $G_{\mathfrak{M}}$, algébriquement isomorphe à G.

Les fonctions $\varphi \in \mathfrak{M}$ se prolongent d'une manière unique sur $G_{\mathfrak{M}}$, par continuité en obtenant toutes les fonctions continues complexes définies sur $G_{\mathfrak{M}}$.

De même qu'au paragraphe 4, on peut démontrer que, en transportant sur $\dot{\Gamma}$ la topologie de G par l'isomorphisme mentionné plus haut, la structure uniforme droite de $\dot{\Gamma}$ coïncide avec la structure uniforme de la convergence uniforme sur $G_{\mathfrak{M}}$.

Nous pouvons démontrer ensuite que le groupe G est isomorphe à un groupe d'automorphismes de l'algèbre $\mathfrak{M}$, la structure uniforme gauche de ce groupe Γ étant identique à la trace sur Γ de la structure uniforme de la convergence simple, en obtenant de cette manière, pour $G_{\mathfrak{M}}$, des théorèmes analogues aux théorèmes 2 et 3.

L'emploi de la famille $\mathcal{F}$ nous a servi pour démontrer que nous pouvons séparer les points du groupe G par un ensemble de fonctions ayant les propriétés des fonctions de $\mathfrak{M}$.

Nous dirons que $G_{\mathfrak{M}}$ est la *compactification naturelle* associée au groupe G. $G_{\mathfrak{M}}$ a la propriété importante que toutes les fonctions presque périodiques du groupe G peuvent être prolongées d'une manière unique, par continuité, sur $G_{\mathfrak{M}}$.

On sait [3] qu'il y a un groupe compact G_c unique, associé au groupe G, tel qu'il y ait un homomorphisme continu α de G sur un sous-groupe $\alpha(G)$ de G_c, $\alpha(G)$ étant dense dans G_c, et ayant encore la propriété que toute fonction presque périodique de G peut être mise sous la forme $\alpha^\star\varphi$, où φ est une fonction continue complexe définie sur G_c; toute fonction de cette forme est une fonction presque périodique sur G.

Montrons maintenant que si nous uniformisons G avec la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$, G_c étant uniformisé avec la structure uniforme d'espace compact, alors α est un homomorphisme uniformément continu du groupe G.

En effet, on sait [3] que l'homomorphisme α peut être défini de cette manière : sur G on introduit la relation d'équivalence R, donnée par

$$x \equiv y \ (\operatorname{mod} R) \iff \varphi(x) = \varphi(y), \qquad \varphi \in \mathfrak{T},$$

où $\mathfrak{T}$ est l'algèbre des fonctions presque périodiques sur G. On prouve que G/R est un groupe, l'application $x \to \alpha(x)$ de G sur G/R étant un homomorphisme de G. On prend sur G/R la topologie faible définie par les fonctions induites sur G/R par les fonctions de $\mathfrak{T}$, par les relations $\dot{\varphi}(\dot{x}) = \varphi(x)$, où $\varphi \in \mathfrak{T}$, $x \in \dot{x} = \alpha(x)$, $\dot{x} \in G/R$, la définition étant évidemment correcte. Soit $\dot{\mathfrak{T}} = \{\dot{\varphi};\ \varphi \in \mathfrak{T}\}$. La borne inférieure des structures uniformes sur G/R pour lesquelles toutes les fonctions $\dot{\varphi} \in \dot{\mathfrak{T}}$ sont uniformément continues, est la structure uniforme (gauche ou droite) associée au groupe G/R. Cette dernière structure étant précompacte, par la complétion du groupe G/R, on obtient un groupe compact G_c (*voir* le théorème 14). Il est très facile de vérifier que α est uniformément continue, si l'on uniformise G avec $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$. Donc l'application α de G dans G_C peut être prolongée d'une manière unique, par continuité, jusqu'à une application $\dot{\alpha}$ de $G_{\mathfrak{M}}$ dans G_C. Mais $G_{\mathfrak{M}}$ étant compact, $\dot{\alpha}(G_{\mathfrak{M}})$ l'est aussi, et comme il contient une partie dense de G_C, $\dot{\alpha}$ applique $G_{\mathfrak{M}}$ sur G_C. Nous avons obtenu donc ce

THÉORÈME 4. — *Il y a une application continue unique de la compactification naturelle du groupe* G *sur le groupe* G_C, *dont la restriction à* G *coïncide avec* α.

$\mathcal{F}_0$ étant l'ensemble de tous les écarts sur G, ayant les propriétés énoncées au paragraphe 2, on peut démontrer qu'on a le

THÉORÈME 5. — *Il y a une application continue unique de* $G_{\mathcal{F}_0}$ *sur* $G_{\mathcal{F}}$, *dont la restriction à* G *coïncide avec l'application identique. De même, il y a une application continue unique de* $G_{\mathfrak{M}}$ *sur* $G_{\mathcal{F}_0}$, *dont la restriction à* G *coïncide avec l'application identique.*

Au paragraphe 8 nous étudierons de plus près les caractères du groupe G.

7. L'ALGÈBRE D'OPÉRATEURS ASSOCIÉS AU GROUPE D'AUTOMORPHISMES. — Soit $G_{\mathcal{F}}$ une compactification du groupe G, réalisée comme au paragraphe 2. Soit Γ le groupe d'automorphisme de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$, construit comme au paragraphe 5. L'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} C_i T_i$ (C_i, nombre complexe et $T_i \in \Gamma$) est une algèbre $\mathfrak{A}$, normée avec $\|T\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|T\varphi\|$. Évidemment, $\mathfrak{A}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des opérateurs linéaires continus sur $C(G_{\mathcal{F}})$, contenant le groupe Γ.

Soit $T = \sum_{i=1}^{n} C_i T_i$, $T_i \in \Gamma$. Montrons que $\|T\| = \sum_{i=1}^{n} |C_i|$, en supposant qu'on a $T_i \neq T_j$ pour $i \neq j$. En effet, soit a_i l'élément de G correspondant à T_i, et soit V_i un voisinage de a_i^{-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ces voisinages étant tels qu'on ait $V_i \cap V_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Pour tout i prenons une fonction continue φ_i appliquant $G_{\mathcal{F}}$ dans $[0, 1]$, telle qu'on ait $\varphi_i(x) = 0$ pour $x \in \complement V_i$, et $\varphi_i(a_i^{-1}) = 1$. Soit $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{C}_i}{|C_i|} \varphi_i(x)$. Nous avons $\|\varphi_0\| = 1$, donc on a $\|T\varphi_0\| \leqq \|T\|$.

D'autre part, on a

$$\|T\| \leqq |C_1| + |C_2| + \ldots + |C_n|.$$

Mais

$$(T\varphi_0)(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i (T_i\varphi_0)(x), \qquad \text{et} \qquad (T_i\varphi_0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{C}_k}{|C_k|} \varphi_k(a_i^{-1} x),$$

donc $(T_i\varphi_0)(e)=\frac{\overline{C}_i}{|C_i|}$. Il en résulte qu'on a $(T\varphi_0)(e)=\sum_{i=1}^{n}|C_i|$, donc $\|T\varphi_0\|\geqq\sum_{i=1}^{n}|C_i|$, ce qui prouve l'égalité écrite plus haut. On en déduit le

THÉORÈME 6. — *La topologie de la norme de $\mathfrak{L}$ induit sur* Γ *la topologie discrète.*

En effet, si $T_1, T_2\in\Gamma$, $T_1\neq T_2$, alors $\|T_1-T_2\|=2$. C. Q. F. D.

Nous allons démontrer maintenant le

THÉORÈME 7. — *La fermeture de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{L}$, par rapport à la norme de $\mathfrak{L}$, est isomorphe à l'algèbre* $L^1(G)$ *construite sur le groupe* G, *pris avec la topologie discrète.*

Démonstration. — En topologisant G avec la topologie discrète, nous obtenons un groupe localement compact dont chaque point reçoit la mesure 1. A toute fonction complexe à support compact on associe l'ensemble $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des points dont est formé le support de la fonction; si C_i est la valeur de la fonction en a_i, nous pouvons l'écrire $\sum_{i=1}^{n}C_i f_{a_i}$, f_{a_i} étant la fonction définie sur G, égale à 1 en a_i et nulle ailleurs. L'isomorphisme est maintenant évident. La fermeture de l'algèbre $\mathfrak{A}$ se compose de tous les opérateurs $T\in\mathfrak{L}$ donnés par $T=\sum_{i=1}^{\infty}C_iT_i$, où $T_i\in\Gamma$ et $\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|<+\infty$.

8. LES CARACTÈRES DU GROUPE G. — On appelle caractère du groupe G tout homomorphisme continu du groupe G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Évidemment, tout caractère du groupe G étant une fonction presque périodique, peut être prolongé d'une manière unique par continuité, sur $G_{\mathfrak{M}}$. Mais on peut aussi démontrer la propriété plus forte énoncée par le

THÉORÈME 8. — *Tout caractère de* G *peut être prolongé d'une manière unique, par continuité, sur $G_{\mathfrak{F}_0}$.*

Démonstration. — Si χ est le caractère unité [$\chi(x)=1$ pour tout $x\in G$], l'affirmation est évidente. Si χ prend sur G seulement deux valeurs, ce sont 1 et -1. Posons

$$G_+=\{x;\, x\in G,\ \chi(x)=+1\},$$
$$G_-=\{x;\, x\in G,\ \chi(x)=-1\}.$$

G_+ et G_- sont des ensembles fermés, ouverts, complémentaires, de G. Considérons la fonction f, définie sur $G \times G$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(x) = \chi(y), \\ 1 & \text{si } \chi(x) \neq \chi(y). \end{cases}$$

Nous avons

$$f(x, x) = 0, \qquad f(x, y) = f(y, x), \qquad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$$

et

$$f(ax, ay) = f(x, y) \qquad \text{pour tout} \quad a, x, y, z \in G.$$

De même on a $\lim\limits_{x \to y} f(x, y) = 0$, donc f est un écart borné, invariant à gauche, du groupe G. On a donc $f \in \mathcal{F}_0$. Soit $\overline{G}_+$, $\overline{G}_-$ les fermetures de G_+, G_- dans $G_{\mathcal{F}_0}$, et $\varphi_x(y) = f(x, y)$. Nous allons prouver que $\overline{G}_+ \cap \overline{G}_- = \emptyset$. En effet, soit $x \in G_+$. φ_x peut être prolongée jusqu'à une fonction $\dot{\varphi}_x$, continue, définie sur $G_{\mathcal{F}_0}$. Si $y \in \overline{G}_+$, on a $\dot{\varphi}_x(y) = 0$ et si $y \in \overline{G}_-$, alors $\dot{\varphi}_x(y) = 1$. On en déduit que $\overline{G}_+$ et $\overline{G}_-$ sont des ensembles fermés, ouverts, complémentaires, de $G_{\mathcal{F}_0}$; donc si l'on pose

$$\dot{\chi}(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour} \quad x \in \overline{G}_+, \\ -1 & \text{pour} \quad x \in \overline{G}_-, \end{cases}$$

on obtient une fonction continue $\dot{\chi}$ qui prolonge le caractère χ. L'unicité du prolongement est évidente.

Supposons maintenant que χ est un caractère qui prend sur G au moins trois valeurs distinctes. Une en est sûrement 1, et il y en a une autre, différente de -1, donc il y a dans G deux points a et b tels que $\chi(a)$ et $\chi(b)$ ne soient pas diamétralement opposés sur le cercle unité du plan complexe.

Considérons la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2} |\chi(x) - \chi(y)|$. Nous avons

$$f(x, x) = 0, \qquad f(x, y) = f(y, x), \qquad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y),$$
$$f(ax, ay) = f(x, y) \leq 1, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to y} f(x, y) = 0,$$

donc f est un écart qui entre dans $\mathcal{F}_0$. Parce que $\chi(a)$ et $\chi(b)$ ne sont pas diamétralement opposés, il y a une constante k (dépendant de a et b) telle que

$$|\chi(x) - \chi(y)| \leq k \Big\{ \big| |\chi(x) - \chi(a)| - |\chi(y) - \chi(a)| \big| + \big| |\chi(x) - \chi(b)| - |\chi(y) - \chi(b)| \big| \Big\}$$

donc χ est uniformément continue dans la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{F}_0}$ donc elle peut être prolongée par continuité, sur $G_{\mathcal{F}_0}$.

Nous continuerons à appeler caractère la fonction qu'on obtient par le prolongement d'un caractère du groupe G, de G sur $G_{\mathcal{F}_0}$.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 9. — *Tout caractère est fonction propre pour tous les opérateurs de* $\mathfrak{A}$; *toute fonction sur* $G_{\mathcal{F}_0}$ *qui est fonction propre pour tous les opérateurs de* $\mathfrak{A}$ *est, à une constante multiplicative près, un caractère.*

Démonstration. — Soit χ un caractère (prolongé) du groupe G. Nous avons $(A_a\chi)(x) = \chi(\dot{T}_a^{-1}(x))$. Si $x \in G$, nous avons $\chi(\dot{T}_a^{-1}(x)) = \chi(a^{-1}x) = \chi(a^{-1})\chi(x)$ donc par continuité, pour tout $x \in G_{\mathcal{F}_0}$, nous avons $\chi(\dot{T}_a^{-1}(x)) = \chi(a^{-1})\chi(x)$, donc $A_a\chi = \overline{\chi(a)}\chi$, c'est-à-dire χ est une fonction propre pour tout opérateur de $\mathfrak{A}$. Soit maintenant φ une fonction propre de A_a, quel quel soit $a \in G$, donc telle que $A_a\varphi = \lambda_a\varphi$, λ_a étant une fonction de a. On en déduit

$$A_a(A_b\varphi) = A_a(\lambda_b\varphi) = \lambda_a\lambda_b\varphi = \lambda_{ab}\varphi$$

donc, parce que φ n'est pas identiquement nulle, on a

$$\lambda_{ab} = \lambda_a\lambda_b.$$

Puis, $\lim\limits_{a\to e} A_a\varphi = \varphi$, donc $\lim\limits_{a \to e} \lambda_a = 1$, et, en tenant compte de ce que

$$\| A_a\varphi \| = | \lambda_a | \| \varphi \| = \| \varphi \|,$$

on en déduit $|\lambda_a| = 1$, donc λ_a est un caractère du groupe G. De l'égalité

$$\varphi(\dot{T}_a^{-1}(x)) = \lambda_a\varphi(x),$$

on obtient, en prenant $x = a$:

$$\varphi(e) = \lambda_a\varphi(a),$$

donc

$$\varphi(a) = \varphi(e)\bar{\lambda}_a, \qquad a \in G,$$

ce que prouve le théorème.

Nous allons considérer maintenant la fermeture $\overline{\mathfrak{A}}$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ par rapport à la norme de l'espace $\mathcal{L}$. Soit $\mathcal{J}_\varphi = \{T;\ T \in \overline{\mathfrak{A}},\ \|T_\varphi\| = 0\}$, $\mathcal{J}_\varphi$ est un idéal gauche de l'algèbre $\mathfrak{A}$; nous démontrerons le

THÉORÈME 10. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{J}_\varphi$ soit un idéal bilatère, bilatéralement maximal, de $\overline{\mathfrak{A}}$, est que φ soit, à une constante multiplicative près, un caractère du groupe* G.

Démonstration. — Supposons que φ est un caractère du groupe G. Pour $T \in \overline{\mathfrak{A}}$, on a $T = \sum_{i=1}^{\infty} C_i T_{a_i}$, donc $(T\varphi)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\varphi(a_i)}\varphi(x)$, ce qui montre qu'on a $T \in \mathcal{J}_\varphi$ si, et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\varphi(a_i)} = 0.$$

Considérons maintenant la fonction définie sur $\overline{\mathfrak{A}}$ par

$$\dot{\chi}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\varphi(a_i)},$$

χ est un homorphisme de l'algèbre $\overline{\mathfrak{A}}$ sur le corps des nombres complexes. Il est évident maintenant que $\mathfrak{I}_\varphi$ est un idéal bilatère, bilatéralement maximal, de $\overline{\mathfrak{A}}$. Réciproquement, soit $\mathfrak{I}_\varphi$ un idéal bilatère, bilatéralement maximal. Considérons l'application canonique $\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{I}_\varphi$. $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{I}_\varphi$ est un corps normé, donc isomorphe au corps des nombres complexes. On peut écrire

$$T_a \equiv \lambda_a T_e \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{I}_\varphi),$$

donc

$$T_a \varphi = \lambda_a \varphi \qquad (a \in G).$$

Par suite, du théorème précédent, φ est, à une constante multiplicative près, un caractère du groupe G. Le théorème est démontré.

Un théorème très simple est le suivant :

THÉORÈME 11. — *Tout caractère algébrique du groupe* Γ *peut être prolongé, d'une manière unique, jusqu'à un homorphisme de l'algèbre* $\overline{\mathfrak{A}}$ *sur le corps des nombres complexes; réciproquement, la restriction de tout homomorphisme complexe d'algèbre* $\overline{\mathfrak{A}}$, *au groupe* Γ, *est un caractère algébrique de ce groupe.*

Démonstration. — Soit h un caractère algébrique du groupe Γ. Pour $T \in \overline{\mathfrak{A}}$, posons $\tilde{h}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i h(T_i)$, où $T = \sum_{i=1}^{\infty} C_i T_i$, $T_i \in \Gamma$. $\tilde{h}$ est évidemment un homomorphisme de l'algèbre $\overline{\mathfrak{A}}$. Réciproquement, si $\tilde{h}$ est un homomorphisme de l'algèbre $\overline{\mathfrak{A}}$, sa restriction à Γ est un homomorphisme algébrique de Γ dans le groupe multiplicatif des nombre complexes non nuls. Mais $\|\tilde{h}\| = 1$ donc $|\tilde{h}(T)| \leqq 1$ et $|\tilde{h}(T^{-1})| \leqq 1$, pour $T \in \Gamma$, donc $|\tilde{h}(T)| = 1$. Le théorème est démontré.

9. LA COMPLÉTION D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE SÉPARÉ PAR RAPPORT A SA STRUCTURE UNIFORME GAUCHE. — Nous allons employer dans ce paragraphe le théorème 3 pour démontrer un théorème connu sur la complétion des groupes topologiques [4]. Nous obtenons en fait un résultat plus fort que celui déjà cité, en montrant que par la complétion d'un groupe topologique séparé on obtient un semi-groupe, isomorphe à un semi-groupe linéaire, avec simplification à gauche. Notamment, nous avons le

THÉORÈME 12. — *Par la complétion d'un groupe topologique séparé par rapport à la structure uniforme gauche, on obtient un semi-groupe* (*avec élément unité*), *avec simplification à gauche. Le semi-groupe est isomorphe à un semi-groupe d'endomorphismes isométriques de l'algèbre des fonctions continues complexes définies sur un espace compact, le semi-groupe étant pris avec la topologie de la convergence simple.*

Démonstration. — Nous utiliserons les notations et les résultats des paragraphes précédents. L'algèbre $\mathcal{L}$, dans la structure uniforme de la convergence simple, n'est pas un espace complet, mais les sous-ensembles de la forme $M_n = \{T; T \in \mathcal{L}, \|T\| \leqq n\}$ sont sous-espaces complets dans la structure uniforme induite sur eux par la structure uniforme de la convergence simple.

En considérant la représentation décrite dans le théorème 3, nous voyons aisément que par la complétion du groupe Γ, nous obtenons un semi-groupe $\tilde{\Gamma}$ d'endomorphismes de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$. En effet, si $(T_\alpha)_{\alpha \in M}$ est une suite dirigée de Cauchy, on a $\|T_\alpha \varphi - T_\beta \varphi\| < \varepsilon$, dès que $\alpha \geqq \gamma(\varepsilon, \varphi)$, $\beta \geqq \gamma(\varepsilon, \varphi)$, donc $(T_\alpha \varphi)_{\alpha \in M}$ est une suite dirigée de Cauchy dans $C(G_{\mathcal{F}})$, quel que soit $\varphi \in C(G_{\mathcal{F}})$. Soit $T\varphi = \lim_\alpha T_\alpha \varphi$. T_α étant des automorphismes de $C(G_{\mathcal{F}})$, on a $T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T\varphi + \mu T\psi$, et $T(\varphi\psi) = T\varphi . T\psi$, donc T est un endomorphisme de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$. D'autre part, on a $\|T_\alpha \varphi\| = \|\varphi\|$, donc on a $\|T\varphi\| = \|\varphi\|$, ce qui montre que T est une isométrie de $C(G_{\mathcal{F}})$ *dans* elle-même.

On peut montrer par des exemples que T n'est pas, en général, une application de $C(G_{\mathcal{F}})$, *sur* elle-même [1].

De l'isométrie des opérateurs T on en déduit que le semi-groupe qu'on obtient par la complétion de Γ (ou de G) est avec simplification à gauche, c'est-à-dire, de $T.T_1 = T.T_2$, on en tire, $T_1 = T_2$. Le théorème est démontré.

Supposons maintenant que si $(T_\alpha)_{\alpha \in M}$ est une suite dirigée de Cauchy, par rapport à la structure uniforme gauche, alors $(T_\alpha^{-1})_{\alpha \in M}$ est toujours une suite dirigée de Cauchy par rapport à la même structure uniforme. Ceci a lieu, en particulier, si les deux structures uniformes gauche et droite de G (ou Γ) coïncident.

Soit $T' = \lim_\alpha T_\alpha$ et $T'' = \lim_{\alpha \in M} T_\alpha^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} \|T'T''\varphi - \varphi\| \leqq\ & \|T'T''\varphi - T_\alpha T''\varphi\| \\ & + \|T_\alpha T''\varphi - T_\alpha T_\alpha^{-1}\varphi\| = \|T'T''\varphi - T_\alpha T''\varphi\| + \|T''\varphi - T_\alpha^{-1}\varphi\|, \end{aligned}$$

donc $T'T'' = I$. De même, on a $T''T' = I$, donc T' a un inverse, égal à T''. Nous avons obtenu de cette manière, avec une autre démonstration, ce théorème connu [4].

Théorème 13. — *Si l'application $x \to x^{-1}$ conserve les suites dirigés de Cauchy (ou les filtres de Cauchy) par rapport à la structure uniforme gauche du groupe, alors, par la complétion du groupe par rapport à cette structure on obtient un groupe complet.*

Nous terminerons le paragraphe en démontrant le

Théorème 14. — *Si un groupe topologique séparé est précompact dans la structure uniforme gauche, par la complétion du groupe par rapport à cette structure uniforme on obtient un groupe compact.*

Démonstration. — En complétant le groupe par rapport à la stucture uniforme gauche, on obtient un semi-groupe compact. Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in M}$ une suite dirigée de Cauchy sur le groupe $\lim_\alpha T_\alpha = T$, T étant dans le semi-groupe. La suite $(T_\alpha^{-1})_{\alpha\in M}$ a un point adhérent $T^\star$ dans le semi-groupe. Soit $(T_\alpha^{-1})_{\alpha\in M'}$ une sous-suite cofinale convergente : $\lim_{\alpha\in M'} T_\alpha^{-1} = T^\star$, $M'\subset M$. On trouve immédiatement $TT^\star = T^\star T = I$, donc T a un inverse dans le semi-groupe, ce qui montre que ce dernier est un groupe G_l. Le théorème est démontré.

Observons encore que si un groupe séparé est précompact dans la structure uniforme gauche, il est précompact aussi dans la structure uniforme droite.

En complétant le groupe par rapport à la structure uniforme droite, on obtient un groupe G_r, qui peut être identifié à G_l,

Si G est diviseur normal (algébrique) de G_l, alors les structures uniformes gauche et droite sur G coïncident.

10. La représentation d'un groupe topologique séparé sur le dual de l'espace $C(G_{\mathcal{F}})$. — Dans ce paragraphe nous étudierons la représentation de G sur le dual $C^\star(G_{\mathcal{F}})$ de l'espace $C(G_{\mathcal{F}})$.

Notamment, nous allons démontrer ce

Théorème 15. — *Le groupe* G *est isomorphe à un groupe* $\Gamma^\star$ *de transformations linéaires de* $C^\star(G_{\mathcal{F}})$, *la structure uniforme droite de* G *étant isomorphe à la structure uniforme de la convergence faiblement compacte de* $\Gamma^\star$.

Démonstration. — Ce théorème peut être considéré comme une complétion du théorème 3. La topologie faible sur $C^\star(G_{\mathcal{F}})$ est celle définie par $C(G_{\mathcal{F}})$. Nous considérerons, au lieu du groupe G, le groupe Γ auquel G est isomorphe. Pour $T\in\Gamma$, l'opérateur adjoint $T^\star$ sur $C^\star(G_{\mathcal{F}})$ invarie l'ensemble des homomorphismes complexes de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$. En effet, si h est un homomorphisme complexe de $C(G_{\mathcal{F}})$, (qui peut être identifié à un point de l'espace $G_{\mathcal{F}}$), alors $T^\star h$ est également un homomorphisme complexe de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$, parce qu'on a $(T^\star h)(\varphi) = h(T\varphi)$, et T est un automorphisme de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$. On voit aisément que $T^\star$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $C^\star(G_{\mathcal{F}})$. Si l'espace $G_{\mathcal{F}}$ est plongé dans $C^\star(G_{\mathcal{F}})$, en le considérant ensemble d'homomorphismes complexes de l'algèbre $C(G_{\mathcal{F}})$, les opérateurs $T^\star$, adjoints des automorphismes de Γ, peuvent être regardés comme des prolongements à $C^\star(G_{\mathcal{F}})$, des homéomorphismes de $G_{\mathcal{F}}$. En effet, il est facile de se rendre compte que si nous prenons $T = \Lambda_a$, alors $T^\star$ prolonge $\dot{T}_a^{-1}$.

La topologie sur Γ est donnée par la famille d'écarts

$$\| T_1\varphi - T_2\varphi \| = f_\varphi(T_1, T_2) \qquad [\varphi\in C(G_{\mathcal{F}})]$$

et est donc induite par la topologie définie sur $\mathcal{L}$, par la famille de semi-normes $\| T\varphi \| = p_\varphi(T)$, $\varphi\in C(G_{\mathcal{F}})$.

Mais on a

$$\|T\varphi\| = \sup_{\|\varphi^\star\|=1} |\varphi^\star(T\varphi)| = \sup_{\|\varphi^\star\|=1} |(T^\star\varphi^\star)(\varphi)| = \sup_{\|\varphi^\star\|=1} |\varphi(T^\star\varphi^\star)|.$$

Avec le théorème de Banach-Steinhaus on en déduit que, en topologisant $C^\star(G_{\mathcal{F}})$ avec la topologie faible définie par $C(G_{\mathcal{F}})$, les ensembles relativement compacts de $C^\star(G_{\mathcal{F}})$ sont les ensembles fortement bornés de $C^\star(G_{\mathcal{F}})$, et réciproquement.

On en déduit que l'application de Γ sur $\Gamma^\star$, qui porte $T \in \Gamma$ sur $T^{\star-1}$, est un isomorphisme du groupe Γ avec $\Gamma^\star$, par lequel la structure uniforme droite de Γ devient la structure uniforme de la convergence faiblement compacte.

Le thèorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, livre III, chap. IX.
[2] L. S. Pontrjagin, *Topological groups*.
[3] L. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, New York, 1953.
[4] N. Bourbaki, *Topologie générale*, livre III, chap. III.