ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. T. IONESCU TULCEA

# Sur certaines classes de fonctions de type positif

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 74, nº 3 (1957), p. 231-248
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_3_231_0>

SUR

# CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS DE TYPE POSITIF (1)

PAR M. C. T. IONESCU TULCEA.

1. INTRODUCTION. — Dans ce travail nous étudions certaines classes de fonctions qui contiennent en particulier les fonctions de type positif usuelles définies sur un groupe localement compact et les fonctions complètement monotones introduites dans [15].

L'introduction de ces classes de fonctions nous a été suggérée par la lecture d'un article de Béla Sz.-Nagy [17], Les méthodes utilisées dans la suite sont inspirées, surtout par celles employées par H. Cartan et par R. Godement dans [4] et [9].

2. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES CONCERNANT LES MESURES DE RADON (2). — Nous désignons par G un groupe localement compact, par S, un sous-espace localement compact de G et par $m$, la restriction à S d'une mesure de Haar de G invariante à gauche. On supposera :

(1) S stable et contenant l'unité $e$ de G :

(2) S muni d'une application continue $x \to x^+$ de S dans S vérifiant les relations $(xy)^+ = y^+x^+$, $z^{++} = z$ quels que soient $x, y, z \in S$ ;

(3) $A^+ = \{x^+ | x \in A\}$ $m$-localement négligeable si A est $m$-localement négligeable ;

(4) $m(V) > 0$ pour tout voisinage compact $V \subset S$ de $e$.

Soit M(S) l'espace vectoriel des mesures de Radon complexes définies sur S à support compact; pour toute mesure $\mu$ on notera avec $S(\mu)$ son support. Si $\mu$,

(1) Les principaux résultats de ce travail ont été exposés dans une Note : *Fonctions de type positif* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 1389-1392).

(2) Pour les notations et les notions concernant la théorie de l'intégration utilisées et non expliquées dans le texte, *voir* [2].

$\nu$, $\delta \in M(S)$, on peut définir les mesures $\mu\nu$ et $\delta^+$ par les égalités

$$(5) \qquad \int f(x)\, d\mu\nu(x) = \iint f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{K}(S)$$

et

$$(6) \qquad \int f(x)\, d\delta^+(x) = \int f(x^+)\, d\bar{\delta}(x) \qquad \text{pour} \quad f \in K(S).$$

$\int$ signifie toujours $\int_S$; $\bar{\delta}$ est définie par l'égalité $\bar{\delta}(f) = \overline{\delta(\bar{f})}$. On constate facilement que $S(\mu\nu) = S(\mu)S(\nu)$, $S(\delta^+) = S(\delta)^+$ et que muni du *produit* $(\mu, \nu) \to \mu\nu$ et de l'*involution* $\delta \to \delta^+$, M(S) devient une *algèbre involutive* ayant pour unité la mesure $\varepsilon_e$. Pour toute $\mu \in M(S)$ et $a \in S$ on désigne par $\mu_a$ la mesure $\varepsilon_a \mu$;

$$(7) \qquad \int f(x)\, d\mu_a(x) = \int f(ax)\, d\mu(x) \qquad \text{pour} \quad f \in K(S).$$

Remarquons qu'on a $\mu_{ab} = (\mu_b)_a$ et $(\bar{\delta})_a = \overline{(\delta_a)}$.

Soit L(S) l'ensemble des mesures appartenant à M(S) de la forme $g.m$ [3], où $g$ est une fonction $m$-localement intégrable; on supposera toujours $g(x) = 0$ si $x \notin S(g.m)$. Si $\mu, \nu \in L(S)$ et $\mu = g.m$, $\nu = h.m$, on a $\mu\nu = u.m$, $u$ étant définie (presque partout) sur S par l'égalité

$$u(y) = \int_G \hat{g}(x)\, \hat{h}(x^{-1}y)\, dx \quad [4].$$

Si $\delta \in L(S)$ on démontre à l'aide de (3) que $\delta^+ \in L(S)$. Il en résulte que L(S) est une *sous-algèbre involutive* de M(S). Pour $\mu, \nu, \delta \in L(S)$ les égalités (5) et (6) restent encore vraies pour $f$ $m$-mesurable et $m$-localement bornée [5].

Si $\mu = g.m \in L(S)$ alors, quel que soit $a \in S$, on a pour $f \in \mathcal{K}(S)$

$$\mu_a(f) = \int_G \hat{f}(ax)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_G \hat{f}(x)\, \hat{g}(a^{-1}x)\, dx = \int f(x)\, g_a(x)\, dm(x),$$

où $g_a(x) = 0$ si $x \notin aS(\mu)$ et $g_a(x) = g(a^{-1}x)$ si $x \in aS(\mu)$. Il s'ensuit que $\mu_a \in L(S)$ si $\mu \in L(S)$ et, par suite, que l'égalité (7) reste valable pour $f$ $m$-mesurable et $m$-localement bornée. On déduit encore des relations précédentes l'inégalité

$$\|\mu_a - \mu_b\| \leq \int_G |\hat{g}(a^{-1}x) - \hat{g}(b^{-1}x)|\, dx \qquad \text{pour} \quad a, b \in S \quad \text{et} \quad \mu = g.m \in L(S).$$

---

(3) La mesure $g.m$ est définie par les égalités

$$g.m(f) = \int f(x)\, g(x)\, dm(x) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{K}(S).$$

(4) Pour une fonction $f$ définie sur S on pose $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in S$ et $\hat{f}(x) = 0$ si $x \notin S$; $dx$ est le symbole d'intégration par rapport à la mesure de Haar de G, considérée.

(5) $f$ est $m$-localement bornée si pour toute partie compacte $K \subset S$ il existe une constante $c(K)$ telle que $m(\{x \mid |f(x)| > c(K)\} \cap K) = 0$.

Donc l'application $a \to \mu_a$ de S dans L(S), muni de la topologie définie par la norme $\mu \to \|\mu\|$ est *continue* (⁶).

Pour toute partie compacte $K \subset S$ on désignera par L(S, K) l'ensemble des mesures $\mu \in L(S)$ telles que $S(\mu) \subset K$. Muni de la norme $\mu \to \|\mu\|$, L(S, K) est un espace de Banach isométrique à l'espace $L^1(K, m_K)$ des fonctions définies sur K et intégrables pour la restriction $m_K$ de la mesure $m$ à K. Sur L(S), réunion de la famille filtrante des L(S, K), considérons la topologie d'*espace tonnelé* limite inductive des topologies des espaces L(S, K). Désignons par L′(S) le dual correspondant de L(S). Si $g$ est une fonction définie sur S à valeurs complexes $m$-mesurable et $m$-localement bornée, la forme linéaire $x'$ définie par l'égalité

$$(8) \qquad x'(\mu) = \int g(x)\, d\mu(x) \quad \text{pour toute } \mu \in L(S),$$

appartient à L′(S). Réciproquement toute $x' \in L'(S)$ peut s'écrire sous la forme (8), où $g$ est une fonction $m$-mesurable et $m$-localement bornée. Ce résultat est immédiat si S est compact; la démonstration dans le cas général repose sur un théorème de R. Godement [7].

Soit $\mathcal{F}$ un ordonné filtrant de fonctions $m$-mesurables tels que pour tout compact $K \subset S$ il existe une constante $c(K)$ vérifiant la relation

$$m(\{x \mid . |f(x)| > c(K)\} \cap K) = 0$$

quelle que soit $f \in \mathcal{F}$. De la continuité de l'application $a \to \mu_a$ on déduit la :

Proposition 1. — *Si $\mathcal{F}$ converge faiblement vers $g$, on a pour toute* $\mu \in L(S)$

$$\lim_{f \in \mathcal{F}} \int f(ax)\, d\mu(x) = \int g(ax)\, d\mu(x)$$

*uniformément sur tout compact.*

Il suffit de remarquer que les applications $a \to \int f(ax)\, d\mu(x) (f \in \mathcal{F})$ sont uniformément bornées et équicontinues sur tout compact.

Dans la suite de cet article on désignera par $\mathfrak{V}(e)$ un système fondamental de voisinages de $e$, pour tout $V \in \mathfrak{V}(e)$, par $\mu_V$ une mesure appartenant à L(S), positive de masse totale 1 et de support contenu dans V et par $\mathfrak{U}$ l'ordonné filtrant $\{\mu_V \mid V \in \mathfrak{V}(e)\}$ (nous posons $\mu_{V'} \leqq \mu_{V''}$ si $V' \supset V''$).

3. Représentation involutive de S. — Une *représentation involutive* (r. i.) de S est un ensemble $\{H, U_s\}$, où H est un espace hilbertien et $s \to U_s$ une représentation

(⁶) Le produit $\mu\nu$ de deux mesures $\mu$, $\nu$ est un cas particulier du produit de composition défini dans [11]. Remarquons que M(S) et L(S) peuvent être identifiées à des sous-algèbres des algèbres correspondantes de G, ce qui donne le moyen d'obtenir la plupart des propriétés formulées plus haut.

(⁷) Pour des résultats semblables et pour le théorème de R. Godement, *voir* [7].

fortement continue de S dans l'ensemble $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs continus de H, telle que $U_{s^+} = U_s^*$. Une r. i. $\{H, U_s\}$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels et fermés de H invariants par les $U_s$ sont H et $\{0\}$. Une *représentation involutive simple* (r. i. s.) de S est un ensemble $\{H, U_s, a\}$, où $\{H, U_s\}$ est une r. i. de S et $a$ un élément appartenant à H tel que l'espace vectoriel fermé engendré par les $U_s a$ soit H. Si $\{H, U_s, a\}$ est une r. i. s. on constate immédiatement que $U_e = I$. Une r. i. s. $\{H, U_s, a\}$ est *irréductible* si $\{H, U_s\}$ est irréductible. Soit $\{H, U_s, a\}$ une r. i. s. de S; la fonction $f$ définie sur S par l'égalité $f(s) = (U_s a \mid a)$ est la *fonction caractéristique* (f. c.) de $\{H, U_s, a\}$. Une fonction $f$ est *élémentaire* si elle est la f. c. d'une r. i. s. irréductible. $f$ est *normée* si $f(e) = 1$. Si S est abélien, on démontre comme pour les groupes, qu'*une f. c. $f$ est élémentaire et normée si et seulement si $f \not\equiv 0$, $f(st) = f(s) f(t)$, $f(u^+) = \overline{f(u)}$ quels que soient $s, t, u \in S$*; on verra d'ailleurs au paragraphe 4 qu'une fonction continue satisfaisant aux relations précédentes est la f. c. d'une r. i. s.. Deux r. i. s. $\{H, U_s, a\}$ et $\{H', U'_s, a'\}$ sont *isomorphes* s'il existe une application isométrique $u$ de H sur H' telle que $u(a) = a'$ et $U'_s \circ u = u \circ U_s$ pour tout $s \in S$. Pour que deux r. i. s. soient isomorphes, il faut et il suffit que les f. c. correspondantes soient identiques.

Soit $\{H, U_s\}$ une r. i. de S. Pour toute $\mu \in M(S)$ désignons par $U_\mu$ l'opérateur défini par les égalités

$$(U_\mu x \mid y) = \int (U_s x \mid y)\, d\mu(s) \qquad (x, y \in H).$$

$\mu \to U_\mu$ est une représentation de l'algèbre $M(S)$ dans $\mathcal{L}(H)$ telle que $U_{\mu^+} = U_\mu^*$.

Pour toute fonction continue $f$ à valeurs complexes définie sur S et $\mu \in M(S)$, désignons par $f^\mu$ la fonction définie sur S par l'égalité

$$f^\mu(x) = \iint f(s^+ x t)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t). \tag{9}$$

De (9) on obtient facilement les égalités

$$(\alpha f + \beta g)^\mu = \alpha f^\mu + \beta g^\mu \qquad \text{et} \qquad h^{\nu\delta} = (h^\delta)^\nu$$

quels que soient les nombres $\alpha$, $\beta$, les fonctions continues $f, g, h$ et les mesures $\mu, \nu, \delta \in M(S)$. Si $\{H, U_s, a\}$ est une r. i. s. de S et $f$ est la f. c. correspondante, alors

$$f^\mu(x) = (U_x U_\mu a \mid U_\mu a) \qquad \text{pour} \quad x \in S \quad \text{et} \quad \mu \in M(S). \tag{10}$$

4. Fonctions de type positif. — Une fonction $f$ définie sur S à valeurs complexes $m$-mesurable et $m$-localement bornée est de *type positif* si, pour toute $\mu \in L(S)$,

$$\iint f(s^+ t)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t) \geq 0 \tag{11}$$

Soit $\mathfrak{V}$ un recouvrement de S par des parties ouvertes relativement compactes.

Pour toute famille $\mathfrak{R} = (\mathrm{r}(A))_{A\in\mathfrak{V}}$ de nombres $\geq 1$, soit $P(\mathfrak{R})$ (8) la classe des fonctions $f$ de type positif, vérifiant l'inégalité

$$(12) \qquad \iint f(s^+ a^+ at)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t) \leq \mathrm{r}(A) \iint f(s^+ t)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t)$$

pour $\mu \in L(S)$, $A \in \mathfrak{V}$ et $a \in A$.

S'il existe une partie V, ouverte et relativement compacte, telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{\widehat{V^n}} = S$, alors pour qu'une fonction $f$ de type positif appartienne à une classe $P(\mathfrak{R})$, il faut et il suffit que l'inégalité (12) soit vérifiée pour une constante M convenablement choisie [à la place de $\mathrm{r}(A)$], pour $\mu \in L(S)$ et $a \in V$. Si $f$ est continue, les inégalités (11) et (12) sont équivalentes avec les inégalités qu'on obtient en remplaçant les mesures $\mu \in L(S)$ par des mesures $\mu \in M(S)$ ou bien par des mesures à support fini.

Une fonction de type positif n'appartient pas nécessairement à une classe $P(\mathfrak{R})$. On obtient un exemple si l'on prend

$$S = R, \qquad s^+ = s \qquad \text{et} \qquad f(s) = \int e^{st} e^{-t^2}\, dt \quad \text{pour tout } s \in S.$$

Chaque classe $P(\mathfrak{R})$ peut être identifiée à une partie de $L'(S)$. Si l'on remarque que

$$\iint f(s^+ t)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t) = \int f(u)\, d\mu^+ \mu(u)$$

et

$$\iint f(s^+ a^+ at)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t) = \int f(u)\, d(\mu_a)^+ \mu_a(u),$$

on déduit que chaque classe $P(\mathfrak{R})$ est *faiblement fermée* dans $L'(S)$.

Voici deux des exemples de fonctions du type considéré :

*a*. Si $S = G$ et $s^+ = s^{-1}$ pour tout $s \in S$ les relations (11) caractérisent les fonctions de type positif usuelles. Dans ce cas toute fonction de type positif appartient à $P(\mathfrak{R}_0)$, où $\mathfrak{R}_0 = (\mathrm{r}_0(A))_{A\in\mathfrak{V}}$ et $\mathrm{r}_0(A) = 1$ pour tout $A \in \mathfrak{V}$;

*b*. Supposons S abélien et $s^+ = s$ quel que soit $s \in S$. Pour tout $s \in S$, soit $T_s$ la translation $x \to xs$. Nous disons qu'une fonction $f$ définie sur S à valeurs complexes est *complètement monotone* ([15], p. 578) si quels que soient, $p$ entier $\geq 1$, $n(1), \ldots, n(p)$ entiers positifs, $s(1), \ldots, s(p)$ éléments de S et $x \in S$, on a

$$(I - T_{s(1)})^{n(1)} (I - T_{s(2)})^{n(2)} \ldots (I - T_{s(p)})^{n(p)} f(x) \geq 0.$$

D'après un résultat de A. Nussbaum (lemme 1, [15], p. 579), toute fonction

(8) Pour un semi-groupe discret S, qui n'est pas partie d'un groupe, on peut encore définir les classes $P(\mathfrak{R})$ et obtenir des résultats analogues aux théorèmes 1, 2, 4, 5, 6 et 7.

complètement monotone appartient à $P(\mathfrak{R}_0)$. Il est facile de constater que si l'équation $s^2 = t$ a une solution dans S quel que soit $t \in S$, $P(\mathfrak{R}_0)$ coïncide avec la classe des fonctions complètement monotones.

THÉORÈME 1. — *Une fonction $f$ appartient à une classe* $P(\mathfrak{R})$ *si et seulement si $f$ coïncide localement presque partout avec la f. c. d'une r. i. s.* $\{H_f, U_{f,s}, a_f\}$ *de* S. *La r. i. s.* $\{H_f, U_{f,s}\, a_f\}$ *est déterminée à un isomorphisme près.*

On vérifie que la condition est suffisante par un calcul direct. L'unicité de la r. i. s. résulte d'une remarque précédente. Il reste à montrer que la condition est nécessaire. Pour ce faire posons pour $\mu, \nu \in L(S)$

$$(\mu \mid \nu)_f = \iint f(s^+ t)\, d\bar{\nu}(s)\, d\mu(t),$$

L'application $(\mu, \nu) \to (\mu \mid \nu)_f$ est une forme hermitienne positive sur L(S) et pour $a \in A \in \mathfrak{V}$ on a

$$(13) \qquad (\mu_a \mid \mu_a)_f \leqq \mathfrak{r}(A)(\mu \mid \mu)_f.$$

Soit maintenant $N_f = \{\mu \mid (\mu \mid \mu)_f = 0\}$ et $\mu \to f(\mu)$ l'application canonique de L(S) sur $L_f = L(S)/N_f$. Munissons $L_f$ d'une structure d'espace préhilbertien en posant

$$(f(\mu) \mid f(\nu))_f = (\mu \mid \nu)_f \qquad \text{pour} \quad f(\mu), \quad f(\nu) \in L_f$$

et désignons par $H_f$ l'espace hilbertien complété de $L_f$. Pour $a \in S$ et $f(\mu) \in L_f$, posons

$$U_{f,a} f(\mu) = f(\mu_a).$$

$U_{f,a}$ est une application linéaire de $L_f$ dans $L_f$ et, d'après (13),

$$\| U_{f,a} \| \leqq \mathfrak{r}(A)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{si} \quad a \in A \in \mathfrak{V};$$

il s'ensuit que $U_{f,a}$ est prolongeable à $H_f$ et l'on constate facilement que

$$U_{f,e} = I, \qquad U_{f,ab} = U_{f,a} U_{f,b}, \qquad U_{f,c^+} = U^*_{f,c}$$

quels que soient $a, b, c \in S$. De l'inégalité (13) on déduit encore pour $a, b \in A \in \mathfrak{V}$,

$$\| U_{f,a} f(\mu) - U_{f,b} f(\mu) \| = \| f(\mu_a) - f(\mu_b) \| \leqq \mathfrak{r}(A)^{\frac{1}{2}} \| \mu_a - \mu_b \|.$$

Il résulte que $a \to U_{f,a}$ est fortement continue; donc $\{H_f, U_{f,s}\}$ est une r.i. de S.

Remarquons maintenant que

$$\limsup_{\nu \in \mathfrak{U}} \| f(\nu) \| < \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\nu \in \mathfrak{U}} (f(\mu) \mid f(\nu))_f = \int f(y)\, d\mu(y)$$

quelle que soit $\mu \in L(S)$. Donc $\mu \to f(\mu)$ a une limite faible $a_f \in H_f$ suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{U}$ et $a_f$ vérifie évidemment l'égalité

$$(14) \qquad (f(\mu) \mid a_f)_f = \int f(y)\, d\mu(y) \quad \text{pour toute } \mu.$$

On déduit $(f(\mu)\,|\,\mathrm{U}_{f,s}a_f)_f = \int f(s^+y)\,d\mu(y)$ pour $s\in\mathrm{S}$ et $\mu\in\mathrm{L}(\mathrm{S})$ et en intégrant par rapport à $\nu$

$$\int (f(\mu)\,|\,\mathrm{U}_{f,s}a_f)_f\,d\bar{\nu}(s) = (f(\mu)\,|\,f(\nu))_f. \tag{15}$$

Des égalités (14) et (15) on obtient

$$\int (a_f\,|\,\mathrm{U}_{f,s}a_f)_f\,d\bar{\nu}(s) = \overline{(f(\nu)\,|\,a_f)_f} = \int \overline{f(y)}\,d\bar{\nu}(y)$$

et, par suite, $f(s) = (\mathrm{U}_{f,s}a_f\,|\,a_f)_f$ localement presque partout. Pour achever la démonstration du théorème il suffit de remarquer que, d'après (15), l'espace vectoriel fermé engendré par les $\mathrm{U}_{f,s}a_f$ coïncide avec $\mathrm{H}_f$ [9].

*Remarques.* — 1° D'après le théorème 1, toute fonction $f$ appartenant à une classe $\mathrm{P}(\mathfrak{R})$ coïncide localement presque partout avec une fonction continue. On identifiera $f$, dans ce qui suit, à la fonction continue (unique) avec laquelle $f$ coïncide localement presque partout.

2° Si $f$ est la f. c. d'une r. i. s. $\{\mathrm{H}, \mathrm{U}_s, a\}$, alors $f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R})$, où $\mathfrak{R} = (\mathrm{r}(\mathrm{A}))_{\mathrm{A}\in\mathfrak{V}}$ si et seulement si, quels que soient $\mathrm{A}\in\mathfrak{V}$ et $s\in\mathrm{A}$, on a

$$\|\mathrm{U}_s\| \leq \mathrm{r}(\mathrm{A})^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

En effet, de (16) on déduit pour toute suite $(c_i)$ de nombres complexes, toute suite $(s_i)$ d'éléments de S, $\mathrm{A}\in\mathfrak{V}$ et $s\in\mathrm{A}$,

$$\begin{aligned}\sum \bar{c}_i c_j f(s_i^+ s^+ s s_j) &= \Big\|\mathrm{U}_s\Big(\sum c_j \mathrm{U}_{s_j} a\Big)\Big\|^2 \leq \mathrm{r}(\mathrm{A})\Big\|\sum c_j \mathrm{U}_{s_j} a\Big\|^2\\ &= \mathrm{r}(\mathrm{A})\sum \bar{c}_i c_j f(s_i^+ s_j), \qquad \text{donc} \quad f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R}).\end{aligned}$$

Réciproquement, si $f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R})$, des relations précédentes on tire l'inégalité (16), car l'ensemble des sommes $\sum c_j \mathrm{U}_{s_j} a$ est dense dans H. Si $\{\mathrm{H}, \mathrm{U}_s\}$ est une r. i. de S telle que les $\mathrm{U}_s$ vérifient les relations (16), $a\in\mathrm{H}$ et $f(s) = (\mathrm{U}_s a\,|\,a)$ pour $s\in\mathrm{S}$ le raisonnement précédent nous montre encore que $f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R})$.

3° La remarque précédente et l'égalité (10) nous montrent que si $\mu\in\mathrm{M}(\mathrm{R})$ et $f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R})$, alors $f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R})$.

4° Si $f\in\mathrm{P}(\mathfrak{R})$, on a $|f(s)| \leq \mathrm{r}(\mathrm{A})^{\frac{1}{2}} f(e)$ pour $s\in\mathrm{A}$; en effet

$$|f(s)| = |(\mathrm{U}_{f,s}a_f\,|\,a_f)_f| \leq \|\mathrm{U}_{f,s}\|\,.\,\|a_f\|^2.$$

On en déduit qu'une partie $\mathrm{B}\subset\mathrm{P}(\mathfrak{R})$ uniformément bornée à l'origine est uniformément bornée sur toute partie compacte ; donc *faiblement bornée* dans $\mathrm{L}'(\mathrm{S})$.

---

[9] Pour le cas $\mathrm{S} = \mathrm{G}$ et $s^+ = s^{-1}$ pour $s\in\mathrm{S}$, *voir* aussi : I. Gelfand et D. Raikov, *Irreducible unitary representations of loeally bicompact groups* (*Mat. Sb.*, t. 13, 1943).

Pour deux fonctions $f$, $g$ de type positif on écrira

$$f \gg g \tag{17}$$

si $f - g$ est de type positif.

THÉORÈME 2. — *Si $f$ est la f. c. de la r. i. s. $\{H_f, U_{f,s}, a_f\}$ et si $f \gg g$ il existe un opérateur* A, *positif et majoré par* I, *permutable avec les* $U_{f,s}$ *tel que pour tout* $s \in S$ *on a*

$$g(s) = (AU_{f,s} a_f \mid a_f)_f. \tag{18}$$

Soit $u$ l'application linéaire $f(\mu) \to g(\mu)$ de $L_f$ dans $L_g$; $u$ est continue et, par suite, prolongeable comme application linéaire continue de $H_f$ dans $H_g$. Considérons la forme hermitienne positive $p(x, y) = (u(x) \mid u(y))_g$ définie sur $H_f \times H_f$. Pour $x \in H_f$, $p(x, x) \leqq (x \mid x)_f$; donc il existe un opérateur A tel que

$$0 \leqq A \leqq I, \qquad p(x, y) = (Ax \mid y)_f \qquad \text{pour} \quad x, y \in H_f.$$

En particulier, on a

$$(U_{g,s} g(\mu) \mid g(\nu))_g = (AU_{f,s} f(\mu) \mid f(\nu))_f,$$

d'où l'on déduit (18). On a encore

$$(AU_{f,s} f(\mu) \mid f(\nu))_f = (U_{f,s} A f(\mu) \mid f(\nu))_f,$$

d'où il résulte que A permute avec les $U_{f,s}$.

*Remarques.* — 1° Si $f \in P(\mathfrak{R})$, il s'ensuit de (18) que $g \in P(\mathfrak{R})$.

2° On déduit encore de (18) que $g$ est limite uniforme sur tout compact de fonctions de la forme $\sum \bar{c}_i c_j f(s_i^+ s s_j)$.

## 5. Un théorème de convergence.

PROPOSITION 2. — *Soient* $f \in P(\mathfrak{R})$, A, $B \in \mathfrak{V}$ *et* $t \in A$, $s \in B$. *Alors on a*

$$|f(t) - f(ts)|^2 \leqq 2\mathfrak{r}(A) f(e)(f(e)(1 + \mathfrak{r}(B))/2 - \mathcal{R}(s)) \quad ([10]). \tag{19}$$

Soit $\{H, U_s, a\}$ une r. i. s. de S dont $f$ est la f. c. Alors

$$\begin{aligned} |f(t) - f(ts)|^2 &= |(U_t(U_e - U_s) a \mid a)|^2 \leqq \| U_t \|^2 \| (U_e - U_s) a \|^2 \| a \|^2 \leqq \mathfrak{r}(A) f(e)(\| a \|^2 \\ &+ \| U_s \|^2 \| a \|^2 - 2\mathcal{R} f(s)) \leqq 2\mathfrak{r}(A) f(e)(f(e)(1 + \mathfrak{r}(B))/2 - \mathcal{R} f(s)) \end{aligned}$$

et, par suite, l'inégalité (19) est démontrée.

Dans ce qui suit on supposera (ce qui, d'après (16), n'est pas une restriction) que *le recouvrement* $\mathfrak{V}$ *contient le système fondamental* $\mathfrak{V}(e)$ *de voisinages de* $e$ *et les familles* $\mathfrak{R} = (\mathfrak{r}(A))_{A \in \mathfrak{V}}$ *définissant les ensembles* $P(\mathfrak{R})$ *sont telles que* $\lim\limits_{A \in \mathfrak{V}(e)} \mathfrak{r}(A) = 1$.

---

([10]) Si $z = x + iy$, alors $\mathcal{R} z = x$.

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un ordonné filtrant* $\mathcal{F} \subset \mathrm{P}(\mathfrak{R})$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction* $g \in \mathrm{P}(\mathfrak{R})$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{F}$ *converge faiblement vers* $g$ *et que* $\limsup_{f \in \mathcal{F}} f(e) \leqq g(e)$.

Soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{S}$ une partie compacte et $0 < \varepsilon \leqq 1$. Choisissons un entourage U, de la structure uniforme induite sur S par la structure uniforme gauche de G tel que

$$(x, y) \in \mathrm{U} \cap (\mathrm{U}(\mathrm{K}) \times \mathrm{U}(\mathrm{K})) \quad \text{implique} \quad |g(x) - g(y)| \leqq \varepsilon; \tag{20}$$

$$\mathrm{U}(e) \in \mathfrak{V}(e) \quad \text{et} \quad \mathfrak{r}(\mathrm{U}(e)) \leqq 1 + \varepsilon; \tag{21}$$

$$\mathrm{U} = \{(x, y) \mid y \in x\mathrm{V}\} \cap (\mathrm{S} \times \mathrm{S}), \quad \text{où V est un voisinage de } e \text{ dans G.} \tag{22}$$

On constate facilement que si $s \in \mathrm{S} \cap \mathrm{V} = \mathrm{U}(e)$, alors $(z, zs) \in \mathrm{U}$ quel que soit $z \in \mathrm{S}$; si $z \in \mathrm{K}$, alors $zs \in \mathrm{U}(\mathrm{K})$ et, par suite, $|g(z) - g(zs)| \leqq \varepsilon$.

Choisissons maintenant une mesure appartenant à $\mathrm{L}(\mathrm{S})$, $\mu \geqq 0$ de masse totale égale à 1 et telle que $\mathrm{S}(\mu) \subset \mathrm{S} \cap \mathrm{V}$. On peut supposer, sans aucune restriction, que l'ensemble $\{f(e) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est borné ; alors les fonctions appartenant à $\mathcal{F}$ sont uniformément bornées sur tout compact et, par suite, il existe (prop. 1) $f_\varepsilon \in \mathcal{F}$ telle que si $f \geqq f_\varepsilon$ [11] on a pour tout $t \in \mathrm{K}$.

$$\left| \int f(s)\, d\mu_t(s) - \int g(s)\, d\mu_t(s) \right| \leqq \varepsilon. \tag{23}$$

Remarquons que, quel que soit $z \in \mathrm{S}$, $|f(z) - g(z)|$ est majoré par

$$\left| \int (g(zs) - f(zs))\, d\mu(s) \right| + \left| \int (g(z) - g(zs))\, d\mu(s) \right| + \left| \int (f(z) - f(zs))\, d\mu(s) \right|. \tag{24}$$

D'après l'inégalité (23), le premier terme de la somme (24) est majoré par $\varepsilon$ si $z \in \mathrm{K}$ et $f \geqq f_\varepsilon$; il en est de même pour le second, car $\mathrm{S}(\mu) \subset \mathrm{S} \cap \mathrm{V}$. Il reste à évaluer le troisième terme. Pour ce faire choisissons $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathfrak{V}$ telles que $\mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n \supset \mathrm{K}$ et soit $\mathrm{M} = 2 \sup\{\mathfrak{r}(\mathrm{A}_1), \ldots, \mathfrak{r}(\mathrm{A}_n)\}$. Alors on a pour $z \in \mathrm{K}$, $s \in \mathrm{U}(e)$ et $f \geqq f_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(zs)|^2 &\leqq \mathrm{M} f(e)(f(e)(1 + \mathfrak{r}(\mathrm{U}(e)))/2 - \mathcal{R} f(s)) \\
&\leqq \mathrm{M} f(e)(f(e)(1 + \varepsilon) - \mathcal{R} f(s)) \leqq \mathrm{M}(g(e) + \varepsilon)((g(e) + \varepsilon)(1 + \varepsilon) - \mathcal{R} f(s)) \\
&\leqq \mathrm{M}(g(e) + \varepsilon)(g(e)\varepsilon + (1 + \varepsilon)\varepsilon + g(e) - \mathcal{R} f(s))
\end{aligned}$$

et, par suite (en appliquant l'inégalité de Schwarz),

$$\left| \int (f(z) - f(zs))\, d\mu(s) \right|^2 \leqq \mathrm{M}(g(e) + 1)(g(e)\varepsilon + 2\varepsilon) + \int (g(e) - \mathcal{R} f(s))\, d\mu(s).$$

Mais, pour $f \geqq f_\varepsilon$,

$$\int (g(e) - \mathcal{R} f(s))\, d\mu(s) = \int (g(e) - \mathcal{R} g(s)(\, d\mu(s) + \int (\mathcal{R} g(s) - \mathcal{R} f(s))\, d\mu(s) \leqq 2\varepsilon.$$

---

[11] Il s'agit de l'ordre de l'ordonné filtrant $\mathcal{F}$.

Donc pour $f \geqq f_\varepsilon$ et $z \in K$, on a

$$|f(z) - g(z)| \leqq 2\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} (g(e) + 4)$$

et, par suite, le théorème est démontré.

*Remarques.* — 1° Le théorème 3 étend aux classes $P(\mathfrak{N})$ un résultat démontré par D. Raikov [16] pour les fonctions usuelles de type positif définies sur un groupe localement compact.

3° Du théorème 3 il résulte que sur toute partie $\mathfrak{X} \subset P(\mathfrak{N})$ telle que $f(e) = g(e)$ pour $f, g \in \mathfrak{X}$ la topologie faible coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

6. Un théorème d'approximation concernant les fonctions appartenant a une classe $P(\mathfrak{N})$. — Considérons une classe $P(\mathfrak{N})$ et soit

$$P_0(\mathfrak{N}) = \{f \mid f \in P(\mathfrak{N}), f(e) \leqq 1\}.$$

$P(\mathfrak{N})$ est le cône de sommet O engendré par $P_0(\mathfrak{N})$. Nous disons qu'une partie $Q \subset P_0(\mathfrak{N})$ est *régulière* si :

(25) Q est convexe;
(26) $f \in Q$ et $f \not\equiv 0$ implique $f/f(e) \in Q$;
(27) $f \in Q$ et $f \gg g$ implique $g \in Q$.

Proposition 3. — $P_0(\mathfrak{N})$ *est une partie régulière faiblement compacte.*

La vérification des propriétés (25), (26) et (27) est immédiate. Pour démontrer que $P_0(\mathfrak{N})$ est faiblement compacte, il suffit de montrer que $P_0(\mathfrak{N})$ est faiblement fermée [car $P_0(\mathfrak{N})$ est faiblement bornée et L(S) est tonnelé]. Soit donc $\mathcal{F} \subset P_0(\mathfrak{N})$ un ordonné filtrant convergeant faiblement vers $g$; $P(\mathfrak{N})$ étant faiblement fermée, $g \in P(\mathfrak{N})$. Il reste à montrer que $g(e) \leqq 1$; or si $g(e) > 1$ on déduirait du théorème 3 que $\mathcal{F}$ converge uniformément sur tout compact vers $g$. Donc $g(e) \leqq 1$, ce qui contredit l'hypothèse $g(e) > 1$.

Pour toute partie régulière $Q \subset P_0(\mathfrak{N})$ désignons par $A(Q, \mathfrak{N})$ l'ensemble des fonctions élémentaires normées appartenant à Q. Nous posons $A(\mathfrak{N})$ au lieu de $A(Q, \mathfrak{N})$ si $Q = P_0(\mathfrak{N})$.

Proposition 4. — *Pour qu'une fonction $f \not\equiv 0$ appartenant à une partie régulière* Q *soit un point extrémal de* Q, *il faut et il suffit que* $f \in A(Q, \mathfrak{N})$.

Ce résultat se démontre comme la propriété analogue des fonctions de type positif usuelles. On peut utiliser une remarque de N. Bourbaki ([3], chap. I-II, p. 82-83) pour montrer qu'une minorante arbitraire d'une fonction $f \in Q$ est un multiple scalaire de $f$ si et seulement si $f$ est un point extrémal de Q.

Théorème 4. — *Une fonction $f$ appartenant au cône de sommet* O *engendré par une partie régulière faiblement fermée* Q *est limite uniforme sur tout compact de* *fonctions de la forme*

$$\sum \lambda_i \varphi_i, \qquad \text{où} \quad \lambda_i \geqq 0, \qquad \sum \lambda_i = f(e) \tag{28}$$

*et* $\varphi_i$ *sont des fonctions élémentaires normées appartenant à* Q.

Considérons la fonction $f/f(e)$. D'après le théorème de Krein et Milman ([3], p. 84), $f/f(e)$ est limite faible, et par suite d'après le théorème 3, limite uniforme sur tout compact, de fonctions de la forme (28), avec $\lambda_i \geqq 0$ et $\sum \lambda_i = 1$.

Avant de terminer ce paragraphe nous allons construire un exemple de partie régulière faiblement fermée. Soit $f \in P(\mathfrak{N})$, $\mathcal{R}_0(f)$ l'ensemble des fonctions appartenant à $P_0(\mathfrak{N})$ de la forme

$$f^{\mu_1} + \ldots + f^{\mu_n}, \tag{29}$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des mesures à support fini et $\mathcal{R}(f)$ l'adhérence de $\mathcal{R}_0(f)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Si $f \in \mathcal{R}_0(f)$, $\mu$ est une mesure à support fini et $f^\mu(e) \leqq 1$, alors (d'après une remarque faite au paragraphe 3) $f^\mu \in \mathcal{R}_0(f)$. On peut encore montrer que $f^\mu \in \mathcal{R}(f)$ si $\mu \in M(S)$, $f \in \mathcal{R}_0(f)$ et $f^\mu(e) \leqq 1$. En effet, choisissons pour cela un ordonné filtrant $\mathcal{F}$ de mesures à support fini tel que : (i) $S(\nu) \subset S(\mu)$ pour toute $\nu \in \mathcal{F}$; (ii) $\|\nu\| \leqq \|\mu\|$ pour toute $\nu \in \mathcal{F}$; (iii) $\mathcal{F}$ converge vaguement vers $\mu$. Alors $\lim\limits_{\nu \in \mathcal{F}} f^\nu = f^\mu$ uniformément sur tout compact et, par suite, $f^\mu \in \mathcal{R}(f)$, car on peut supposer $f^\nu(e) \leqq 1$ pour toute $\nu \in \mathcal{F}$.

Proposition 5. — *$\mathcal{R}(f)$ est une partie régulière faiblement compacte.*

Démontrons d'abord que $\mathcal{R}(f)$ est une partie régulière. On constate immédiatement que $\mathcal{R}(f)$ vérifie les conditions (25) et (26). Il reste donc à montrer que $h \in \mathcal{R}(f)$ si $g \gg h$ et $g \in \mathcal{R}(f)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $K \subset S$ un compact. Il existe alors une mesure $\beta$, dont le support est fini, telle que

$$|g^\beta(x) - h(x)| \leqq \varepsilon \qquad \text{si} \quad x \in K; \tag{30}$$

d'autre part il existe $g_1 \in \mathcal{R}_0(f)$ telle que

$$|g(x) - g_1(x)| \leqq \varepsilon/(1 + \|\beta\|^2) \qquad \text{si} \quad x \in S(\beta)^+ KS(\beta). \tag{31}$$

De (31) on déduit

$$|g^\beta(x) - g_1^\beta(x)| \leqq \varepsilon \qquad \text{si} \quad x \in K, \tag{32}$$

et, par suite [d'après (30) et (32)],

$$|g_1^\beta(x) - h(x)| \leqq 2\varepsilon \qquad \text{si} \quad x \in K. \tag{33}$$

Maintenant si $g_1^\beta(e) \leqq 1$, $g_1^\beta \in \mathcal{R}_0(f)$; si $g_1^\beta(e) > 1$, $g_1^\beta/g_1^\beta(e) \in \mathcal{R}_0(f)$ et

$$|g_1^\beta(x)/g_1^\beta(e) - h(x)| \leqq 2\varepsilon(1 + |h(x)|) \qquad \text{si} \quad x \in K, \tag{34}$$

car $1 \leqq g_1^\beta(e) \leqq 1 + 2\varepsilon$. De (33) et (34) on déduit que $h \in \mathcal{R}(f)$.

Démontrons maintenant que $\mathcal{R}(f)$ est faiblement fermée. Pour ce faire il suffit de montrer que $\mathcal{R}(f)$ est l'adhérence faible de $\mathcal{R}_0(f)$. Soit donc $g$ une fonction faiblement adhérente à $\mathcal{R}_0(f)$. Si $g(e)=1$, on déduit $g\in\mathcal{R}(f)$ d'après le théorème 3. Supposons $g(e)<1$. Soient $0<\varepsilon<(1-g(e))/2$, $K\subset S$ une partie compacte et $\mu\in L(S)$ telle que

$$(35) \qquad |g^{\mu}(x)-g(x)|\leqq\varepsilon \qquad \text{pour} \quad x\in K.$$

$g$ étant faiblement adhérente à $\mathcal{R}_0(f)$, il existe (prop. 1) $h\in\mathcal{R}_0(f)$ telle que

$$(36) \qquad |g^{\mu}(x)-h^{\mu}(x)|\leqq\varepsilon \qquad \text{pour} \quad x\in K.$$

On déduit de (35) et (36), $h^{\mu}(e)\leqq g(e)+2\varepsilon\leqq 1$ et

$$|g(x)-h^{\mu}(x)|\leqq 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad x\in K;$$

il s'ensuit $g\in\mathcal{R}(f)$.

7. Représentation intégrale des fonctions appartenant a une classe $P(\mathfrak{N})$. — Pour toute partie régulière faiblement fermée Q désignons par $B(Q, \mathfrak{N})$ l'ensemble des fonctions non identiquement nulles faiblement adhérentes à $A(Q, \mathfrak{N})$. Désignons encore par $B_1(Q, \mathfrak{N})$ l'ensemble $\{f \mid f\in B(Q, \mathfrak{N}), f(e)=1\}$.

Proposition 6. — *Si* S *abélien* $A(Q, \mathfrak{N})=B(Q, \mathfrak{N})$.

Soit $\mathcal{F}\subset A(Q, \mathfrak{N})$ un ordonné filtrant convergeant faiblement vers une fonction $g\not\equiv 0$ et soit $\mu\in L(S)$ telle que $\int g(s)\,d\mu(s)\neq 0$ $\left[\text{on peut supposer } \int f(s)\,d\mu(s)\neq 0 \text{ pour toute } f\in\mathcal{F}\right]$. Alors (prop. 1), on a

$$\lim_{f\in\mathcal{F}}\int f(zs)\,d\mu(s)=\int g(zs)\,d\mu(s)$$

uniformément sur tout compact. Mais

$$\int f(zs)\,d\mu(s)=f(z)\int f(s)\,d\mu(s) \qquad \text{pour} \quad z\in S \quad \text{et} \quad f\in\mathcal{F}.$$

Il s'ensuit que $f$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction nécessairement identique à $g$; on déduit

$$g(st)=g(s)g(t) \qquad \text{et} \qquad g(u^{+})=\overline{g(u)}$$

quels que soient $s, t, u\in S$. Donc

$$g\in Q\cap A(\mathfrak{N})=A(Q, \mathfrak{N})$$

et, par suite, la proposition est démontrée.

Théorème 5. — *Pour toute fonction $f$ appartenant au cône engendré par une* *partie régulière faiblement fermée* $Q \subset P(\mathfrak{R})$ *il existe une mesure de Radon positive sur* $B(Q, \mathfrak{R})$ $\mu_f$, *telle que :* (i) $\mu_f\Big(B(Q, \mathfrak{R}) \cap \complement B_1(Q, \mathfrak{R})\Big) = 0$; (ii) *pour tout* $s \in S$ *on a*

$$f(s) = \int_{B(Q,\mathfrak{R})} \varphi(s)\, d\mu_f(\varphi); \tag{37}$$

(iii) *Si* S *est abélien* $A(Q, \mathfrak{R}) = B(Q, \mathfrak{R})$ *et* $\mu_f$ *est unique;* (iv) *Si* S *est séparable on peut choisir* $\mu_f$ *telle qu'on ait*

$$\mu_f\Big(B(Q, \mathfrak{R}) \cap \complement A(Q, \mathfrak{R})\Big) = 0.$$

Commençons par démontrer que l'application $\varphi \to \varphi(e)$ définie sur $B(Q, \mathfrak{R})$ est absolument mesurable ([12]). Pour toute $A \in \mathfrak{V}(e)$ soit

$$M(\varphi;\, A) = \sup\{\,|\varphi(x)|\;|\; x \in A\,\};$$

on a

$$M(\varphi;\, A) = \sup\left\{\left|\int \varphi(x)\, d\mu(x)\right|\;\Big|\; \mu \in L(S)\,|, \qquad \|\mu\| \leqq 1, \qquad S(\mu) \subset A\right\}.$$

On déduit que $\varphi \to M(\varphi;\, A)$ est semi-continue inférieurement sur $B(Q, \mathfrak{R})$. Soit $(A_n)_{1 \leqq n < \infty}$ une suite de parties appartenant à $\mathfrak{V}(e)$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{r}(A_n) = 1$. Alors

$$\varphi(e) = \lim_{n \to \infty} M(\varphi;\, A_n),$$

car

$$\varphi(e) \leqq M(\varphi;\, A_n) \leqq \varphi(e)\, r(A_n)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour toute } \varphi \text{ et } n = 1, 2, \ldots.$$

Il s'ensuit que $\varphi \to \varphi(e)$ est absolument mesurable.

Supposons $f(e) = 1$ et soit $\mu_f$ une mesure de Radon positive sur $B(Q, \mathfrak{R})$ de norme $\|\mu_f\| \leqq 1$ vérifiant l'égalité

$$\int f(s)\, d\mu(s) = \int_{B(Q,\mathfrak{R})} d\mu_f(\varphi) \int \varphi(s)\, d\mu(s) \qquad \text{pour} \quad \mu \in L(S). \tag{38}$$

De (38) on obtient, quel que soit $A \in \mathfrak{V}(e)$,

$$f(e) \leqq \int_{B(Q,\mathfrak{R})} M(\varphi;\, A)\, d\mu_f(\varphi) \leqq \mathfrak{r}(A)^{\frac{1}{2}} \int_{B(Q,\mathfrak{R})} \varphi(e)\, d\mu_f(\varphi).$$

Il s'ensuit

$$f(e) \leqq \int_{B(Q,\mathfrak{R})} \varphi(e)\, d\mu_f(\varphi) \leqq \|\mu_f\|$$

et, par suite,

$$\|\mu_f\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu_f\Big(B(Q, \mathfrak{R}) \cap \complement B_1(Q, \mathfrak{R})\Big) = 0.$$

---

([12]) Une fonction $f$ définie sur $B(Q, \mathfrak{R})$ est absolument mesurable si elle est mesurable pour toute mesure de Radon positive, donnée sur $B(Q, \mathfrak{R})$.

Si l'on remarque (à l'aide du théorème 3) que l'application $(s, \varphi) \rightarrow \varphi(s)$ de $S \times B_1(Q, \mathfrak{R})$ dans l'ensemble des nombres complexes est continue on déduit que l'application $(s, \varphi) \rightarrow \varphi(s)$ de $S \times B(Q, \mathfrak{R})$ dans l'ensemble des nombres complexes est $\mu \otimes \mu_f$-mesurable pour toute $\mu \in L(S)$. $S(\mu)$ étant compact pour $\mu \in L(S)$ on déduit que $(s, \varphi) \rightarrow \varphi(s)$ est bornée presque partout (pour la mesure $\mu \otimes \mu_f$) et, par suite, qu'on peut intervertir l'ordre d'intégration dans le second membre de (38), simplifier par $\mu$ et obtenir, pour tout $s \in S$, l'égalité (ii).

Si S est abélien on a (prop. 6) $A(Q, \mathfrak{R}) = B(Q, \mathfrak{R})$. Désignons par $C_\infty(A(Q, \mathfrak{R}))$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes définies sur $A(Q, \mathfrak{R})$ et s'annulant à l'infini. Pour toute $\mu \in L(S)$, soit $f_\mu$ la fonction définie sur $A(Q, \mathfrak{R})$ par l'égalité $f_\mu(\varphi) = \int \varphi(s)\, d\mu(s)$. On constate facilement que $f_\mu \in C_\infty(A(Q, \mathfrak{R}))$ pour toute $\mu \in L(S)$ et que l'ensemble des $f_\mu$ est dense dans $C_\infty(A(Q, \mathfrak{R}))$. De (38) on déduit alors l'unicité de la mesure $\mu_f$.

Si S est séparable, alors Q est métrisable et pour obtenir (iv) il suffit d'appliquer le théorème de Choquet ([13]).

*Remarques.* — 1° Supposons S abélien tel que l'équation $s^2 = t$ ait une solution dans S pour tout $t \in S$ et $s^+ = s$ pour $s \in S$. Considérons la classe $P(\mathfrak{R}_0)$ correspondant à la famille $\mathfrak{R}_0 = (r_0(A))_{A \in \mathfrak{P}}$, où $r_0(A) = 1$ pour tout $A \in \mathfrak{P}$. Alors $A(\mathfrak{R}_0)$ est formé des fonctions continues à valeurs réelles, telles que $u(st) = u(s)u(t)$, $0 \leqq u(r) \leqq 1$ quels que soient $s, t, r \in S$. Une fonction complètement monotone appartient à $P(\mathfrak{R}_0)$. On déduit alors du théorème 5 la formule de représentation intégrale démontrée dans [15].

Il est à remarquer que même sans supposer que l'équation $s^2 = t$ ait une solution dans S pour tout $t \in S$, on peut déduire du théorème 5 la formule de représentation intégrale démontrée par A. E. Nussbaum. En effet, toute fonction complètement monotone $f$ appartient à $P(\mathfrak{R}_0)$; on a alors

$$f(s) = \int_{A(\mathfrak{R}_0)} \varphi(s)\, d\mu_f(\varphi) \qquad \text{pour} \quad s \in S, \tag{39}$$

où $\mu_f$ est une mesure de Radon positive et bornée sur $A(\mathfrak{R}_0)$. Désignons par $A_+(\mathfrak{R}_0)$ l'ensemble des $g \in A(\mathfrak{R}_0)$ telles que $g(s) \geqq 0$ pour tout $s \in S$. Pour obtenir la formule de A. E. Nussbaum il suffit de montrer que $S(\mu_f) \subset A_+(\mathfrak{R}_0)$. Or ([15], lemme 1)

$$\iint f(s + t + a)\, d\bar{\mu}(s)\, d\mu(t) \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad a \in S \quad \text{et} \quad \mu \in L(S);$$

([13]) Théorème de Choquet. — *Soit $\mathcal{B}$ une partie convexe compacte métrisable d'un espace localement convexe et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$. Pour tout $x \in \mathcal{B}$ il existe une mesure de Radon positive $\mu_x$ sur $\mathcal{B}$ de norme $\|\mu_x\| = 1$ telle que $x = \int_{\mathcal{B}} t\, d\mu_x(t)$ et $\mu_x\left(\mathcal{B} \cap \complement \mathcal{E}\right) = 0$.* (*Voir* [5]; *l'énoncé précédent se réduit immédiatement à celui où $\mathcal{B}$ est une base d'un cône convexe pointé saillant.*)

on déduit alors (avec les notations utilisées dans la démonstration du théorème 5) de la formule (39)

$$(40)\qquad \int_{A(\mathfrak{N}_0)} \varphi(a)\,|f_\mu(\varphi)|^2\,d\mu_f(\varphi) \geqq 0 \qquad \text{pour}\quad a\in S \quad \text{et} \quad \mu\in L(S).$$

De (40) on obtient

$$\int_{A(\mathfrak{N}_0)} \varphi(a)\,h(\varphi)\,d\mu_f(\varphi) \geqq 0 \quad \text{pour tout } a\in S$$

et $h\in C_x(A(\mathfrak{N}_0))$, $h\geqq 0$; il s'ensuit $\varphi(a)\geqq 0$ pour $a\in S(\mu_f)$, c'est-à-dire

$$S(\mu_f)\subset A_+(\mathfrak{N}_0).$$

1° En connexion avec ces remarques mentionnons encore l'article [12] de G. W. Mackey où se trouve annoncée une généralisation du théorème de Haussdorf-Bernstein-Widder.

2° Du théorème 5 on déduit encore les généralisations du théorème de Bochner-Herglotz aux groupes localement compacts (*voir* [9] et [13], et en partie un théorème de A. Devinatz [6].

3° Le théorème 4 peut encore se démontrer à l'aide des théorèmes 3 et 5.

Pour ne pas prolonger l'exposé, nous allons énoncer dans ce qui suit, sans démonstration, un théorème plus fort, sous certains points, que le théorème 5 (mais dont la démonstration est plus compliquée).

Nous disons que le semi-groupe S a la ***propriété*** (D) s'il existe une partie dénombrable $\mathfrak{N}\subset L(S)$ telle que l'ensemble des mesures

$$\sum \nu_i\mu_i \quad \text{(somme finie)},$$

où $\nu_i\in\mathfrak{N}$ et $\mu_i$ appartiennent au centre de L(S), est dense dans L(S). Si S est abélien ou séparable, L(S) a évidemment la propriété (D).

Pour tout ensemble $P(\mathfrak{N})$ et mesure de Radon $\nu$ sur $B(\mathfrak{N})$, positive et bornée, désignons par $N(\mathfrak{N}, \nu)$ l'algèbre des fonctions définies sur $B(\mathfrak{N})$, $\nu$-mesurables et bornées munie de l'involution $g\to\bar{g}$.

Pour toute fonction $f$ appartenant à une classe $P(\mathfrak{N})$, f. c. de la r. i. s. $\{H_f, U_{f,s}, a_f\}$, désignons par $\mathfrak{A}_f$ l'algèbre engendrée par les $U_{f,s}$.

THÉORÈME 6. — *Si* S *a la propriété* (D), *à toute fonction* $f\in P(\mathfrak{N})$ *et algèbre involutive* $\mathcal{E}\subset\mathfrak{A}'_f$, *commutative et maximale, on peut associer une mesure de Radon* $\mu_f$ *sur* $B(\mathfrak{N})$, *et une seule, positive et bornée et telle que :* (i) $\mu_f\left(B(\mathfrak{N})\cap\complement A(\mathfrak{N})\right)=0$; (ii) *il existe une représentation* $g\to F_g$ *de l'algèbre involutive* $N(\mathfrak{N}, \mu_f)$ *sur l'algèbre involutive* $\mathcal{E}$ *qui vérifie pour toute* $g\in N(\mathfrak{N}, \mu_f)$ *et* $s\in S$ *l'égalité*

$$(U_{f,s}F_g a_f\,|\,a_f)=\int_{B(\mathfrak{N})}\varphi(s)\,g(\varphi)\,d\mu_f(\varphi).$$

*Remarque*. — Pour un résultat analogue sur les fonctions de type positif usuelles définies sur un groupe localement compact séparable, *voir* [18].

8. Représentation spectrale des r. i. de S. — Nous supposons S, dans ce paragraphe, *abélien* et pour toute famille $\mathfrak{R} = (\mathrm{r}(A))_{A \in \mathfrak{V}}$ de nombres $\geqq 1$ nous désignons par $R(\mathfrak{R})$ la classe des r. i. de S, $\{H, U_s\}$ telles que

$$U_e = I \quad \text{et} \quad \| U_s \| \leqq \mathrm{r}(A)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour toute } A \in \mathfrak{V} \text{ et } s \in A.$$

Désignons encore par $T(\mathfrak{R})$ la tribu des parties de $A(\mathfrak{R})$ dont la fonction caractéristique est absolument mesurable.

Du théorème 5 on peut déduire un théorème concernant la représentation spectrale des r. i. appartenant à une classe $R(\mathfrak{R})$. Rappelons, avant de le démontrer, plusieurs définitions.

Une famille $(\mu_{x,y})_{x \in H, y \in H}$ de mesures de Radon définies sur un espace localement compact B est *semi-spectrale* si : (i) $\mu_{ax+by,z} = a\mu_{x,z} + b\mu_{y,z}$ quels que soient $a, b$ et $x, y, z \in H$; (ii) $\mu_{x,y} = \overline{\mu}_{y,x}$ quels que soient $x, y \in H$; (iii) $\mu_{x,x} \geqq 0$ et $\| \mu_{x,x} \| = \| x \|^2$ quel que soit $x \in H$.

Pour toute fonction $f$ bornée et absolument mesurable, il existe un opérateur $U_f \in \mathcal{L}(H)$ qui vérifie l'égalité

$$(U_f x \mid y) = \int_B f(\varphi)\, d\mu_{x,y}(\varphi)$$

quels que soient $x, y \in H$. La famille semi-spectrale $(\mu_{x,y})_{x \in H, y \in H}$ est appelée *spectrale* si (Z) $f.\mu_{x,y} = \mu_{U_f x, y}$ quels que soient $f$ bornée et absolument mesurable et $x, y \in H$. Pour qu'une famille semi-spectrale $(\mu_{x,y})_{x \in H, y \in H}$ soit spectrale, il suffit que l'égalité (Z) soit vérifiée pour toute $f$ appartenant à un ensemble $\mathfrak{X}$ de fonctions bornées et absolument mesurables, tel que la seule mesure de Radon $\mu \geqq 0$ s'annulant pour toute $f \in \mathfrak{X}$ soit $\mu = 0$ (14).

Théorème 7. — *Pour toute r. i.* $\{H, U_s\}$ *appartenant à* $R(\mathfrak{R})$ *il existe sur* $T(\mathfrak{R})$ *une mesure spectrale régulière* E (15) *et une seule telle que quels que soient* $x, y \in H$ *et* $s \in S$

$$(U_s x \mid y) = \int_{A(\mathfrak{R})} \varphi(s)\, d(E(\varphi) x \mid y).$$

*Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est permutable avec les* $U_s$ *si et seulement si* $TE(K) = E(K)T$ *pour toute partie compacte* $K \subset S$.

La fonction $s \to (U_s x \mid x)$ appartient à $P(\mathfrak{R})$ quel que soit $x \in H$; d'après le

(14) Pour ces notions, *voir* R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 68-124) et C. T. Ionescu Tulcea, *Spatii Hilbert*, Bucarest, 1956.

(15) *Voir* [10], p. 62.

théorème 5 il existe une mesure de Radon positive et bornée (et une seule) $\mu_{x,x}$ sur $A(\mathfrak{R})$ telle que

$$(U_s x \mid x) = \int_{A(\mathfrak{R})} \varphi(s)\, d\mu_{x,x}(\varphi) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Si nous posons

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}(\mu_{x+y,x+y} - \mu_{x-y,x-y} + i\mu_{x+iy,x+iy} - i\mu_{x-iy,x-iy}) \quad \text{pour} \quad x, y \in H,$$

alors on a quel que soit $s \in S$

$$(41) \qquad (U_s x \mid y) = \int_{A(\mathfrak{R})} \varphi(s)\, d\mu_{x,y}(\varphi);$$

la mesure $\mu_{x,y}$ étant uniquement déterminée par les égalités (41) on déduit facilement que la famille $(\mu_{x,y})_{x\in H, y\in H}$ est semi-spectrale. Mais on a $\hat{s}.\mu_{x,y} = \mu_{U_s x, y}$ quels que soient $s \in S$, $x, y \in H$ si nous posons pour tout $s \in S$, $\hat{s}(\varphi) = \varphi(s)$; il s'ensuit que la famille $(\mu_{x,y})_{x\in H, y\in H}$ est spectrale, car $U_{\hat{s}} = U_s$ quel que soit $s \in S$. Pour obtenir la mesure spectrale E il suffit alors de poser pour tout $A \in T(\mathfrak{R})$,

$$E(A) = U\varphi_A.$$

*Remarque.* — Le théorème [7] contient comme cas particulier un théorème de W. Ambrose [1], R. Godement [8] et M. Neumark [14] et un théorème de A. E. Nussbaum ([15], p. 575) (16).

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] W. Ambrose, *Spectral resolution of groups of unitary operators* (*Duke Math. J.*, t. **11**, 1944, p. 589-595).

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, livre VI, chap. I-IV, Paris, 1952.

[3] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, livre V, chap. I-II, Paris, 1953 et chap. III-V, Paris, 1955.

[4] H. Cartan et R. Godement, *Analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. **64**, 1947, p. 79-99).

[5] G. Choquet, *Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **243**, 1956, p. 699-702).

[6] A. Devinatz, *Integral representations of positive definite functions* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **74**, 1553, p. 56-77).

[7] J. Dieudonné, *Sur les espaces de Köthe* (*J. Anal. Math.*, t. **1**, 1951, p. 81-115).

[8] R. Godement, *Sur une généralisation d'un théorème de Stone* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **218**, 1944, p. 901-903).

[9] R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **63**, 1948, p. 1-84).


---

(16) A. E. Nussbaum ne suppose pas S localement compact ni $S \ni e$.

[10] P. Halmos, *Introduction to Hilbert spaces*, New-York, 1951.

[11] E. Hewitt et H. S. Zuckerman, *Finite dimensional convolution algebras* (*Acta Math.*, t. **93**, 1955, p. 67-119).

[12] G. W. Mackey, *Functions on locally compact groups* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **56**, 1950, p. 385-412).

[13] F. I. Mautner, *Unitary representation of locally compact groups* II (*Ann. Math.*, t. **52**, 1950, p. 528-556).

[14] M. Neumark, *Positive definite operator functions on a commutative group* (*Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.* Ser. Math., t. **7**, 1943, p. 237-244).

[15] A. E. Nussbaum, *The Haussdorf-Bernstein-Widder theorem for semi-groups in locally compact Abelian groups* (*Duke Math. J.*, t. **22**, 1955, p. 573-582).

[16] D. Raikov, *Sur divers types de convergence des fonctions de type positif* (*Doklady*, t. **58**, 1947, p. 1279-1282).

[17] Béla Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, Budapest, 1955.

[18] Minoru Tomita, *Harmonic analysis on locally compact groups* (*J. Okayama Univ.*, t. **5**, 1956, p. 133-193).

[19] N. Bourbaki, *Intégration*, livre VI, chap. V, Paris 1957 ([17]).

[20] J. Dixmier, *Ses algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (*Algèbres de van Neumann*), Paris 1957 ([17]).

([17]) Ajouté pendant la correction des épreuves.