

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL VIVIER

Étude des propriétés d'opérateurs différentiels par des méthodes d'algèbre extérieure directe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 74, n° 2 (1957), p. 179-195

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_2_179_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS PAR DES MÉTHODES D'ALGÈBRE EXTÉRIEURE DIRECTE

PAR M. MARCEL VIVIER.

1. Rappel de quelques propriétés matricielles.

NOTATIONS. — Le symbole $(\)^*$ est l'opérateur de transposition matricielle. $(p \times q)$ représente l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes construites sur le corps \mathbf{K} des nombres complexes. Plus brièvement, \mathcal{A}_n désigne l'anneau $(n \times n)$ et \mathcal{A}'_n la partie réelle de \mathcal{A}_n .

$n(k \times h)$ est l'ensemble des matrices $(k \times h)$ construites sur l'anneau \mathcal{A}_n .

Sur $n(k \times h)$ on définit la multiplication à gauche, ou à droite, par un élément $a \in \mathcal{A}_n$: si $M \in n(k \times h)$, aM s'obtient en multipliant à gauche, ou à droite, chaque terme $(n \times n)$ de M par a .

$\mathcal{A}_{2n} = n(2 \times 2)$: La matrice identité de \mathcal{A}_n est notée $\mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}_n$ si quelque confusion est à craindre. De même, $i\mathbf{1}_n$ se représentera par i ou par i_n [dans $(\mathbf{K}) i^2 = -1$], \mathbf{I} est la matrice identité de \mathcal{A}_{2n} et $\mathcal{J} \in n(2 \times 2)$ vérifie les relations

$$(1) \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$(2) \quad \mathcal{J}^2 = -\mathbf{I}.$$

IMAGE DE \mathcal{A}_n DANS \mathcal{A}'_{2n} . — Les éléments de \mathcal{A}_{2n} qui commutent avec \mathcal{J} composent un sous-anneau \mathcal{C}_{2n} (\mathcal{C}'_{2n} est sa partie réelle); $M \in n(2 \times 2)$ appartient à \mathcal{C}_{2n} si et seulement si

$$(3) \quad M = a\mathbf{I} + b\mathcal{J},$$

a et b sont quelconques dans \mathcal{A}_n . M régulière dans \mathcal{A}_{2n} , est aussi régulière dans \mathcal{C}_{2n} .

Pour passer de \mathcal{A}_{2n} à \mathcal{A}_n nous utiliserons l'opérateur matriciel $\in n(1 \times 2)$

$$(4) \quad (V) = (1, -i).$$

Il vérifie les relations suivantes :

$$(5) \quad VV^* = 0,$$

$$(6) \quad \frac{1}{2} V\bar{V}^* = 1,$$

$$(7) \quad \bar{V}^*V = 1 - i\mathcal{J},$$

$\bar{V}^*V \in \mathcal{C}_{2n}$ commute donc avec tout élément de \mathcal{C}_{2n} . Il est immédiat que :

$$(8) \quad \begin{cases} V\mathcal{J} = iV, \\ \bar{V}\mathcal{J} = -i\bar{V} \end{cases}$$

Les vecteurs lignes de la matrice unitaire

$$(9) \quad \boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V \\ \bar{V} \end{pmatrix}}$$

sont donc les vecteurs propres de l'opérateur \mathcal{J} .

M vérifiant (3), on tire de (8)

$$(10) \quad \begin{cases} VM = (a + bi)V, \\ \bar{V}M = (a - bi)\bar{V}; \end{cases}$$

d'où

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} VMV^* = \frac{1}{2} (a + bi) V\bar{V}^* = (a + bi) = \mathfrak{E}(M), \\ UM\bar{U}^* = \left(\begin{array}{c|c} a + bi & 0 \\ \hline 0 & a - bi \end{array} \right) = \theta(M), \\ UMU^* = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a + bi \\ \hline a - bi & 0 \end{array} \right). \end{array} \right.$$

L'application \mathfrak{E} est une isomorphie de l'anneau \mathcal{C}'_{2n} sur l'anneau \mathcal{A}_n (en particulier la multiplication par \mathcal{J} dans \mathcal{C}'_{2n} est équivalente à la multiplication par i dans \mathcal{A}_n) et θ une isomorphie dans \mathcal{A}_{2n} de l'anneau \mathcal{C}'_{2n} sur l'anneau dont les éléments dans $n(2 \times 2)$ ont la forme $\left(\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \bar{\Lambda} \end{array} \right)$.

Propriété fondamentale de l'anneau \mathcal{C}'_{2n} . — 1° Si $M\mathcal{J} = \mathcal{J}M$ (c'est-à-dire si $M \in \mathcal{C}'_{2n}$) les relations

$$(12) \quad \boxed{MM^* = I,}$$

$$(13) \quad \boxed{M\mathcal{J}M^* = \mathcal{J}}$$

sont équivalentes. Dans \mathcal{C}'_{2n} le *groupe orthogonal*, défini par (12), et le *groupe symplectique*, défini par (13) sont donc confondus.

2° Réciproquement, si $M \in \mathcal{A}_{2n}$ est à la fois orthogonale et symplectique, elle appartient à \mathcal{C}'_{2n} , car (12) et (13) entraînent

$$\begin{aligned} MJ.JM^* &= I, \\ MJ.M^*J &= -I, \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad JM^* = M^*J.$$

C. Q. F. D.

Images dans \mathcal{A}_n des matrices symétriques et des matrices orthogonales de \mathcal{C}'_{2n} .
Applications. — a. Par transposition, on tire de (11)₁

$$(14) \quad \mathfrak{T}M^* = (\overline{\mathfrak{T}M})^*,$$

\mathfrak{T} transforme donc (biunivoquement) les matrices symétriques de \mathcal{C}'_{2n} en les matrices hermitiennes de \mathcal{A}_n .

b. Si $M \in \mathcal{C}'_{2n}$ est orthogonale, $\mathfrak{T}(M) \in \mathcal{A}_n$ est unitaire (et réciproquement), car on tire de (12)

$$\mathfrak{T}M.\mathfrak{T}M^* = I_n$$

et, de (14),

$$\mathfrak{T}M.(\overline{\mathfrak{T}M})^* = I_n.$$

C. Q. F. D.

c. On sait que si la matrice $g = a + bi$ est hermitienne, ce que nous admettrons désormais ($a = a^*$, $b + b^* = 0$) et du même genre que I_n , elle admet la décomposition dans \mathcal{A}_n

$$(15) \quad g = r\bar{r}^*,$$

$r \in \mathcal{A}_n$ n'étant déterminée qu'au produit près, à droite, par une matrice unitaire quelconque. Il s'ensuit que $M = \mathfrak{T}^{-1}(g)$ admet la décomposition

$$(16) \quad M = hh^* \quad [h = \mathfrak{T}^{-1}(r)],$$

h n'étant définie dans \mathcal{C}'_{2n} qu'au produit près, à droite, par une matrice orthogonale de \mathcal{C}'_{2n} .

FORMES QUADRATIQUES. — Soient S l'ensemble des $2n$ indéterminées $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$, et E l'espace vectoriel sur (K) dont S est une base. Sur $E \otimes E$ nous postulons les deux types d'équivalences classiques qui caractérisent l'un une multiplication commutative, dite *algébrique*, l'autre une multiplication anti-commutative, dite *extérieure*. Pour les distinguer, nous conviendrons d'enfermer éventuellement, entre crochets, les expressions dans lesquelles la dernière est en jeu.

$\left. \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix} \right\}$ désignant les lignes $\{x^1, \dots, x^n\}, \{y^1, \dots, y^n\}$, \vec{x}, \vec{y} leurs transposées, $M \in \mathcal{C}'_{2n}$ une

matrice symétrique régulière décomposable comme en (16) en le produit hh^* , nous considérons, *attachées à la base S* : la forme *quadratique algébrique*

$$(17) \quad \varphi = (\vec{x} \cdot \vec{y}) \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

et la forme *quadratique extérieure associée*

$$(18) \quad \omega = \frac{1}{2} \left[(\vec{x} \cdot \vec{y}) (\mathcal{J} \mathbf{M}) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right].$$

CLASSE DES BASES (DE E) PERMISES. — Nous dirons qu'une base $S' = (\vec{x}' \cdot \vec{y}')$ liée à S par la relation

$$(\vec{x}' \cdot \vec{y}') = (\vec{x} \cdot \vec{y}) \mathbf{T}$$

est permise si, dans S' , φ et ω conservent les mêmes formes que dans S, c'est-à-dire si

$$(17) \quad \varphi = (\vec{x}' \cdot \vec{y}') \mathbf{M}' \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix},$$

$$(18)' \quad \omega = \frac{1}{2} \left[(\vec{x}' \cdot \vec{y}') \mathcal{J} \mathbf{M}' \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} \right],$$

avec, évidemment,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{T}'.$$

Comme on doit avoir

$$\mathcal{J} \mathbf{T} \mathbf{M}' = \mathbf{T} \mathcal{J} \mathbf{M}, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{J} \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathcal{J},$$

S' est permise si et seulement si \mathbf{T} est un élément régulier de \mathcal{C}'_{2n} . Désormais S représentera l'une quelconque des bases permises de E.

BASES ORTHONORMÉES. — Nous appelons base orthonormée de E toute base permise $(\vec{X} \cdot \vec{Y})$ vérifiant l'égalité suivante où h dans (16) possède l'indétermination signalée ci-dessus (dans \mathcal{C}'_{2n}) :

$$(19) \quad (\vec{X} \cdot \vec{Y}) = (\vec{x} \cdot \vec{y}) h.$$

Dans une telle base,

$$(20) \quad \varphi = (\vec{X} \cdot \vec{Y}) \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} = \sum_1^n (X^i)^2 + \sum_1^n (Y^i)^2,$$

$$(21) \quad \omega = \frac{1}{2} \left[(\vec{x} \cdot \vec{y}) h \mathcal{J} h^* \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right] = \sum_1^n [X^k Y^k],$$

et

$$(22) \quad \frac{[\omega]^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [X^1, \dots, X^n; Y^1, \dots, Y^n].$$

Images complexes des bases permises. — A la base permise réelle S nous faisons correspondre la base (S_c) , dite base complexe permise, de la façon suivante :

$$(S_c) = (\vec{z}, \vec{\bar{z}}); \quad \vec{z} = (z^1, \dots, z^n)$$

et

$$\vec{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{x}, \vec{y}) \bar{V}^*,$$

c'est-à-dire

$$(23) \quad (\vec{z}, \vec{\bar{z}}) = (\vec{x}, \vec{y}) \bar{U}^*.$$

En particulier, à la base orthonormée (\vec{X}, \vec{Y}) correspond la base complexe $(\vec{\mathcal{G}}, \vec{\bar{\mathcal{G}}})$.

En posant comme ci-dessus $g = \mathfrak{G}(M)$, il vient

$$(24) \quad \varphi = 2 \vec{z}, g, \vec{\bar{z}} = 2 \left(\vec{\mathcal{G}}, \vec{\bar{\mathcal{G}}} \right),$$

$$(25) \quad \omega = i \left[\vec{z}, g, \vec{\bar{z}} \right] = i \left[\vec{\mathcal{G}}, \vec{\bar{\mathcal{G}}} \right].$$

Conformément à la propriété fondamentale de l'anneau \mathcal{C}'_{2n} , ce sont les mêmes substitutions sur (XY) à opérateurs dans \mathcal{C}'_{2n} qui conservent les structures réduites des derniers membres de (20) et (21). Elles correspondent aux transformations du groupe unitaire de \mathcal{C}_n appliquées à \mathfrak{G} . Celles-ci conservent les structures réduites des derniers membres de (24) et de (25).

Remarque. — Une base B dans laquelle

$$\omega = [A^1 B^1] + \dots + [A^n B^n],$$

$A^1 B^1 \dots A^n B^n$ étant éléments de (B) est dite *canonique pour* ω . On obtient une décomposition canonique de ω en substituant aux \vec{z}^k [de (25)] les quantités

$$(26) \quad z_k = i \sum_h g_{kh} \vec{z}^h.$$

Il vient

$$(27) \quad \omega = \sum_1^n [z^k z_k].$$

On notera cependant que la base $z^1 \dots z^n, z_1 \dots z_n$ n'est ni une base permise ni, en général, une base complexe permise.

2. Rappel de certaines propositions d'algèbre extérieure ⁽¹⁾.

L'Algèbre extérieure de degré $2n$ somme directe du corps K , de E et de toutes

⁽¹⁾ Les renvois en fin de page et sans spécification spéciale se rapportent au Mémoire : *Sur quelques théorèmes d'algèbre extérieure*, par M. Marcel VIVIER (*Ann. Éc. norm. sup.*, t. LXXIII, fasc. 3).

les puissances extérieures $E^{\Lambda p}$ de E sera désignée par \mathcal{E} ou par E^{Λ} si l'on envisage seulement sa structure d'espace vectoriel à 2^{2n} dimensions.

A^1, \dots, A^{2n} étant les $2n$ éléments d'une base \mathcal{B} de E , 2^{2n} monomes de degrés $0, 1, \dots, 2n$ linéairement indépendants construits avec les A_i composent une base \mathcal{B}^{Λ} de E^{Λ} (2). Afin d'utiliser le symbolisme matriciel, nous supposons que le symbole \mathcal{B}^{Λ} représente les éléments qu'il désigne rangés en un vecteur colonne. Les composantes scalaires d'un polynôme $\Phi \in \mathcal{E}$ sont les éléments d'un vecteur ligne $\vec{\lambda}$ (ordonnés comme ceux de \mathcal{B}^{Λ}) de sorte que Φ s'écrit

$$(28) \quad \Phi = \vec{\lambda} \mathcal{B}^{\Lambda}.$$

Le passage de la base \mathcal{B} à la base $\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ \vdots \\ A_1^{2n} \end{pmatrix}$ s'opère à l'aide de la matrice régulière $\alpha \in \mathcal{A}_{2n}$. On pose

$$(29) \quad \mathcal{B}_1 = \alpha \mathcal{B}$$

et, plus généralement,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{\Lambda k} &= \alpha^{\Lambda k} \mathcal{B}^{\Lambda k}, \\ \mathcal{B}_1^{\Lambda} &= \alpha^{\Lambda} \mathcal{B}^{\Lambda} \quad (3). \end{aligned}$$

MONOMES BASIQUES COMPLÉMENTAIRES. — A tout élément $m \in \mathcal{B}^{\Lambda}$ on associe l'élément Cm appartenant à \mathcal{B}^{Λ} ou à $-\mathcal{B}^{\Lambda}$ tel que

$$[m Cm] = \mathcal{B}^{\Lambda 2n} = [A_1, \dots, A_{2n}];$$

Cm est dit le complémentaire de m dans la base \mathcal{B} (4). Plus généralement $C\mathcal{B}^{\Lambda k}$ est l'ensemble des complémentaires des éléments de $\mathcal{B}^{\Lambda k}$ énumérés dans le même ordre que ces derniers. $C\mathcal{B}^{\Lambda}$ est la somme directe de tous les $C\mathcal{B}^{\Lambda k}$.

L'une des bases $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ définies par (19) à partir de (16) (bases orthogonales) sera désormais la base \mathcal{B} et l'on posera

$$\mathcal{B}^{\Lambda 2n} = [X^1, \dots, X^n, Y^1, \dots, Y^n].$$

Dans \mathcal{E} toutes les formes extérieures du degré $2n$ seront remplacées par leur rapport à $\mathcal{B}^{\Lambda 2n}$. $\mathcal{B}_1^{\Lambda 2n}$ sera nommé le volume de la base \mathcal{B}_1 .

CORRÉLATIONS. — Nous appellerons *corrélation principale* ou même *corrélation* — tout court — l'application linéaire définie sur E^{Λ} qui transforme \mathcal{B}^{Λ} en $C\mathcal{B}^{\Lambda}$.

(2) La restriction de \mathcal{B}^{Λ} à $E^{\Lambda p}$ est notée $\mathcal{B}^{\Lambda p}$.

(3) Soit $[A_1^i \dots A_1^i]$ l'élément de rang i de $\mathcal{B}_1^{\Lambda k}$ et $[A^i, \dots, A^k]$ l'élément de rang j de $\mathcal{B}^{\Lambda k}$, l'élément i, j de $\alpha^{\Lambda p}$ est le mineur de α formé par les lignes $i_1 \dots i_k$ et les colonnes $j_1 \dots j_k$.

(4) La dimension de E étant paire on a $C^2 \mathcal{B}^{\Lambda k} = (-1)^k \mathcal{B}^{\Lambda k}$.

A Φ donnée par (29), elle fait correspondre

$$(30) \quad \text{Cor}\Phi = \vec{\lambda} \text{CB}^\Lambda.$$

Lorsque Φ est un polynome homogène de degré k , $\text{Cor}\Phi$ est « la forme adjointe » à Φ . Son degré est $2n - k$. Elle est habituellement notée ${}^*\Phi$, mais nous n'utiliserons pas ce symbolisme. L'opérateur Cor a un sens intrinsèque dans la classe des bases orthogonales.

Nous appellerons *corrélation dans la base quelconque* \mathcal{B}_1 de E et nous noterons $\text{Cor}_{\mathcal{B}_1}$ l'application linéaire produit de la transformation $B_1^\Lambda \rightarrow \text{CB}_1^\Lambda$ et de la multiplication par le pseudo-scalaire $\mathcal{B}_1^{\Lambda 2n}$.

EXPRESSION DE LA CORRÉLATION PRINCIPALE DANS UNE BASE QUELCONQUE. — \mathcal{B}_1 étant définie par (29) et Φ par la relation

$$(31)_1 \quad \Phi = \vec{\mu} \mathcal{B}_1^{\Lambda p},$$

$$(31)_2 \quad \text{Cor}\Phi = \vec{\mu} \frac{(\alpha\alpha^*)^{\Lambda p}}{|\alpha|} \text{C} \mathcal{B}_1^{\Lambda p}$$

($|\alpha|$ est le déterminant de α).

Exemples : 1° Si $\mathcal{B}_1^* = (\vec{x}, \vec{y})$

$$(\alpha\alpha^*) = M^{-1} \quad \text{et} \quad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{|M|}};$$

2° Si $\mathcal{B}_1^\alpha = (\vec{z}, \vec{\bar{z}})$

$$(\alpha\alpha^*) = (\text{UMU}^*)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathcal{G}^{*-1} \\ \hline \mathcal{G}^{-1} & 0 \end{array} \right)$$

et

$$|\alpha| = \frac{i^n}{\text{module } |\mathcal{G}|}.$$

PRODUITS RÉGRESSIFS. — F et G étant deux formes de \mathcal{E} , la forme H définie par l'égalité

$$\text{Cor}_{\mathcal{B}_1} H = [\text{Cor}_{\mathcal{B}_1} F \text{ cor}_{\mathcal{B}_1} G]$$

est indépendante du choix de la base \mathcal{B}_1 . H est appelé le produit régressif de F et de G et l'on pose ⁽⁵⁾

$$H = F | G.$$

La multiplication régressive est une opération intrinsèque, c'est-à-dire commutable avec une transformation linéaire régulière de E .

Pour calculer le produit régressif des formes F et G , de degrés respectifs p et q ($p + q \geq 2n$), dans une base quelconque \mathcal{B}_1 de E , il est commode d'avoir

⁽⁵⁾ Cf. § 9, p. 228.

recours à l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ lié au monome basique α de \mathcal{B}_1 ⁽⁶⁾.
 $[a]$ étant le volume de \mathcal{B}_1 , on a

$$[a] \frac{\partial F}{\partial \alpha} = F | C\alpha.$$

Dès lors, α^i étant un monome basique du degré p , et β^i un monome basique du degré q

$$F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \alpha^i} [\alpha^i], \quad G = \sum_i \frac{\partial G}{\partial \beta^i} [\beta^i]$$

et

$$(32)_1 \quad \boxed{F | G = (-1)^q \sum_i \frac{\partial G}{\partial \beta^i} \frac{\partial F}{\partial [C\beta^i]} [a]}$$

ou

$$(32)_2 \quad \boxed{F | G = (-1)^{p(q+1)} \sum_i \frac{\partial F}{\partial \alpha^i} \frac{\partial G}{\partial [C\alpha^i]} [a].}$$

Note concernant le produit régressif $F | \text{cor} G$. — Il n'est pas identiquement nul si $p \geq q$ et pour $p = q$ il se réduit au « produit scalaire » dans $\mathcal{B}^{\wedge p}$ des formes F et G . En supposant \mathcal{B}_1 identifié à la base $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nous écrirons

$$F | \text{cor} G = \sum_i F \left| \frac{\partial G}{\partial \beta^i} \text{cor} \beta^i. \right.$$

Mais, d'après $(31)_2$ et tenant compte de l'exemple 1°,

$$\text{Cor} \beta^i = \frac{m^{(i),(j)}}{\sqrt{|M|}} C\beta^i;$$

$m^{(i),(j)}$ est le mineur de M^{-1} composé avec les lignes affectées des indices représentés par (i) et les colonnes affectées des indices représentés par j . D'après la définition même de $\frac{\partial F}{\partial \beta^i}$, il viendra

$$\boxed{F | \text{cor} G = \sum_{(i),(j)} \frac{\partial G}{\partial \beta^i} \frac{\partial F}{\partial \beta^j} m^{(i),(j)}.}$$

STRUCTURE DE \mathcal{E} RELATIVEMENT A LA FORME QUADRATIQUE RÉGULIÈRE $[\omega]$ ⁽⁷⁾. — On appelle *dérivée totale, d'ordre x* , de la forme extérieure F_p (du degré p) relati-

⁽⁶⁾ Cf. § 5 et 9.

⁽⁷⁾ Cf. chap. IV et, notamment, § 17.

vement à ω la forme notée $\frac{d^x}{d\omega} F_p$ définie par l'égalité

$$(33) \quad \frac{\omega^n}{n!} \frac{1}{x!} \frac{d^x}{d\omega} F_p = F_p \left| \frac{\omega^{n-x}}{(n-x)!} \right.$$

En particulier, dans une base de E canonique pour ω et où

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} [A_i B_i],$$

on a en appliquant la formule (32)₁ avec $G = \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$ et $[a] = \frac{\omega^n}{n!}$,

$$(34)_1 \quad \frac{dF_p}{d\omega} = \sum_1^n \frac{\partial F_p}{\partial [A_i B_i]}.$$

Les éléments $z^1 z_1 z^2 z_2 \dots z^n z_n$ [z_i étant donné par (26)] composent une base canonique pour ω . On a donc

$$(34)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\omega} F_p = \sum_k \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial F}{\partial z^k} = \sum_{k,h} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^h} \frac{\partial}{\partial z^k} F_p \right) \frac{\partial \bar{z}^h}{\partial z_k}, \\ \frac{d}{d\omega} F_p = -i \sum_{k,h} g^{kh} \frac{\partial F}{\partial [z^k \bar{z}^h]} \end{array} \right.$$

(g^{kh} étant l'élément ligne k colonne h de g^{-1}).

On voit que l'opérateur $\frac{d}{d\omega}$ ne se distingue pas dans le cas actuel de l'opérateur Λ des variétés kählériennes (*).

Si $\frac{d}{d\omega} F_p = 0$, on dit que F_p est *effective* ou de la classe zéro. Si $p > n$, $\frac{d}{d\omega} F_p = 0$ entraîne $F_p = 0$. D'autre part, pour $p \leq n$, les relations

$$\frac{dF_p}{d\omega} = 0 \quad \text{et} \quad F_p \omega^{n-p+1} = 0$$

sont équivalentes.

Le produit par ω^x d'une forme effective est appelé : forme de la classe x . Une forme F de la classe x peut s'écrire d'une seule manière $A_p \frac{\omega^x}{x!}$ (avec $\frac{dA_p}{d\omega} = 0$). A_p est appelée la *composante effective* de F . On notera que le degré de F peut être supérieur à n , mais que, si $p + x > n$, F est nécessairement nulle.

Il résulte d'un théorème de Lepage que toute forme extérieure $\psi \in \mathcal{E}$ est d'une seule manière somme d'éléments ψ_0, ψ_1, \dots appartenant aux classes 0,

(*) Cf. A. WEIL, Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe (Comm. Math. Helv., t. 20, 1947).

1, ... (9). Les composantes effectives de ψ_0, ψ_1, \dots sont, par définition, les composantes effectives de ψ . La *hauteur de ψ* est l'indice de classe le plus élevé qui figure effectivement dans ψ . Si ψ est de degré $n + h$, sa hauteur est au moins égale à h (autrement dit, ω^h divise ψ).

FORME CORRÉLATIVE D'UNE FORME F DE LA CLASSE x : POSONS

$$F = a_p \frac{\omega^x}{x!} \quad (10).$$

et rappelons que la corrélation attachée à la base $X^1 Y^1 \dots X^n Y^n$ canonique pour ω est le produit commutatif :

— de l'application linéaire $F \rightarrow \mathcal{G}(F)$ définie par la relation

$$(35) \quad \mathcal{G} \left(\begin{matrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{matrix} \right) = \mathcal{J} \left(\begin{matrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{matrix} \right);$$

— et de la transformation $F \rightarrow \mathcal{X}_1(F)$ par laquelle

$$(36) \quad \mathcal{X}_1(F) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} a_p \frac{\omega^{n-p-x}}{(n-p-x)!}.$$

De (35) il vient aussitôt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^2(F_q) &= (-1)^q F_q, \\ \mathcal{G}\omega &= \omega, \end{aligned}$$

et, de (36),

$$\mathcal{X}_1^2 = \text{I}.$$

La corrélation principale étant attachée à la base $X_1, \dots, X_n; Y^1, \dots, Y^n$, on en déduit immédiatement que l'opérateur « Cor » est le produit permutable des opérateurs \mathcal{G} et $\mathcal{X} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathcal{X}_1$, d'où

$$(37) \quad \text{Cor} \left[a_p \frac{\omega^x}{x!} \right] = \varepsilon (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathcal{G} \left(a_p \frac{\omega^x}{x!} \right),$$

avec

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Remarque. — De (19) il résulte que dans une base $\vec{x}\vec{y}$ permise quelconque ($h \in \mathcal{C}'_{2n}$ n'est astreinte qu'à être régulière) l'opération \mathcal{G} se traduit uniformément par la substitution

$$\mathcal{G} \left(\begin{matrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{matrix} \right) = \mathcal{J} \left(\begin{matrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{matrix} \right)$$

équivalente à (35).

(9) Cf. p. 263 pour le détail de cette décomposition.

(10) Cf. p. 273.

Dans une base complexe permise, on a par calcul immédiat,

$$\mathcal{G}(z) = -iz, \quad \mathcal{G}(\bar{z}) = i\bar{z}.$$

Ici encore on retrouve en \mathcal{G} un opérateur courant de la géométrie kählerienne.

3. Opérateurs différentiels sur une variété riemannienne réelle \mathcal{V}_{2n} à $2n$ dimensions.

$\xi^1, \dots, \xi^n; \eta^1, \dots, \eta^n$ étant les coordonnées locales du point P de \mathcal{V}_{2n} , nous conviendrons que la métrique en P est la forme algébrique φ définie par (17) dans laquelle

$$(38) \quad x^i = d\xi^i, \quad y^i = d\eta^i.$$

E représentera maintenant l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel tangent en P à \mathcal{V}_{2n} .

Les éléments de la matrice M et plus généralement les composantes (scalaires) des formes extérieures de $E^\Lambda = \mathcal{E}$ seront supposés de classe de dérivation C^∞ .

Les changements de coordonnées $\xi^i \rightarrow \xi^i, \eta^i \rightarrow \eta^i$ induisent des changements de base dans E. Nous envisagerons sous le nom de *changements de coordonnées permis* ceux-là seuls qui conduisent à des *changements de base permis*.

Le déterminant fonctionnel $\frac{D[\xi^i \dots \eta^n]}{D[\xi^i \dots \eta^n]}$ sera donc nécessairement une matrice régulière de \mathcal{C}'_{2n} .

A tout système permis $\xi^1 \dots \xi^n, \eta^1 \dots \eta^n$ nous associons le *système de coordonnées complexes*

$$u^k = \frac{1}{\sqrt{2}} [\xi^k + i\eta^k],$$

$$\bar{u}^k = \frac{1}{\sqrt{2}} [\xi^k - i\eta^k],$$

il vient, par conséquent,

$$d\vec{u} = \vec{z}, \quad d\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{z}}$$

et

$$(39) \quad \varphi = 2 d\vec{u} g d\vec{\bar{u}}.$$

Les changements de variables (réelles) permis induisent dans le domaine complexe des substitutions $u^i \rightarrow \hat{u}^i$ pour lesquelles *les u^i sont des fonctions analytiques des seuls u^i (à jacobien non nul en P)*.

L'opérateur différentiel D et les opérateurs différentiels associés

$$(40) \quad D = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial \xi^i} d\xi^i + \sum_1^n \frac{\partial}{\partial \eta^i} d\eta^i.$$

La différentielle extérieure d'une forme $F_p \in \mathcal{E}$ est, par définition, le produit extérieur $[DF]$. On sait qu'il possède la même valeur dans tous les systèmes de coordonnées et que pour $F_p, G_q \in \mathcal{E}$,

$$(41) \quad D[F_p G_q] = [DF_p G_q] + (-1)^p [F_p DG_q].$$

Dans les systèmes de coordonnées permis ont encore un sens intrinsèque : l'opérateur

$$(42) \quad D' = \mathcal{G} D \mathcal{G}^{-1} = \sum \frac{\partial}{\partial \xi^i} d\eta^i - \sum \frac{\partial}{\partial \eta^i} d\xi^i$$

et, dans le domaine complexe, les opérateurs

$$(43)_1 \quad \partial = \sum \frac{\partial}{\partial u^k} du^k,$$

$$(43)_2 \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^k} d\bar{u}^k.$$

On pose $\delta = \text{cor } D \text{ cor}^{-1} \mathcal{G}^2 = \text{cor } D \text{ cor}$ ou

$$(44) \quad \delta = \mathcal{G} \mathcal{X} D \mathcal{X} \mathcal{G}$$

et $[\delta F^p]$ est la *codifférentielle* de F_p

$$(45) \quad \Delta = D\delta + \delta D$$

et $[\Delta F_p]$ est le *laplacien* de F_p . Si $\Delta F_p = 0$, nous dirons que F_p est harmonique en P.

De (42), on tire

$$(E) \quad \begin{cases} \mathcal{G} D = D' \mathcal{G}, & \mathcal{G}^2 D' = -D' \mathcal{G}^2, \\ \mathcal{G} D' = -D \mathcal{G}, & \mathcal{G}^2 D = -D \mathcal{G}^2. \end{cases}$$

Il s'ensuit, \mathcal{G} et \mathcal{X} étant permutables, que

$$(46) \quad \delta = \mathcal{X} D' \mathcal{X} \mathcal{G}^2$$

et que

$$(47) \quad \Delta = [D \mathcal{X} D' \mathcal{X} - \mathcal{X} D' \mathcal{X} D] \mathcal{G}^2.$$

4. Détermination du laplacien d'une forme donnée (de \mathcal{E}) dans l'hypothèse où

$$(48) \quad [D\omega] = 0.$$

De (48) on tire

$$\mathcal{G}[D\omega] = 0, \quad D'[\mathcal{G}\omega] = 0, \quad D'\omega = 0$$

et de la relation

$$\text{cor } \omega = \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}, \quad [\delta\omega] = 0.$$

Il s'ensuit, en particulier, que ω est harmonique.

Par ailleurs, les opérateurs \mathfrak{X} , \mathfrak{G} , $\frac{d}{d\omega}$, D , D' , δ et Δ étant manifestement linéaires, il nous suffira de les appliquer successivement aux éléments de décomposition d'une forme Φ en les classes de Lepage pour connaître leur incidence sur Φ .

Soit donc

$$(49) \quad F = A_p \frac{\omega^x}{x!} \quad (\text{avec } p + x \leq n),$$

A_p étant une forme effective du degré p

$$(50) \quad A_p \omega^{n-p+1} = 0.$$

On tire de (50)

$$DA_p \omega^{n-p+1} = D'A_p \omega^{n-p+1} = 0,$$

ce qui prouve que DA_p et $D'A_p$ ont pour hauteur « un ». On a, dès lors, les décompositions suivantes en polynomes de Lepage :

$$(51) \quad DA_p = H_{p+1} + H_{p-1} \omega,$$

$$(52) \quad D'A_p = G_{p+1} + G_{p-1} \omega,$$

$$(53) \quad D'H_{p+1} = P'_{p+2} + Q'_p \omega,$$

$$(54) \quad DG_{p+1} = P_{p+2} + Q_p \omega,$$

$$(55) \quad D'H_{p-1} = R'_p + S'_{p-2} \omega,$$

$$(56) \quad DG_{p-1} = R_p + S_{p-2} \omega.$$

On en déduit

$$(57) \quad DD'A_p = P_{p+2} + (Q_p + R_p) \omega + S_{p-2} \omega^2,$$

$$(58) \quad D'DA_p = P'_{p+2} + (Q'_p + R'_p) \omega + S'_{p-2} \omega^2$$

et, comme $[DD'] + [D'D] = 0$, il vient des relations précédentes :

$$(59) \quad P_{p+2} + P'_{p+2} = 0,$$

$$(60) \quad Q_p + R_p + Q'_p + R'_p = 0,$$

$$(61) \quad S_{p-2} + S'_{p-2} = 0.$$

CALCUL DE δF_p . — De (37) et (49) on tire

$$\mathfrak{X}F = \varepsilon(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} A_p \frac{\omega^{n-p-x}}{(n-p-x)!};$$

de (52),

$$D'\mathfrak{X}F = \varepsilon(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \left[G_{p+1} + G_{p-1} \omega \right] \frac{\omega^{n-p-x}}{(n-p-x)!}$$

et, enfin,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}D'\mathfrak{X}F &= (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \left[(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} G_{p+1} \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!} + (-1)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} G_{p-1} (n-p-x+1) \frac{x!}{\omega^x} \right] \\ &= (-1)^p \left[G_{p+1} \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!} - (n-p-x+1) G_{p-1} \frac{\omega^x}{x!} \right], \end{aligned}$$

d'où, de (46),

$$(62) \quad \delta F = G_{p+1} \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!} - (n-p-x+1) G_{p-1} \frac{\omega^x}{x!}.$$

En comparant les formules

$$(63) \quad D'F = G_{p+1} \frac{\omega^x}{x!} + G_{p-1} (x+1) \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!},$$

$$(64) \quad \omega \delta F = x G_{p+1} \frac{\omega^x}{x!} - G_{p-1} (x+1) (n-p-x+1) \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!},$$

on énonce la règle suivante (*règle A*) :

La première composante effective de $\omega \delta F$ est égale à la première composante effective de $D'F$ multipliée par x .

La seconde composante effective de $\omega \delta F$ est égale à la seconde composante de $D'F$ multipliée par $-(n-p-x+1)$.

En application de cette règle on trouve notamment

$$(65) \quad \delta[\omega F] = (x+1) G_{p+1} \frac{\omega^x}{x!} - (x+1) (n-p-x) G_{p-1} \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!}.$$

De (63), (64), (65) il vient donc

$$(66) \quad \boxed{D' = \delta \omega - \omega \delta}$$

et cette règle est valable quelle que soit la forme Φ à laquelle D' est appliquée. On en tire

$$(67) \quad \delta D' + D' \delta = 0$$

et

$$(68) \quad D' \delta D' = 0.$$

RELATIONS ENTRE LES OPÉRATEURS $\frac{d}{d\omega}$, δ , \mathcal{G} , D ; EXPRESSION DU LAPLACIEN. — Nous rappelons d'abord la formule de dérivation totale ⁽¹¹⁾ qui, appliquée à $A_p \frac{\omega^x}{x!}$, donne puisque $\frac{dA_p}{d\omega} = 0$,

$$(69) \quad \boxed{\frac{d}{d\omega} \left[A_p \frac{\omega^x}{x!} \right] = (n-p-x+1) A_p \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!}.$$

⁽¹¹⁾ Cf. § 40, p. 256.

En appliquant (63) et (69), on trouve aisément

$$(70) \quad \delta \frac{d}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} \delta = 0,$$

De même,

$$(71) \quad D' \frac{d}{d\omega} - \frac{d}{d\omega} D' = \delta.$$

et

$$(72) \quad \left(\frac{d}{d\omega} D - D \frac{d}{d\omega} \right) \mathcal{G} = \mathcal{G} \delta.$$

(Les relations (70) et (72) sont bien connues en géométrie kählérienne.)

De (71) et (47) il vient encore

$$(73) \quad \boxed{\Delta = DD' \frac{d}{d\omega} - D \frac{d}{d\omega} D' + D' \frac{d}{d\omega} D - \frac{d}{d\omega} D' D,}$$

d'où la relation de Hodge

$$\mathcal{G} \Delta = \Delta \mathcal{G}.$$

Si l'opérateur Δ est appliqué à une forme effective, il se réduit à

$$(74) \quad \boxed{\Delta_1 = D' \frac{d}{d\omega} D - D \frac{d}{d\omega} D' - \frac{d}{d\omega} D' D.}$$

Remarque. — Si l'on utilise au point P de la variété V_{2n} les variables complexes u^i , il est indiqué d'utiliser également les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$. On a

$$\begin{aligned} D &= \partial + \bar{\partial}, \\ D' &= i(\bar{\partial} - \partial), \\ \Delta &= 2i \left[\partial \bar{\partial} \frac{d}{d\omega} - \partial \frac{d}{d\omega} \bar{\partial} + \bar{\partial} \frac{d}{d\omega} \partial - \frac{d}{d\omega} \bar{\partial} \partial \right], \\ \Delta_1 &= 2i \left[-\partial \frac{d}{d\omega} \bar{\partial} + \bar{\partial} \frac{d}{d\omega} \partial - \frac{d}{d\omega} \bar{\partial} \partial \right]. \end{aligned}$$

CALCUL DE ΔF . — De (62), on tire

$$(75) \quad \begin{aligned} D \delta F &= DG_{p+1} \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!} - (n-p-x+1) DG_{p-1} \frac{\omega^x}{x!} \\ &= P_{p+2} \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!} + [xQ_p - (n-p-x+1)R_p] \frac{\omega^x}{x!} \\ &\quad - (n-p-x+1)(x+1) S_{p-2} \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(76) \quad \delta DF = \delta \left[H_{p+1} \frac{\omega^x}{x!} \right] + (x+1) \delta \left[H_{p-1} \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!} \right].$$

Les deux codifférentielles qui figurent au second membre de (76) se calculent en appliquant la règle (A)

$$D' H_{p+1} \frac{\omega^x}{x!} = P'_{p+2} \frac{\omega^x}{x!} + Q'_p (x+1) \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!},$$

donc

$$(77) \quad \delta \left[H_{p+1} \frac{\omega^x}{x!} \right] = P'_{p+2} \frac{\omega^{x-1}}{(x-1)!} - (n-p-x) Q'_p \frac{\omega^x}{x!};$$

$$D' H_{p-1} \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!} = R'_p \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!} + S'_{p-2} (x+2) \frac{\omega^{x+2}}{(x+2)!},$$

donc

$$(78) \quad \delta \left[H_{p-1} \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!} \right] = R'_p \frac{\omega^x}{x!} - S'_{p-2} (n-p-x+1) \frac{\omega^{x+1}}{(x+1)!}.$$

En ajoutant les seconds membres de (75), (77), (78) et en tenant compte des relations (59), (60), (61), il vient enfin

$$(79) \quad \Delta F = [(n-p+1)(R'-R) + (n-p)(Q+R)] \frac{\omega^x}{x!}.$$

Le crochet du second membre de (79) est indépendant de x . Il représente donc ΔA_p et l'on obtient la formule

$$(80) \quad \Delta \left[A_p \frac{\omega^x}{x!} \right] = [\Delta A_p] \frac{\omega^x}{x!}.$$

Nous énoncerons :

THÉOREME. — *Le laplacien d'une forme F de la classe x appartient à la classe x. Sa composante effective est le laplacien de la composante effective de F.*

Plus généralement si une forme Φ est décomposée en polynôme de Lepage, les composantes effectives de son laplacien sont les laplaciens des composantes effectives de Φ .

Il s'ensuit aussitôt qu'une forme Φ est harmonique si et seulement si ses composantes effectives sont harmoniques ⁽¹²⁾.

Remarque. — La formule (80) met immédiatement en évidence la commutativité des opérateurs Δ et $\frac{d}{d\omega}$. Cette dernière propriété peut aussi s'établir

(12) Dans le cas où la variété \mathcal{V}_{2n} est compacte, où ω définie sur \mathcal{V}_{2n} vérifie en tout point la condition $D\omega = 0$ (\mathcal{V}_{2n} est alors une variété kählérienne), on retrouve grâce au théorème précédent, la décomposition de classes de cohomologie étudiée par M. A. Lichnerowicz [cf. de cet auteur : *Généralisations de la géométrie kählérienne globale* (Colloque de géométrie différentielle, 1951) et *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Dunod, 1955].

directement à partir des relations (70), (72) et (E). On a, en effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\omega} \Delta - \Delta \frac{d}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} (D\delta + \delta D) - (D\delta + \delta D) \frac{d}{d\omega} \\
 &= \left(\frac{d}{d\omega} D - D \frac{d}{d\omega} \right) \delta + \delta \left[\frac{d}{d\omega} D - D \frac{d}{d\omega} \right] \\
 &= \mathcal{G} \delta \mathcal{G}^{-1} \delta + \delta \mathcal{G} \delta \mathcal{G}^{-1} = \mathcal{X} D D' \mathcal{X} + \mathcal{X} D' D \mathcal{X} = 0.
 \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

