E. GRIPON

Sur les vibrations transversales des fils et des lames d'une faible épaisseur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 357-416
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__357_0>

SUR

LES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES FILS

ET DES

LAMES D'UNE FAIBLE ÉPAISSEUR,

PAR M. E. GRIPON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

On doit à M. Melde, professeur à l'Université de Marbourg, un procédé élégant qui permet d'engendrer des vibrations régulières et permanentes dans de simples fils de soie et de coton, ou dans des fils métalliques d'un petit diamètre.

On fixe l'extrémité d'un fil horizontal à l'une des branches d'un diapason vertical. A une certaine distance du diapason, se trouve une poulie sur laquelle passe le fil, et son extrémité libre supporte un petit plateau; on y place les poids qui doivent tendre le fil. On peut, si l'on veut, limiter la longueur de la partie vibrante du fil à l'aide d'un chevalet à recouvrement qui glisse le long d'une règle horizontale. On peut aussi faire tourner le diapason sur son pied, de telle sorte que le fil soit dans le plan de vibration des branches du diapason, ou bien qu'il soit perpendiculaire à ce plan, ou qu'il fasse avec lui un angle déterminé.

On fait vibrer le diapason avec un archet; on peut aussi fixer à la seconde branche du diapason un bout du tube capillaire en verre; on le frotte dans le sens de la longueur avec les doigts mouillés. La tige est dans le plan de vibration des branches, et les vibrations longitudinales qu'on excite dans le verre se communiquent au diapason et y engendrent des vibrations transversales fort régulières.

M. Melde a observé que, si le diapason vibre, le point d'attache du fil décrit une petite courbe fermée qui semble elliptique. On peut supposer, dès lors, que ce point est animé de deux mouvements rectilignes, l'un vertical, l'autre horizontal, situés tous les deux dans le plan des vibrations des branches. Si le fil est dans ce plan, il recevra du premier mouvement, qui est alors le plus intense, une série d'impulsions dans le sens de la longueur, et du second un mouvement transversal. L'expérience montre qu'il y a, dans le fil, coexistence de deux mouvements transversaux, rectangulaires, que le nombre des vibrations du second mouvement est double de celui qui convient au premier, et, si le fil présente quelques points brillants, on leur voit décrire des courbes en forme de *huit*, analogues à celles que M. Lissajous nous a fait connaître.

Ces courbes apparaissent nettement lorsque le fil fait un angle de 45 degrés avec le plan des vibrations du diapason.

Si le fil est dans ce plan, l'un des mouvements l'emporte de beaucoup sur l'autre, et la vibration du fil est *plane*, surtout si le fil est à l'octave grave du diapason.

Plaçons le fil dans une direction perpendiculaire au plan des vibrations; les deux mouvements élémentaires engendrent deux mouvements transversaux de même période que le mouvement du diapason, et les points brillants du fil semblent décrire des courbes elliptiques. Cependant, si l'on a disposé de la tension ou de la longueur du fil, de telle sorte qu'il soit à l'unisson du diapason, la vibration est plane.

Lorsque le fil parallèle au plan des vibrations est accordé à l'octave grave du diapason, il vibre en même temps que ce dernier et présente l'apparence d'un large fuseau sans nœuds intermédiaires. Si, en tournant le diapason, on rend le fil perpendiculaire au plan des vibrations, on le voit se partager en deux fuseaux égaux, séparés par un nœud, ce qui confirme ce que nous avons dit tout à l'heure sur le rapport des nombres de vibrations correspondant aux deux mouvements élémentaires du fil. En augmentant peu à peu la tension, on verrait le nœud quitter le milieu du fil, remonter vers le diapason et atteindre le point d'attache. A ce moment, les vibrations sont planes, et le fil qui vibre dans la totalité de sa longueur est à l'unisson du diapason.

En diminuant progressivement la tension, ou en laissant la tension constante et en augmentant la longueur du fil, on voit apparaître successivement deux, trois, quatre,... fuseaux, séparés par des nœuds; chaque partie de la corde comprise entre les deux nœuds vibre à l'unisson du diapason, si le fil est perpendiculaire au plan des vibrations, ou à l'octave grave, s'il est dans ce plan.

Dans ce dernier cas, les fuseaux sont parfois peu apparents; mais on peut facilement apprécier la position des nœuds en plaçant sur le fil de petits cavaliers de papier. Le nombre des nœuds est toujours la moitié de ce qu'il serait si, toutes choses égales d'ailleurs, le fil était perpendiculaire au plan des vibrations.

Ce qui précède est un résumé de l'exposé des expériences de M. Melde fait par M. Pisko dans son Ouvrage : *Die neueren Apparate der Akustik;* Wien, 1860.

M. Duhamel [1] a trouvé le mouvement d'une corde tendue dont une extrémité est fixe, tandis que l'autre a un mouvement périodique donné. M. Bourget a depuis repris et complété l'analyse de M. Duhamel.

Le calcul montre que la corde est le siége de deux mouvements, dont l'un dépend de l'état initial, tandis que l'autre en est indépendant. Ce dernier est périodique, et la durée de sa période est la même que celle qui se rapporte à l'extrémité; l'autre est aussi périodique, et la durée de sa période est la même que si la corde vibrait seule avec ses extrémités fixes.

M. Duhamel a fixé des cordes tendues à l'angle d'une plaque métallique carrée qu'il faisait vibrer, et il relevait, par le procédé graphique qu'il avait imaginé, les vibrations de la corde et de la plaque.

Le mouvement de la corde écartée dans son état initial de sa position d'équilibre a paru résulter clairement de la superposition des deux mouvements indiqués par l'analyse; seulement, l'un de ces mouvements persiste seul, l'autre disparaît : c'est celui qu'on aurait obtenu d'après l'état initial, en supposant fixes les deux extrémités de la corde.

De ces expériences, l'auteur conclut que, en vertu des résistances dont on ne tient pas compte dans le calcul, mais qui n'en existent pas moins, le mouvement de la corde finit toujours par être de la même période

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII.

que celle de l'extrémité mobile, et que le mouvement indiqué par l'analyse et correspondant aux extrémités fixes reste insensible.

Si une corde de longueur l, de rayon r, de densité d, est tendue par un poids P, si le mouvement du diapason est donné par l'équation

$$y = k(\sin 2n\pi t + \varepsilon),$$

celui de la corde qui lui est synchrone sera

$$y = \frac{k}{\sin \frac{2n\pi l}{a}}(\sin 2n\pi t + \varepsilon)\sin \frac{2n\pi}{a} x.$$

On sait que $a^2 = \frac{gP}{\pi d r^2}$ ou $a = 2n'l$; en appelant n' le nombre des vibrations transversales que ferait la corde fixée à ses deux extrémités, elle rendait le son fondamental.

Les nœuds sont donnés par la relation $x = \frac{ca}{2n}$, quantité indépendante de l. La position des nœuds, comptés à partir de l'extrémité fixe de la corde, est donc indépendante de la longueur de celle-ci. (On ne peut donner à la constante c que les valeurs qui rendent x plus petit que l.)

Ainsi, en faisant varier cette longueur, on peut faire changer le nombre des nœuds; mais la distance de deux nœuds consécutifs reste constante; c'est ce que confirme l'expérience.

Si l'on représente par δ la distance de deux nœuds, par p le poids de la corde de longueur l,

$$\delta = \frac{a}{2n} \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{Pgl}{p}}.$$

Cette relation est-elle constamment vérifiée par l'expérience?

Pour le savoir, j'ai installé, sur un support en bois vertical, un diapason horizontal. Le plan des vibrations est horizontal lui-même. Lorsque j'emploie des fils métalliques très-fins, je les soude à une petite lame métallique qui est ensuite serrée contre le diapason à l'aide d'une vis. Ce diapason est un de ceux qui servent à répéter les expériences de M. Lissajous.

Le fil est vertical et supporte directement les poids tenseurs. Un chevalet à recouvrement pince le fil en un certain point et limite la longueur de la partie vibrante; il est mobile le long d'une règle verticale divisée en millimètres. Lorsqu'on veut déterminer la position d'un nœud, on vise le fil à l'endroit du nœud à l'aide d'une lunette horizontale. On peut aussi déterminer la distance de deux nœuds, en mesurant le déplacement de la lunette sur la règle verticale qui la porte.

Assez souvent, lorsque l'amplitude des vibrations du fil est faible, les fuseaux sont peu apparents et, dans le voisinage des nœuds, le fil semble immobile sur une assez grande longueur; la position exacte du nœud est alors plus difficile à déterminer. On ne peut plus se servir directement de la lunette; on entoure la corde d'un fil de soie très-fin et on l'amène par tâtonnements au milieu de la portion du fil qui semble immobile.

En plaçant derrière la corde un écran de papier blanc qui porte un certain nombre de lignes horizontales équidistantes, on rend l'opération plus facile. Les fuseaux se projettent sur l'écran; on cherche, de part et d'autre du nœud, deux lignes sur lesquelles l'amplitude de la vibration soit la même et l'on admet que le nœud se trouve à égale distance de ces deux lignes.

Pour certaines longueurs de la corde, les fuseaux sont très-larges; les nœuds sont alors très-nets : la partie de la corde qui semble immobile se réduit à quelques millimètres.

Cela arrive lorsque la corde entière se trouve presque divisée par les nœuds en parties égales, ou, en d'autres termes, lorsque, en supposant la corde prolongée au-dessus du diapason, le nœud le plus voisin de celui-ci se forme près du point d'attache, au-dessus ou au-dessous. On se place dans ces circonstances, quand on le peut, pour obtenir des déterminations précises de δ, ou pour contrôler celles que l'on a prises déjà.

Si la corde est peu tendue et assez longue, il se forme un assez grand nombre de nœuds. On mesure alors la distance du chevalet au nœud le plus éloigné et l'on divise cette distance par le nombre des nœuds, ce qui conduit encore à une valeur précise de δ.

Les phénomènes généraux de la vibration ne changent pas, si l'on attache la corde à un support indépendant du diapason, et si l'on fait agir ce dernier sur un point intermédiaire de la corde. On s'est assuré, par de nombreuses expériences, que les distances du nœud au chevalet restent ce qu'elles étaient dans le premier mode d'expérimentation et conduisent par conséquent aux mêmes valeurs de δ. On emploie cette disposition lorsque les cordes sont un peu grosses et supportent des poids un peu grands. On fixe au diapason une tige de cuivre présentant une fente verticale; la corde se trouve engagée dans cette fente; elle y est légèrement pressée et on l'y maintient avec un peu de cire. Le support de la corde porte un cadre en fer qui sert à soutenir le chevalet et à le placer dans une position convenable; ce cadre pend du reste librement et n'est fixé que par le haut.

Lorsqu'on emploie des fils fins, on s'aperçoit promptement que la position des nœuds n'est pas fixe pendant toute la durée du mouvement. Au début, lorsque l'amplitude des vibrations est grande, le nœud se forme en un point de la corde plus rapproché du diapason que celui qu'il occupe lorsque le mouvement s'est affaibli; et cela ne tient pas à ce que la courbe qui limite les fuseaux est plus prononcée au début qu'à la fin; car si l'on trace, avec une peinture blanche, un point de repère sur la corde et si ce point est au-dessous du nœud, au commencement du mouvement, on voit le nœud l'atteindre et le dépasser en s'abaissant. Dans certains cas, le nœud se déplace de 1 centimètre au moins; cela s'observe surtout sur le nœud le plus élevé, car le déplacement est moindre pour ceux qui sont plus éloignés du diapason, et même il est peu sensible, pour les nœuds voisins du chevalet, lorsque le nombre des nœuds est assez grand.

Il en résulte que, dans ces cas, la distance des nœuds se trouve, au début, plus grande que la distance théorique et qu'elle s'en rapproche, à mesure que le mouvement s'affaiblit, pour l'atteindre vraisemblablement lorsque les vibrations n'ont plus qu'une très-petite amplitude.

On a fixé directement au diapason un fil de laiton de $0^{mm},034$ de rayon. On a fait varier la valeur des poids tenseurs et l'on a cherché quelle longueur on devrait donner au fil pour qu'il prît la forme d'un fuseau, sans nœuds intermédiaires.

On admet qu'il est à l'unisson du diapason lorsque les vibrations sont planes. On avait déposé sur le fil quelques points blancs et l'on reculait peu à peu le chevalet tant qu'on le pouvait faire sans que la ligne droite que semblent décrire ces points se changeât en une courbe elliptique; théoriquement le rapport $\frac{\sqrt{P}}{l}$ doit être constant.

Poids tenseurs.	Longueurs.	$\frac{\sqrt{P}}{l}$
25^{gr}	$342^{mm},9$	0,01458
20	302,6	0,01478
15	265,6	0,01458
10	214,0	0,01478
5	158,6	0,01419
2	152,0	0,01280

On trouve une vérification satisfaisante de la loi, lorsque la tension dépasse 5 grammes, et un désaccord au-dessous; la corde tend alors à vibrer en vertu de sa rigidité propre et comme le ferait une verge fixée à son extrémité inférieure. Si l'on se sert de ces nombres pour calculer d'après la formule le nombre de vibrations que fait le fil, on trouve pour

$$P = 25^{gr}, \quad \delta = 342^{mm},9, \quad n = 132,0,$$
$$P = 20^{gr}, \quad \delta = 302^{mm},6, \quad n = 133,6,$$

nombres très-rapprochés du véritable, car le diapason faisait 133,37 vibrations complètes; mais, pour $P = 2, \delta = 112$, on trouve $n = 116$, et l'erreur est ainsi de $\frac{1}{5}$.

Avec un fil de cuivre rouge dont le rayon est $0^{mm},1007$, on a, en cherchant encore les longueurs que donnent les vibrations planes,

P	δ	δ (calculé).
300^{gr}	$375^{mm},0$	$378^{mm},0$
200	302,0	308,0
100	217,0	218,0
50	149,9	154,0
20	110,0	98,7
5	76,0	48,8

Ce fil vibre donc en suivant les lois ordinaires tant que la tension dépasse 50^{gr}; car on a vérifié après coup que, si l'on donne au fil une longueur de 154^{mm} sous une charge de 50^{gr}, la vibration est plane si l'on prend soin de lui donner peu d'amplitude. Lorsqu'on opère par tâtonnements et que l'on cherche ainsi la longueur qu'il faut donner à la corde pour que les vibrations cessent d'être planes, on tombe souvent sur des nombres variables; l'intensité du mouvement communiqué au diapason a une influence notable; il en est de même de la fixité du chevalet qui limite la corde. Ce n'est qu'en recommençant plusieurs fois de suite la même détermination que l'on arrive à obtenir des nombres concordants. Encore faut-il avoir soin d'attaquer le diapason avec l'archet de telle sorte que la pression de l'archet ne fasse pas fléchir la branche et ne change pas la tension du fil. On plaçait l'archet dans le plan horizontal des branches et l'on frottait l'extrémité de l'une d'elles. On a opéré ainsi dans toutes les expériences sur les cordes.

On a pris une corde de laiton telle que 1 mètre de cette corde pèse $1^{gr},202$; son rayon est donc de $0^{mm},2$.

Elle était suspendue à un support indépendant du diapason.

Celui-ci faisait 128,5 vibrations dans les trois premières expériences, et 126,7 dans les autres. On mesurait la distance δ de deux nœuds.

Tension.	δ (observé).	δ_1 (calculé).	$\frac{\delta_1}{\delta}$.
2994^{gr}	313,5	314,7	1,00
1994	493,0	494,0	1,00
586	268,5	269,0	1,00
500	258,0	251,9	0,97
400	231,5	225,6	0,97
300	202,0	195,4	0,97
200	167,0	159,6	0,95
100	139,0	112,8	0,80

La corde, dans la dernière expérience, est mal tendue, elle n'est plus rectiligne; aussi trouve-t-on, suivant les cas, des nombres différents. Ainsi, en lui donnant une grande longueur, j'ai trouvé 390 pour 3 δ, ce qui donne 130 pour δ, et 0,85 pour le rapport $\frac{\delta_1}{\delta}$; mais ces nombres conduisent toujours à la même conclusion. Les lois des cordes ne sont vérifiées que si les tensions n'atteignent pas une certaine limite inférieure, variable, du reste, avec la rigidité de la corde. Au-dessous de cette limite, qui, dans le fil de laiton, est voisine de 500 grammes, la corde rend un son plus aigu que celui que lui assigne la théorie, et la différence va en croissant à mesure que la tension diminue.

Dans le cours de cette expérience, j'ai vu se produire des faits qui sont une confirmation de la théorie de M. Duhamel, mais qui infirment en même temps les conséquences qu'il a tirées de ses expériences.

Un fil de cuivre rouge de $0^{mm},1007$ de rayon, tendu par un poids de 20 grammes, vibre sous l'influence d'un diapason faisant 133 vibrations.

On lui donne successivement des longueurs de 150, 170, 190, 200 millimètres. Il se forme, dans chaque cas, un nœud situé à 115 millimètres du chevalet; ce nombre est un peu plus grand que le nombre $98^{mm},5$ que l'on trouve en calculant, d'après les circonstances de l'expérience, la longueur de la corde qui vibrerait à l'unisson du diapason.

Le nœud se forme si l'on ébranle faiblement le diapason. Si l'on excite dans celui-ci des vibrations plus fortes, tout nœud disparaît et la corde vibre en son entier; cet état persiste tant que dure le mouvement du diapason.

Avec la longueur 280 millimètres, il se forme deux nœuds intermédiaires. La distance de deux nœuds consécutifs est 105 millimètres; il faut encore produire dans le diapason des vibrations de faible amplitude. Avec des vibrations plus fortes, la corde ne présente plus qu'un nœud placé à 141 millimètres du chevalet, c'est-à-dire au milieu de la corde, et l'on a deux fuseaux égaux compris entre ce nœud et les deux extrémités de la corde, qui sont alors l'un et l'autre des nœuds. Si le diapason est ébranlé plus fortement encore, tout nœud disparaît, et la corde vibre en son entier ne formant qu'un seul fuseau.

Donnons au fil une longueur de 450 millimètres : on obtient, lorsque les vibrations sont faibles, quatre nœuds distants de 99 millimètres, longueur théorique; il n'y en a plus que trois, distants de 144 millimètres et partageant la corde en quatre parties égales, si le diapason vibre plus fortement; on en observe deux, distants de 150 millimètres et placés au tiers de la corde, si l'attaque de l'archet est plus énergique, et l'on pressent que des vibrations encore plus fortes réduiraient le nombre des nœuds à deux où les feraient disparaître.

Chaque mode de division persiste pendant toute la durée du mouvement du diapason; la vibration est très-régulière et son amplitude est, au début, relativement grande.

Nous avons là évidemment la reproduction des vibrations signalées par M. Duhamel, comme dépendant de l'état initial de la corde. Seulement, dans ses expériences, ces vibrations finissaient toujours par s'éteindre, et la corde arrivait toujours à avoir un seul mouvement de même période que celle de l'extrémité. Dans les expériences qui précèdent, on est parvenu à isoler ces divers mouvements qu'annonce la théorie. Il faut que l'amplitude des vibrations soit faible pour que la corde vibre à l'unisson, sinon elle vibre comme si ses deux extrémités étaient fixes, et ses vibrations sont beaucoup plus lentes que celles de l'instrument.

M. Duhamel doutait de la possibilité d'un pareil résultat; ses expériences ne le lui avaient pas présenté, et il partait de là pour combattre l'explication que Savart avait donnée d'une de ses expériences dans laquelle les vibrations rapides d'une verge en engendraient de lentes dans une seconde liée à la première.

Nous sommes bien loin de penser que les expériences de M. Duhamel ne furent pas bien faites. On peut être assuré que, là comme ailleurs, il a mis cette précision qu'il aimait tant et qui donne un cachet particulier à tous ses travaux.

Nous avons vu souvent, comme lui, les deux sortes de mouvements se produire simultanément, et l'un d'eux, celui qui convient aux extrémités fixes, disparaître, tandis que l'autre persistait. Cela arrive d'ordinaire lorsque la tension de la corde est un peu forte; alors il n'y a qu'un seul mouvement possible, celui qui est à l'unisson du diapason; et cependant, même dans ce cas, une attaque vigoureuse du diapason peut faire naître le second mouvement, le mouvement propre de la corde qui alors coexiste avec le premier, le mouvement synchrone au diapason.

Le doute émis par M. Duhamel nous faisait un devoir de multiplier les expériences, afin de bien nous convaincre que la corde rend, dans le second mouvement, un son plus grave que le diapason. Les fils métalliques très-fins qui nous ont servi tout d'abord ne nous permettaient pas d'entendre le son qu'ils peuvent rendre; on a répété ces expériences sur des fils plus gros.

Avec un fil de fer dont le rayon est de $0^{mm},01$ environ, la tension de 100 grammes et la longueur de 445 millimètres, le diapason cité plus haut partage la corde en deux fuseaux. La corde rend le son du diapason, puis des harmoniques, parmi lesquels on distingue l'octave et la quinte, qui s'affaiblissent et s'éteignent, puis reparaissent vers la fin du mouvement et deviennent plus forts quelques secondes avant que le mouvement cesse.

Si l'on donne au diapason un ébranlement énergique, la corde vibre en son entier, le nœud intermédiaire disparaît, et l'on entend un son grave et fort qui est à peu près à l'octave grave du diapason.

Avec la longueur 350 millimètres et une tension de 275 grammes, on a encore ce son grave, intense, sortant facilement. L'attaque de l'archet la plus légère fait vibrer la corde en son entier; mais, dans le large fuseau qui se forme alors, on aperçoit deux fuseaux plus petits sensiblement égaux; ils le sont si la longueur est 380 millimètres, et le nœud qui les sépare doit être à 190 millimètres : on ne le voit pas. Les deux fuseaux se terminent en pointes très-déliées qui cessent à 20 millimètres environ de part et d'autre du milieu de la corde, en sorte qu'on ne voit là qu'un seul mouvement apparent.

Les deux fuseaux intérieurs disparaissent vers la fin du mouvement, et au même instant le grand fuseau reçoit un accroissement d'amplitude; puis tout disparaît.

Des vibrations très-faibles déterminent dans la corde la production de deux nœuds.

Avec une corde d'aluminium et une corde de laiton, on observe des phénomènes analogues.

Avec la première, dont le rayon était de $0^{mm},27$ et la charge 100 grammes, on constate d'abord que la corde fait des vibrations planes lorsqu'on lui donne la longueur 175 millimètres, que l'on trouve par le calcul lorsque la corde doit faire 133,3 vibrations. Avec la longueur 210 millimètres et des vibrations faibles, on a un nœud placé à 175 millimètres environ du chevalet. Si l'attaque est un peu forte, on a un seul fuseau s'étendant d'une extrémité à l'autre de la corde; la corde vibre largement et le nœud commence à se former; puis, quelques secondes après, le second mouvement succède au premier, et l'on dirait que c'est avec un effort bien marqué que la corde s'ouvre en un seul fuseau.

Du reste, la même chose s'observe toutes les fois que le second mouvement succède au premier; son amplitude est bien plus grande dans la plupart des cas, et le fil doit être soumis à un effort assez considérable. Je citerai le fait suivant. On fixe les extrémités de la corde à deux chevilles: on peut la tendre à l'aide d'une vis; on fait alors agir le diapason sur un point intermédiaire de la corde. Or, lorsqu'on étudie le premier mouvement et que par mégarde on produit le second avec sa grande amplitude, on trouve, après cela, que la tension de la corde a diminué. La vis que j'employais était grossièrement faite, et elle cédait, paraît-il, à la tension que la corde semble éprouver pendant le second mouvement.

Revenons à notre corde d'aluminium; si l'on porte sa longueur à 260 millimètres, on retrouve ce que donnait la longueur précédente, avec cette particularité que les deux mouvements cherchent à s'établir en même temps. Il se forme un nœud à 175 millimètres du chevalet dans le premier mouvement, un nœud à 130 millimètres dans le second. On les voit apparaître successivement; le son du diapason tremblote, la vibration générale de la corde est troublée.

A la longueur de 300 millimètres, la corde vibre dans son entier avec une plus grande amplitude, et l'on commence à entendre un son grave, intense, à l'octave grave du diapason ou à peu près. Il est d'abord de courte durée; puis, en augmentant peu à peu la longueur de la corde, on l'entend d'une manière permanente; il donne des battements avec le son du diapason et l'amplitude des vibrations de la corde éprouve des variations périodiques qui correspondent à ces battements.

Lorsque la longueur est de 340 à 350 millimètres, le son grave éclate avec force, la corde vibre en son entier avec une facilité extrême, et il est impossible d'obtenir seule la division de la corde en deux fuseaux qui correspond au premier mouvement.

Le son grave, qui accompagne la vibration de la corde en un seul fuseau, persiste lorsque l'on a dépassé la longueur de 350 millimètres; puis il cesse, parce qu'on ne peut plus faire naître ce mouvement en un seul fuseau. Le premier mouvement se produit alors avec facilité; la corde tend à se diviser en trois fuseaux, et un ébranlement un peu fort du diapason ramène au second mouvement, c'est-à-dire fait vibrer la corde en deux fuseaux égaux. Là encore, on observe un passage facile de l'un des mouvements à l'autre, lorsque certains des nœuds du premier sont voisins de ceux du second.

Dans les nombreuses expériences que j'ai faites avec une corde en laiton de $0^{mm},2$ de rayon, j'ai vu se confirmer tous les faits relatés plus haut. Avec cette corde, le son principal sortait plus pur et débarrassé des harmoniques nombreux et intenses que donne la corde d'aluminium ; j'ai pu constater que, toutes les fois que la corde vibre en son entier, elle rend le son qui lui est propre et qui est plus grave que celui du diapason. Ce son ne sort bien et la vibration ne s'établit bien que si le son propre de la corde ne s'éloigne pas trop du son du diapason ou de son octave grave. Plus on se rapproche de ces sons, plus est facile la vibration de la corde en son entier.

Ainsi, dans certaines circonstances déterminées, avec des cordes qui sont faiblement tendues, on peut obtenir successivement les deux mouvements signalés par M. Duhamel, et l'on peut isoler du premier le second mouvement, celui qui dépend de l'état initial. On le voit tantôt succéder au premier, tantôt se produire immédiatement, et il persiste pendant toute la durée du mouvement du diapason. La corde vibre alors d'une manière parfaitement régulière et l'amplitude des vibrations, qui est d'abord relativement grande, s'affaiblit progressivement sans qu'on aperçoive aucune altération dans le mouvement. On a donc là une confirmation de la théorie, plus complète que ne le pensait M. Duhamel lui-même.

Revenons à la formule théorique

$$y = \frac{k}{\sin 2n\pi \frac{l}{a}} (\sin 2\pi t + \varepsilon) \sin \frac{2n\pi}{a} x.$$

Remplaçons a par $2ln'$, n' étant le nombre des vibrations répondant au son propre de la corde, la formule qui donne la place des nœuds devient

$$x = C \frac{n}{n'} l$$

et l'on voit que, pour qu'un nœud se forme au point d'attache de la corde et du diapason, pour que l'on ait $x = l$, il faut que $\frac{n}{n'}$ soit un nombre entier, et suivant que $\frac{n}{n'}$ aura pour valeur 1, 2, 3,..., la corde formera en vibrant 1, 2, 3,... fuseaux égaux. Cela semble en tout conforme à l'expérience; mais, si l'on se reporte à la valeur de y, on voit, et c'est une remarque que je dois à M. Bourget, que le dénominateur $\sin 2\pi \frac{nl}{a}$ ou $\sin 2\pi \frac{n}{n'}$ est nul lorsque $\frac{n}{n'}$ est entier. Alors y prend la forme ∞, excepté aux points nodaux, pour lesquels y est de la forme $h \sin 2n\pi t$.

Il y a là un cas singulier de l'analyse dont il est bon de rechercher la signification expérimentale.

On s'est servi d'une corde en laiton de $0^{mm},2$ de rayon, et d'un diapason faisant 128,5 vibrations complètes.

La corde est fixée à un support indépendant du diapason. On la soumet à des tensions croissantes et voici à quel résultat général on parvient.

Si l'on accorde avec tout le soin possible la corde sur le diapason et si l'on fait vibrer ce dernier, on entend un son commun au diapason et à la corde qui forme alors un seul fuseau; mais ce n'est pas celui du diapason, il est plus grave. Si l'on dérange le chevalet de manière à rompre l'accord du diapason et du fil, le son monte et redevient ce qu'il doit être. On retrouve un pareil abaissement si la moitié de la corde, ou le tiers, se trouve à l'unisson du diapason, quoique l'effet soit de moins en moins marqué à mesure que le nombre des nœuds augmente. La variation de ton que l'on vient de signaler est d'autant plus grande que la tension est plus forte; elle devient insensible sous de faibles tensions. Il est plus difficile alors de déterminer avec précision le son propre de la corde; mais on trouve qu'il y a certaines longueurs de corde pour lesquelles celle-ci vibre mal, et elles correspondent à peu près aux longueurs qui se rapportent au cas singulier.

Voici le détail des expériences :

On suspend au fil un poids de 100 grammes. On trouve par une observation directe

$$4\delta = 557^{mm} \quad \text{ou} \quad \delta = 139^{mm}.$$

La corde, du reste, est fort mal tendue par ce poids de 100 grammes.

En donnant à la corde des longueurs comprises entre 140 et 150 millimètres, on a de la peine à la faire vibrer : un coup d'archet léger, qui d'ordinaire engendre dans le diapason et dans la corde des vibrations de longue durée, ne produit rien dans ce cas. Si l'on augmente sa force, on voit la corde vibrer en un seul fuseau très-large; mais la vibration ne dure qu'une fraction de seconde, et elle s'éteint brusquement. Avec la longueur 390 millimètres, on devrait avoir trois fuseaux égaux; on voit la corde vibrer en son entier et ne présenter que des traces d'une division en trois parties égales.

Avec la longueur 560 millimètres, la corde vibre en son entier; elle présente en même temps deux fuseaux égaux, c'est-à-dire un nœud au milieu et, en outre, quatre fuseaux plus petits et égaux. C'est évidemment le second mouvement de Duhamel que l'on observe alors; du reste, la vibration ne se fait pas avec régularité.

On porte la tension à 200 grammes. En donnant au fil une grande longueur, on trouve directement $\delta = 166^{\text{mm}}$. La corde refuse de vibrer lorsque sa longueur est 170 millimètres; si elle est de 340 millimètres, la corde se divise en deux, mais vibre en même temps en son entier. Si elle est de 660 millimètres, la corde se divise en quatre fuseaux tant que l'archet frotte faiblement sur le diapason; mais, si l'on enlève l'archet, on n'observe plus que deux fuseaux égaux, et l'on entend un son qui est à l'octave grave du diapason. On a encore là le second mouvement de la corde. Il devient, dans ce cas singulier, le mouvement normal du fil.

La tension est portée à 300 grammes : une mesure directe donne $\delta = 205^{\text{mm}}$. La vibration est difficile et courte lorsque la corde a une longueur de 200 à 204 millimètres. Elle vibre en son entier sans apparence de nœud médian, lorsque sa longueur est de 406 millimètres.

Avec la tension 400 grammes, la corde vibre difficilement sous la longueur de 230 millimètres; elle est alors à l'unisson du diapason. Si on l'allonge de quelques millimètres, la vibration se produit facilement; à 460 millimètres, elle vibre dans sa totalité.

Avec une charge de 500 grammes, la distance des nœuds δ est 254 millimètres; si l'on donne cette longueur à la corde, la vibration est de courte durée, le son du diapason éprouve un petit abaissement. On l'observe aussi si la longueur est de 510 millimètres : il se forme alors un nœud médian; d'autres fois, la corde vibre en son entier en faisant entendre l'octave grave du diapason.

A la longueur 740 millimètres, la corde vibre à l'unisson du diapason, les nœuds ne sont pas également espacés.

A 750 millimètres, la corde produit des battements lents avec le diapason; ainsi elle rend le son qui lui est propre, en même temps qu'elle vibre à l'unisson de l'instrument.

A 765 millimètres, on a trois nœuds qui ne sont pas encore également espacés; le son du diapason semble un peu abaissé.

Toutes ces expériences, faites avec de faibles tensions, sont loin de donner un résultat aussi net que les suivantes, qui se rapportent à des tensions plus fortes.

Si l'on charge la corde de 1000 grammes, et si l'on prend avec un monocorde l'unisson du diapason lorsque le nœud est au point d'attache, et lorsqu'il est au-dessus et au-dessous, on trouve le son plus aigu dans le dernier cas.

La corde du monocorde accordée sur le son ordinaire du diapason donne avec lui des battements évidents lorsqu'on se place dans le premier cas; le son du diapason s'est donc bien abaissé, et l'on trouve un rapport de 0,996 entre le son grave de l'instrument et le son normal.

On a chargé la corde de 1994 grammes et on lui a donné la longueur de 492 millimètres; elle est alors à l'unisson du diapason, le son que celui-ci rend est 0,976, en représentant par 1 le son normal; enfin, avec la tension de 2994 grammes, le son grave est de 0,964.

L'abaissement du ton croît, comme on le voit, avec la charge.

Avec un diapason qui faisait 189 vibrations, on observe également un abaissement de ton, lorsque le nœud est au point d'attache. La corde ayant une tension de 2994 grammes, la longueur de la corde du monocorde mise à l'unisson de l'instrument est 661 millimètres si le nœud est éloigné du diapason; 669 millimètres si la corde a une longueur de 403 millimètres, longueur théorique qu'elle doit avoir pour être à l'unisson de l'instrument; 673 millimètres si la longueur de la corde est de 409 millimètres, longueur trouvée par expérience pour la distance de deux nuœds; le rapport des sons est 0,994.

Avec une tension de 1994 grammes, la longueur du monocorde est

670 millimètres, lorsque la corde de laiton a une longueur 329 millimètres qui assure l'unisson avec le diapason, cet unisson étant pris directement; car la longueur théorique serait 340 millimètres, et l'expérience montre qu'avec cette longueur le nœud est au-dessous du point d'attache.

La corde ne supportant plus qu'un poids de 1000 grammes est à l'unisson sous la longueur 235 millimètres; la longueur théorique serait 239 millimètres. La longueur du monocorde est alors 670 millimètres au lieu de 661; elle est de 654 pour la longueur 244 et redevient 661 pour la longueur 290.

Si l'on donne à la corde une longueur 470 millimètres, il se forme un nœud au milieu, la longueur du monocorde redevient 670, pour reprendre sa valeur normale 661, lorsque la longueur du fil est 480. Ainsi, lorsque le nœud est au point d'attache, qu'il y ait sur la corde un fuseau ou deux, le son n'est plus que 0,986 du son normal.

Enfin on a pris un diapason plus aigu qui faisait 246 vibrations; la corde supportait un poids de 1000 grammes. Avec la longueur 180, elle est à l'unisson du diapason, et la longueur du monocorde est 522, tandis que 517 convient au son que rend le diapason lorsque le nœud est éloigné du point d'attache.

Avec la longueur 360, on retrouve le nœud au point d'attache et la longueur du monocorde est encore 522. Ce même nombre se retrouve lorsque la longueur de la corde est 540 et que la corde tend à se partager en trois fuseaux égaux.

Le rapport des deux sons dans ce cas est 0,99.

Avec la charge 2994, on trouve, pour rapport des deux sons, 0,98. Il y a abaissement du son lorsque le nœud est au point d'attache, soit que la corde de longueur 300 millimètres vibre en un seul fuseau, soit qu'il y ait deux fuseaux, la longueur de la corde étant de 600 millimètres.

Je dois dire qu'avec les deux derniers diapasons, lorsque la corde vibre en un seul fuseau et que l'on augmente peu à peu la longueur, pour passer du son grave au son normal, on entend, pour une certaine longueur très-voisine de celle que donne le son grave, un son un peu plus aigu que le son normal; il serait environ 1,01.

Du reste, pour les fortes tensions, comme pour les faibles, la vibration de la corde, dans ces cas extrêmes, n'a jamais toute la régularité que l'on observe lorsque le nœud est à 1 centimètre au moins du diapason.

On voit donc que l'expérience justifie les indications de la théorie; lorsque le nœud est très-voisin de l'extrémité supérieure de la corde, quel que soit, du reste, le nombre des fuseaux, l'amplitude des vibrations est très-grande, souvent énorme. C'est ce qu'indique le calcul; $\frac{n}{n'}$ est voisin d'une valeur entière, et le dénominateur de y se trouve très-petit, ce qui assigne à y de grandes valeurs.

Lorsque $\frac{n}{n'}$ a une valeur entière, la vibration de la corde, celle du diapason se trouvent troublées; le son sort mal, il ne dure qu'un instant; ou bien il se trouve changé, il devient plus grave que ne le seraient les sons de la corde et du diapason pris isolément.

Les deux corps échappent ainsi, en quelque sorte, à la condition que le calcul impose à la corde, d'avoir dans ces cas une amplitude infinie.

Fils et lames minces vibrant à la manière des verges.

Le procédé qui a si bien réussi à M. Melde, pour faire vibrer des fils faiblement tendus, peut être appliqué aux fils métalliques ou aux lames minces qui, prises sous une faible longueur, vibrent à la manière des verges.

Un ressort de montre que l'on fixe à la branche d'un diapason vibre fort régulièrement, s'il a une longueur convenable. Il présente des ventres et des nœuds, le plus souvent, fort apparents, et comme la petite verge, nous le verrons plus loin, est soumise dans son mouvement à des lois analogues à celles qui régissent les verges vibrant transversalement, on a un moyen élégant de vérifier les principaux résultats que M. Lissajous a indiqués dans son Mémoire sur les vibrations des verges [1].

On peut projeter sur un tableau l'image agrandie de la petite lame

---

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXX.

éclairée par une lumière convenable pour faire voir à tout un auditoire la forme que prend une verge qui vibre. On peut marquer sur ce tableau la position des nœuds et vérifier tout ce qui se rapporte à leurs distances respectives.

On peut donner au ressort la forme d'un anneau et montrer la disposition des nœuds et la forme que prend l'anneau pendant la vibration.

Il est possible de montrer ainsi que tous les corps solides, même les plus flexibles, ont assez d'élasticité pour vibrer à la manière des verges; car les expériences réussissent, non-seulement avec des métaux, mais avec des pailles, du papier et même des fils de soie.

Enfin on peut déduire de ces expériences une mesure assez précise de la vitesse de propagation du mouvement vibratoire dans les solides et, par suite, de leur coefficient d'élasticité.

Cherchons l'équation du mouvement de la verge en la supposant libre à une de ses extrémités et fixée par l'autre à la branche d'un diapason. Nous supposons le mouvement de ce dernier simple et représenté par l'équation

$$y = \mathrm{M} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{M} \sin 2n\pi t,$$

en appelant n le nombre des vibrations par unité de temps. Nous prenons l'extrémité libre pour origine des coordonnées.

L'équation différentielle du mouvement d'une verge est

$$\frac{d^2y}{dt^2} = b \frac{d^4y}{dx^4};$$

pour $x = 0, y = 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0;$$

pour $x = l$,

$$y = \mathrm{M} \sin 2n\pi t.$$

De plus, la verge étant fixée au diapason, on peut admettre que, pendant les excursions de ce dernier, la petite portion du ressort voisine du diapason se meut parallèlement à elle-même et à la ligne de repos, c'est-à-dire que la tangente à la courbe qui donne la forme de la verge pendant le mouvement est constamment parallèle à l'axe des x.

On a donc, pour $x = l$,

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

quel que soit le temps. Enfin, au commencement du mouvement, le ressort est rectiligne et l'on a, pour $t = 0$, $y = 0$, quel que soit x.

Poisson (¹) donne, pour l'intégrale de l'équation différentielle,

$$y = \Sigma(p \sin m^2 bt + q \cos m^2 bt),$$

qui se réduit à

$$y = p \sin m^2 bt + q \cos m^2 bt;$$

si la verge a un mouvement simple, ne rend qu'un seul son,

$$p = A \sin mx + A' \cos mx + \tfrac{1}{2} B(e^{mx} - e^{-mx}) + \tfrac{1}{2} B'(e^{mx} + e^{-mx}).$$

Les majuscules représentent des constantes arbitraires.

Pour $t = 0$, y étant nul, quel que soit x, $q = 0$, et l'équation se réduit à

$$y = p \sin m^2 bt.$$

Pour $x = l$,

$$y = M \sin 2\pi nt;$$

donc

$$m^2 b = 2\pi n \quad \text{et} \quad p = M;$$

de plus

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dx} = 0.$$

On a donc, pour déterminer A et A', les équations

$$A(2 \sin ml + e^{ml} - e^{-ml}) + A'(2 \cos ml + e^{ml} + e^{-ml}) = 2M,$$
$$A(2 \cos ml + e^{ml} + e^{-ml}) + A'(e^{ml} - e^{-ml} - 2 \sin ml) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{M}{2[2 + \cos ml(e^{ml} - e^{-ml})]}(2 \sin ml - e^{ml} + e^{-ml}),$$

$$A' = \frac{M}{2[2 + \cos ml(e^{ml} - e^{-ml})]}(2 \cos ml + e^{ml} + e^{-ml}).$$

(¹) POISSON, *Mécanique*, t. II.

Ajoutons encore que, si nous appelons a la vitesse du son dans la verge, e l'épaisseur, on a

$$b = \frac{ae}{2\sqrt{3}},$$

en supposant la verge prismatique et de section rectangulaire; si elle est cylindrique et de rayon r,

$$b = \frac{ar}{2}.$$

Les nœuds seront donnés par y ou $p = 0$, c'est-à-dire par l'équation

$$\begin{aligned}(2\sin mx + e^{mx} - e^{-mx})(2\sin ml - e^{ml} + e^{-ml})\\ + (2\cos mx + e^{mx} + e^{-mx})(2\cos ml + e^{ml} + e^{-ml}) = 0.\end{aligned}$$

Dans nos expériences, ml est toujours un nombre assez grand pour que l'on puisse négliger e^{-ml}, $\sin ml$ et $\cos ml$ devant e^{ml}.

On aura donc des valeurs de x suffisamment approchées en écrivant

$$\cos mx - \sin mx = e^{-mx} \quad \text{ou} \quad \sin(mx - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-mx}.$$

C'est la formule que donne M. Lissajous pour trouver la position du premier nœud dans une verge vibrant transversalement.

En résolvant cette équation par la méthode des approximations successives, M. Lissajous trouva

$$mx - 45^\circ = 14^\circ, 28';$$

donc

$$mx = 0,3304\pi.$$

En cherchant une seconde valeur de mx, on la trouve très-voisine de $\frac{5}{4}\pi$.

Si l'on construit la courbe,

$$z = \sin(mx - 45^\circ) \quad \text{et} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-mx},$$

on voit que les autres valeurs de mx sont

$$\frac{9\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{17\pi}{4}, \quad \ldots;$$

c'est-à-dire que l'on retrouve les résultats donnés par M. Lissajous sur la position des nœuds dans les verges libres à une de leurs extrémités.

Ainsi, en appelant D la distance normale de deux nœuds consécutifs, on a

$$D = \frac{\pi}{m}.$$

La distance du premier nœud à l'extrémité libre est $x_1 = 0,33\,D$, et la distance du second nœud au premier est

$$x_2 - x_1 - (1,25 - 0,33)\frac{\pi}{m} \quad \text{ou} \quad 0,92\,D.$$

De plus, si l'on prend d'une part une lame fixée au diapason, de l'autre une lame de même épaisseur, fixée à l'une de ses extrémités et mise en vibration à la manière ordinaire, si les deux verges rendent le même son, on trouvera, en partant de l'extrémité libre, les nœuds espacés de la même manière sur l'une et l'autre lame ; la seule différence, c'est que, dans la seconde lame, l'extrémité fixe est nécessairement un nœud, tandis que le point d'attache de la lame au diapason n'est un nœud que dans des cas très-particuliers, et lorsque la longueur est telle que

$$\cos ml\,(e^{ml} + e^{-ml}) = -2.$$

L'expérience réalise mal ce dernier cas, et, lorsque le nœud est au point d'attache, les vibrations de la lame deviennent irrégulières, la verge vibre dans toute sa longueur; en même temps elle se divise en un certain nombre de nœuds, et l'on retrouve quelque chose d'analogue au cas singulier que nous avons signalé pour les cordes.

Du reste, notre analyse est incomplète et ne se rapporte qu'à un cas particulier, celui où, dans l'état initial, la verge est rectiligne. Si l'état initial est quelconque, il faudra chercher l'intégrale générale de l'équation différentielle, et, si l'on se laissait guider par l'analogie et par les indications de l'expérience, on devrait trouver que le mouvement de la verge se compose de deux mouvements périodiques, l'un indépendant de l'état initial et de même période que celui du diapason : c'est celui que nous avons étudié ; l'autre dépendant de l'état initial et le même que celui que prendrait la verge si l'on considérait comme fixe le point où elle s'attache au diapason.

L'expérience nous apprend que ces deux mouvements sont réalisables; de faibles vibrations excitées dans le diapason donnent naissance dans la verge à un mouvement de même période. Des vibrations plus fortes font vibrer la lame en son entier sans qu'il se forme de nœuds intermédiaires. Parfois ces deux mouvements coexistent, comme le veut la théorie, et ce cas se réalise surtout si la verge est assez courte pour qu'il ne se forme qu'un nœud pendant le mouvement synchrone au diapason.

Quelquefois, lorsqu'il se forme un assez grand nombre de nœuds, une attaque un peu forte du diapason détermine la production d'un nombre moindre de nœuds distribués comme dans une verge dont l'une des extrémités serait fixe.

Le point d'attache est alors la place d'un nœud.

Dans certains cas particuliers que le hasard a amenés sans que j'aie pu les reproduire à volonté, j'ai vu ce second mouvement persister seul pendant toute la durée de celui du diapason et sans le moindre trouble.

Ainsi un fil d'aluminium de $0^{mm},065$ de rayon, vibrant sous l'influence du diapason de 133 vibrations, présentait huit nœuds lorsque son mouvement était synchrone avec celui du diapason et, par une attaque plus forte, ne présentait plus que cinq ou six nœuds, si l'on compte comme nœud le point d'attache de la verge au diapason. La verge devait alors vibrer plus lentement que le diapason. J'ai observé les mêmes faits avec des ressorts de montre et des fils de nature diverse. Du reste, fort souvent les deux mouvements coexistent et se troublent mutuellement; c'est ce qui arrive surtout lorsque dans le mouvement synchrone le nœud supérieur est voisin du point d'attache, qu'ainsi les nœuds, dans les deux mouvements, sont voisins l'un de l'autre. Alors la vibration de la verge devient irrégulière, si l'on n'a pas la précaution d'attaquer faiblement le diapason avec l'archet, et encore ne réussit-on pas toujours à faire vibrer la verge.

Les formules précédentes nous apprennent que, si l'on part de l'extrémité libre, les positions des nœuds sont indépendantes de la longueur de la lame.

Fixons au diapason un ressort de montre; s'il est court, il vibre dans toute sa longueur, et il n'y a pas de nœuds.

En l'allongeant peu à peu, on voit se produire un nœud, puis deux, puis trois, et les vibrations ne deviennent irrégulières que lorsque le dernier nœud est voisin du diapason.

On constate que les distances des nœuds à l'extrémité libre sont constantes et indépendantes de la longueur. Ainsi, au diapason de 133,37 vibrations doubles, on a fixé un ressort d'épaisseur $0^{mm},127$.

Longueur de la lame.	x^1	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$l - x_n$
mm 28,48	16,24	»	»	»	»	12,24
31,52	15,14	»	»	»	»	16,31
82,00	15,72	»	»	»	»	27,00
100,00	15,60	39,80	»	»	»	44,60
121,24	15,20	40,60	43,60	»	»	21,84
144,64	14,84	42,08	43,62	»	»	45,00
156,20	14,36	41,60	44,44	45,72	»	10,08
177,24	15,00	40,60	44,96	43,71	»	32,92
199,16	14,14	41,60	44,08	44,60	44 à 46	8,62

Nous devons remarquer que, pour les verges comme pour les cordes, les nœuds se déplacent pendant le mouvement, surtout le nœud le plus voisin du diapason. Il se trouve au début du mouvement, lorsque les vibrations sont grandes, plus éloigné du diapason qu'il ne le sera à la fin. Si l'on marque d'un trait blanc un point de la verge voisin du nœud, on s'assure que celui-ci est au-dessous du point blanc tout d'abord, et qu'il se trouve au-dessus à la fin. Nous avons trouvé un pareil déplacement du nœud dans les cordes tendues; mais il se faisait en sens inverse, le nœud s'éloignant du diapason au lieu de s'en rapprocher. Lorsque le nœud d'une verge se forme d'abord à 7 ou 8 millimètres du point d'attache, on le voit remonter peu à peu jusqu'à ce qu'il atteigne ce point, et alors le mouvement du diapason et de la verge s'arrête brusquement. Cela prouve une fois de plus que, pour les verges comme pour les cordes, la position du nœud au point d'attache constitue un cas particulier, dans lequel le mouvement de la verge synchrone avec celui du diapason est impossible.

Les expériences précédentes se résument ainsi :

La distance D de deux nœuds intermédiaires est $44^{mm},6$.

La distance du premier nœud à l'extrémité libre est $x_1 = 14^{mm},93$ ou à peu près $0,33$ D.

La distance du premier nœud au suivant est $40^{mm},5$ ou $0,90$ D.

La distance du dernier nœud au diapason varie de 0 à $44^{mm},6$.

Ce sont bien là les résultats que nous donnait le calcul.

Les nombres précédents sont les moyennes d'un grand nombre d'expériences.

Je citerai encore les mesures suivantes, obtenues à l'aide du même diapason et avec un ressort d'acier dont l'épaisseur était de $0^{mm},12$; on a pris la position des nœuds vers la fin du mouvement, lorsqu'elle est devenue à peu près fixe :

Longueur. mm	x_1	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$
119,32	14,98	»	»	»
144,34	14,76	40,40	44,40	»
187,04	14,98	40,92	44,36	44,00

La distance moyenne des nœuds est

$$D = 44^{mm},25;$$

théoriquement elle doit être

$$D^2 = \frac{\pi^2}{m^2} = \frac{\pi a e}{8n}.$$

En prenant pour vitesse de son dans l'air $a = 14,7 \times 332^{mm},2$, on trouve $x = 44^{mm},8$. Ainsi la formule se trouve pleinement vérifiée; de même $x_1 = 14,74$, qui est $0,33$ de $44,20$, et la distance des deux premiers nœuds $x_2 - x_1 = 40,7$, ou les $0,92$ de $44,20$.

Si, dans deux expériences faites avec la même verge, on change de diapason, *les carrés des distances de deux nœuds consécutifs sont inversement proportionnels au nombre de vibrations.*

Avec le même diapason et des verges différentes, *les carrés des distances de deux nœuds sont proportionnels aux épaisseurs.*

On a pris un fil de cuivre et, en le faisant passer à la filière, on a obtenu des échantillons de fils du même cuivre ayant des diamètres différents. On les a fait vibrer à l'aide de deux diapasons faisant, l'un 133,37, l'autre 268,7 vibrations. Voici les résultats obtenus :

Rayon.	n	D	$\frac{D^2}{r}$	n'	D'	$\frac{D'^2}{r}$	$\frac{D'}{D}$
mm 0,526	268,9	mm 76,76	0,00870	133,37	109,90	0,00435	1,42
0,440	»	68,71	0,00932	»	96,60	0,00470	1,40
0,330	»	58,96	0,00931	»	86,16	0,00476	1,40
0,260	»	51,34	0,00935	»	72,60	0,00467	1,41
0,1017	»	32,20	0,00965	»	45,80	0,00477	1,42

Les lois énoncées se trouvent suffisamment vérifiées par ces expériences. Pour le même diapason, le rapport $\frac{D^2}{r}$ est constant ou à très-peu près; on sent cependant, à l'inspection des nombres, que le rapport augmente à mesure que le rayon diminue; pour le même fil, le rapport $\frac{D'}{D}$ est bien égal à $\sqrt{\frac{n'}{n}}$, qui est ici 1,41.

Détermination de la vitesse du son dans les solides.

La formule mathématique à laquelle nous sommes parvenu se trouve vérifiée par les expériences précédentes.

La distance normale de deux nœuds $D = \frac{\pi}{m}$ et, si la verge est prismatique, à section rectangulaire $m^2 = \frac{4n\pi\sqrt{3}}{ae}$, la vitesse du son a est donnée par la formule $a = \frac{4n\,D^2\sqrt{3}}{\pi e}$.

Si l'on veut exprimer a en prenant pour unité la vitesse du son dans l'air, nous ferons celle-ci égale à $332^{mm},2$ à zéro, conformément aux expériences de M. Moll; alors, pour la verge prismatique,

$$a = \frac{4nD^2\sqrt{3}}{\pi e \times 332,2};$$

si la verge est cylindrique et de rayon r,

$$a = \frac{4nD^2}{\pi r \times 332,2}.$$

Wertheim [1] a déduit, comme on le sait, la vitesse du son dans les métaux du nombre de vibrations transversales de petites verges ayant une extrémité fixe et l'autre libre.

La verge, armée à son extrémité d'un stylet, trace ses vibrations sur un disque noirci qui tourne autour d'un axe horizontal. Le disque enregistre en même temps les vibrations d'un diapason compteur. On détermine ainsi avec une grande précision le nombre des vibrations exécutées par la verge en une seconde.

Mais ce procédé exige un appareil un peu compliqué que tout le monde ne peut pas avoir à sa disposition.

On simplifie, je crois, le procédé, sans lui faire perdre de sa rigueur, en substituant à la méthode graphique de Wertheim l'emploi d'un diapason servant à faire vibrer transversalement le corps que l'on étudie. On évite ainsi la difficulté que présente la détermination exacte du nombre des vibrations que fait la verge; il est donné par le nombre des vibrations du diapason, et celui-ci peut être obtenu avec précision à l'aide d'un monocorde et d'un autre diapason étalon. Le rayon des fils se déduit de la densité et du poids d'une longueur déterminée du fil. L'épaisseur des lames se mesure avec un sphéromètre.

Il ne reste plus à mesurer que la distance normale de deux nœuds consécutifs. On l'obtient avec une précision suffisante en prenant des fils assez longs pour qu'il se forme un grand nombre de nœuds et en relevant à l'aide d'un cathétomètre la distance du second nœud, comptée à partir de l'extrémité libre, au dernier voisin du diapason ou à l'avant-dernier, si l'on veut éviter les erreurs qui proviennent du déplacement du nœud, sensible surtout sur le dernier nœud.

Parfois la position des nœuds s'apprécie difficilement à l'aide du cathétomètre; on est obligé de faire vibrer légèrement le diapason; sans

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XII, p. 385.

La première formule que donne Wertheim pour calculer le coefficient d'élasticité q,

$$\log q = \log p + 3\log l - 4\log \varepsilon - 3,38243,$$

ne conduit pas aux nombres inscrits dans son Mémoire; et, en effet, elle ne renferme que le poids, la longueur, l'épaisseur de la verge, sans autres données expérimentales. Il faudrait la remplacer par

$$V = \frac{4\pi l^2 n}{322,2 \times \overline{1,87}^2 \times \varepsilon}.$$

cela, la vibration du fil est irrégulière, ou le fil se courbe d'une manière permanente s'il est d'un métal mou comme le plomb. On entoure alors le fil d'un fil de soie très-fin, on le place peu à peu à l'endroit du nœud, à égale distance de deux ventres voisins, ou au milieu de la portion du fil qui semble immobile pendant le mouvement et l'on relève ensuite au cathétomètre la position du fil de soie.

Lorsqu'on n'emploie que des fils ou des lames dont le rayon ou l'épaisseur est inférieure à 1 millimètre, les erreurs commises dans la mesure du rayon ont une grande influence sur le résultat final, influence d'autant plus grande que le rayon est plus petit; car l'erreur relative du résultat est sensiblement la même que l'erreur relative du rayon.

Ainsi, avec une lame dont l'épaisseur serait voisine de $0^{mm},1$, on devrait être sûr du chiffre des centièmes de millimètre, pour que l'erreur relative fût plus petite que 0,1, et comme a varie de 3 à 15, l'erreur absolue commise pourrait atteindre les unités. Sous ce rapport, l'emploi des fils est préférable à celui des lames.

Les erreurs absolues qui portent sur D et n ont une influence bien moindre sur le résultat final.

Voici quelques expériences que j'ai faites dans le but de déterminer la vitesse du son dans certains corps et de comparer les résultats que donne ma méthode avec les nombres donnés par Wertheim et par Masson.

Fil de cuivre rouge :

$$r = 0^{mm},1017, \quad n = 133,37, \quad 8 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 15^{mm},12, \quad x_2 - x_1 = 41,12, \quad x_8 - x_2 = 274,84;$$
$$D = 45^{mm},8, \quad a = 10,53.$$

Autre fil :

$$r = 0^{mm},526, \quad n = 133,37, \quad 3 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 34,76, \quad x_2 - x_1 = 96,32, \quad D = 110,46, \quad a = 11,08;$$

Même fil :

$$n = 268,9, \quad 4 \text{ nœuds}.$$
$$x_1 = 24,60, \quad x_2 - x_1 = 68,20, \quad x_4 - x_2 = 150,4, \quad D = 75,2, \quad a = 11,08.$$

Ce fil passé à la filière a donné un fil de

$$r = 0^{mm},44, \quad n = 133,37, \quad 3 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 32,66, \quad x_2 - x_1 = 88,44, \quad D = 97,56, \quad a = 11,05.$$

Même fil :

$$n = 268,9, \quad 4 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 23,48, \quad x_2 - x_1 = 63, \quad x_4 - x_2 = 138,92, \quad D = 69,44, \quad a = 11,30.$$

Le même fil réduit à avoir $r = 0^{m},330$:

$$n = 133,37, \quad D = 58,9, \quad a = 10,71.$$
$$n = 268,9, \quad 5 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 20,24, \quad x_2 - x_1 = 54,60, \quad x_5 - x_2 = 176,74, \quad D = 58,90, \quad a = 10,83.$$

Le même fil, passé de nouveau à la filière :

$$r = 0,2466, \quad n = 133,37;$$
$$x_1 = 25,08, \quad x_2 - x_1 = 66,08, \quad x_5 - x_2 = 218,35, \quad D = 72,77, \quad a = 10,97.$$

La moyenne de toutes ces déterminations est $a = 10,90$.

Wertheim déduit des vibrations transversales les nombres 10,84, 11,10 pour le cuivre pur. L'accord est aussi satisfaisant que possible; car nos fils, pris dans le commerce, n'ont certainement pas la pureté de ceux qu'employait Wertheim.

ACIER. — *Ressort de montre, épaisseur* $e = 0^{mm},1791$.

$$n = 133,37, \quad 7 \text{ nœuds};$$
$$D = 54^{mm},39, \quad a = 14,57;$$
$$n = 268,9, \quad D = 38,31, \quad a = 14,62.$$

Autre ressort plus large que le précédent.

$$e = 0^{mm},1825, \quad n = 133,37, \quad 7 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 18,16, \quad x_2 - x_1 = 50,26, \quad x_7 - x_2 = 270,88, \quad D = 54,15, \quad a = 14,23.$$
$$n = 268,9, \quad D = 38,10, \quad 10 \text{ nœuds};$$
$$a = 14,25.$$

La moyenne des valeurs de a est 14,41.

Wertheim donne, pour l'acier, des nombres compris entre 14,71 et 15,67.

ZINC. — *Lame d'épaisseur* $0^{mm},1125$.

$$n = 133{,}37, \quad 9 \text{ nœuds.}$$

$$x_1 = 10{,}28, \quad x_2 - x_1 = 35{,}64, \quad x_9 - x_2 = 261{,}96, \quad D = 37{,}42, \quad a = 11{,}07.$$

Wertheim indique, pour le zinc du commerce,

$$10{,}56 - 11{,}01.$$

ALUMINIUM. — *Fil de rayon*, $r = 0^{mm},353$.

$$n = 133{,}37, \quad 4 \text{ nœuds.}$$

$$x_1 = 33{,}50, \quad x_2 - x_1 = 92{,}40, \quad x_4 - x_2 = 205{,}3, \quad D = 102{,}9, \quad a = 15{,}33.$$

Masson donne, pour l'aluminium,

$$a = 15{,}47,$$

nombre déduit des vibrations longitudinales.

PLOMB. — *Fil de* $r = 0^{mm},3618$.

$$n = 133{,}37, \quad \ldots\ldots\ldots$$
$$D = 50{,}83, \quad a = 3{,}65.$$

Wertheim donne, pour le plomb,

$$3{,}76.$$

PLATINE. — *Fil de* $r = 0^{mm},144$.

$$n = 268{,}9, \quad 9 \text{ nœuds;}$$

$$x_1 = 12{,}48, \quad x_2 - x_1 = 31{,}96, \quad x_9 - x_2 = 233{,}4, \quad D = 33{,}8, \quad a = 8{,}153.$$

Wertheim donne

$$8{,}08 - 8{,}23.$$

Ces exemples suffisent pour montrer que la méthode que je propose conduit à de bons résultats.

La facilité avec laquelle des corps très-flexibles vibrent sous l'influence du diapason permet d'étendre notre procédé à de tels corps et de déterminer la vitesse du son dans les cas où les méthodes usuelles seraient en défaut.

Ainsi une bande de papier ne peut être mise en vibrations transversales que par l'emploi d'un diapason.

Dans une de mes expériences, la bande de papier avait une largeur de quelques millimètres, une épaisseur de $0^{mm},185$

$$n = 268{,}9, \quad 6 \text{ nœuds};$$
$$x_1 = 11{,}08, \quad x_2 - x_1 = 26, \quad x_6 - x_2 = 129{,}20, \quad D = 32{,}3, \quad a = 9{,}875.$$

Avec le même diapason, un fil de laiton d'un rayon de $0^{mm},214$ donnait des nœuds de $52^{mm},3 = D'$.

En appelant a' la vitesse du son dans le laiton, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{D^2\sqrt{3}\,r}{D'^2 e};$$

prenant $a' = 10$, nombre donné par Wertheim, on a

$$a = 9{,}866.$$

Ce mode d'opérer dispense de déterminer le nombre des vibrations du diapason, ce qui peut être utile dans certains cas.

On peut, dans ces expériences, mettre en évidence la différence d'élasticité qui existait entre le papier sec et le papier humide.

On fait vibrer une bande de papier après l'avoir laissée séjourner longtemps dans une éprouvette renfermant un peu d'eau.

On répète l'expérience lorsque la bande est restée dans l'éprouvette au-dessus du chlorure de calcium, assez de temps pour se dessécher.

Pour le papier sec, l'internœud

$$D = 30^{mm},3;$$

Pour le papier humide, l'internœud

$$D' = 25^{mm},64.$$

L'épaisseur du papier humide est un peu plus grande que celle du papier; le rapport des deux épaisseurs est 1,005 environ, ce qui résulte de la mesure directe et de ce qu'une longueur de $197^{mm},8$ de papier est devenue $198^{mm},7$ par l'effet de l'humidité.

On aura d'après cela

$$\frac{a'}{a} = \frac{25,64^2}{30,30^2 \times 1,005} = 0,7.$$

Si l'on connaissait le rapport des densités des deux bandes, on pourrait déduire du nombre précédent le rapport des coefficients d'élasticité.

Mica.

Je citerai encore une expérience que j'ai faite avec une lame étroite de mica dont l'épaisseur moyenne était $0^{mm},09$.

On la fit vibrer avec un petit diapason qui faisait $n = 509,1$ vibrations complètes. On a trouvé

$$x_1 = 4,72, \quad x_2 - x_1 = 17, \quad D = 19,40, \quad a = 13,98.$$

Ce nombre n'est qu'approché, car la lame n'avait pas partout la même épaisseur. On aurait dû trouver $x_1 = 6$ et non $4,72$, ce qui indique que la lame était plus mince vers l'extrémité libre. Là encore les vibrations doivent avoir peu d'amplitude, si l'on veut observer les nœuds; sans cela ils disparaissent, et la lame vibre dans toute sa longueur.

Vibrations des cordes et des verges dans les liquides.

Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus,* t. LXXII, p. 560), M. Bourget s'est proposé de déterminer par le calcul l'effet que peut exercer sur les vibrations d'un corps la résistance des fluides qui l'entourent. En supposant cette résistance proportionnelle à la vitesse, il trouve que, pour les cordes, « les carrés des nombres de vibrations exécutées dans le vide sont diminués d'une quantité constante par la résistance du milieu ». Ainsi, en appelant N le nombre des vibrations dans le fluide résistant, et n le nombre des vibrations dans le vide, on a

$$N^2 = n^2 - \varepsilon^2.$$

Je me suis proposé d'étudier, par l'expérience, le sujet que M. Bourget a traité par le calcul. Les résultats que j'ai obtenus, ne confirmant pas dans toutes ses parties la loi précédente, ont provoqué de sa part de nouvelles recherches.

Guidé par cette théorie que M. Bourget m'avait fait connaître, j'ai entrepris de nouvelles expériences pour en vérifier les principales déductions.

Il n'est pas facile de faire vibrer une corde dans un liquide. La résistance du milieu éteint de suite les vibrations; si l'on ébranle la corde avec les doigts, le son est de courte durée, très-sourd, et sa hauteur fort difficile à apprécier. Il faut donc, pour rendre les expériences réalisables, entretenir d'une manière quelconque les vibrations de la corde pendant un temps assez long pour que l'on puisse en prendre l'unisson; mais, au lieu de chercher à mesurer directement le nombre de vibrations que fait une corde d'une longueur donnée, on peut renverser le problème et chercher quelle est la longueur de la corde qui rendra un son d'une hauteur déterminée. Sous cette forme, la question est plus abordable par expérience; car elle se trouve résolue, si l'on fixe la corde, par un de ses points, à un corps vibrant qui la force d'exécuter des vibrations synchrones aux siennes. Il n'est pas nécessaire que la corde ait des dimensions et une tension telles qu'elle vibre à l'unisson lorsqu'on l'ébranle isolément. Il suffit qu'elle soit assez longue pour que le son propre qu'elle rend soit plus grave que celui du corps vibrant qui doit la conduire; elle se divise alors en fuseaux plus ou moins nombreux, égaux en longueur, si l'on en excepte celui qui avoisine le point d'attache; et chacun de ces fuseaux donne la longueur de la corde qui vibre à l'unisson du corps.

Les expériences faites dans l'air sur des cordes de dimensions et de nature diverses, et décrites dans la première partie de ce Mémoire, ne laissent aucun doute à cet égard.

Le mode d'expérimentation que nous allons suivre a déjà été décrit. Le diapason est toujours horizontal, la corde verticale et supportant le poids tenseur. Dans mes premières expériences, elle était attachée directement au diapason. Il m'a semblé que, par cette disposition, le son de l'instrument était un peu altéré lorsqu'on faisait varier la tension.

C'est pour cela que j'ai attaché l'extrémité supérieure de la corde à un support indépendant du diapason. Deux tringles de fer sont fixées à ce support; elles sont libres par le bas. Un petit chevalet en plomb, formé de deux parties qui sont légèrement pressées l'une contre l'autre par un ressort, glisse le long des tringles et sert à limiter la longueur de la partie vibrante de la corde. Un second curseur, portant un petit stylet horizontal, glisse également sur les barres de fer et l'on amène sa pointe vis-à-vis du nœud dont on veut déterminer la position; puis on mesure avec une règle divisée la distance de cette pointe au chevalet.

Le poids tenseur est toujours plongé dans l'eau; mais tantôt le niveau de l'eau s'arrête au-dessus du chevalet, et alors la corde vibre dans l'air, tantôt le fil et les tringles de fer sont renfermés dans un manchon de verre que l'on remplit d'eau jusqu'au point où le fil s'attache au diapason, et alors le fil vibre dans l'eau sans que la tension ait varié.

Pour ne pas gêner les mouvements du diapason, la corde est soudée à une petite tige de cuivre de 2 centimètres de long, et 3 millimètres de diamètre; c'est cette tige qui est fixée au diapason. Lorsque l'instrument ne doit pas porter directement la corde, mais agir sur un de ses points, il porte une petite tige en forme de *z*, et la corde s'engage dans une fente que présente la partie horizontale et libre de cette tige; l'autre branche horizontale est fixée au diapason.

Dans certaines expériences, on amène le niveau de l'eau en un point de la corde éloigné et du chevalet et du diapason, et l'on peut déterminer et la distance nodale dans l'air et la même distance dans l'eau sans rien changer à la disposition de l'expérience.

Je me suis servi de trois diapasons qui rendaient à peu près les sons 1, 1,5, 2. Je les désigne par les numéros 1, 2, 3, ce dernier, le plus aigu, faisant 246 à 250 vibrations complètes par seconde; pour avoir des sons plus aigus encore, j'ai repris le procédé même de M. Duhamel, et j'ai fait agir sur le fil des plaques vibrantes. Ces plaques étaient circulaires, leur plan vertical; elles sont soutenues au centre par un axe horizontal. La corde verticale est tangente à la plaque et on la fixe au point de tangence avec un peu de cire molle. On ébranle la corde avec un archet placé à 90 degrés du point de tangence, et l'on obtient des sons très-aigus en faisant sortir les divers harmoniques de la plaque.

Je n'ai pas besoin de dire que l'on détermine la hauteur des sons des diapasons et de la plaque à l'aide d'un monocorde et d'un diapason étalon. Pour avoir avec précision le son des harmoniques élevés des plaques, il ne faut pas chercher directement sur le sonomètre la longueur de la corde qui est à l'unisson de l'harmonique : cette longueur serait trop petite et la loi des longueurs qu'il est nécessaire d'employer dans le calcul ne serait plus applicable, comme Delezenne et Savart nous l'ont appris. Il faut prendre une longueur de corde quatre ou huit fois plus grande, et faire sortir celui des harmoniques de cette corde qui doit être à l'unisson des sons de la plaque. Avec un peu d'habitude, on y arrive très-facilement, et l'on a à comparer deux sons ayant une assez longue durée et dont les intensités ne sont pas différentes, ce qui facilite la comparaison.

Lorsqu'on emploie ainsi des sons très-aigus, il se forme sur la corde un grand nombre de nœuds, et souvent l'amplitude de la vibration est tellement faible que l'on ne voit ni fuseaux ni nœuds. Il faut alors rapprocher le chevalet du point d'attache et chercher par tâtonnements la place qu'il doit occuper pour que les nœuds séparent la partie vibrante de la corde en un nombre exact de parties égales; exact n'est pas le mot propre, nos premières expériences nous ayant appris que la vibration de la corde se fait mal lorsque l'un des nœuds se trouve au point d'attache; mais qu'elle se fait avec régularité et une amplitude relativement grande, que les nœuds sont d'une netteté remarquable si le nœud supérieur est seulement voisin de ce point.

C'est dans cette position qu'il faut se placer pour voir nettement les nœuds et les déterminer avec sûreté, sinon les nœuds seront longs et les mesures un peu incertaines.

Lorsqu'on fait vibrer les cordes dans l'eau, la position des nœuds n'est pas moins difficile à obtenir avec précision. Si l'on donne aux vibrations du diapason une amplitude moyenne, la corde se partage en fuseaux peu apparents, les nœuds sont marqués par une portion de la corde qui reste immobile, mais qui est très-longue. Il faut en marquer le milieu, et la vibration est de si courte durée que l'on éprouve la plus grande peine à obtenir des nombres concordants. En répétant plusieurs fois les mesures, les différences de 7 à 8 millimètres et plus ne sont pas rares. Il y a là un fait d'appréciation personnelle qui emporte à sa suite d'inévitables erreurs. C'est ainsi que toutes les mesures que j'ai prises se trouvaient donner à la distance nodale une valeur plus grande que celles qu'obtenait mon préparateur. Si l'on cherche à augmenter l'amplitude des vibrations, les nœuds disparaissent, la corde vibre dans sa totalité en ne formant qu'un seul fuseau limité par une courbe légèrement ondulée; les sommets des portions de la courbe, convexes du côté de la ligne de repos, marquent bien la place des nœuds, mais cette convexité est trop faiblement accusée pour qu'on puisse la faire servir à leur détermination. Lorsque le mouvement s'affaiblit le nœud se forme par le contact des deux courbes limites de droite ou de gauche; mais il est bien difficile de saisir le point où ces lignes, presque droites, se touchent tout d'abord. Et cependant nous avons ainsi opéré pendant fort longtemps, multipliant les observations, prenant des moyennes pour arriver à éliminer les erreurs d'observation. C'est après avoir perdu ainsi beaucoup de temps que j'eus l'idée de recouvrir la corde de bulles de gaz. Je mettais cette corde en communication avec le pôle négatif d'une pile; le rhéophore positif était un fil de platine plongeant dans l'eau qui entoure la corde. Lorsqu'on fait vibrer le diapason, les bulles d'hydrogène qui recouvrent la corde sont lancées horizontalement dans le liquide; elles s'éloignent en décrivant en général des ellipses et, dans quelques cas particuliers, des lignes droites. L'amplitude de la trajectoire, ainsi décrite, diminue depuis les ventres jusqu'aux nœuds. Là les bulles s'écartent peu ou point, si la vibration de la corde n'est pas trop forte. On voit parfois les bulles tourner autour du fil à l'endroit du nœud sans s'en éloigner, et cela permet de marquer le nœud.

D'autres fois, la détermination est plus pénible; si l'on fait vibrer légèrement la corde, le mouvement des bulles n'est pas assez accusé et le nœud se montre mal. Si alors on augmente l'amplitude des vibrations, on dépasse le but et les bulles se détachent partout de la corde. Il se forme en même temps des nœuds qui appartiennent au second mouvement de la corde, à celui qui correspond au cas où les extrémités sont fixes. Ces nœuds sont souvent assez voisins du premier, de celui qu'on a intérêt à déterminer pour que l'on ne sache auquel s'adresser; entre ces nœuds voisins, les bulles dessinent un petit fuseau et l'on acquiert ainsi une preuve nouvelle de la coexistence permanente des deux genres de mouvements annoncés par l'analyse de M. Duhamel. C'est avec les sons aigus des plaques que j'ai pu le mieux isoler le premier mouvement et que j'ai vu les bulles de gaz dessiner le plus nettement des fuseaux simples se succédant avec régularité.

Le second mouvement existe et se produit lorsque la plaque vibre fortement; mais il ne s'isole pas aussi facilement qu'il le fait avec le diapason, et mes expériences confirment sous ce rapport les résultats plus anciens de M. Duhamel, lorsque la tension est forte; si elle est faible, je retrouve les phénomènes que j'ai décrits plus haut.

Grâce à l'emploi des bulles de gaz, la détermination des nœuds dans l'eau est abordable; souvent elle se fait avec autant de précision que dans l'air, lors même que les fuseaux entre lesquels la portion immergée se divise ne seraient pas visibles directement. Souvent aussi la coexistence des divers mouvements qui peuvent animer la corde jette du trouble dans le phénomène, et il faut de l'habitude pour démêler la place du nœud. On peut s'aider alors du mouvement des bulles qui, de part et d'autre du nœud, sont lancées, les unes vers la droite, les autres vers la gauche. Pour relever la position du nœud, on amenait vis-à-vis le curseur à stylet; ou bien, d'autres fois, on plaçait le nœud dans le plan visuel d'un anneau métallique, mobile le long du tube de verre qui entourait la corde. On relevait ensuite la distance du plan ou du stylet au chevalet en immergeant une règle divisée et en l'appliquant contre la corde. On était ainsi à l'abri des effets de parallaxe qu'aurait inévitablement produits l'eau qui remplit le tube.

On peut encore fixer au diapason des fils métalliques ayant une longueur de 25 à 30 centimètres, libres à leur extrémité et qui vibrent alors à la manière des verges. Lorsque ces fils sont plongés, en tout ou en partie, dans un liquide, les nœuds s'y distribuent d'après les lois connues, c'est-à-dire que la distance de deux nœuds consécutifs, δ, est constante, que la distance de l'extrémité au nœud le plus voisin est $0,33\delta$, et que la distance de cette extrémité au second nœud est $1,25\delta$. Généralement les expériences sont faciles à faire avec les verges; les nœuds se forment nettement, on relève aisément leur position à l'aide d'une lunette et l'on mesure leur distance à l'extrémité libre sans recourir à l'emploi des bulles d'hydrogène.

On n'éprouve de difficultés sérieuses que lorsque le liquide qui entoure le fil est visqueux, comme l'huile, ou lorsque le fil a une faible densité, lorsqu'il est en aluminium ou en verre; alors les nœuds les plus voisins de la surface liquide disparaissent, la verge vibre en formant un fuseau plus ou moins long qui présente seulement de légères inflexions à la place normale des nœuds. Il n'y a plus de réellement distincts que le premier et le second nœud voisins de l'extrémité libre. On peut encore déduire la distance normale de deux nœuds de celle qui sépare l'un de ces nœuds de l'extrémité; mais les erreurs que l'on commet dans les mesures ont alors une influence plus grande qu'elles n'en ont lorsqu'on s'adresse à un nœud d'un ordre plus élevé.

Sauf de rares exceptions, je ne me suis servi que de fils cylindriques. Leur rayon se déduit du poids d'une longueur déterminée de fil.

Je ne rapporterai pas ici un très-grand nombre d'expériences que j'ai faites avec des cordes en acier, en aluminium, en laiton, et dans lesquelles je faisais varier la longueur, la tension de la corde, la hauteur du son rendu. J'observais alors les nœuds directement à la vue simple, et j'ai déjà dit combien les observations comportent d'incertitude. Je passe sous silence la partie la plus pénible de mon travail. Les mesures que j'ai prises ainsi étaient assez nombreuses pour me donner des moyennes concordantes entre elles et pour m'apprendre que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ des distances de deux nœuds consécutifs, prises dans l'air et dans l'eau, conserve la même valeur, quelle que soit la tension; ce rapport paraissait indépendant du nombre des vibrations que fait la corde, et il changeait avec la nature du fil et celle du liquide.

Ces divers points se trouvent confirmés par toutes les expériences que j'ai faites depuis et qui comportent, grâce à l'emploi de l'hydrogène, une précision plus grande.

J'ai fait le plus grand nombre de mes expériences avec un fil de laiton : 1 mètre de ce fil pèse $1^{gr},202$, son rayon est de $0^{mm},2$.

Le fil était d'abord supporté par le diapason.

Tension, 515 *grammes. — Nombre des vibrations complètes,* 128.

Longueur.	δ	
754^{mm}	256,5 à 258	suivant l'amplitude de la vibration.
664	248 à 256	suivant l'amplitude de la vibration.
512	256	Nœud au milieu, vibration de grande amplitude et de courte durée.
423	252 à 255	
255	Vibrations planes. Le son baisse.	
256	Vibrations tournantes.	

Le calcul donne pour δ le nombre 255.

On ne trouve pas toujours un accord aussi parfait entre l'expérience et la théorie. Ainsi, à quelques jours de distance, une autre série de mesures faites avec la même corde et la même tension me donnait $\delta = 265$.

Ce nombre résultait d'une dizaine de déterminations faites sous les longueurs les plus diverses. Je n'ai noté aucune particularité qui pût m'expliquer la divergence de ces deux nombres; mais cela m'a engagé à faire, séance tenante, les observations dans l'air et dans les liquides, sans rien changer à la corde, afin d'avoir des résultats comparables. J'ai dû ainsi répéter plusieurs fois certaines expériences pour avoir des moyens de contrôle.

La même corde étant entourée d'eau, j'ai eu $\delta_1 = 242^{mm}$, moyenne de sept mesures qui variaient de 238 à 247 millimètres; le rapport $\frac{\delta}{\delta_1} = 1,053$, si l'on prend $\delta = 255^{mm}$ et 1,10 avec $\delta = 265^{mm}$.

Tension, 280 grammes.. $2\delta = 380$, $2\delta_1 = 357$, $\frac{\delta}{\delta_1} = 1,065$.

Avec une autre longueur. $2\delta = 363$, $2\delta_1 = 342$, $\frac{\delta}{\delta_1} = 1,061$.

$$\left.\begin{array}{llll}\text{Tension, 586 grammes..} & 2\delta = 597, & 2\delta_1 = 334,\\ \text{Avec une autre longueur.} & \delta = 298,5, & \delta_1 = 267,\end{array}\right\} \frac{\delta}{\delta_1} = 1,10.$$

Dans l'eau, les bulles d'hydrogène dessinaient deux nœuds voisins, c'est-à-dire formaient un petit fuseau entre deux plus grands; le second de ces nœuds donnait $2\delta_1 = 554$ et $\frac{\delta}{\delta'} = 1,074$.

On cherche à ajuster la longueur de la corde de telle sorte qu'il se forme un nœud unique voisin du milieu.

On note, à l'aide d'un repère, la position du nœud, et l'on verse de l'eau dans le manchon qui entoure le fil jusqu'à ce que le niveau atteigne le repère; puis on relève le chevalet que l'on a immergé, jusqu'à ce que le nœud soit ramené à la surface du liquide. On trouve 257 millimètres pour la portion immergée : 269 millimètres pour celle qui reste dans l'air,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,05.$$

Dans une autre expérience,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{270^{\text{mm}}}{248^{\text{mm}}} = 1,08.$$

Ce procédé entraîne, nous devons le dire, des incertitudes assez grandes, qui ne peuvent être amoindries que par une longue habitude de ces sortes d'expériences.

On a changé de diapason et pris celui qui fait 189 vibrations.

Tension 515 grammes. — Pour diverses longueurs de corde, on obtient des valeurs de δ variables de 174 à 180 millimètres.

La moyenne est 177 millimètres. Dans l'eau δ_1 varie de 157 à 160 millimètres,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,10 \text{ à } 1,12.$$

Avec le diapason de 246 vibrations :

Tension 515 gr.,	dans l'air.	$\delta = 135$,	dans l'eau.	$\delta_1 = 125$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,08.$
» 286	»	$\delta = 101,75$,	»	$\delta_1 = 95,3$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,068.$
» 586	»	$\delta = 143$,	»	$\delta_1 = 133$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,075.$

En plaçant le nœud vers le milieu de la corde, à la surface de séparation de l'eau et de l'air,

$$2\delta = 284, \quad 2\delta_1 = 263 \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1,08.$$

Les expériences qui suivent ont été faites en débarrassant le diapason de la charge qu'exerce le poids tenseur. La corde est fixée à un support spécial, le diapason agit sur un point intermédiaire, La corde est immergée en partie, et la portion qui avoisine le diapason reste dans l'air.

Tension, 586 grammes. — Diapason (1), 128 vibrations :

$$2\delta = 544, \quad 2\delta_1 = 515 \text{ à } 517, \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}054.$$

Diapason (2), 185 vibrations :

$$3\delta = 562, \quad 3\delta_1 = 524 \text{ à } 527, \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}067.$$

Diapason (3), 246 vibrations :

$$4\delta = 563,\ 562,\ 558, \quad 4\delta_1 = 531,\ 528, \quad \frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}057.$$

Enfin les expériences ont été reprises en substituant au diapason une plaque de laiton circulaire de 19 centimètres de diamètre et 4 millimètres d'épaisseur.

La portion inférieure du fil, ainsi que le poids tenseur, est entourée d'un large manchon que l'on peut remplir d'eau; le poids tenseur reste toujours immergé; le niveau de l'eau atteint le milieu de la corde environ.

Nous indiquons toujours le nombre des vibrations complètes.

NOMBRE de vibrations.	TENSION.	δ (observé).		δ (calculé).	δ_1		$\frac{\delta}{\delta_1}$
397,4	436gr	$2\delta = 155$ $4\delta = 312$ $4\delta = 310$	mm 77,60	mm 75,10	$\delta_1 = 71,5$ $2\delta_1 = 143$ $3\delta_1 = 210$	mm 70,7	1,09
	881	$6\delta = 650$ $5\delta = 543$	108,46	106,70	$3\delta_1 = 306$	102	1,058
	1794	$2\delta = 295$ $2\delta = 293$	147	152,30	$\delta_1 = 140$ $2\delta_1 = 280$ $2\delta_1 = 279$	140	1,05
943,4	436	$2\delta = 74$ $3\delta = 108$	36,5	»	$3\delta_1 = 101$ $4\delta_1 = 138$	34	1,07
	881	$2\delta = 95$ $4\delta = 190$ $6\delta = 283$	47,5	45,18	$2\delta_1 = 90$ $4\delta_1 = 177$ $6\delta_1 = 270$	44,6	1,055
	1794	$2\delta = 130$ $5\delta = 326$	64,9	64,62	$4\delta_1 = 244$ $4\delta_1 = 243$	60,5	1,06
1410	881	$3\delta = 140$	46	»	$4\delta_1 = 170$	42	1,09
1642	881	$2\delta = 56$ $4\delta = 114$	25,84	25,84	$10\delta_1 = 255$ $9\delta_1 = 230$ $6\delta_1 = 163$	25,5	1,09

Ces expériences, faites à l'aide de la plaque rendant le son fondamental et ses harmoniques, sont celles qui présentent le plus de netteté; les nœuds, dans l'air et dans l'eau, étaient bien dessinés, et la précision des mesures s'en est ressentie.

Les expériences faites avec la corde fixée directement au diapason donnent en moyenne

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,075.$$

Si le diapason est débarrassé du poids tenseur, la moyenne des valeurs du rapport est 1,062.

Avec la plaque vibrante, on trouve en moyenne 1,068.

Enfin la moyenne générale de toutes les expériences est 1,07.

Chaque groupe d'expériences montre que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est indépendant de la longueur de la corde et de la tension; il est le même, que la corde soit complétement immergée ou qu'elle ne le soit qu'en partie; enfin ce rapport est indépendant du nombre de vibrations que fait la corde.

Avant d'aller plus loin, je citerai une série d'expériences faites avec un fil de cuivre vibrant, à la manière des verges, sous l'influence du diapason (1); son rayon était $0^{mm},3$ et l'on a déterminé, dans l'air et dans l'eau, la distance de l'extrémité libre à un nœud d'un ordre déterminé.

Longueur du fil.		Distance à l'extrémité.		$\frac{\delta}{\delta_1}$
		Air.	Eau.	
mm				
349,80	5e nœud....	282,2	270,24	1,04
264,80	4e nœud....	215,0	206,00	1,04
180,80	3e nœud....	149,0	142,00	1,049
119,20	2e nœud....	82,0	79,00	1,05

$r = 0^{mm},44.$

Nombre de vibrations.		Air.	Eau.	$\frac{\delta}{\delta_1}$
128	3e nœud...	221,28	214,4	1,03
246	5e nœud...	160,24	154,24	1,04

$r = 0^{mm},33.$

128	3e nœud...	195,56	190,00	1,03
189	4e nœud...	232,20	222,84	1,03
189	3e nœud...	162,00	157,16	1,03
246	5e nœud...	266,56	260,56	1,02

Si l'on remarque que la précision des résultats diminue avec le nombre des nœuds, par suite des incertitudes que présente toujours leur détermination exacte, on devra conclure que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est indépendant de la longueur de la verge.

On voit aussi qu'il est indépendant du nombre des vibrations qu'elle exécute.

Reportons-nous maintenant à la première théorie donnée par M. Bourget.

Si l'effet de la résistance des liquides est de diminuer d'une quantité constante le carré du nombre des oscillations que fait la corde dans le vide, la longueur de la corde que j'ai appelée δ_1 et qui s'étend dans l'eau d'un nœud à l'autre, faisant alors un nombre n de vibrations, le même que le corps qui agit sur elle, cette longueur ferait dans l'air un nombre x de vibrations, et l'on aurait

$$x^2 - e^2 = n^2 \quad \text{ou} \quad x^2 = n^2 + e^2.$$

On néglige ainsi la résistance de l'air.

L'expérience nous donne la longueur δ de la corde qui vibre dans l'air à l'unisson du diapason et qui fait aussi n vibrations. On devrait donc avoir, d'après les lois connues,

$$n^2\delta^2 = (n^2 + e^2)\,\delta^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{n^2}.$$

Le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ devrait diminuer à mesure que n augmente, ce qui est en contradiction formelle avec toutes nos expériences.

Ainsi, en prenant $\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}10$ la plus grande des valeurs qui se rapportent au diapason le plus grave, on devrait avoir pour le plus aigu, qui est sensiblement à l'octave du premier, $\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}024$, tandis que toutes mes expériences donnent des valeurs de ce rapport supérieures à 1,05. Dans l'une d'elles, par exemple, la longueur δ a été trouvée de 140 millimètres. Si l'on admet le rapport 1,02, on en déduira

$$\delta_1 = 137^{\text{mm}} \quad \text{et} \quad 4\delta_1 = 548^{\text{mm}}.$$

L'observation directe donne $4\delta_1 = 530^{\text{mm}}$. La différence dépasse de beaucoup l'erreur que l'on peut commettre.

Les expériences faites avec les harmoniques aigus des plaques conduisent mieux encore aux mêmes conclusions.

Ainsi la seule hypothèse d'une résistance proportionnelle à la vitesse, point de départ de M. Bourget, ne suffit pas pour arriver à rendre compte par le calcul des faits que l'expérience révèle.

Celle-ci montre que l'eau agit sur la corde pour éteindre les vibrations, mais que sa résistance n'altère pas sensiblement la longueur d'ondulation.

Lorsque M. Bourget eut pris connaissance des résultats de mes expériences, il attaqua d'une autre manière la question qui nous occupe. Il suppose qu'une corde fixée à l'une de ses extrémités est mise en vibration par un diapason qui agit sur son autre extrémité. Une partie de la corde reste dans l'air, l'autre plonge dans l'eau.

Celle-ci entraîne dans son mouvement une couche de liquide adhérente; de plus le mouvement de la corde se communique au liquide environnant : de là une perte de force vive. On peut d'après cela admettre que tout se passe comme si la masse de la portion de corde immergée s'était accrue dans une certaine proportion.

On peut représenter cet accroissement de la masse de corde par celle d'une couche du liquide environnant ayant pour section σ'; la section du fil étant σ, les densités du liquide et du fil d' et d, on aura, d'après M. Bourget,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \sqrt{1 + \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{d'}{d}}.$$

Représentons par ρ le rapport $\sqrt{1 + \frac{d'}{d}}$. Si l'on fait le calcul pour le laiton et l'eau, en posant $d' = 1$, $d = 8,65$, on a

$$\rho = 1,064,$$

qui ne s'éloigne pas beaucoup de la moyenne que nous avons trouvée, 1,062, pour les expériences faites avec la plaque vibrante, ou de la moyenne générale 1,07.

Cependant, d'autres vérifications devenaient nécessaires.

Qu'il y ait un mouvement communiqué au liquide environnant par la corde, c'est ce qu'il n'est guère nécessaire de vérifier. Le mouvement des bulles de gaz adhérentes à la corde et qui sont lancées de manière à décrire des courbes elliptiques, le mouvement tourbillonnant des poussières qui sont en suspension dans l'eau et qui sont tantôt attirées, tantôt repoussées par le fil vibrant, le prouvent surabondamment.

Qu'une couche de liquide reste adhérente au fil et soit entraînée par lui dans son mouvement, c'est ce dont on ne saurait douter, du moins pour les liquides qui mouillent le fil.

Pour en avoir une preuve directe, j'ai formé, comme dans les expériences bien connues de M. Plateau, un mélange d'eau et d'alcool ayant la densité de l'huile d'olive. On superposait deux couches d'alcool et d'eau, et, par leur mélange, elles formaient un liquide d'une densité convenable. En projetant dans ce liquide des gouttes d'huile, on a de petites sphères flottant en équilibre dans l'eau alcoolisée. On introduit, dans une de ces gouttes, un fil de cuivre fixé au diapason et formant une petite verge. En faisant vibrer le diapason, on voit le fil vibrer; la goutte d'huile lui reste adhérente lors même qu'elle serait à l'endroit d'un ventre.

Si, lorsqu'on introduit le fil, on a fait descendre la goutte de manière à l'amener dans une couche plus dense qu'elle, le mouvement vibratoire la fait glisser le long du fil jusqu'à ce qu'elle arrive à un nœud où elle s'arrête souvent. Parfois aussi elle le franchit et revient à la couche où elle se trouve en équilibre. Du reste, même dans l'air, de petites gouttes d'huile ou d'eau, déposées sur le fil à l'endroit d'un ventre, y restent adhérentes pendant le mouvement du fil, pourvu que l'amplitude du mouvement ne soit pas trop grande.

Si la goutte d'huile en équilibre dans le liquide alcoolique est un peu grosse, si le fil passe bien au centre de la sphère, celle-ci reste adhérente au fil pendant son mouvement. Elle tourne sur elle-même en recevant du fil le mouvement tournant qui l'anime; car il ne faut pas oublier que dans nos expériences, comme dans celles de M. Melde, comme dans le kaléïdophone de M. Wheatstone, chaque point de la verge décrit une petite courbe fermée circulaire ou elliptique. On voit alors la sphère d'huile s'aplatir comme dans l'expérience de M. Plateau qui se trouve ainsi réalisée très-simplement, et elle conserve cette forme aplatie tant que dure le mouvement vibratoire du fil. Si le fil est mal centré, la goutte se déforme, et la force centrifuge lui fait quitter le fil; elle se trouve alors lancée horizontalement dans le liquide. On peut répéter les mêmes expériences avec le sulfure de carbone flottant en sphère dans un mélange d'eau et d'acide sulfurique; seulement elles sont plus difficiles à réaliser. Il faut que la sphère soit assez grosse pour se laisser traverser par le fil qu'elle ne mouille plus; pour peu que le fil soit excentrique ou que le liquide environnant soit en mouvement, la sphère de sulfure quitte le fil. Cependant j'ai réussi à introduire dans une assez grosse sphère l'extrémité du fil, qui, comme on le sait, est un ventre de vibration. Pendant le mouvement du fil, la sphère est restée adhérente à ce dernier. Elle en recevait un mouvement tourbillonnant fort curieux. Il était rendu visible par une foule de petites gouttes du liquide environnant qui pénétraient dans la sphère de sulfure, la traversaient dans tous les sens en décrivant des courbes variées et n'en sortaient que lors de la cessation du mouvement. Ces gouttes s'introduisent ainsi dans la sphère le long du fil qu'elles quittent à l'extrémité.

On reproduit quelque chose d'analogue en plongeant dans un liquide, eau ou alcool, l'extrémité d'un fil vibrant. Cette fois, ce sont des bulles d'air qui sont entraînées le long du fil et qui pénètrent dans le liquide. Si l'on place le premier nœud vis-à-vis de la surface du liquide, ce mouvement de l'air s'arrête; si, au contraire, c'est le premier ventre à partir de l'extrémité qui se trouve au niveau du liquide, l'air est entraîné et les bulles glissent jusqu'au premier nœud qui est alors immergé, puis elles remontent vers la surface en formant une espèce de cône dont la base est à la surface. Une forte vibration leur fait franchir le nœud et elles arrivent à l'extrémité de la verge.

Un phénomène qui n'a pas de rapport direct avec le sujet principal de ce travail, et sur lequel je compte revenir plus tard, se présente lorsqu'on prend pour verge un fil de verre étiré formant un tube capillaire très-fin. Son extrémité plonge dans un liquide, et ce dernier monte plus ou moins haut dans le tube capillaire. Ce fil vibre fort régulièrement à la manière des verges; mais la colonne liquide ne reste pas immobile : elle monte ou descend pendant que le tube vibre. Si l'on prend un pareil fil qui soit franchement conique, on trouve que la colonne liquide se porte toujours vers l'extrémité la plus étroite du tube. Elle monte si la base la plus large est plongée dans le liquide, elle descend si c'est l'extrémité la plus effilée; l'amplitude de ces mouvements croît avec l'amplitude de la vibration; la colonne liquide peut même être refoulée au-dessous du niveau du liquide, atteindre l'extrémité du tube, et alors des bulles d'air s'échappent par là et traversent le liquide sous-jacent. J'ai constaté que le mouvement descendant était indépendant de la position qu'occupe le ménisque par rapport aux nœuds ou aux ventres et que des vibrations longitudinales excitées dans le fil ne produisent aucun mouvement apparent de la colonne liquide.

Mais revenons à notre sujet. Pour vérifier la formule donnée par M. Bourget, j'ai opéré avec des fils vibrant, tantôt à la manière des cordes, sous une tension convenable, tantôt à la manière des verges. On verra que, pour les mêmes fils, le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ des distances de deux nœuds pris dans l'air et dans l'eau est à peu près le même dans les deux cas, et ainsi les expériences sur les verges, qui sont bien plus faciles à réaliser, peuvent servir à contrôler la formule ou nous donner du moins quelques indications sur la marche du phénomène.

Un fil de platine de $0^{mm},3$ de rayon vibre, sous l'influence du diapason (1), 128 vibrations; il est tendu à l'aide d'une vis :

$$\begin{array}{lll} \text{Air}\ldots\ldots\ldots\ldots & 3\delta = 700,\ 689,\ 684,\ 687, \quad \text{d'où} & \delta = 229,6; \\ \text{Eau}\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\delta_1 = 450, & \delta_1 = 225,00; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = 1,02;$$

avec le diapason (3), 246 vibrations,

$$\begin{array}{lll} \text{Air}\ldots\ldots\ldots\ldots & 4\delta = 713,\ 701, & \delta = 178,\ 175; \\ \text{Eau}\ldots\ldots\ldots\ldots & 3\delta = 516,\ 504, & \delta_1 = 172,\ 168; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,03.$$

Si nous prenons $\rho = \sqrt{1 + \frac{1}{d}}$, on trouve

$$1,022.$$

Un fil d'aluminium dont le rayon est $0^{mm},368$ vibre en corde sous l'influence de la plaque. La tension est 1994 grammes.

Le son fondamental :

$$n = 397,4;$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Air}\ldots\ldots & \delta = 171, & 2\delta = 341, & 3\delta = 510, & \delta = 170,3; \\ \text{Eau}\ldots\ldots & \delta_1 = 143, & 2\delta_1 = 285, & & \delta_1 = 142,7. \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,18.$$

Premier harmonique :

$$n = 943,4.$$

$$\text{Air....}\left\{\begin{matrix} 7\delta = 527 \\ 3\delta = 233 \\ 2\delta = 151 \end{matrix}\right\}\delta = 75; \qquad \text{Eau....}\left\{\begin{matrix} 4\delta_1 = 254 \\ 3\delta_1 = 190 \end{matrix}\right\}\delta_1 = 63,3;$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,16.$$

La moyenne est 1,17. Le rapport calculé $\sqrt{1 + \frac{1}{d}} = 1,17$.

Un autre fil d'aluminium dont le rayon est $0^{mm},27$, tendu aussi par le poids 1994 grammes et soumis à l'influence de la plaque, donne

$$n = 397,4.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Air.....} & \delta = 231,\ 233,\quad 2\delta = 464,\ 465,\quad \delta = 232,6; \\ \text{Eau. ..} & \delta_1 = 191; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,21.$$

Premier harmonique :

$$n = 943,4.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Air....} & \delta = 100^{mm}, & 2\delta = 305,\ 302, & \delta = 100,4; \\ \text{Eau....} & 2\delta_1 = 166, & 3\delta_1 = 246, & \delta_1 = 82,6; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,22.$$

Deuxième harmonique :

$$n = 1542.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Air......} & \delta = 56,\quad 2\delta = 118, & \delta = 57,6; \\ \text{Eau......} & \delta_1 = 189, & \delta_1 = 47,2; \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,21.$$

On a graissé le fil d'aluminium ; les expériences deviennent plus difficiles, parce que la couche de graisse arrête en grande partie le courant électrique, et le dégagement d'hydrogène sur le fil est très-lent; il y a donc un peu d'incertitude dans la position exacte des nœuds. J'estime à 4 ou 5 millimètres l'étendue de l'erreur que l'on peut commettre :

$$n = 397,4.$$

$$\text{Eau......}\quad \delta_1 = 180,\ 184.$$

En prenant, comme tout à l'heure, $\delta = 232,6$, on a

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,28.$$

$$n = 943,4,$$

$$2\delta_1 = 151,\ 152,\ 152;$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,32.$$

Lorsque le fil n'est pas mouillé par le liquide, le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est plus grand qu'il ne l'était lorsque le liquide le mouillait. Les nombres précédents sont un peu trop forts, parce que le poids de la légère couche de graisse qui recouvre le fil doit rendre le δ pris dans l'air un peu supérieur à 232,6.

Avec le fil d'aluminium, de rayon $0^{mm},3$, recouvert d'une couche légère de suif, on trouve

$$\begin{array}{ll} \text{Air}\ldots\ldots\ldots\ldots & \delta = 164; \\ \text{Eau}\ldots\ldots\ldots\ldots & \delta_1 = 130 \text{ à } 135; \end{array}$$

d'où

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,21 \text{ à } 1,25,$$

tandis que les expériences faites avec le fil dégraissé nous ont donné

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,17.$$

En faisant vibrer, en verge, le même fil sous l'influence du diapason (1), on a

$$\text{Air}\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} x_4 = 279,04, & \delta = 85,8, \\ x_3 = 194,12, & \delta = 86,2. \end{array} \right.$$

$$\text{Eau}\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} x_4 = 253, & \delta_1 = 77,8, \\ x_3 = 175,48, & \delta_1 = 77,9. \end{array} \right.$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,15.$$

Avec le diapason (3) :

$$\text{Air.....}\begin{cases} x_6 = 325{,}72, & \delta = 62, \\ x_5 = 260{,}64, & \delta = 61{,}3. \end{cases}$$

$$\text{Eau....}\begin{cases} x_6 = 291{,}88, & \delta_1 = 55{,}6, \\ x_5 = 295{,}68, & \delta_1 = 56. \end{cases}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}13.$$

Je dois dire que le fil recouvert d'une couche légère de cire m'a redonné le rapport 1,17 comme le fil dégraissé.

Un fil de fer aciéré (corde de piano), ayant pour rayon $0^{mm},25$, a été substitué au fil d'aluminium. La charge était encore 1994 grammes :

$$n = 397{,}4.$$

Air......	$\delta = 136$,	$2\delta = 271$,	$3\delta = 405$,	$\delta = 135{,}5$;
Eau.....	$2\delta_1 = 260$,	$\delta_1 = 130$;		

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}038.$$

$$n = 943{,}4.$$

Air......	$\delta = 62^{mm}$,	$2\delta = 121$,	$4\delta = 244$,	$\delta = 61$;
Eau.....	$5\delta_1 = 289$,			$\delta_1 = 57{,}8$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}05.$$

$$n = 1642.$$

Air......	$\delta = 38$,	$2\delta = 75$,	$3\delta = 112$,	$\delta = 37{,}5$;
Eau.....	$7\delta_1 = 249$,	$8\delta_1 = 285$,		$\delta_1 = 36$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1{,}04.$$

La moyenne est 1,04. Le calcul donne, pour $\sqrt{1 + \frac{1}{d}}$, la valeur 1,062. En posant $\frac{\delta}{\delta_1} = \sqrt{1 + \frac{\sigma'}{\sigma d}}$, on trouverait

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 0{,}638;$$

si l'on calculait d'après cela l'épaisseur d'une couche uniforme de liquide qui devrait être entraînée par le fil pendant sa vibration, on trouverait

$$e = 0^{mm},07.$$

Les expériences faites avec le fil de fer recouvert d'une couche légère de graisse ou de cire m'ont donné à très-peu près les mêmes valeurs pour le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$.

J'ai pris pour cordes des fils de cuivre rouge. Ces fils provenaient d'un même échantillon de cuivre que l'on a fait passer à la filière, de manière à avoir des fils de diamètres divers. C'est toujours la plaque qui est le corps vibrant.

Tension 1994 grammes, $r = 0^{mm},39$, $n = 397,4$:

Air..... $2\delta = 174$, $4\delta = 352, 350$, $\delta = 87,5$;
Eau.... $2\delta_1 = 170$, $3\delta_1 = 256, 255$, $\delta_1 = 85$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,0294.$$

Autre fil,

$$r = 0^{mm},25:$$

Air..... $\delta = 124$, $2\delta = 253$, $3\delta = 380$, $4\delta = 511$, $\delta = 125,5$;
Eau.... $2\delta_1 = 253$, $\delta_1 = 121,5$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,033.$$

Autre fil,

Tension 420 grammes. $r = 0^{mm},1$:

Air..... $\delta = 157$, $2\delta = 316, 314$, $\delta = 157,3$;
Eau.... $2\delta_1 = 289, 295$, $\delta_1 = 145, 147$, $\delta_1 = 146$;

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,076.$$

Le rapport, sensiblement constant pour les gros fils, diminue au contraire d'une manière bien sensible lorsqu'on prend un fil très-fin. Les expériences faites sur les fils de cuivre rouge d'un rayon supérieur à 0,3 nous avaient donné

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,03 \text{ à } 1,04,$$

lorsqu'ils vibrent en verge. Le rapport théorique $\sqrt{1+\frac{1}{d}}$ est ici 1,033. Si l'on calcule le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma}$ et l'épaisseur e de la couche liquide supposée adhérente au fil, on trouve

r	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	$\frac{e}{r}$	e	$\frac{\sigma'}{\sigma d}$
mm 0,39	0,532	0,229	mm 0,089	0,0596
0,25	0,599	0,263	0,065	0,067
0,10	1,408	0,551	0,0551	0,158

$\frac{\sigma'}{\sigma d}$ représente le rapport de la masse additionnelle du liquide entraîné par le fil à la masse du fil lui-même; on voit qu'elle va en croissant à mesure que le diamètre diminue.

Il en est de même de $\frac{e}{r}$; si l'on calcule les valeurs absolues de e, on voit que ces valeurs diminuent au contraire avec le diamètre.

Cette influence du diamètre, que nous avions déjà trouvée avec des fils d'aluminium, était importante à bien constater. Elle se retrouve dans les expériences suivantes; elles ont été entreprises pour reconnaître si la valeur du rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ dépend seulement des densités du fil métallique et du liquide environnant, ou si la nature particulière de ce dernier a quelque influence.

On a fait un mélange d'eau et d'alcool ayant exactement la densité de l'huile d'olive, 0,923. Un autre mélange d'eau et d'acide sulfurique a la densité 1,26 du sulfure de carbone. On a fait vibrer dans chacun de ces liquides de petites verges de cuivre de diamètres différents : on avait, d'une part, deux liquides, l'eau alcoolisée et le sulfure de carbone ayant la mobilité de l'eau, sinon plus; d'autre part, deux liquides visqueux à des degrés différents, l'eau chargée d'acide sulfurique et l'huile.

Dans le tableau suivant, je désigne par x_n la distance observée du $n^{ième}$ nœud à l'extrémité; on obtient δ en divisant x_n par le nombre $(n-2)+1,25$.

Le corps vibrant est le diapason (1).

RAYON.	AIR.	δ	EAU et ACIDE SULFURIQUE.	δ_1	$\frac{\delta}{\delta_1}$	SULFURE de carbone.	δ_1	$\frac{\delta}{\delta_1}$
mm 0,643	x_2... 145,1	116,80	x_2... 140,0	112,0	1,033	x_2... 140,0	112,0	1,033
	x_2... 144,7	115,70	x_2... 138,8	110,7		x_2... 138,8	110,7	
0,500	x_2... 132	105,60	x_2... 128,1	102,4	1,030	x_2... 128	102,4	
0,300	x_3... 185,6	82,50	x_3... 176,1	78,2	1,047	x_3... 178,4	79,2	1,030
	x_3... 183,5	81,50	x_3... 175,8	78,1		x_3... 179,3	79,7	
	x_2... 104,3	83,40	x_2... 99,3	79,4		x_2... 102	81,6	
0,100	x_6... 237,5	46,01						1,038
	x_4... 147,7	46,10	x_4... 138,8	43,2	1,062	x_4... 143,2	44,6	1,022
	x_3... 101,9	45,60	x_3... 95,5	43,2		x_3... 99,5	45,0	

Lorsque les fils sont relativement gros, la nature du liquide n'a pas d'influence; mais celle-ci se montre pour le fil très-fin de $0^{mm},1$ de rayon. Si l'on cherche le rapport $\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$ de la masse additionnelle de liquide à la masse du fil, on trouve

Rayon.	Eau et acide.	Sulfure de carbone.
0,643	0,067	0,067
0,500	0,061	0,061
0,300	0,096	0,077
0,100	0,138	0,042

L'influence du liquide le plus visqueux, eau et acide, sur le fil fin est beaucoup plus grande que celle du sulfure de carbone qui, comme nous l'avons vu, ne semble pas mouiller le fil.

Rayon.	Air.	Eau et alcool.	$\frac{\delta}{\delta_1}$	Huile.	$\frac{\delta}{\delta_1}$
0,643	x_2... 143,6 / 143,1	139,4	1,0286	135,7	1,057
0,5	x_2... 131,8	128,1	1,0288	124,4	1,059
0,3	x_2... 184,2	178,0	1,035	165,9	1,110
0,1	x_4... 148,8 / 149,3	x_4... 138,9	1,080	x_2... 42,9	1,291
		x_3... 93,9			

Ce tableau donne lieu aux mêmes remarques que le précédent. Les gros diamètres donnent des valeurs voisines du rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ pour chacun des deux liquides; mais les rapports augmentent et s'éloignent l'un de l'autre à mesure que le diamètre diminue.

La valeur du rapport est, pour l'huile, toujours plus grande que le rapport calculé $\sqrt{1+\frac{1}{d}} = 1,050$, quoiqu'il s'en rapproche beaucoup pour les gros fils; mais la différence s'accentue et devient très-grande pour le fil fin. Il est bon de remarquer que, pour ce dernier, l'huile empêche complétement le fil de vibrer, et l'on ne peut obtenir de mesures qu'en plongeant dans l'huile l'extrémité seule du fil, de manière qu'il ne se forme que deux nœuds dans l'huile.

Le rapport $\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$ et $\frac{\sigma'}{\sigma}$ sont, dans ce cas,

	Eau et alcool.			Huile.		
Rayon.	$\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e	$\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e
mm			mm			
0,6	0,0580	0,566	0,151	0,117	1,143	0,278
0,5	0,0584	0,570	0,126	0,121	1,185	0,239
0,3	0,071	0,694	0,090	0,232	2,264	0,242
0,1	0,166	1,455	0,057	0,666	6,504	0,274

On ne peut que signaler d'une manière générale la marche croissante des deux rapports $\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$ et $\frac{\sigma'}{\sigma}$, lorsque le diamètre diminue, et la marche décroissante de e. On remarque que ces diverses quantités ont des valeurs bien plus grandes pour l'huile, liquide visqueux, que pour l'eau alcoolisée de même densité; mais la loi qui règle les variations de ces quantités nous échappe complétement.

Pour raccorder ces expériences sur les verges avec celles qui sont relatives aux cordes, j'ai fait vibrer, sous l'influence de la plaque, le fil fin de $0^{mm},1$; il était tendu par un poids de 500 grammes. J'ai trouvé :

Air...............	$\delta = 158,\ 158,1,\ 160$,	en moyenne 159;
Eau...............	$\delta_1 = 150$ en moyenne,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,06$;
Eau et alcool......	$\delta_1 = 147,4$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,08$;
Sulfure de carbone.	$\delta_1 = 150,8$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,054$;
Eau et acide.......	$\delta_1 = 148,6$,	$\frac{\delta}{\delta_1} = 1,07$.

Les nœuds étaient déterminés à la vue simple et, par suite, avec des erreurs inévitables. Les nombres ainsi obtenus sont un peu plus forts que ceux que donnent les verges, mais les différences peuvent être attribuables aux erreurs d'expériences.

Pour varier autant que possible ces expériences, j'ai fait vibrer des verges formées par des fils de platine et de verre dans des liquides de densités différentes; elles étaient fixées au diapason (1).

Les liquides étaient l'eau, l'acide sulfurique et des mélanges renfermant 10, 20, 40, 60, 80 pour 100 d'acide; ils sont définis ici par leurs densités.

Fil de platine; $r = 0^{mm},346$.

Air................ $x_4 = 249,5$, $\delta = 76,76$.

d'où $x_3 = 172,71$,

Densité [1].		δ	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$	$\frac{\sigma' d'}{\sigma d}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e
	mm						mm
1,000	x_3.... 169,6	»	1,019	1,021	0,042	0,844	0,122
1,062	x_3.... 169,0	»	1,021	1,022	0,042	0,845	0,122
1,128	x_3.... 168,7	»	1,023	1,024	0,046	0,904	0,136
1,280	x_3.... 168,0	»	1,028	1,027	0,057	1,020	0,145
1,459	x_3.... 166,6	»	1,036	1,030	0,073	1,154	0,154
1,681	x_3.... 165,0	»	1,046	1,034	0,094	1,287	0,182
1,825	x_3.... 164,2	»	1,051	1,038	0,146	1,306	0,182

Fil de platine; $r = 0^{mm},1286$.

Air	x_6.... 242,5	46,18					
Eau	x_6.... 239,5 x_4.... 148,5	45,62 45,69	1,012	»	0,024	0,568	0,100
1,062	x_6.... 239,7 x_6.... 149,0	45,84 45,84	1,007				
1,128	x_3.... 148,0	45,50	1,015	»	0,030	0,622	0,110
1,280	x_4.... 148,0 x_4.... 147,5 x_3.... 102,0	45,56 45,56 45,33	1,017	»	0,034	0,626	0,110
1,439	x_4.... 147,2 x_3.... 101,8	45,29 45,24	1,023	»	0,466	0,930	0,136
1,681	x_4.... 144,7 x_3.... 100,0	44,52 44,40	1,036	»	0,073	1,063	0,174
1,825	x_4.... 141,0 x_3.... 97,6	43,30 43,40	1,064	»	0,132	1,705	0,257

(1) Le même fil, tendu et vibrant en corde, nous a donné $\frac{\delta}{\delta'} = 1,02$ à $1,03$.

Si l'on détermine les hauteurs auxquelles s'élèvent les liquides employés dans un tube capillaire de $0^{mm},31$ de diamètre, on trouve les nombres suivants : on a placé vis-à-vis les valeurs précédentes de e calculées en supposant égales à 1 celles qui conviennent à l'eau.

	Densités.	h		h	Fil fin. e	Gros fil. e
		mm				
Eau....	1	44,42	ou	1	1	1
	1,062	46,82		0,95	0,99	1
	1,128	34,96		1,11	1,11	1,11
	1,280	36,26		1,12	1,11	1,19
	1,459	31,20		1,42	1,36	1,35
	1,681	25,34		1,75	1,74	1,49
	1,825	15,54		2,20	2,57	1,48

En rapprochant ainsi les rapports des épaisseurs de la couche liquide, supposée adhérente au fil, des rapports inverses des hauteurs capillaires, on trouve une analogie remarquable dans la marche croissante de ces nombres. Il y a même pour le fil le plus fin une ressemblance entre les nombres correspondants qui ferait supposer que ces nombres sont égaux. Pour savoir si ce n'était pas une ressemblance fortuite, j'ai répété les expériences en prenant pour verge un fil de verre dont la faible densité, 2,45, contrastait avec celle du platine; son rayon est $0^{mm},005$. Les expériences ont une précision moindre que les précédentes, parce que, dans la portion immergée de la verge, les nœuds ne se forment pas aussi nettement. Le fil prend cette forme de fuseau ondulé que nous avons signalée maintes fois, et les nœuds, surtout celui qui avoisine la surface, ne sont plus représentés que par une inflexion du fil. Ce nœud est d'autant moins net que le liquide est plus dense.

Densités.			δ	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	$\frac{e}{r}$
		mm					
Air	x_4....	215,20	66,21				
1,000	x_4....	129,80	57,68	1,148	1,286	0,780	0,30
1,062	x_4....	129,60	57,60	1,149	1,197	0,572	0,25
1,128	x_4....	126,50	56,22	1,177	1,208	0,911	0,38
1,280	x_4....	123,00	54,88	1,206	1,233	0,780	0,33
1,459	x_4....	118,10	52,49	1,259	1,263	0,970	0,40
1,681	x_4....	106,30	47,24	1,401	1,298	1,810	0,84
1,825	x_4....	97,89					
1,825	x_4....	102,20	44,26	1,495	1,321	2,380	0,84
1.825	x_2....	55,00					

Si l'on représente encore par 1 le rapport $\frac{e}{r}$ qui convient à l'eau, on trouve que les autres rapports sont représentés par des nombres 0,83, 1,25, 1,10, 1,32, 2,21, 2,74, qui croissent bien comme les rapports inverses des hauteurs capillaires, mais qui s'en éloignent en valeur absolue.

Du reste, des expériences tentées avec des liquides autres que des mélanges d'eau et d'acide ne vérifient pas mieux la liaison que nous avions présentée.

Ces expériences ont été faites avec le fil de platine ayant pour rayon 0^{mm},128. On a pris la distance du quatrième nœud à l'extrémité libre.

	Densités.	x_4	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	e	h
Air...........	»	149,28 149,46	»	»	»	»	»
Éther.........	0,739	149,20	1,001	1,014	0,005	mm 0,002	15,18
Benzine.......	0,797	148,72	1,004	1,017	0,235	0,014	18,40
Alcool........	0,821	148,40	1,006	1,017	0,353	0,020	17,92
Acide acétique.	1,052	147,20	1,016	1,022	0,731	0,040	15,50

Dans ces liquides, qui sont également dépourvus de viscosité, la densité a une influence presque exclusive sur les valeurs obtenues de $\frac{\delta}{\delta_1}$, de $\frac{\sigma'}{\sigma}$ et de e, qui croissent avec elle, et l'on ne trouve plus aucune liaison apparente entre les valeurs de e et les hauteurs h des mêmes liquides, dans un tube capillaire.

Les valeurs du rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ seraient fort différentes si l'on prenait pour verges des lames métalliques, un ressort de montre par exemple.

Ainsi un ressort d'acier m'a donné, pour le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$, 1,007 s'il vibre successivement dans l'air et le sulfure de carbone, et 1,03 dans un mélange d'eau et d'acide sulfurique de même densité que le sulfure, ce qui montre encore la grande influence de la viscosité du liquide.

Avec un ressort d'acier, on a obtenu les nombres suivants :

				δ	$\frac{\delta}{\delta_1}$	$\sqrt{1+\frac{1}{d}}$.
Diapason (1)...	Air....	x_5...	194,68	45,3	»	»
		x_4...	145,36			
		x_3...	101,68			
	Eau...	x_6...	169,68	32,3	1,41	1,062
		x_5...	135,96	32,0		
Diapason (2)...	Air....	x_4...	157,48	50	1,38	»
	Eau...	x_4...	114,08	35,1		
Diapason (3)...	Air....	x_4...	135,72	31,6	1,39	»
		x_5...	104,72	32,2		
	Eau...	x_6...	124,72	22,9		

Le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est encore ici indépendant du nombre des vibrations.

		Densités.	δ_1	$\frac{\delta}{\delta_1}$
Diapason (1)...	Sulfate de soude.......	1,182	32,75	1,383
	Dissolution de gomme.	1,079	31,05	1,459
	Eau................	1,000	32,2	1,407
	Huile...............	0,923	31,1	1,457
	Alcool..............	0,021	34,8	1,305
	Éther...............	0,739	34,29	1,298

L'influence de la viscosité du liquide est révélée par les observations relatives à l'huile et à la dissolution de gomme, qui donnent pour δ_1 la même valeur à peu près, quoique l'une soit moins et l'autre plus dense que l'eau.

On remarquera que la distance des nœuds est, dans les liquides, beaucoup plus faible avec les lames qu'avec les fils cylindriques. Les rapports $\frac{\delta}{\delta_1}$ diffèrent tellement de $\sqrt{1+\frac{d'}{d}}$, que la comparaison de ces deux quantités semble inutile, et qu'on doit conclure simplement que le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ dépend de la forme des corps vibrants.

En laissant de côté les lames vibrant à la manière des verges, et ne considérant que des fils cylindriques et surtout ceux qui, convenablement tendus, peuvent vibrer comme des cordes, on peut résumer toutes nos expériences de la manière suivante :

1° La distance de deux nœuds consécutifs diminue lorsque la corde passe de l'air dans un liquide, en faisant dans les deux cas le même nombre de vibrations.

2° Le rapport des deux distances nodales, prises successivement dans l'air et dans un liquide, est indépendant de la longueur totale de la corde, de la longueur de la portion immergée, de la tension de la corde, du nombre des vibrations qu'elle fait par seconde.

3° Ce rapport augmente lorsque le diamètre du fil diminue. L'augmentation, peu sensible pour de gros fils, s'accroît beaucoup lorsque le diamètre est très-petit.

4° Le rapport change avec la nature du fil et celle du liquide. On a pour les fils un peu gros une valeur approchée du rapport en calculant l'expression $\sqrt{\frac{d+d'}{d}}$, dans laquelle d et d' représentent les densités du fil et du liquide.

Cependant, pour les liquides visqueux, le rapport ainsi calculé s'éloigne plus du rapport observé qu'il ne le fait pour les autres.

Si l'on veut mettre d'accord les nombres observés avec ceux que l'on calcule en se servant de la formule $\frac{\delta}{\delta_1} = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma'}\frac{d}{d'}}$, on trouvera, pour le facteur $\frac{\sigma}{\sigma'}$, des valeurs variables avec la nature et les dimensions du fil, avec la nature du liquide. Tantôt ce rapport sera plus petit que 1, tantôt, pour les liquides visqueux et les petits diamètres par exemple, il sera plus grand que 1. Pour le même fil et des liquides également fluides, ce rapport croît avec la densité du liquide.

Tous ces résultats vérifient, autant que cela peut se faire, la théorie que M. Bourget a donnée de ces phénomènes.

Il y a cependant un point sur lequel la théorie et l'expérience se taisent également. Elles ne nous apprennent rien sur la cause, vraisemblablement fort compliquée, des variations du facteur $\frac{\sigma}{\sigma'}$ et sur la loi qui règle ces variations. La difficulté de déterminer avec précision, dans tous les cas, les distances nodales, l'impossibilité de traduire en nombres la viscosité des liquides ont rendu inutiles les nombreux essais que j'ai tentés dans ce sens.