ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROGER DESCOMBES

Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 73, nº 3 (1956), p. 283-355

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_3_283_0>

SUR LA

RÉPARTITION DES SOMMETS

D'UNE

LIGNE POLYGONALE RÉGULIÈRE NON FERMÉE

PAR M. ROGER DESCOMBES.

Introduction.

Ce Mémoire est consacré à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si ξ est un nombre réel irrationnel et η un nombre réel quelconque, ε étant un nombre strictement positif arbitraire :*

a. il existe une infinité de couples d'entiers (u, v), avec $v > 0$, tels que

$$v\,|v\xi - u - \eta| < \frac{1}{\sqrt{5}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents (en un sens qui sera défini à la fin de l'énoncé du théorème) *à*

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right);$$

b. si le couple (ξ, η) est différent de ces couples particuliers, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v\,|v\xi - u - \eta| < \frac{27}{28\sqrt{7}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{27}{28\sqrt{7}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à

$$\left(\frac{7-\sqrt{7}}{14}, \frac{1}{14}\right);$$

c. si le couple (ξ, η) *est différent à la fois des couples particuliers de a et des couples particuliers de b, il existe une infinité de couples d'entiers* (u, v), *avec* $v > 0$, *tels que*

$$v \,|\, v\xi - u - \eta \,| < \frac{1}{\sqrt{8}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\sqrt{8}}$ *ne pouvant être diminuée pour les couples* (ξ, η) *équivalents à*

$$(\sqrt{2},\, 0);$$

d. si le couple (ξ, η) *est différent des couples particuliers de a, b et c, il existe une infinité de couples d'entiers* (u, v) *avec* $v > 0$, *tels que*

$$v \,|\, v\xi - u - \eta \,| < \frac{359}{45\sqrt{510}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{359}{45\sqrt{510}}$ *ne pouvant être diminuée pour les couples* (ξ, η) *équivalents à*

$$\left(\frac{225 - \sqrt{510}}{2\,340},\, \frac{1}{90}\right);$$

e. si le couple (ξ, η) *est différent de tous les couples particuliers précédents, il existe une infinité de couples d'entiers* (u, v) *avec* $v > 0$, *tels que*

$$v \,|\, v\xi - u - \eta \,| < \frac{37}{10\sqrt{110}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{37}{10\sqrt{110}}$ *ne pouvant être diminuée pour les couples* (ξ, η) *équivalents à*

$$\left(\frac{15 - \sqrt{110}}{10},\, \frac{1}{10}\right);$$

f. à tout entier r au moins égal à 1 *on peut associer un couple* (ξ_r, η_r) *et une constante* γ_r (qui seront précisés ci-dessous) *tels que, si le couple* (ξ, η) *n'est équivalent à aucun des couples particuliers de a, b, c, d et e, et en outre, pour* $r \geqq 2$, *à aucun des couples* (ξ_k, η_k) (*avec* $k = 1, 2, \ldots, r-1$), *alors il existe une infinité de couples d'entiers* (u, v) *avec* $v > 0$, *tels que*

$$v \,|\, v\xi - u - \eta \,| < \frac{1}{\gamma_r} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\gamma_r}$ *ne pouvant être diminuée pour les couples* (ξ, η) *équivalents à* (ξ_r, η_r);

g. si le couple (ξ, η) *est différent de tous les couples particuliers précédents, il existe une infinité de couples d'entiers* (u, v) *avec* $v > 0$, *tels que*

$$v \,|\, v\xi - u - \eta \,| < \frac{773\,868 - 28\,547\sqrt{510}}{366\,795} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\gamma} = \frac{773\,868 - 28\,547\sqrt{510}}{366\,795}$, *limite des* $\frac{1}{\gamma_r}$, *ne pouvant être diminuée pour une infinité continue de couples* (ξ, η).

L'énoncé de ce théorème doit être ainsi complété :

Définition. — *Les couples* (ξ, η) *et* (ξ', η') *sont dits équivalents, ce qui sera noté*

$$(\xi, \eta) \sim (\xi', \eta'),$$

s'il existe six entiers rationnels A, B, C, D, E, F, *avec* $AD - BC = \pm 1$, *tels que*

$$\xi' = \frac{A\xi + B}{C\xi + D}, \qquad \eta' = \frac{(AD - BC)\eta}{C\xi + D} + \frac{E\xi + F}{C\xi + D}, \qquad C\xi + D > 0.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence.

Valeurs de ξ_r, η_r, γ_r. — Introduisons la suite récurrente $\{s_n\}$ définie par les formules

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = 1, \qquad s_{n+1} = 542 s_n - s_{n-1}$$

et posons, pour r entier au moins égal à 1 :

$$A_r = 14 s_{r+1} - 257 s_r, \qquad B_r = 3 s_{r+1} + 398 s_r, \qquad C_r = 9 s_{r+1} - 144 s_r, \qquad D_r = 2 s_{r+1} + 223 s_r,$$

et en outre, pour p entier positif :

$$\begin{aligned}
M_{2p} &= s_{p+1} + 257 s_p, & N_{2p} &= 11 s_{p+1} + 75 s_p,\\
\Delta_{2p} &= 7 s_{p+1} + 263 s_p, & \delta_{2p} &= s_{p+1} + 35 s_p;\\
M_{2p+1} &= 25 s_{p+1} + 8 s_p, & N_{2p+1} &= 189 s_{p+1} + 2 s_p,\\
\Delta_{2p+1} &= 127 s_{p+1} + 8 s_p, & \delta_{2p+1} &= 34 s_{p+1} + 2 s_p.
\end{aligned}$$

On a alors

$$A_r + D_r - 2 = 2\Delta_r \delta_r$$

et

$$\xi_r = \frac{\frac{1}{2}(A_r - D_r) + \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r}, \qquad \eta_r = \frac{M_r \xi_r + N_r}{2\Delta_r},$$

$$\gamma_r = \frac{8\Delta_r^2 \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r N_r^2 + (A_r - D_r) M_r N_r - B_r M_r^2}.$$

En particulier

$$\xi_1 = \frac{502 + 4\sqrt{32\,385}}{789}, \qquad \xi_2 = \frac{1\,632\,498 + \sqrt{(2\,340\,890)^2 - 1}}{2\,565\,819};$$

$$\eta_1 = \frac{25\xi_1 + 189}{254}, \qquad \eta_2 = \frac{799\xi_2 + 6\,037}{8\,114};$$

$$\gamma_1 = \frac{12\,192\sqrt{32\,385}}{772\,841}, \qquad \gamma_2 = \frac{16\,228\sqrt{(2\,340\,890)^2 - 1}}{13\,379\,443\,561}.$$

Remarque. — Les valeurs numériques des inverses des constantes figurant dans les seconds membres des inégalités de ce théorème sont

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= 2,236\ldots,\\
\frac{28\sqrt{7}}{27} &= 2,743\ldots,\\
\sqrt{8} &= 2,8284\ldots,\\
\frac{45\sqrt{510}}{359} &= 2,8307\ldots,\\
\frac{10\sqrt{110}}{37} &= 2,8346\ldots,\\
\gamma_1 &= 2,83894\ldots,\\
\gamma_2 &= 2,83927823\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\gamma &= 2,83927885\ldots.
\end{aligned}$$

D'autre part, on peut remplacer ε par zéro au second membre des inégalités de ce théorème, au moins dans les cas a et c; ce détail ne sera pas étudié ici.

*
* *

L'énoncé a est dû à Khintchine (*Math. Ann.*, t. 111, 1935, p. 631-637), les nombres exceptionnels correspondants étant connus depuis longtemps, de même que les nombres exceptionnels de c. (*Voir* les références par exemple dans Koksma, *Diophantische Approximationen*, ou dans ma thèse citée plus loin.)

L'énoncé b est dû à J. W. S. Cassels (*Math. Ann.*, t. 127, 1954, p. 288-304) qui ajoute la précision suivante, contenue dans c :

« si le couple (ξ, η) est différent des couples particuliers de a et de b, alors il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v\,|v\xi - u - \eta| < \frac{4}{11} + \varepsilon \text{ ».}$$

Les nombres exceptionnels de e ont été signalés dès 1952 [R. Descombes et G. Poitou, *Sur certains problèmes d'approximation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 581-583 et 1522-1524); *voir* aussi ma thèse : *Étude diophantienne de certaines formes linéaires non homogènes*... (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 82, 1954, p. 197-299, notamment p. 297].

L'étude des couples $(\xi, 0)$ a été faite à la fin du siècle dernier (*voir* Koksma), et reste valable pour ceux qui leur sont équivalents, qui sont de la forme $(\xi', M\xi' + N)$ avec M et N entiers. Il est facile de démontrer par exemple (*voir* p. 303) qu'il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v\,|v\xi - u| < \frac{7}{20} = \frac{1}{2,85\ldots}$$

quel que soit l'irrationnel ξ, non équivalent (au sens habituel) à $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ni à $\sqrt{2}$. Ainsi, moyennant ce résultat classique de Korkine et Zolotareff, il suffit de s'occuper du cas où η n'est pas fonction linéaire de ξ à coefficients entiers; c'est par exemple ce que fait Cassels.

Il nous sera commode de substituer à l'énoncé initial du théorème un énoncé équivalent sur les *constantes d'approximation* des couples (ξ, η), définies comme suit.

Désignons la limite inférieure

$$\varliminf_{u,v} v\,|v\xi - u - \eta|,$$

où u décrit les entiers et v les entiers strictement positifs, par $k(\xi, \eta)$, et son inverse par $c(\xi, \eta)$. *Le théorème précédent donne la plus petite valeur d'accumulation* γ *des constantes d'approximation* $c(\xi, \eta)$ *et la liste de celles qui lui sont inférieures.*

La méthode que nous suivrons pour établir ce théorème (pour le cas où η n'est pas fonction linéaire de ξ à coefficients entiers) utilise un ingénieux mode de développement dû à Cassels, qui généralise au cas *non homogène* le développement classique en fraction continue. Ce développement fournit en fait, comme le montrera la proposition 7, les couples (u, v) *de meilleure approximation.* On voudra bien nous excuser d'avoir repris, pour donner un exposé complet, une partie de l'article cité de Cassels, avec des modifications mineures.

Je remercie amicalement M. G. Poitou de l'aide qu'il m'a apportée pendant l'élaboration de ce Mémoire.

I. — Étude de l'algorithme.

1. Rappel de la théorie des fractions continues. — Soit ξ un nombre réel irrationnel de signe quelconque, et $\frac{p_n}{q_n}$ $(n=-1, 0, 1, 2, \ldots)$ la suite des réduites du développement de ξ en fraction continue, rangées dans l'ordre des $|q_n\xi - p_n|$ décroissants, en commençant par la *réduite préliminaire* $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}$, suivie de $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ où $a_0 = [\xi]$ [partie entière (1) de ξ]. Comme on sait, une propriété fondamentale des réduites s'exprime ainsi :

Proposition 1. — *Si les entiers p et q ne sont pas tous deux nuls,*

$$|q\xi - p| < |q_n\xi - p_n| \quad \textit{entraîne} \quad |q| \geqq q_{n+1}.$$

(1) Nous entendons par *partie entière* de ξ le plus grand entier au plus égal à ξ, quel que soit le signe de ξ.

Il en résulte que

$$(1.1)\qquad \underline{\lim}\,|q(q\xi-p)| = \underline{\lim}\,|q_n(q_n\xi-p_n)| \qquad (n\to\infty),$$

la limite inférieure du premier membre étant prise pour tous les couples d'entiers (p, q) avec $q\neq 0$, ou, ce qui revient au même, $q>0$.

Posant $\varepsilon_n = q_n\xi - p_n$, on a

$$(1.2)\qquad (-1)^n\varepsilon_n > 0$$

et

$$\varepsilon_n q_{n-1} - \varepsilon_{n-1} q_n = p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n;$$

de plus

$$(1.3)\qquad p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \qquad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1},$$

où les entiers a_n, tous strictement positifs pour $n \geqq 1$, sont, avec a_0, les quotients incomplets de ξ, ce qu'on note

$$(1.4)\qquad \xi = (a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \quad \ldots).$$

De (1.3) on déduit pour $n\geqq 0$, $q_{n+1}\geqq q_n+q_{n-1}$. Supposons alors que le couple d'entiers (p, q) soit tel que $q\xi-p$ soit compris entre ε_n et ε_{n-1} avec $q>0$, donc $q\geqq q_n$. En tenant compte de (1.2) on voit qu'on a toujours au moins l'une des deux éventualités suivantes :

— ou bien

$$|q\xi-p|<\varepsilon_n, \qquad \text{d'où (prop. 1)} \qquad q\geqq q_{n+1}\geqq q_n+q_{n-1};$$

— ou bien

$$(q-q_{n-1})\xi-(p-p_{n-1})\,|<\varepsilon_{n-1}, \qquad \text{d'où} \qquad |q-q_{n-1}|\geqq q_n \qquad \text{et} \qquad q\geqq q_n+q_{n-1}.$$

Ainsi la proposition 1 entraîne la

Proposition 1 *bis*. — *Si le couple d'entiers (p, q) avec $q>0$, est tel que $q\xi-p$ soit compris entre ε_n et ε_{n-1}, on a*

$$q\geqq q_n+q_{n-1}.$$

En introduisant enfin les quantités

$$x_n = -\frac{\varepsilon_{n-2}}{\varepsilon_{n-1}} = -\frac{q_{n-2}\xi-p_{n-2}}{q_{n-1}\xi-p_{n-1}}, \qquad y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \qquad (n\geqq 1),$$

on a

$$(1.5)\qquad x_n>1, \qquad -1<y_n<0 \qquad (\text{sauf } y_1=0 \text{ et, peut-être, } y_2=-1),$$

$$(1.6)\qquad x_{n+1}=\frac{1}{x_n-a_n}, \qquad y_{n+1}=\frac{1}{y_n-a_n}, \qquad a_n=[x_n];$$

d'où, avec la notation (1.4)

$$x_n = (a_n \quad a_{n+1} \quad \ldots) \qquad (n\geqq 1),$$
$$y_n = -(0 \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \ldots \quad a_1) \qquad (n\geqq 2)$$

et

$$\frac{(-1)^n}{q_n \varepsilon_n} = x_{n+1} - y_{n+1}.$$

D'après (1.1), on en déduit

$$\underline{\lim}_{p,q} |q(q\xi - p)| = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \to +\infty} (x_n - y_n)}. \tag{1.7}$$

2. Construction d'un algorithme. — Ces résultats étant rappelés, nous allons choisir, parmi l'ensemble de tous les couples d'entiers $(u, v)(v > 0)$, deux suites récurrentes de couples (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) qui seront telles que

$$k(\xi, \eta) = \underline{\lim}_{n \to +\infty} \min(v_n | v_n\xi - u_n - \eta |, v'_n | v'_n\xi - u'_n - \eta |).$$

Nous supposerons d'abord qu'il n'existe aucun couple d'entiers (M, N) *tel que* $M\xi + N - \eta = 0$. En posant par définition

$$\rho_n = v_n\xi - u_n - \eta,$$

la suite $\{(u_n, v_n)\}$ est caractérisée par la proposition suivante :

Proposition 2. — *Pour tout* $n \geqq 0$, *il existe un couple d'entiers* (u_n, v_n) *et un seul tel que :*

ou bien

$$(\mathcal{A}_n) \qquad 0 < v_n \leqq q_n, \qquad \textit{avec} \quad 0 < \frac{\rho_n}{-\varepsilon_{n-1}} < 1;$$

ou bien

$$(\mathcal{B}_n) \qquad q_n < v_n \leqq q_n + q_{n-1}, \qquad \textit{avec} \quad 0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < 1$$

***pourvu qu'il n'existe pas d'entiers* M, N *tels que* $M\xi + N - \eta = 0$.**

Démontrons par l'absurde l'unicité du couple (u_n, v_n).

— S'il existait deux couples solutions de $\mathcal{A}_n$, on en déduirait par différence un couple (u, v) satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq v < q_n, \qquad | v\xi - u | < \varepsilon_{n-1},$$

ce qui, sauf pour $u = v = 0$, contredit la proposition 1.

— S'il existait deux couples solutions de $\mathcal{B}_n$, on en déduirait par différence un couple (u, v) satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq v < q_{n-1}, \qquad | v\xi - u | < \varepsilon_n,$$

ce qui, sauf pour $u = v = 0$, contredit la proposition 1.

— S'il existait un couple solution de $\mathfrak{A}_n$ et un couple solution de $\mathfrak{B}_n$, on en déduirait par différence un couple satisfaisant aux conditions (écrites, pour fixer les idées, en supposant n impair)

$$0 < v < q_n + q_{n-1}, \qquad \varepsilon_n < v\xi - u < \varepsilon_{n-1},$$

ce qui contredit la proposition 1 *bis*.

Démontrons par récurrence l'existence de (u_n, v_n).

Pour $n = 0$, les conditions imposées à v_0 par $\mathfrak{B}_0$ sont contradictoires. Au contraire, $\mathfrak{A}_0$ admet la solution unique

$$v_0 = 1, \qquad u_0 = [\xi - \eta],$$

car $\xi - \eta$ n'est pas un entier.

— *Si l'on a* $\mathfrak{A}_n$, posons

$$b_{n+1} = \left[x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n}\right].$$

Des inégalités

$$0 < \frac{\rho_n}{-\varepsilon_{n-1}} < 1,$$

on déduit

$$0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < x_{n+1}, \qquad \text{d'où} \qquad 0 \leqq b_{n+1} \leqq a_{n+1}.$$

De plus, $x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} \neq b_{n+1}$, sinon η serait de la forme $M\xi + N$ avec M et N entiers. Distinguons alors deux cas :

— si $b_{n+1} \neq a_{n+1}$, on a

$$0 < v_n + b_{n+1} q_n + q_{n-1} \leqq v_n + q_{n+1} - q_n \leqq q_{n+1}$$

et

$$0 < x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} - b_{n+1} = \frac{\rho_n + b_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}{-\varepsilon_n} < 1$$

donc le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) défini par les formules

$$(2.1) \qquad u_{n+1} = u_n + b_{n+1} p_n + p_{n-1}, \qquad v_{n+1} = v_n + b_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

satisfait aux conditions $\mathfrak{A}_{n+1}$;

— si $b_{n+1} = a_{n+1}$, le couple précédent devient

$$(2.2) \qquad u_{n+1} = u_n + p_{n+1}, \qquad v_{n+1} = v_n + q_{n+1};$$

d'où

$$q_{n+1} < v_{n+1} \leqq q_{n+1} + q_n$$

et

$$0 < \left\{ a_{n+1} - \left(x_{n+1} - \frac{\varepsilon_n}{\rho_n} \right) \right\} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} = 1 + \frac{\rho_n}{\varepsilon_{n+1}} < 1,$$

donc le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) satisfait aux conditions $\mathcal{B}_{n+1}$.

— *Si l'on a* $\mathcal{B}_n$ le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) défini par les formules

(2.3) $$u_{n+1} = u_n - p_n, \qquad v_{n+1} = v_n - q_n$$

est tel que

$$0 < v_{n+1} \leqq q_{n-1} < q_{n+1}$$

et

$$0 < \frac{\rho_n - \varepsilon_n}{-\varepsilon_n} = \frac{\rho_{n+1}}{-\varepsilon_n} < 1;$$

il satisfait donc aux conditions $\mathcal{A}_{n+1}$.

La proposition 2 est donc établie.

Remarque. — Le cas $\mathcal{B}_n$ n'intervient donc qu'encadré par $\mathcal{A}_{n-1}$ et $\mathcal{A}_{n+1}$, et il implique, d'après (2.2) et (2.3)

$$u_{n+1} = u_n - p_n = u_{n-1}, \qquad v_{n+1} = v_n - q_n = v_{n-1};$$

d'où

$$0 < -\frac{\rho_{n+1}}{\varepsilon_n} = -\frac{\rho_{n-1}}{\varepsilon_n} < 1;$$

on ne peut donc pas avoir une alternance indéfinie de cas $\mathcal{A}$ et de cas $\mathcal{B}$ puisque ε_k tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$. Comme $\mathcal{B}_n$ implique $v_{n-1} = v_{n+1}$ et que $\mathcal{A}_n$ implique $v_{n+1} > v_n$, il en résulte que

(2.4) $$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

Formules de récurrence. — En posant

(2.5) $$t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n}, \qquad z_{n+1} = \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} \qquad (\text{d'où } 0 < z_{n+1} < x_{n+1}),$$

on peut traduire les résultats précédents par les formules suivantes :

— si $\mathcal{A}_{n-1}$ (c'est-à-dire si $0 < t_n \leqq 1$; ou encore si $b_{n-1} < a_{n-1}$, ou b_{n-1} non défini) :

(2.6) $$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n, \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n, \qquad 0 \leqq b_n = [x_n - z_n] \leqq a_n;$$

— si $\mathcal{B}_{n-1}$ (c'est-à-dire si $1 < t_n \leqq 1 - y_n$; ou encore $b_{n-1} = a_{n-1}$; ou encore $0 < z_n < 1$ avec $0 < z_{n-1} < 1$),

(2.7) $$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n, \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n.$$

Ces formules permettent de proche en proche le calcul de z_n et t_n, en partant de $\mathcal{A}_0$ avec

$$z_1 = \frac{\xi - \eta - [\xi - \eta]}{\xi - [\xi]} \qquad \text{et} \qquad t_1 = 1.$$

Compte tenu du fait que l'algorithme des fractions continues permet le calcul de tous les quotients incomplets de ξ en posant par convention $x_0 = \xi$, on voit qu'on peut encore utiliser celles des formules (2.6) qui ne contiennent pas les lettres y et t, à partir de $n = 0$, en faisant les conventions suivantes :

$$(2.8) \qquad x_0 = \xi, \qquad z_0 = \eta, \qquad b_0 = [\xi - \eta].$$

Les formules (2.6), (2.7) et (2.8) permettent donc, une fois connu le développement en fraction continue de ξ, de calculer les nombres z_n, t_n et b_n, donc d'obtenir le *développement* du couple (ξ, η) selon l'algorithme qui vient d'être défini [2], c'est-à-dire l'ensemble des couples (x_n, z_n), ou encore l'ensemble des couples d'entiers constitués par les a_n et ceux des b_n qui sont définis et associés aux a_n.

3. Cas où $\eta = M\xi + N$ (M et N entiers). — Dans ce cas, la démonstration de l'unicité du couple (u_n, v_n) reste valable; la démonstration de son existence peut tomber en défaut, soit parce que le couple (u_0, v_0) n'est pas défini lorsque $\xi - \eta$ est entier, soit parce que $x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n}$ est égal à l'entier b_{n+1}, ceci lorsque

$$(v_n + b_{n+1} q_n + q_{n-1} - M)\xi - (u_n + b_{n+1} p_n + p_{n-1} + N) = 0.$$

Si $M \leq 0$, ces éventualités ne se produisent pas; les formules (2.6) et (2.7) sont donc toujours valables, à partir de $x_0 = \xi$, $z_0 = \eta$, et l'algorithme s'applique sans autre modification que la nullité éventuelle de z_0. En fait, on vérifie aisément en se reportant à la définition de $\mathcal{A}_n$ que pour les indices n tels que $q_n > -M$, le couple

$$v_n = q_n + M, \qquad u_n = p_n - N$$

est une solution de $\mathcal{A}_n$. D'après l'unicité, on a, pour tout indice n assez grand, le cas $\mathcal{A}_n$ avec

$$\rho_n = \varepsilon_n, \qquad z_{n+1} = 1, \qquad b_n = a_n - 1,$$

et $t_{n+1} = \dfrac{q_n + M}{q_n}$ tend vers 1 quand n augmente indéfiniment.

Si $M > 0$, soit n_0 la plus petite valeur (positive ou nulle) de l'indice n telle que les formules (2.6) donnent $z_{n+1} = 0$. Le couple (u_{n_0}, v_{n_0}) ne peut alors être défini par les conditions $\mathcal{A}_{n_0}$ ni $\mathcal{B}_{n_0}$. Nous poserons par convention

$$u_{n_0} = -N, \qquad v_{n_0} = M$$

---

[2] Cet algorithme est, à très peu près, celui de Cassels (*cf.* l'Introduction).

et pour $n > n_0$,

$$u_n = -N + p_n, \qquad v_n = M + q_n.$$

Les formules (2.6) restent alors valables pour $n \geqq n_0$, avec $z_{n_0+1} = 0$, et, pour $n > n_0$,

$$z_{n+1} = 1, \qquad b_n = a_n - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} t_{n+1} = 1.$$

Réciproquement, si, dans le développement d'un couple (ξ, η) quelconque les formules (2.6) entraînent l'égalité $b_n = a_n - 1$ à partir d'un certain rang, on déduit de (1.6), à partir de ce rang

$$z_n - 1 = -\frac{z_{n+1} - 1}{x_{n+1}} = (-1)^k \frac{z_{n+k} - 1}{x_{n+1} \ldots x_{n+k}},$$

d'où résulte immédiatement $z_n = 1$, donc $\rho_n = \varepsilon_n$, et, par suite, $\eta = M\xi + N$ avec M et N entiers.

Donc les développements de ce type sont caractéristiques des couples (ξ, η) où $\eta = M\xi + N$, avec M et N entiers.

4. Couples équivalents. — Rappelons que les deux couples (ξ, η) et (ξ', η') sont dits équivalents s'il existe six entiers rationnels A, B, C, D, E, F tels que

$$AD - BC = \varepsilon = \pm 1, \qquad C\xi + D > 0,$$

avec

$$\xi' = \frac{A\xi + B}{C\xi + D}, \qquad \eta' = \frac{\varepsilon\eta}{C\xi + D} + \frac{E\xi + F}{C\xi + D}.$$

Il est aisé de vérifier, et ce point sera laissé au lecteur, que cette relation entre couples est bien une relation d'équivalence.

Envisageons alors la correspondance biunivoque entre couples d'entiers (u, v) et (u', v') définie par les formules

$$u' = Au + Bv + \varepsilon(AF + BE), \qquad v' = Cu + Dv + \varepsilon(CF + DE).$$

Supposons que le couple (u, v) varie de manière telle que v augmente indéfiniment, et que $v\xi - u - \eta$ tende vers zéro; alors $\frac{u}{v}$ tend vers ξ, et la condition $C\xi + D > 0$ entraîne que v' augmente indéfiniment. De plus, on vérifie que le rapport de $v' \,|\, v'\xi' - u' - \eta' \,|$ à $v \,|\, v\xi - u - \eta \,|$ s'écrit

$$\frac{Cu + Dv + \varepsilon(CF + DE)}{v(C\xi + D)};$$

il tend donc vers 1; il en résulte que

$$\varliminf v' \,|\, v'\xi' - u' - \eta' \,| = \varliminf v \,|\, v\xi - u - \eta \,|,$$

la première limite inférieure étant prise pour l'ensemble des couples (u', v') avec $v' > 0$, la seconde pour l'ensemble des couples (u, v) avec $v > 0$. Nous avons donc établi :

Proposition 3. — *Si les couples* (ξ, η) *et* (ξ', η') *sont équivalents, on a*

$$k(\xi, \eta) = k(\xi', \eta').$$

Étudions l'influence de l'équivalence des couples sur leurs développements.

Les formules (1.6), (2.6) et (2.7) montrent que, dans un développement quelconque, les couples (x_n, z_n) et (x_{n+1}, z_{n+1}) sont équivalents pour tout $n \geqq 0$. D'après (2.8), (x_n, z_n) est donc équivalent à (ξ, η) lui-même (sans qu'il soit nécessaire de distinguer les couples exceptionnels étudiés au paragraphe 3). Si donc un autre couple (ξ', η') admet le développement (x'_n, z'_n), et s'il existe deux indices n et n' tels que $x_n = x'_{n'}$, $z_n = z'_{n'}$ (c'est-à-dire si les développements des deux couples sont les mêmes à partir d'un certain rang), alors les couples (ξ, η) et (ξ', η') sont équivalents.

Réciproquement, si les couples (ξ, η) et (ξ', η') sont équivalents, alors les nombres ξ et ξ' sont équivalents au sens ordinaire de la théorie des fractions continues, ce qui entraîne, comme on sait, que leurs développements en fraction continue sont identiques à partir d'un certain rang. D'autre part, il est clair que si l'un des couples est du type exceptionnel étudié au paragraphe 3, l'autre aussi; donc deux circonstances seulement peuvent se produire :

— ou bien on a $\eta = M\xi + N$ et $\eta' = M'\xi' + N'$, avec M, N, M′ et N′ entiers; alors, en affectant d'accents les éléments relatifs au couple (ξ', η'), les égalités $b_n = a_n - 1$ et $b'_n = a'_n - 1$ montrent que, puisque la suite des a_n et celle des a'_n coïncident à partir d'un certain rang (qui n'a d'ailleurs pas nécessairement le même numéro pour les deux suites), il en est de même de la suite des couples (a_n, b_n) et de la suite des couples (a'_n, b'_n);

— ou bien η et η' ne sont ni l'un ni l'autre de la forme précédente; alors les développements des deux couples (ξ, η) et (ξ', η') présentent chacun une infinité de fois deux cas $\mathfrak{A}$ consécutifs. Donc il existe deux indices n et p tels que $x_n = x'_p$ (donc aussi $x_{n+k} = x'_{p+k}$ pour tout entier k positif) et qu'on ait à la fois $\mathfrak{A}_{n-1}$ et $\mathfrak{A}'_{p-1}$.

Or, remarquons que l'hypothèse qu'on a $\mathfrak{A}_{n-1}$ entraîne que les entiers a_k et b_k du développement du couple (x_n, z_n) ne sont autres que les couples (a_m, b_m) du développement de (ξ, η) dont les indices sont au moins égaux à n, d'après les formules (2.6) et (2.8).

Posons donc

$$\Xi = x_n = x'_p, \qquad \mathsf{H} = z_n, \qquad \mathsf{H}' = z'_p$$

et désignons par (X_k, Z_k) et (X'_k, Z'_k) les couples (x, z) intervenant au rang k du développement des couples (Ξ, H) et (Ξ, H'). D'après la remarque précédente, on a

$$X_k = x_{n+k} = x'_{p+k}, \qquad Z_k = z_{n+k}, \qquad Z'_k = z'_{p+k}.$$

De plus, les couples (Ξ, H) et (Ξ, H'), respectivement équivalents à (ξ, η) et à (ξ', η'), sont équivalents, ce qui entraîne

$$\mathsf{H}' = \mathsf{H} + \mathrm{E}\Xi + \mathrm{F} \qquad (\mathrm{E}, \mathrm{F} \text{ entiers}).$$

Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $\mathrm{E} \geqq 0$.

Soit $(\mathrm{U}_s, \mathrm{V}_s)$ le $s^{\text{ième}}$ des couples d'entiers, dont l'existence est assurée par la proposition 2, relatifs au couple initial (Ξ, H), l'indice s étant choisi de telle sorte que 1° on ait le cas $\mathfrak{A}_s$ et que 2° on ait l'inégalité $\mathrm{V}_s > \mathrm{E}$.

Alors le couple $(\mathrm{U}'_s, \mathrm{V}'_s)$ défini par les relations

$$\mathrm{V}'_s = \mathrm{V}_s - \mathrm{E}, \qquad \mathrm{U}'_s = \mathrm{U}_s + \mathrm{F}$$

satisfait aux conditions $\mathfrak{A}'_s$ pour le couple initial (Ξ, H'), et l'on a

$$\mathrm{V}'_s\Xi - \mathrm{U}'_s - \mathsf{H}' = \mathrm{V}_s\Xi - \mathrm{U}_s - \mathsf{H},$$

donc $\mathrm{Z}'_{s+1} = \mathrm{Z}_{s+1}$, donc les développements de (Ξ, H) et de (Ξ, H') sont dès lors identiques, c'est-à-dire que les développements de (ξ, η), à partir du rang $n+s+1$, et de (ξ', η'), à partir du rang $p+s+1$, sont identiques.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

Proposition 4. — *Les couples (ξ, η) équivalents sont caractérisés par le fait que leurs développements coïncident à partir d'un certain rang.*

5. Développements périodiques. — Supposons qu'on ait $\eta = \dfrac{\mathrm{M}\xi + \mathrm{N}}{\mathrm{S}}$, avec M, N et S entiers; il est loisible de les supposer premiers entre eux dans leur ensemble, et nous le ferons désormais.

Si $\mathrm{S} = 1$, on a vu que z_n reste égal à 1 à partir d'un certain rang.

Écartons dorénavant ce cas, et supposons qu'on ait l'égalité

$$z_n = \frac{\mathrm{M}_n x_n + \mathrm{N}_n}{\mathrm{S}_n} \qquad (\mathrm{M}_n, \mathrm{N}_n, \mathrm{S}_n \text{ entiers premiers entre eux}).$$

Si la formule (2.6) est valable, on trouve

$$z_{n+1} = x_{n+1}\left\{\frac{(\mathrm{S}_n - \mathrm{M}_n)x_n - \mathrm{N}_n}{\mathrm{S}_n}\right\} - b_n = \left\{\frac{(\mathrm{S}_n - \mathrm{M}_n)a_n - \mathrm{N}_n}{\mathrm{S}_n} - b_n\right\}x_{n+1} + \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{M}_n}{\mathrm{S}_n},$$

c'est-à-dire

$$z_{n+1} = \frac{\mathrm{M}_{n+1}x_{n+1} + \mathrm{N}_{n+1}}{\mathrm{S}_{n+1}},$$

où M_{n+1}, N_{n+1} et S_{n+1} sont des entiers premiers entre eux vérifiant l'égalité $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n$.

Si la formule (2.7) est valable, on trouve

$$z_{n+1} = x_{n+1}\left(1 - \frac{\mathrm{M}_n x_n + \mathrm{N}_n}{\mathrm{S}_n}\right) = \left(1 - \frac{\mathrm{M}_n a_n + \mathrm{N}_n}{\mathrm{S}_n}\right)x_{n+1} - \frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{S}_n}$$

avec une conclusion analogue.

Les dénominateurs sont donc, en fait, tous égaux à S, puisque $z_0 = \eta$.

Or la relation précédente entre x_n et z_n existe aussi, sous une forme approchée, entre y_n et t_n ; car si l'on pose

$$\frac{M_n y_n + N_n}{S} - t_n = \tau_n,$$

on voit par les mêmes formules que précédemment que $\tau_{n+1} = -y_{n+1}\tau_n$, donc τ_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

D'après le paragraphe 2, on a les inégalités

$$0 < \frac{M_n x_n + N_n}{S} < x_n, \qquad 0 < \frac{M_n y_n + N_n}{S} < 1 - y_n + \tau_n,$$

qui, lorsque S et x_n sont fixés, y_n restant compris dans un intervalle assez petit, et n étant assez grand pour que τ_n soit négligeable, ne laissent à M_n et N_n, ainsi par suite qu'à z_n, qu'un nombre fini de valeurs possibles.

Si ξ est quadratique, la suite des x_n est périodique à partir d'un certain rang, d'après le résultat bien connu de Lagrange, et les y_n tendent vers un nombre fini de valeurs limites. D'après la remarque précédente, il existe alors une constante R telle que, à chaque valeur de x_n (n assez grand), correspondent au plus R valeurs possibles pour z_n; donc il existe certainement, parmi les termes dont l'indice diffère de n d'un multiple de la période de la suite des x_k deux termes avec le même z et présentant le même cas $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ au rang précédent; si c'est un cas $\mathcal{B}$, on décalera d'un rang pour retrouver un cas $\mathcal{A}$ et des (x, z) encore égaux d'après (2.7); comme, dans le cas $\mathcal{A}_{k-1}$, la donnée de x_k et de z_k détermine entièrement la suite du développement, la suite (x_n, z_n) sera périodique à partir de ce terme, ainsi que la suite des couples (a_n, b_n) (y compris pour les valeurs de n pour lesquelles b_n n'est pas défini).

Réciproquement, si la suite des (x_n, z_n) est périodique à partir d'un certain rang, ξ est quadratique, et, en raison de l'équivalence des couples (x_n, z_n) et $(x_{n'}, z_{n'})$, on aura, en choisissant les indices n et n' de différence un multiple de la période, $x_n = x_{n'}$ et $z_n = z_{n'}$, et les égalités

$$x_n = \frac{Ax_n + B}{Cx_n + D}, \qquad z_n = \frac{\varepsilon z_n}{Cx_n + D} + \frac{Ex_n + F}{Cx_n + D},$$

avec A, B, C, D, E, F entiers et $AD - BC = \varepsilon = \pm 1$.

Donc z_n est dans le corps quadratique engendré par x_n, et, d'après l'équivalence des couples (ξ, η) et (x_n, z_n), η lui-même est dans le corps de x_n, c'est-à-dire dans le corps de ξ, donc de la forme $\frac{M\xi + N}{S}$, avec M, N, S entiers.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

Proposition 5. — *La périodicité à partir d'un certain rang des couples* (x_n, z_n) *caractérise les couples* (ξ, η) *de deux nombres d'un même corps quadratique.*

Bien entendu, ξ est, comme toujours, supposé irrationnel.

6. PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION DE L'ALGORITHME. — Dans le cas où $\eta = M\xi + N$ (M, N entiers) le couple (ξ, η) est équivalent à $(\xi, 0)$ et l'on a, d'après (1.1)

$$\underline{\lim}\, v\,|v\xi - u - \eta| = \underline{\lim}_{n \to +\infty} q_n\,|(q_n + M)\xi - (p_n - N) - M\xi - N|$$

c'est-à-dire, puisque $v_n = q_n + M$ et $u_n = p_n - N$, et que $\frac{v_n}{q_n}$ tend vers 1,

$$k(\xi, \eta) = \underline{\lim}_{n \to +\infty} v_n\,|v_n\xi - u_n - \eta|. \tag{6.1}$$

En supposant désormais que η n'est pas de la forme exceptionnelle précédente, nous allons établir une formule analogue en comparant l'ensemble des couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, à l'ensemble des couples (u_n, v_n) définis à la proposition 2.

Étant donné un couple d'entiers (u, v) et un indice n quelconque $\geqq 0$, on peut, puisque $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$, définir des nombres, α_n, β_n, α, β par les égalités

$$\begin{aligned} u_n + \eta &= \alpha_n p_{n-1} + \beta_n p_n, & u + \eta &= \alpha p_{n-1} + \beta p_n, \\ v_n &= \alpha_n q_{n-1} + \beta_n q_n, & v &= \alpha q_{n-1} + \beta q_n. \end{aligned}$$

En laissant u_n et v_n fixes, on obtient ainsi tous les couples d'entiers (u, v) en donnant à (α, β) tous les couples de valeurs définis par

$$\alpha \equiv \alpha_n, \qquad \beta \equiv \beta_n \qquad (\mathrm{mod}\, 1).$$

Posons

$$\alpha - \alpha_n = r, \qquad \beta - \beta_n = s \qquad (r, s \text{ entiers})$$

et étudions, pour n fixé, les couples (u, v) satisfaisant à

$$q_n < v \leqq q_{n+1}. \tag{6.2}$$

Nous supposons pour commencer que le cas $\mathfrak{A}_n$ a lieu. Alors $0 < v_n \leqq q_n$; et (6.2) entraîne

$$0 < rq_{n-1} + sq_n = v - v_n < q_{n+1}, \tag{6.3}$$

c'est-à-dire

$$0 < s - ry_{n+1} < a_{n+1} - y_{n+1}. \tag{6.4}$$

D'autre part, comme v_n et ρ_n ne sont pas nuls, on a, en posant $\rho = v\xi - u - \eta$,

$$\frac{v\,|\rho|}{v_n\,|\rho_n|} = \left(1 + \frac{s - ry_{n+1}}{t_{n+1}}\right)\left|\frac{rx_{n+1} - s}{z_{n+1}} - 1\right|.$$

Le premier terme du second membre, égal à $\frac{v}{v_n}$, est supérieur à 1 ; examinons le second terme, en tenant compte du fait que r et s ne peuvent, d'après (6.3), être tous les deux négatifs ou nuls. Distinguons trois cas, suivant les valeurs de r.

— *Si r est négatif ou nul*, et, par suite, s positif, le second terme est supérieur à 1, et l'on a donc

$$v\,|\rho| > v_n\,|\rho_n|.$$

— *Si r est au moins égal à* 2, les inégalités $x_{n+1} > z_{n+1}$ et (6.4) entraînent (dans les lignes qui suivent nous omettons l'indice $n+1$ pour x, y, a, t et z) :

$$\frac{rx-s}{z} - 1 > \frac{r(x-y)-(a-y)}{z} - 1 > (r-1)\frac{x-y}{z} - 1 > 0,$$

d'où

$$\frac{v\,|\rho|}{v_n\,|\rho_n|} = \left(1 + \frac{s-ry}{t}\right)\left(\frac{rx-s}{z} - 1\right).$$

Le second membre est un trinome du second degré en s lorsque x, y, t, z et r restent fixes. Les valeurs de s compatibles avec (6.4) sont encadrées par les racines de ce trinome, donc celui-ci prend pour ces valeurs de s des valeurs positives et au moins égales à la plus petite des deux valeurs qu'il prend pour les valeurs extrêmes permises à s, c'est-à-dire, pour $s = ry$ et $s = a + (r-1)y$.

Or, pour $s = ry$, on a

$$\frac{v\,|\rho|}{v_n\,|\rho_n|} = \frac{r(x-y)}{z} - 1 > 2\,\frac{x-y}{z} - 1 > 1.$$

Pour $s = a + (r-1)y$, on a

$$v = v_n + rq_{n-1} + (a + (r-1)y)\,q_n = v_n + a_{n+1}q_n + q_{n-1} = v_{n+1} + (a_{n+1} - b_{n+1})\,q_n,$$

qui est au moins égal à v_{n+1}, tandis que

$$\rho = \rho_n + r\varepsilon_{n-1} + (a + (r-1)y)\,\varepsilon_n = \rho_n + a_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + (r-1)(\varepsilon_{n-1} + y\varepsilon_n),$$

d'où

$$\rho = \rho_{n+1} + \{a - b - (r-1)(x-y)\}\,\varepsilon_n.$$

De $r - 1 \geqq 1$ et $x - y > a - b$, on déduit que le coefficient de ε_n dans cette dernière égalité, est négatif; comme ρ_{n+1} et $-\varepsilon_n$ ont le même signe, il s'ensuit que $|\rho| > |\rho_{n+1}|$. Donc alors $v\,|\rho|$ est supérieur à $v_{n+1}\,|\rho_{n+1}|$.

Ainsi, $r \geqq 2$ *implique*

$$v\,|\rho| > \min(v_n\,|\rho_n|,\; v_{n+1}\,|\rho_{n+1}|).$$

— *Si r est égal à* 1, les entiers s compatibles avec (6.4) sont ceux tels que

$$0 \leqq s < a_{n+1}.$$

Comme la quantité $x - s - z$ (nous omettons encore les indices $n+1$) change de signe quand on passe de $s = b$ à $s = b + 1$, l'expression

$$\frac{v\,|\rho|}{v_n\,|\rho_n|} = \left(1 + \frac{s-y}{t}\right)\left|\frac{x-s}{z} - 1\right|$$

prend pour chaque entier s compatible avec (6.4) une valeur au moins égale à la plus petite de celles qui correspondent à $s=0$, $s=b$ et $s=b+1$.

Or, pour $r=1$ et $s=b_{n+1}$; on a

$$u=u_n+b_{n+1}p_n+p_{n-1}=u_{n+1} \qquad \text{et, de même,} \qquad v=v_{n+1}.$$

Pour $r=1$ et $s=0$, nous poserons

$$u=u_n+p_{n-1}=u'_n, \qquad v=v_n+q_{n-1}=v'_n, \qquad \rho'_n=v'_n\xi-u'_n-\eta. \tag{6.5}$$

Pour $r=1$ et $s=b_{n+1}+1$, on a donc, d'après (6.5)

$$u=u'_{n+1}, \qquad v=v'_{n+1}.$$

Ainsi, $r=1$ implique

$$v|\rho|\geqq\min(v_{n+1}|\rho_{n+1}|, v'_n|\rho'_n|, v'_{n+1}|\rho'_{n+1}|).$$

En résumé, les inégalités

$$0<v_n\leqq q_n \quad (\text{signifiant : cas } \mathfrak{A}_n) \qquad \textit{et} \qquad q_n<v\leqq q_{n+1}$$

entraînent

$$v|\rho|\geqq\min(v_n|\rho_n|, v'_n|\rho'_n|, v_{n+1}|\rho_{n+1}|, v'_{n+1}|\rho'_{n+1}|).$$

Supposons maintenant que c'est le cas $\mathfrak{B}_n$ qui a lieu. On a donc, par hypothèse,

$$q_n<v_n\leqq q_n+q_{n-1} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1}=v_{n-1}=v_n-q_n.$$

L'inégalité

$$q_n<v\leqq q_{n+1}$$

entraîne

$$-q_{n-1}<rq_{n-1}+sq_n=v-v_n<q_{n+1}-q_n,$$

c'est-à-dire

$$y_{n+1}<s-ry_{n+1}<a_{n+1}-y_{n+1}-1. \tag{6.6}$$

Par suite, r et s ne peuvent être simultanément négatifs ou nuls sans être tous deux nuls. De plus, on a les inégalités

$$v>q_n>q_{n-1}\geqq v_{n-1}=v_{n+1}.$$

Comparons les nombres

$$\rho=\rho_n+r\varepsilon_{n-1}+s\varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \rho_{n+1}=\rho_n-\varepsilon_n$$

en distinguant trois cas, suivant la valeur de r.

— *Si r est négatif*, alors $s>0$, et les trois termes de la somme constituant ρ ont le même signe. On a donc

$$|\rho|>|\rho_n+\varepsilon_n|>|\rho_{n+1}|.$$

— *Si r est au moins égal à* 1, on a, d'après (6.6)

$$s<a+(r-1)y-1,$$

d'où, en supposant par exemple, n impair, donc $\varepsilon_n < 0$ et $\rho_{n+1} > 0$,

$$\rho > \rho_n + r\varepsilon_{n-1} + (a + (r-1)y - 1)\varepsilon_n = \rho_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - (r-1)(x-y)\varepsilon_n > \rho_{n+1}$$

et l'inégalité $|\rho| > |\rho_{n+1}|$ reste évidemment valable si n est pair.

— *Si enfin r est nul*, on a $\rho = \rho_n + s\varepsilon_n$, avec, d'après (6.6)

$$0 \leqq s \leqq a_{n+1} - 1.$$

Comme ρ_n est de même signe ε_n, l'hypothèse $s \geqq 1$ entraîne

$$|\rho| \geqq |\rho_n + \varepsilon_n| > |\rho_{n+1}|,$$

tandis que si $s = 0$, on a simplement $u = u_n$ et $v = v_n$.

En résumé, les inégalités

$$q_n < v_n \leqq q_n + q_{n-1} \quad (\text{signifiant : cas } \mathcal{B}_n) \qquad et \qquad q_n < v \leqq q_{n+1}$$

entraînent $v > v_{n+1}$ *et* $|\rho| > |\rho_{n+1}|$ *ou bien* $v = v_n$ *et* $\rho = \rho_n$, *donc*

$$v|\rho| \geqq \min(v_n|\rho_n|, v_{n+1}|\rho_{n+1}|).$$

En rassemblant les résultats relatifs au cas $\mathcal{A}_n$ et ceux relatifs au cas $\mathcal{B}_n$, on peut donner l'énoncé suivant, analogue à la proposition 1 :

Proposition 6. — *Si* η *n'est pas de la forme* $M\xi + N$ $(M, N$ *entiers*), *à tout couple d'entiers* (u, v) *avec* $v > 0$, *on peut associer un indice* $n \geqq 0$ *tel que*

$$v|v\xi - u - \eta| \geqq \min(v_n|\rho_n|, v'_n|\rho'_n|).$$

Comme on a, d'après (2.4) et (6.5), pour $\eta \neq M\xi + N$,

$$\lim_n v_n = \lim_n v'_n = +\infty,$$

on en déduit, même si $\eta = M\xi + N$, à cause de (6.1) :

Proposition 7 :

$$k(\xi, \eta) = \varliminf_{n \to +\infty} \min(v_n|\rho_n|, v'_n|\rho'_n|).$$

C'est ce qu'on traduit en disant que l'algorithme fournit les couples (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) *de meilleure approximation*.

D'après les définitions données pour t_{n+1} et z_{n+1} et les formules classiques relatives aux fractions continues (rappelées au paragraphe 1), on a

$$v_n|\rho_n| = t_{n+1} z_{n+1} q_n |\varepsilon_n| = \frac{t_{n+1} z_{n+1}}{x_{n+1} - y_{n+1}},$$

$$v'_n|\rho'_n| = (v_n + q_{n-1})|\rho_n + \varepsilon_{n-1}| = \frac{(t_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}}.$$

La proposition 7 peut donc s'énoncer (avec un changement d'indice) :

PROPOSITION 7 *bis* :

$$k(\xi, \eta) = \varlimsup_{n \to +\infty} \min \left\{ \frac{t_n z_n}{x_n - y_n}, \frac{(t_n - y_n)(x_n - z_n)}{x_n - y_n} \right\}.$$

Dans le cas où $\eta = M\xi + N$, t_n tend vers 1 et, pour n assez grand, z_n est égal à 1. On retrouve donc l'égalité, évidente sur (6.1) :

$$k(\xi, \eta) = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n - y_n} = k(\xi, 0).$$

7. EXCLUSION DE $\mathcal{B}_n$ POUR $k(\xi, \eta)$ ASSEZ GRAND. — Supposons que, η n'étant pas de la forme $M\xi + N$ (M et N entiers), on soit au rang n dans le cas $\mathcal{B}_n$, c'est-à-dire que $1 \leq t_{n+1} < 1 - y_{n+1}$. On a alors $a_n = b_n$, d'où $0 < z_{n+1} < 1$, et, d'après (2.3)

$$v_{n+1} |\rho_{n+1}| = (v_n - q_n) |\rho_n - \varepsilon_n| = (t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1}) q_n |\varepsilon_n| = \frac{(t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}}.$$

Sous-entendons dans le reste de ce paragraphe l'indice $n+1$ aux lettres x, y, z, t. Considérons les deux fonctions de z,

$$v_n |\rho_n| = \frac{tz}{x - y} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} |\rho_{n+1}| = \frac{(t-1)(1-z)}{x - y},$$

qui sont, pour z compris entre 0 et 1, toutes deux positives, et, l'une croissante, et nulle pour $z = 0$, l'autre décroissante, et nulle pour $z = 1$; en un point z quelconque de l'intervalle (0, 1), la plus petite d'entre elles est donc au plus égale à la valeur commune unique qu'elles prennent pour

$$z = \frac{t-1}{2t-1},$$

valeur commune égale à

$$\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)}.$$

Cette dernière fonction de t est croissante pour $1 \leq t \leq 1 - y$; donc on a, compte tenu des inégalités $x > 1$ et $y > -1$,

$$\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)} \leq \frac{-y(1-y)}{(x-y)(1-2y)} < \frac{-y}{1-2y} < \frac{1}{3}.$$

Ainsi, d'après la proposition 7, le cas $\mathcal{B}_n$ [équivalent aux formules (2.7)] ne peut intervenir une infinité de fois si l'on suppose $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$.

Pour faire l'étude des grandes valeurs de $k(\xi, \eta)$, *nous supposerons désormais qu'on a* $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$. *Les formules* (2.6) *interviendront donc seules, à l'exclusion des formules* (2.7).

En effet, ceci vient d'être démontré dans le cas où $\eta \neq M\xi + N$ et était déjà établi dans le cas contraire.

8. Caractérisation de $k(\xi, \eta)$ par la suite $\{(a_n, b_n)\}$. — On aura donc pour n assez grand et k positif

$$(8.1)\quad z_n = x_n - b_n - \frac{x_{n+1} - b_{n+1}}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+2} - b_{n+2}}{x_{n+1}x_{n+2}} - \ldots + (-1)^k \frac{x_{n+k} - b_{n+k} - \dfrac{z_{n+k+1}}{x_{n+k+1}}}{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{n+k}}.$$

De plus, comme $0 \leqq b_p < a_p$, on a

$$x_p - b_p > 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x_{p+1} - b_{p+1}}{x_{p+1}} \leqq 1$$

et la série

$$(8.2)\qquad (x_n - b_n) - \frac{x_{n+1} - b_{n+1}}{x_{n+1}} + \ldots + (-1)^k \frac{x_{n+k} - b_{n+k}}{x_{n+1}\ldots x_{n+k}} + \ldots$$

est constituée de termes tendant vers zéro, décroissants en valeur absolue, et de signes alternés; donc elle converge; comme on a

$$0 < z_{n+k+1} < x_{n+k+1},$$

z_n est égal à la somme de cette série, de sorte que la donnée, à partir d'un certain rang n, de la suite des couples (a_p, b_p) détermine entièrement x_n et z_n, et par suite $k(\xi, \eta)$ puisque les couples (ξ, η) et (x_n, z_n) sont équivalents.

En fait, si l'on se donne arbitrairement deux suites d'entiers a_k et $b_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$, avec $a_k > 0$ et $0 \leqq b_k < a_k$, il existe, comme l'on sait, un irrationnel ξ tel que

$$\xi = (a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_k \quad \ldots) = x_0.$$

La série alternée (8.2), écrite avec $n = 0$, est alors convergente; soit η sa somme; le fait que la série soit alternée entraîne $b_0 = [\xi - \eta]$. Plus généralement, si $b_0, b_1, \ldots, b_k$ sont les entiers associés à $a_0, a_1, \ldots, a_k$ dans le développement du couple (ξ, η), la formule (8.1) sera valable, avec $n = 0$ et $z_0 = \eta$; on en déduit, par comparaison avec la série (8.2) avec $n = 0$:

$$z_{k+1} = x_{k+1} - b_{k+1} - \frac{x_{k+2} - b_{k+2}}{x_{k+2}} + \ldots + (-1)^h \frac{x_{k+h+1} - b_{k+h+1}}{x_{k+2}\ldots x_{k+h+1}} + \ldots,$$

ce qui entraîne $b_{k+1} = [x_{k+1} - z_{k+1}]$; donc b_{k+1} est associé à a_{k+1} dans le développement du couple (ξ, η). En résumé, on peut énoncer :

Proposition 8. — *Si l'on suppose $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$, les couples (x_n, z_n) et (a_n, b_n) du développement de (ξ, η) vérifient à partir d'un certain rang les formules*

$$(8.3)\qquad \frac{1}{x_{n+1}} = x_n - a_n, \qquad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n;$$

$$(8.4)\qquad a_n = [x_n], \qquad b_n = [x_n - z_n], \qquad 0 \leqq b_n < a_n.$$

La donnée de la suite des couples (a_n, b_n) à partir d'un certain rang détermine *entièrement* $k(\xi, \eta)$ *par les formules* (8.3), (8.4) *associées à*

$$\frac{1}{y_{n+1}} = y_n - a_n, \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n; \tag{8.5}$$

$$k(\xi, \eta) = \varliminf_{n \to +\infty} \min \left\{ \frac{z_n t_n}{x_n - y_n}, \frac{(x_n - z_n)(t_n - y_n)}{x_n - y_n} \right\}. \tag{8.6}$$

De plus, si l'on se donne arbitrairement, pour $n \geqq 0$, *deux suites d'entiers* a_n *et* b_n *soumis aux seules conditions* (3)

$$0 \leqq b_n < a_n,$$

alors il existe un couple (ξ, η) *pour lequel les* a_n *sont les quotients incomplets du développement en fraction continue de* ξ, *et les* b_n *sont les entiers associés aux* a_n *dans le développement du couple* (ξ, η) *selon l'algorithme qui a été défini.*

II. — Étude des couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$.

9. Préliminaires : étude du cas homogène. — Dans toute la suite nous nous intéresserons exclusivement aux couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta)$, qui est l'inverse de $k(\xi, \eta)$, soit inférieur à $\frac{20}{7}$. Comme ce nombre est plus petit que 3, on peut appliquer à ces couples la proposition 8. Nous supposerons une fois pour toutes que les indices que nous envisagerons pour les lettres $a, b, x, y, \ldots$ sont assez grands pour que les formules de la proposition 8 soient applicables.

Nous poserons encore

$$c_n = a_n - b_n;$$

on a donc $c_n \geqq 1$, d'après la proposition 8.

D'après le paragraphe 3, l'éventualité $\lim\limits_n c_n = 1$ est caractéristique des couples (ξ', η') équivalents à un couple $(\xi, 0)$, donc aussi à $(\xi', 0)$. Rappelons que l'hypothèse $c(\xi, 0) < \frac{20}{7}$ entraîne

$$\lim_n a_n = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lim_n a_n = 2.$$

En effet, de

$$c(\xi, 0) = \varlimsup_n (x_n - y_n) < \frac{20}{7} < 3,$$

on déduit que cette hypothèse entraîne $\varlimsup\limits_n a_n \leqq 2$. Si l'on avait une infinité de fois, dans le développement de ξ, $a_n = 2$ avec $a_{n+1} = 1$, de $a_{n+2} \geqq 1$ et $a_{n+3} \leqq 2$

(3) On n'a pas alors nécessairement $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$.

on déduirait $x_n > \frac{18}{7}$, et de $a_{n-1} \leqq 2$, $-y_n > \frac{1}{3}$, d'où

$$x_n - y_n \geqq \frac{18}{7} + \frac{1}{3} > \frac{20}{7}$$

et par suite

$$c(\xi, 0) > \frac{20}{7}.$$

Au contraire

$$\lim_n a_n = 1 \quad \text{entraîne} \quad (\xi, 0) \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad \text{et} \quad c(\xi, 0) = \sqrt{5} < \frac{20}{7};$$

$$\lim_n a_n = 2 \quad \text{entraîne} \quad (\xi, 0) \sim \quad (\sqrt{2}, 0) \quad \text{et} \quad c(\xi, 0) = \sqrt{8} < \frac{20}{7};$$

ces deux cas correspondent aux nombres exceptionnels des cas *a* et *c* du théorème initial.

10. Inégalités utilisées. — L'éventualité $\lim_n c_n = 1$ étant ainsi étudiée, nous supposerons désormais que (ξ, η) n'est pas équivalent à $(\xi, 0)$ c'est-à-dire, que

$$\overline{\lim_n}\, c_n \geqq 2,$$

et que le cas $\mathfrak{A}_n$ de l'algorithme est toujours valable, ce qui entraîne $0 < t_n \leqq 1$. De façon plus précise, on ne peut avoir une infinité de fois $v_n = q_n$ sans que $\overline{\lim_n} |\rho_n| > 0$, puisque η n'est pas entier; donc, à partir d'un certain rang, on a

$$0 < t_n < 1.$$

Des formules (8.4) on tire alors

$$-\frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} < b_n - y_n + 1 = 1 + b_n - a_n - \frac{1}{y_{n+1}}$$

et

$$-\frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} > b_n - y_n = b_n - a_n - \frac{1}{y_{n+1}},$$

d'où le lemme suivant :

Lemme 1 :

$$1 + c_n y_{n+1} < t_{n+1} < 1 + (c_n - 1) y_{n+1}.$$

D'autre part, l'inégalité $k(\xi, \eta) < \frac{7}{20}$ entraîne, pour n assez grand, les inégalités

$$v_{n-1} |\rho_{n-1}| < \frac{7}{20}, \qquad v_n |\rho_n| < \frac{7}{20}, \qquad v'_n |\rho'_n| < \frac{7}{20}$$

qui s'écrivent respectivement, en sous-entendant l'indice n à chaque lettre :

$$(10.1)\qquad zt > \frac{7}{20}(x-y) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{t} < \frac{20z}{7(x-y)};$$

$$(10.2)\qquad (t+b-y)(x-b-z) > \frac{7}{20}(x-y) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{t+b-y} < \frac{20(x-b-z)}{7(x-y)};$$

$$(10.3)\qquad \begin{cases} (t+b+1-y)(z+1+b-x) > \dfrac{7}{20}(x-y) \\ \text{ou} \quad \dfrac{1}{t+b+1-y} < \dfrac{20(z+1+b-x)}{7(x-y)}. \end{cases}$$

En éliminant z entre (10.1) et (10.2), on trouve

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+b-y} < \frac{20}{7}\,\frac{x-b}{x-y}.$$

En posant $u_n = b_n - y_n$, cette inégalité est équivalente à

$$(\mathrm{I}_n)\qquad x > b + \frac{u}{\dfrac{20}{7}\,\dfrac{t(t+u)}{2t+u} - 1} \qquad \text{(avec l'indice } n \text{ à chaque lettre).}$$

En éliminant z entre (10.2) et (10.3), on trouve

$$\frac{1}{t+b-y} + \frac{1}{t+b+1-y} < \frac{20}{7}\,\frac{1}{x-y}$$

qui s'écrit aussi

$$(\mathrm{J}_n)\qquad x < b - u + \frac{20}{7}\,\frac{(t+u)(t+u+1)}{2t+2u+1} \qquad \text{(avec l'indice } n \text{ à chaque lettre).}$$

En éliminant x entre I_n et J_n, on trouve

$$(\mathrm{K}_n)\qquad \frac{1}{t} + \frac{u+1}{t+u} + \frac{u}{t+u+1} < \frac{20}{7} \qquad \text{(avec l'indice } n \text{ à chaque lettre).}$$

Le premier membre de K_n étant une fonction décroissante de t, K_n entraîne l'inégalité plus faible obtenue en remplaçant t par 1 :

$$\frac{u}{u+2} < \frac{20}{7} - 2 = \frac{6}{7},$$

c'est-à-dire

$$u < 12;$$

comme $y < 0$, on en déduit

$$b \leqq 11,$$

et aussi, en utilisant J_n, compte tenu de ce que $\frac{(t+u)(t+u+1)}{2t+2u+1}$, étant l'inverse de $\frac{1}{t+u} + \frac{1}{t+u+1}$, croît avec $t+u$,

$$x < \frac{20}{7}\cdot\frac{13.14}{27} < 20,$$

d'où

$$a_n \leqq 19 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} > \frac{1}{20},$$

quel que soit n.

Désignons alors le premier membre de K_n par $F(t, u)$. Pour t et u positifs, on a évidemment $F'_t < 0$, tandis que

$$F'_u = \frac{1+t}{(t+u+1)^2} - \frac{1-t}{(t+u)^2}$$

a le même signe, pour $t < 1$, que

$$\frac{1+t}{1-t} - \left(\frac{t+u+1}{t+u}\right)^2.$$

Or, pour $u > \frac{1}{20}$ et $t > \frac{7}{10}$, cette dernière quantité est supérieure à $\frac{17}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 > 0$. De plus, on vérifie que

$$F\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{20}\right) = \frac{20}{7}.$$

Il existe donc une fonction $U = f(t)$, définie par l'équation (du second degré en U)

$$F(t, U) = \frac{20}{7},$$

avec $f' = -\frac{F'_t}{F'_U} > 0$ pour $\frac{7}{10} \leqq t < 1$, ce qui entraîne $\frac{1}{20} \leqq U < 12$, et la croissance simultanée de t et U dans ces intervalles.

En outre, on vérifie que $F(t, u)$ est strictement supérieur à $\frac{20}{7}$ pour les couples de valeurs t et u du tableau K suivant :

Tableau K.

$t =$	$\frac{19}{27}$	$\frac{67}{95}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$
$u =$	$\frac{7}{27}$	$\frac{26}{95}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{21}{10}$	$\frac{11}{3}$

En tenant compte de l'inégalité $u_n > \frac{1}{20}$, qui entraîne $t_n > \frac{7}{10}$, on peut donc énoncer le lemme suivant :

Lemme 2. — *Le système d'inégalités*

$$t_n \leqq t, \qquad u_n \geqq u$$

est incompatible pour chaque couple de valeurs (t, u) *du tableau* K. *En outre, on a*

$$\frac{7}{10} < t_n < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{20} < u_n < 12.$$

D'autre part, comme $\frac{t(t+u)}{2t+u}$, étant l'inverse de $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+u}$, croît avec t, et que $\frac{u}{\frac{20}{7}\frac{t(t+u)}{2t+u}-1}$ a pour inverse $\frac{1}{7}\left(\frac{10t}{t+u}+\frac{10t-7}{u}\right)$ qui est une fonction décroissante de u pour $t>\frac{7}{10}$, on peut énoncer :

LEMME 3. — *Le second membre de l'inégalité* I_n *est une fonction décroissante de* t, b *et* y *étant fixes; c'est une fonction croissante de* $-y$, t *et* b *étant fixes, et aussi de* b, t *et* y *étant fixes.*

En particulier, I_n entraîne les inégalités plus faibles, obtenues en remplaçant t par 1, puis y par 0,

$$(\mathrm{I}'_n)\qquad x>y+\frac{20u(1+u)}{6+13u}>\frac{20b(1+b)}{6+13b}.$$

Comme $-u+\frac{20}{7}\frac{(t+u)(t+u+1)}{2t+2u+1}=\frac{1}{7}\left(3u+10t+5-\frac{5}{2u+2t+1}\right)$ est une fonction croissante de u, t restant fixe, et aussi, lorsque u reste fixe, une fonction croissante de $t+u$, donc de t, on peut énoncer :

LEMME 4. — *Le second membre de l'inégalité* J_n *croît avec chacune des variables* t, u, b, *les deux autres restant fixes, et aussi avec* $t+u$ *lorsque* $b-u=y$ *reste fixe.*

En particulier, J_n entraîne les inégalités plus faibles, obtenues en remplaçant t par 1, puis y par 0,

$$(\mathrm{J}'_n)\qquad x<y+\frac{20}{7}\frac{(u+1)(u+2)}{2u+3}<\frac{20}{7}\frac{(b+1)(b+2)}{2b+3}.$$

Enfin, de $0<-y<1$ et $\frac{7}{10}<t<1$, on déduit les inégalités

$$(\mathrm{L}_n)\qquad t_{n+1}=\frac{b+t-y}{a-y}<\frac{b+2}{a+1}\qquad \text{(avec l'indice } n \text{ sous-entendu)},$$

ce qui entraîne $\frac{b+2}{a+1}>\frac{7}{10}$, c'est-à-dire

$$(\mathrm{L}'_n)\qquad a<\frac{10b+13}{7}.$$

11. Après avoir ainsi dressé la liste des inégalités utiles, nous allons prouver que, pour les couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta)<\frac{20}{7}$, on a, à partir d'un certain rang, les trois propriétés suivantes :

(i) le couple (a_n, b_n) est déterminé par la donnée de a_n ou de b_n (à quelques ambiguïtés près);

(ii) il ne peut pas être constitué de nombres très grands;

(iii) de deux couples consécutifs, il y en a toujours un constitué de petits nombres.

Les démonstrations de ces propriétés étant liées, nous procéderons par étapes, où le sens et la force des énoncés précédents s'affirment progressivement. La première étape fait l'objet du paragraphe 12 et est concrétisée par les lemmes 5 et 6, la deuxième étape fait l'objet du paragraphe 13 et est concrétisée par les lemmes 7, 8 et 9; ensuite la ligne de la démonstration s'infléchit pous réduire davantage le nombre des couples possibles et préciser la façon dont ils se succèdent.

Il est entendu, une fois pour toutes, que tous les énoncés ultérieurs sur le développement de (ξ, η) sont valables *à partir d'un certain rang, et, sauf mention contraire, pour les couples tels que* $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$.

12. Première étape. — D'après le lemme 2, b_n ne peut prendre que les valeurs entières comprises entre 0 et 11. A chacune d'elles ne peuvent correspondre qu'un nombre fini de valeurs de a_n : celles qui satisfont à la fois aux inégalités L'_n et I'_n. Cela donne le tableau suivant :

$b_n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a_n <$	$\frac{13}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{33}{7}$	$\frac{43}{7}$	$\frac{53}{7}$	$\frac{63}{7}$	$\frac{73}{7}$	$\frac{83}{7}$	$\frac{93}{7}$	$\frac{103}{7}$	$\frac{113}{7}$	$\frac{123}{7}$
$x_n >$	-	$\frac{40}{19}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{200}{29}$	$\frac{600}{71}$	10	$\frac{1120}{97}$	$\frac{144}{11}$	$\frac{600}{41}$	$\frac{275}{17}$	$\frac{2640}{149}$

et entraîne le lemme suivant, en tenant compte de $a_n > x_n - 1$:

Lemme 5. — *Les seuls couples* (a_n, b_n) *possibles sont donnés par le tableau suivant (où l'on a fait figurer, outre les valeurs de* a_n *et* b_n, *celles de* $c_n = a_n - b_n$, *la minoration de* x_n *fournie par* I'_n *lorsqu'elle est meilleure que* $x_n > 1$, *et la majoration de* t_{n+1} *fournie par* L_n) :

Tableau T.

$a_n =$	1	2	3	3	4	5	6	6	7	8	10	11	13	14	16	17
$b_n =$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11
$c_n =$	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	5	5	6	6
$x_n >$	1	$\frac{40}{19}$	$\frac{40}{19}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{200}{29}$	$\frac{200}{29}$	$\frac{600}{71}$	10	$\frac{1120}{97}$	$\frac{144}{11}$	$\frac{600}{41}$	$\frac{275}{17}$	$\frac{2640}{149}$
$t_{n+1} <$	1	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{13}{18}$

Intéressons-nous maintenant à la propriété (iii).

Supposons que $b_{n+1} \geqq 2$; on a alors $u_{n+1} > 2$, donc d'après le lemme 2, $t_{n+1} > \frac{7}{9}$, ce qui, d'après le tableau T, implique

$$(a_n, b_n) = (1, 0), \quad (2, 1), \quad (3, 2), \quad (4, 2), \quad (5, 3) \quad \text{ou} \quad (6, 4).$$

Comme $a_n \leqq 6$, on a $-y_{n+1} > \frac{1}{7}$, donc $u_{n+1} > \frac{21}{10}$, et, d'après le lemme 2, $t_{n+1} > \frac{4}{5}$, ce qui exclut $(a_n, b_n) = (4, 2)$.

D'autre part,

$$(a_n, b_n) = (3, 2), \quad (5, 3) \quad \text{ou} \quad (6, 4)$$

entraînent respectivement d'après l'inégalité I'_n rappelée dans le tableau T,

$$x_n > \frac{15}{4}, \quad \frac{16}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{200}{29},$$

et, par suite,

$$x_{n+1} < \frac{4}{3}, \quad 3 \quad \text{ou} \quad \frac{29}{26}$$

respectivement, ce qui est dans les trois cas contradictoire avec $b_{n+1} \geqq 2$, puisque $x_{n+1} > a_{n+1} \geqq b_{n+1} + 1$. Nous avons donc établi le lemme suivant :

Lemme 6 : *$b_{n+1} \geqq 2$ entraîne $a_n \leqq 2$.*

Corollaire : *$b_{n+1} \geqq 2$ implique $-y_{n+1} > \frac{1}{3}$.*

13. Deuxième étape. — Revenant aux propriétés (i) et (ii) ci-dessus, nous allons prouver *l'exclusion* des couples (a_n, b_n) du tableau suivant :

$a_n =$	3	6	10	11	13	14	16	17
$b_n =$	2	4	6	7	8	9	10	11

c'est-à-dire montrer qu'ils ne peuvent plus intervenir, à partir d'un certain rang, dans le développement de (ξ, η), si $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$.

Remarquons d'abord que le corollaire du lemme 6, entraînant $-y_n > \frac{1}{3}$, permet d'écrire l'inégalité I'_n sous la forme

$$x_n > -\frac{1}{3} + \frac{20\left(b_n + \frac{1}{3}\right)\left(b_n + \frac{4}{3}\right)}{6 + 13\left(b_n + \frac{1}{3}\right)} = \frac{180 b_n^2 + 261 b_n + 49}{3(39 b_n + 31)}.$$

Appliquons cette inégalité aux cas $b_n = 4$, 2 et 7 ; on trouve

— pour $b_n = 4$:

$$x_n > \frac{180.16 + 261.4 + 49}{3(39.4 + 31)} = \frac{2\,880 + 1\,044 + 49}{3(156 + 31)} = \frac{3\,973}{561} > 7;$$

— pour $b_n = 2$:

$$x_n > \frac{180.4 + 261.2 + 49}{3(39.2 + 31)} = \frac{720 + 522 + 49}{3(78 + 31)} = \frac{1291}{327} = 3 + \frac{310}{327};$$

— pour $b_n = 7$:

$$x_n > \frac{180.49 + 261.7 + 49}{3(39.7 + 31)} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1260 + 261 + 7}{273 + 31} = \frac{1337}{114} = 11 + \frac{83}{114}.$$

L'inégalité $x_n > 7$ est évidemment contradictoire avec $a_n = 6$, donc *le couple* $(6, 4)$ *est exclu.*

L'inégalité $x_n > 3 + \frac{310}{327}$ implique, si $a_n = 3$, $x_{n+1} < \frac{327}{310}$ donc $x_{n+2} > \frac{310}{17} > 18$, ce qui contredit le lemme 5, donc *le couple* $(3, 2)$ *est exclu.*

L'inégalité $x_n > 11 + \frac{83}{114}$ implique, si $a_n = 11$, $x_{n+1} < \frac{114}{83} < \frac{3}{2}$, donc $a_{n+1} = 1$ et $b_{n+1} = 0$. Retenons pour quelques temps ces derniers résultats.

La conclusion $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = 0$ est aussi valable dans les cas suivants (lemme 5) :

$a_n =$	10	13	14	16	17
$t_{n+1} <$	$\frac{8}{11}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{13}{18}$

car ils assurent tous $t_{n+1} < \frac{20}{27}$, ce qui entraîne, d'après le lemme 2, $u_{n+1} < 1$, donc $b_{n+1} = 0$ et $a_{n+1} = 1$.

Pour tous les couples (a_n, b_n) énumérés au début de ce paragraphe et non encore exclus, nous avons donc $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = 0$, d'où

$$t_{n+2} = \frac{t_{n+1} + y_{n+1}}{1 - y_{n+1}} < \frac{1 + (c_n - 2)\, y_{n+1}}{1 - y_{n+1}} < \frac{1 - \dfrac{c_n - 2}{a_n + 1}}{1 + \dfrac{1}{a_n + 1}} = \frac{b_n + 3}{a_n + 2},$$

le premier signe d'inégalité résultant du lemme 1. Ceci nous donne, pour les six valeurs en question de a_n, les inégalités respectives suivantes pour t_{n+2} :

$a_n =$	10	11	13	14	16	17
$t_{n+2} <$	$\frac{3}{4}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{14}{19}$

donc, dans les six cas, $t_{n+2} < \frac{10}{13}$, ce qui entraîne, d'après le lemme 2, $u_{n+2} < \frac{3}{2}$; mais comme $a_{n+1} = 1$ entraîne $-y_{n+2} > \frac{1}{2}$, on a donc $b_{n+2} = 0$, donc on a $a_{n+2} = 1$, en particulier $x_{n+1} > \frac{3}{2}$.

Ceci contredit le résultat obtenu pour $(a_n, b_n) = (11, 7)$ *qui est donc exclu* (on pourra oublier maintenant les résultats partiels obtenus à son sujet).

Dans les autres cas on a

$$t_{n+1} + u_{n+1} = t_{n+1} - y_{n+1} < 1 + (c_n - 2) y_{n+1} < 1 - \frac{c_n - 2}{a_n + 1} = \frac{b_n + 3}{a_n + 1},$$

d'où, grâce à l'inégalité J_{n+1} et au lemme 4 $\left(\text{on pose } R = \dfrac{b_n+3}{a_n+1}\right)$

$$x_{n+1} < -\frac{1}{a_n+1} + \frac{20}{7}\,\frac{R(R+1)}{2R+1} = -\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{20}{7}\,\frac{(b_n+3)(a_n+b_n+4)}{(a_n+1)(a_n+2b_n+7)},$$

ce qui donne respectivement pour les cinq valeurs restantes de a_n :

$a_n =$	10	13	14	16	17
$x_{n+1} <$	$\frac{3\,397}{2\,233}$	$\frac{656}{441}$	$\frac{6\,207}{4\,195}$	$\frac{7\,499}{5\,117}$	$\frac{617}{414}$

Comme ceci, sauf dans le cas $a_n = 10$, contredit $x_{n+1} \geqq \frac{3}{2}$, il en résulte que *les couples* (13, 8), (14, 9), (16, 10) *et* (17, 11) *sont exclus.*

En particulier, on a démontré l'inégalité $a_n \leqq 10$, pour tout n.

Dans le cas $a_n = 10$, $x_{n+1} < \frac{3\,397}{2\,233}$ et $a_{n+2} = 1$ entraînent

$$x_{n+2} > \frac{2\,233}{1\,164}, \qquad x_{n+3} < \frac{1\,164}{1\,069}, \qquad x_{n+4} > \frac{1\,069}{95} > 11,$$

ce qui contredit l'inégalité $a_{n+4} \leqq 10$ que nous venons d'établir; donc *le couple* (10, 6) *est, lui aussi, exclu.* Les exclusions que nous avions en vue étant établies, on peut énoncer :

LEMME 7. — *Les seuls couples* (a_n, b_n) *possibles sont donnés par le tableau* T′ *suivant :*

TABLEAU T′.

$a_n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$b_n =$	0	1	1	2	3	3	4	5
$t_{n+1} <$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$

COROLLAIRE. — *On a* $\overline{\lim_n}\, a_n \geqq 3$.

En effet on a vu (§ 10) que $\overline{\lim_n}\, c_n \geqq 2$.

Revenons maintenant à la propriété (iii).

D'après le lemme 6, $b_{n+1} \geqq 2$, donc $a_{n+1} \geqq 4$, entraînent $a_n \leqq 2$; montrons que $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (3, 1)$ entraîne aussi la même conclusion.

En effet, si $a_n \geqq 3$, donc $c_n \geqq 2$ (lemme 7) et $t_{n+1} - y_{n+1} < 1$ (lemme 1), et si de plus $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (3, 1)$, on a

$$t_{n+2} = \frac{t_{n+1} + 1 - y_{n+1}}{3 - y_{n+1}} < \frac{2}{3 - y_{n+1}} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10},$$

ce qui contredit le lemme 2; ainsi $a_{n+1} > 3$ entraîne $a_n = 1$ ou 2.

Supposons maintenant $a_n = 2$, donc $b_n = 1$, et $a_{n+1} \geqq 3$, donc $x_n < 2 + \frac{1}{2}$;

l'inégalité I_n entraîne alors, avec $b_n = 1$ et $x_n > \frac{7}{3}$,

$$\frac{20}{7}\,\frac{t_n(t_n+u_n)}{2\,t_n+u_n} > 1 + \frac{3\,u_n}{4}.$$

Or cette inégalité est contredite (grâce au lemme 3) :

1° par $u_n > \frac{4}{3}$, $t_n < 1$, ce qui écarte les cas où $-y_n > \frac{1}{3}$, donc les couples (a_{n-1}, b_{n-1}) tels que $a_{n-1} \leqq 2$.

2° par $u_n > \frac{10}{9}$, $t_n < \frac{5}{6}$, inégalités vérifiées par tous les couples (a_{n-1}, b_{n-1}) du tableau T′ tels que $a_{n-1} \geqq 3$; ces couples sont donc à écarter aussi, et par suite $a_{n+1} \geqq 3$ contredit $a_n = 2$; on peut donc énoncer :

Lemme 8 : $a_{n+1} \geqq 3$ *entraîne* $a_n = 1$.

Corollaire : $a_{n+1} \geqq 3$ *implique donc* $-y_{n+1} \geqq \frac{1}{2}$.

Le lemme 8 signifie qu'un quotient incomplet au moins égal à 3 ne peut être précédé que d'un quotient incomplet égal à 1 ; nous allons montrer maintenant qu'il ne peut également être suivi que d'un quotient incomplet égal à 1. En fait, si $a_n \geqq 3$, on a certainement $a_{n+1} \leqq 2$, sans quoi le lemme 8 serait contredit; pour prouver que $a_{n+1} = 1$, il suffit donc d'exclure le cas $a_n \geqq 3$, $a_{n+1} = 2$, ce que nous allons faire maintenant.

Si $a_n = 3$ ou 7, on a (tableau T′) $t_{n+1} < \frac{3}{4}$, et, si $b_{n+1} = 1$, comme $-y_{n+1} > \frac{1}{8}$, $u_{n+1} > \frac{9}{8}$, ce qui contredit le lemme 2.

Si $a_n = 6$, on a (tableau T′) $t_{n+1} < \frac{5}{7} < \frac{20}{27}$ et $u_{n+1} > 1$, ce qui contredit le lemme 2.

Si $a_n = 5$ ou 8, l'inégalité I'_n, avec $-y_n > \frac{1}{2}$ (corollaire du lemme 8) donne respectivement

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20.7.9}{2(7.13+12)} = \frac{1157}{206}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+1} < \frac{206}{127}$$

ou

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20.11.13}{2(11.13+12)} = \frac{541}{62}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+1} < \frac{62}{45}$$

donc dans les deux cas $x_{n+1} < 2$, ce qui contredit $a_{n+1} = 2$.

D'après le lemme 7, il reste à examiner seulement le cas où $a_n = 4$, $a_{n+1} = 2$. Remarquons que, d'après les lemmes 7 et 8, on a $a_{n-1} = 1$ et $a_{n-2} \leqq 8$, ce qui entraîne $-y_{n-1} > \frac{1}{9}$, $-y_n < \frac{9}{10}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{10}{49}$, et, puisque $t_{n+1} - y_{n+1} < 1$

d'après le lemme 1, $t_{n+1} < \frac{39}{49}$, d'où l'on tire, dans l'inégalité I_{n+1} :

$$x_{n+1} > 1 + \frac{\frac{59}{49}}{\frac{20}{7}\,\frac{39.2}{137} - 1} = 1 + \frac{59.137}{140.78 - 49.137} = 1 + \frac{8\,083}{4\,207} = 2 + \frac{3\,876}{4\,207},$$

d'où

$$x_{n+2} < \frac{4\,207}{3\,876} \qquad \text{et} \qquad x_{n+3} > \frac{3\,876}{331} > 9,$$

ce qui contredit le lemme 7.

On peut donc énoncer :

LEMME 9 : $a_n \geqq 3$ *entraîne* $a_{n+1} = 1$.

14. EXCLUSION DES COUPLES (6, 3), (8, 5) ET (5, 3). — Dans ce paragraphe, on réduit encore le nombre des couples (a_n, b_n) qui interviennent et leurs possibilités de combinaisons, selon le schéma suivant :

(iv) on prouve que si $a_n \geqq 3$ (d'où $a_{n+1} = 1$) alors $a_{n+2} = 1$;

(v) on prouve que si $a_n = 6$ ou 8, x_{n+2} est assez grand pour entraîner une contradiction; d'où l'exclusion des couples (6, 3) et (8, 5);

(vi) on peut alors prouver que dans les hypothèses de (iv), on a en plus $a_{n+3} = 1$, ce qui permet l'exclusion de (5, 3).

La démonstration de (iv) consiste à examiner, dans l'hypothèse $a_n \geqq 3$ et $a_{n+1} = 1$, les diverses valeurs possibles de a_{n+2}. Dans cette hypothèse, remarquons d'abord que $t_{n+2} = \frac{t_{n+1} - y_{n+1}}{1 - y_{n+1}}$, expression qui est inférieure, d'après le lemme 1 :

— si $a_n = 3, 4, 5$, à $\frac{1}{1 - y_{n+1}}$ donc respectivement à $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$;

— si $a_n = 6, 7, 8$, à $\frac{1 + y_{n+1}}{1 - y_{n+1}}$, donc respectivement à $\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}$.

On a donc dans tous les cas $t_{n+2} < \frac{6}{7}$; distinguons alors quatre cas :

1° si $a_{n+2} \geqq 5$, on a $b_{n+2} \geqq 3$ donc

$$u_{n+2} \geqq 3 - y_{n+2} = 3 + \frac{1}{1 - y_{n+1}} \geqq 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} > \frac{11}{3},$$

ce qui, d'après le lemme 2, contredit $t_{n+2} < \frac{6}{7}$, et écarte donc l'éventualité $a_{n+2} \geqq 5$;

2° si $a_{n+2} = 4$, on a $b_{n+2} = 2$ donc $u_{n+2} > \frac{21}{10}$ donc, d'après le lemme 2, $t_{n+2} < \frac{4}{5}$, ce qui entraîne d'après les calculs précédents $a_n = 4$ ou 5 ; d'autre part, dans ce cas, on a certainement $a_{n+3} = 1$ d'après le lemme 9, et $a_{n+4} \leqq 4$, car $a_{n+4} \geqq 5$ contredirait le 1°. Or l'inégalité I_{n+2} avec $b_{n+2} = 2$, $-y_{n+2} > \frac{4}{5}$ et $t_{n+2} < \frac{6}{7}$ donne

$$x_{n+2} > -\frac{4}{5} + \frac{20.84.128}{5(420.14 + 11.158)} = \frac{92\,284}{19\,045},$$

d'où

$$x_{n+3} < \frac{19\,045}{16\,104} \qquad \text{et} \qquad x_{n+4} > \frac{16\,104}{2\,941} > 5,$$

ce qui contredit $a_{n+4} \leqq 4$, et écarte donc l'éventualité $a_{n+2} = 4$;

3° si $a_{n+2} = 3$, alors $t_{n+3} = \frac{t_{n+1} + 2 - 2y_{n+1}}{4 - 3y_{n+1}}$, expression qui est inférieure, d'après le lemme 1 :

— si $a_n = 6, 7, 8$, à $\frac{3}{4 - 3y_{n+1}}$ donc à $\frac{9}{13} < \frac{7}{10}$, en contradiction avec le lemme 2 ;

— si $a_n = 3, 4, 5$, à $\frac{3 - y_{n+1}}{4 - 3y_{n+1}}$, donc à $\frac{19}{27}$, tandis que $-y_{n+3} = \frac{1 - y_{n+1}}{4 - 3y_{n+1}}$ est supérieur à $\frac{7}{27}$, ce qui contredit le lemme 2 ; l'éventualité $a_{n+2} = 3$ est donc écartée dans les deux cas ;

4° enfin, si $a_{n+2} = 2$, l'inégalité I_{n+2} donne, avec $b_{n+2} = 1$, $-y_{n+2} > \frac{3}{4}$, $t_{n+2} < \frac{6}{7}$:

$$x_{n+2} < -\frac{3}{4} + \frac{20.42.73}{4(420.7 + 11.97)} = \frac{49\,299}{16\,028} > 3 \qquad \text{contredisant} \quad a_{n+2} = 2.$$

Nous pouvons donc énoncer pour clore la partie (iv) de notre programme :

Lemme 10 : *$a_n \geqq 3$ entraîne $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} = 1$.*

Corollaire : *$a_n \geqq 3$ entraîne $a_{n-1} = 1$ et $a_{n-2} \leqq 2$, d'où $\frac{1}{2} < -y_n < \frac{3}{4}$.*

Envisageons maintenant l'hypothèse $a_n = 6$. Du corollaire du lemme 10 on déduit $-y_{n+1} > \frac{4}{27}$, d'où, en tenant compte du lemme 1 :

$$t_{n+1} + u_{n+1} = t_{n+1} - y_{n+1} < 1 + y_{n+1} < \frac{23}{27}$$

et l'inégalité J_{n+1} entraîne

$$x_{n+1} < -\frac{4}{27} + \frac{20.23.50}{7.27.73} = \frac{20\,956}{13\,797},$$

d'où, en tenant compte du lemme 10,

$$x_{n+2} > \frac{13\,797}{7\,159}, \qquad x_{n+3} < \frac{7\,159}{6\,638} \qquad \text{et} \qquad x_{n+4} > \frac{6\,638}{521} > 9,$$

ce qui contredit le lemme 7. *Le couple* (6, 3) *est donc exclu.*

Envisageons à présent le cas $a_n = 8$; l'inégalité I'_n donne, avec $-y_n > \frac{1}{2}$,

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20.11.13}{2(11.13+12)} = \frac{541}{62}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+1} < \frac{62}{45} \qquad \text{et} \qquad x_{n+2} > \frac{45}{17} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 10. *Le couple* (8, 5) *est donc exclu.*

On peut donc énoncer :

LEMME 11. — *Les seuls couples* (a_n, b_n) *possibles sont* (1, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3) *et* (7, 4).

Ceci achève la partie (v) de ce paragraphe. Passons à la partie (vi).

Si $a_n = 5$, l'inégalité I'_n donne, avec $-y_n > \frac{1}{2}$,

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20.7.9}{2(7.13+12)} = \frac{1157}{206}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+1} < \frac{206}{127} \qquad \text{et} \qquad x_{n+2} > \frac{127}{79},$$

d'où, compte tenu du lemme 10, $x_{n+3} < \frac{79}{48}$ qui entraîne $a_{n+3} = 1$.

Si $a_n = 3$, 4 ou 7, on a $-y_{n+1} > \dfrac{1}{a_n + \frac{3}{4}}$, c'est-à-dire, respectivement, $-y_{n+1} > \frac{4}{15}$, $\frac{4}{19}$ ou $\frac{4}{31}$. Dans les deux premiers cas, le lemme 1 donne $t_{n+1} - y_{n+1} < 1$ et, dans le troisième, $t_{n+1} - y_{n+1} < 1 + y_{n+1} < \frac{27}{31}$. L'inégalité J_{n+1} entraîne que x_{n+1} est alors respectivement inférieur à

$$-\frac{4}{15} + \frac{20}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{172}{105}, \qquad -\frac{4}{19} + \frac{20}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{676}{399}, \qquad -\frac{4}{31} + \frac{20}{7}\cdot\frac{27.58}{31.85} = \frac{5788}{3689};$$

d'où respectivement :

$$x_{n+2} > \frac{105}{67}, \quad \frac{399}{277}, \quad \frac{3689}{2099};$$

donc, puisque $a_{n+2} = 1$ d'après le lemme 10, respectivement

$$x_{n+3} < \frac{67}{38}, \quad \frac{277}{122}, \quad \frac{2099}{1590};$$

ce qui entraîne $a_{n+3} = 1$ sauf, *a priori*, dans le second cas où l'on trouve seulement $a_{n+3} \leq 2$; mais $a_{n+3} = 2$ entraînerait dans ce cas $x_{n+4} > \frac{122}{33} > 3$, en contradiction avec le lemme 8. En outre, dans le troisième cas, on a $x_{n+4} > \frac{1590}{509} > 3$. On peut donc énoncer :

LEMME 12. — *Si* $a_n = 3$, 4, 5 *ou* 7, *on a* $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$, *avec* $a_{n+4} \geq 3$ *si* $a_n = 7$.

COROLLAIRE. — *Si* $a_n = 3$, 4, 5 *ou* 7, *on a* $a_{n-1} = a_{n-2} = 1$ *et* $a_{n-3} \leqq 2$, *ou bien* $a_{n-1} = 1$ *et* $a_{n-2} = 2$; *dans les deux cas, on a* $\frac{4}{7} < -y_n < \frac{3}{4}$.

Appliquant alors l'inégalité I'_n avec $a_n = 5$ et $-y_n > \frac{4}{7}$, on trouve

$$x_n > -\frac{4}{7} + \frac{20.25.32}{7(25.13+42)} = \frac{2\,076}{367},$$

d'où

$$x_{n+1} < \frac{367}{241}, \qquad x_{n+2} > \frac{241}{126}, \qquad x_{n+3} < \frac{126}{115} \qquad \text{et} \qquad x_{n+4} > \frac{115}{11} > 9$$

en contradiction avec le lemme 7; *le cas* $a_n = 5$ *est donc exclu*. Par suite, on peut énoncer :

LEMME 13. — *Les seuls couples* (a_n, b_n) *possibles sont les couples* $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$ *et* $(7, 4)$, *ces trois derniers impliquant en outre* $a_{n-1} = a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$, *et* $\frac{4}{7} < -y_n < \frac{3}{4}$, *avec*

$$a_{n-2} = 2, \qquad ou \qquad a_{n-2} = 1 \quad avec \quad a_{n-3} \leqq 2;$$

de plus, si $a_n = 7$, *on a nécessairement* $a_{n+4} = 3$, 4 *ou* 7.

15. La suite de la démonstration consiste à montrer que dans le cas où $a_n = 7$, chacune des hypothèses $a_{n+4} = 3$, 4 ou 7 est contradictoire, d'où l'exclusion du couple $(7, 4)$; ensuite on montre que $a_n = 3$ ou 4 entraîne, soit $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = a_{n+4} = a_{n+5} = 1$ et $a_{n+6} = 3$ ou 4, soit $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$ et $a_{n+4} = 3$ ou 4 (et même, en fait, un résultat plus précis); compte tenu de l'inégalité $\overline{\lim_n}\, a_n \geqq 3$ (corollaire du lemme 7), ceci entraîne l'exclusion du couple $(2, 1)$.

Au point de vue technique, on notera que les lemmes 2, 3, 4 trop grossiers maintenant, sont le plus souvent abandonnés pour les inégalités originales :

$$(15.1) \qquad z_n t_n > \frac{7}{20}(x_n - y_n), \qquad (x_n - z_n)(t_n - y_n) > \frac{7}{20}(x_n - y_n)$$

écrites pour diverses valeurs de n, voisines les unes des autres.

16. EXCLUSION DE $a_n = 7$. — $a_n = 7$ entraîne $c_n = 3$ et (lemme 13) $-y_n < \frac{3}{4}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{4}{31} > \frac{1}{8}$. Étudions successivement les cas $a_{n+4} = 3$, 4 et 7.

Si $a_{n+4} = 3$, d'après le lemme 12, les formules (2.6) et le lemme 1, on a, en utilisant $-y_{n+1} > \frac{1}{8}$:

$$t_{n+5} = \frac{t_{n+1} + 7 - 5y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} < \frac{8 - 3y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} < \frac{67}{95}, \qquad -y_{n+5} = \frac{3 - 2y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} > \frac{26}{95},$$

ce qui contredit le lemme 2, et écarte donc le cas $a_{n+4} = 3$.

D'autre part, l'inégalité $z_{n+2}t_{n+2} > \frac{7}{20}(x_{n+2} - y_{n+2})$ s'écrit, d'après le lemme 1 et l'inégalité $-y_{n+1} > \frac{4}{31}$:

$$\frac{20}{7}z_{n+2} > \frac{x_{n+2}(1-y_{n+1})+1}{t_{n+1}-y_{n+1}} > \frac{x_{n+2}(1-y_{n+1})+1}{1+y_{n+1}} > \frac{35\,x_{n+2}+31}{27},$$

c'est-à-dire

$$540\,z_{n+2} > 245\,x_{n+2} + 217. \tag{16.1}$$

Or, si $a_{n+4} = 4$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{6\,x_{n+5}+2-z_{n+5}}{5\,x_{n+5}+1}, \qquad x_{n+2} = \frac{9\,x_{n+5}+2}{5\,x_{n+5}+1}$$

et (16.1) entraîne

$$540\,z_{n+5} < 373 - 50\,x_{n+5}. \tag{16.2}$$

Si $a_{n+4} = 7$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{10\,x_{n+5}+2-z_{n+5}}{8\,x_{n+5}+1}, \qquad x_{n+2} = \frac{15\,x_{n+5}+2}{8\,x_{n+5}+1}$$

et (16.1) entraîne

$$540\,z_{n+5} < 373 - 11\,x_{n+5} \tag{16.3}$$

qui est entraînée aussi par (16.2).

Or, que $a_{n+4} = 4$ ou 7, on a dans les deux cas $t_{n+5} < \frac{3}{4}$ et $-y_{n+5} > \frac{1}{8}$ de sorte que l'inégalité $z_{n+5}t_{n+5} > \frac{7}{20}(x_{n+5} - y_{n+5})$ entraîne

$$120\,z_{n+5} > 56\,x_{n+5} + 7. \tag{16.4}$$

En comparant (16.3) et (16.4) on tire $x_{n+5} < \frac{683}{526}$, d'où $a_{n+5} = 1$, et $x_{n+6} > \frac{526}{157} > 3$, ce qui contredit le lemme 13. Donc les deux cas $a_{n+4} = 4$ ou 7 sont aussi à écarter, et l'on peut énoncer :

Lemme 14 :

$$a_n \leqq 4.$$

17. **Étude de** $a_n = 3$. — $a_n = 3$ entraîne $c_n = 2$, et (lemme 13) $-y_n < \frac{3}{4}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{4}{15}$, avec $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$. D'après le lemme 14, on a $a_{n+4} = 1, 2, 3$ ou 4. Étudions successivement ces différents cas.

L'inégalité $z_{n+2}t_{n+2} > \frac{7}{20}(x_{n+2} - y_{n+2})$ entraîne, en tenant compte du lemme 1,

$$\frac{20}{7}z_{n+2} > \frac{x_{n+2}(1-y_{n+1})+1}{t_{n+1}-y_{n+1}} > x_{n+2}(1-y_{n+1})+1 > \frac{19\,x_{n+2}+15}{15},$$

c'est-à-dire

$$(17.1) \qquad 300\, z_{n+2} > 133\, x_{n+2} + 105.$$

Si $a_{n+4} = 1$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{2\, x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{2\, x_{n+5} + 1}, \qquad x_{n+2} = \frac{3\, x_{n+5} + 2}{2\, x_{n+5} + 1}$$

et (17.1) entraîne

$$(17.2) \qquad 229 > 300\, z_{n+5} + 9\, x_{n+5}.$$

D'autre part, on a

$$-y_{n+5} = \frac{2 - y_{n+2}}{3 - 2\, y_{n+2}} > \frac{3}{5},$$

d'où

$$z_{n+5} > z_{n+5}\, t_{n+5} > \frac{7}{20}(x_{n+5} - y_{n+5}) > \frac{7}{20}\left(x_{n+5} + \frac{3}{5}\right),$$

c'est-à-dire

$$(17.3) \qquad 100\, z_{n+5} > 35\, x_{n+5} + 21.$$

En comparant (17.2) et (17.3), on tire

$$x_{n+5} < \frac{83}{57}, \quad \text{d'où } a_{n+5} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+6} > \frac{57}{26} > 2, \quad \text{d'où } a_{n+6} = 2,\ 3 \text{ ou } 4;$$

— si $a_{n+6} = 2$, on a

$$z_{n+5} = \frac{z_{n+7} + 2\, x_{n+7}}{2\, x_{n+7} + 1}, \qquad x_{n+5} = \frac{3\, x_{n+7} + 1}{2\, x_{n+7} + 1}$$

et (17.2) entraîne

$$(17.4) \qquad 220 > 300\, z_{n+7} + 169\, x_{n+7};$$

— si $a_{n+6} = 4$, on a

$$z_{n+5} = \frac{3\, x_{n+7} + z_{n+7}}{4\, x_{n+7} + 1}, \qquad x_{n+7} = \frac{5\, x_{n+7} + 1}{4\, x_{n+7} + 1}$$

et (17.2) entraîne

$$(17.5) \qquad 220 > 300\, z_{n+7} + 29\, x_{n+7}.$$

De plus, dans les deux cas, les inégalités $-y_{n+7} > \frac{1}{5}$ et $z_{n+7}\, t_{n+7} > \frac{7}{20}(x_{n+7} - y_{n+7})$ donnent

$$(17.6) \qquad 100\, z_{n+7} > 35\, x_{n+7} + 7,$$

d'où, en comparant avec (17.4) :

$$x_{n+7} < \frac{199}{274} < 1, \quad \text{ce qui est contradictoire,}$$

et en comparant avec (17.5) :

$$x_{n+7} < \frac{199}{134}, \qquad \text{d'où} \quad a_{n+7} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+8} > \frac{134}{65} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 13.

Donc, si $a_{n+4} = 1$, *on a* $a_{n+5} = 1$ *et* $a_{n+6} = 3$.

Si $a_{n+4} = 2$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{3\,x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{3\,x_{n+5} + 1}, \qquad x_{n+2} = \frac{5\,x_{n+5} + 2}{3\,x_{n+5} + 1}$$

et (17.1) entraîne

(17.7) $$229 > 300\,z_{n+5} + 80\,x_{n+5}.$$

D'autre part, les inégalités $-y_{n+5} > \frac{1}{3}$ et $z_{n+5}\,t_{n+5} > \frac{7}{20}(x_{n+5} - y_{n+5})$ entraînent

(17.8) $$60\,z_{n+5} > 21\,x_{n+5} + 7,$$

d'où en comparant (17.7) et (17.8) :

$$x_{n+5} < \frac{194}{185}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+6} > \frac{185}{9} > 20,$$

ce qui contredit le lemme 5 et exclut ce cas.

Si $a_{n+4} = 3$, on a, en tenant compte de $-y_{n+1} > \frac{4}{15}$ et du lemme 1,

$$t_{n+5} = \frac{t_{n+1} + 7 - 5\,y_{n+1}}{11 - 7\,y_{n+1}} < \frac{8 - 3\,y_{n+1}}{11 - 7\,y_{n+1}} < \frac{136}{193} < \frac{67}{95} \quad \text{et} \quad -y_{n+5} = \frac{3 - 2\,y_{n+1}}{11 - 7\,y_{n+1}} > \frac{53}{193} > \frac{26}{95},$$

ce qui contredit le lemme 2, et exclut ce cas.

En résumé :

Lemme 15 : $a_n = 3$ *ne peut intervenir qu'immédiatement suivi de l'une des séquences* 1 1 1 4 *ou* 1 1 1 1 1 3.

18. Étude de $a_n = 4$. — $a_n = 4$ entraîne $c_n = 2$, et (lemme 13) $-y_n < \frac{3}{4}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{4}{19}$, avec $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$. D'après le lemme 14, on a $a_{n+4} = 1$, 2, 3 ou 4. Laissant provisoirement de côté les éventualités $a_{n+4} = 3$ ou 4, étudions les deux autres.

L'inégalité $z_{n+2}\,t_{n+2} > \frac{7}{20}(x_{n+2} - y_{n+2})$ entraîne, en tenant compte du lemme 1 :

$$\frac{20}{7}\,z_{n+2} > \frac{x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1}{t_{n+1} - y_{n+1}} > x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1 > \frac{23\,x_{n+2} + 19}{19},$$

c'est-à-dire

(18.1) $$380\,z_{n+2} > 161\,x_{n+2} + 133.$$

Si $a_{n+4} = 2$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{3\,x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{3\,x_{n+5} + 1}, \qquad x_{n+2} = \frac{5\,x_{n+5} + 2}{3\,x_{n+5} + 1},$$

et (18.1) entraîne

$$(18.2) \qquad 305 > 380\,z_{n+5} + 64\,x_{n+5}.$$

D'autre part, les inégalités $-y_{n+5} > \frac{1}{3}$ et $z_{n+5}\,t_{n+5} > \frac{7}{20}(x_{n+5} - y_{n+5})$ entraînent encore (17.8), d'où, en comparant avec (18.2) :

$$x_{n+5} < \frac{782}{591}, \qquad \text{d'où} \qquad a_{n+5} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+6} > \frac{591}{191} > 3,$$

donc $a_{n+6} = 3$ ou 4;

— si $a_{n+6} = 3$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+5} = \frac{2\,x_{n+7} + z_{n+7}}{3\,x_{n+7} + 1}, \qquad x_{n+5} = \frac{4\,x_{n+7} + 1}{3\,x_{n+7} + 1}$$

et (18.2) entraîne

$$(18.3) \qquad 241 > 380\,z_{n+7} + 101\,x_{n+7};$$

— si $a_{n+6} = 4$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+5} = \frac{3\,x_{n+7} + z_{n+7}}{4\,x_{n+7} + 1}, \qquad x_{n+5} = \frac{5\,x_{n+7} + 1}{4\,x_{n+7} + 1}$$

et (18.2) entraîne

$$(18.4) \qquad 241 > 380\,z_{n+7} + 240\,x_{n+7}.$$

Or (18.4) implique (18.3); de plus, dans les deux cas, les inégalités $-y_{n+7} > \frac{1}{5}$ et $z_{n+7}\,t_{n+7} > \frac{7}{20}(x_{n+7} - y_{n+7})$ impliquent (17.6) d'où, en comparant avec (18.3)

$$x_{n+7} < \frac{536}{585} < 1, \quad \text{ce qui est contradictoire.}$$

Donc a_{n+4} ne peut être égal à 2.

Si $a_{n+4} = 1$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{2\,x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{2\,x_{n+5} + 1}, \qquad x_{n+2} = \frac{3\,x_{n+5} + 2}{2\,x_{n+5} + 1}$$

et (18.1) entraîne

$$(18.5) \qquad 305 > 380\,z_{n+5} - 11\,x_{n+5}.$$

D'autre part les inégalités $-y_{n+5} > \frac{1}{2}$ et $z_{n+5}\,t_{n+5} > \frac{7}{20}(x_{n+5} - y_{n+5})$ entraînent

$$(18.6) \qquad 40\,z_{n+5} > 14\,z_{n+5} + 7;$$

d'où, en comparant avec (18.5)

$$x_{n+5} < \frac{477}{244} < 2, \qquad \text{donc} \qquad a_{n+5} = 1.$$

Quatre cas sont alors possibles : $a_{n+6} = 4$, 3, 2 ou 1. Laissant provisoirement de côté les deux premiers, étudions les deux autres.

— Si $a_{n+6} = 2$, on a

$$z_{n+5} = \frac{2x_{n+7} + z_{n+7}}{2x_{n+7} + 1}, \qquad x_{n+5} = \frac{3x_{n+7} + 1}{2x_{n+7} + 1}$$

et (18.5) entraîne

$$316 > 380 z_{n+1} + 117 x_{n+7}. \tag{18.7}$$

De plus les inégalités $-y_{n+7} > \frac{1}{3}$ et $z_{n+7} t_{n+7} > \frac{7}{20}(x_{n+7} - y_{n+7})$ entraînent

$$60 z_{n+7} > 21 x_{n+7} + 7, \tag{18.8}$$

d'où, en comparant avec (18.7)

$$x_{n+6} < \frac{163}{150}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+7} > \frac{150}{13} > 11,$$

ce qui est exclu et écarte le cas $a_{n+6} = 2$.

— Si $a_{n+6} = 1$, on a

$$z_{n+5} = \frac{x_{n+7} + z_{n+7}}{x_{n+7} + 1}, \qquad x_{n+5} = \frac{2x_{n+7} + 1}{x_{n+7} + 1},$$

et (18.5) entraîne

$$316 > 380 z_{n+7} + 53 x_{n+7}. \tag{18.9}$$

D'autre part, (18.6) est valable ici après remplacement de l'indice $n+5$ par l'indice $n+7$, d'où, en comparant avec (18.9)

$$x_{n+7} < \frac{499}{372}, \qquad \text{d'où} \qquad a_{n+7} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+8} > \frac{372}{127} > 2, \quad \text{d'où } a_{n+8} = 2, 3 \text{ ou } 4.$$

Distinguons donc encore trois cas :

— si $a_{n+8} = 2$, on a

$$z_{n+7} = \frac{2x_{n+9} + z_{n+9}}{2x_{n+9} + 1}, \qquad x_{n+7} = \frac{3x_{n+9} + 1}{2x_{n+9} + 1},$$

et (18.9) entraîne

$$263 > 380 z_{n+9} + 287 x_{n+9},$$

ce qui contredit $x_{n+9} > 1$ (car $z_{n+9} > 0$) et est donc contradictoire;

— si $a_{n+8}=3$, on a

$$z_{n+7}=\frac{2x_{n+9}+z_{n+9}}{3x_{n+9}+1}, \qquad x_{n+7}=\frac{4x_{n+9}+1}{3x_{n+9}+1}$$

et (18.9) entraîne

(18.10) $$263>380z_{n+9}+24x_{n+9};$$

d'autre part les inégalités $-y_{n+9}>\frac{1}{4}$ et $z_{n+9}t_{n+9}>\frac{7}{20}(x_{n+9}-y_{n+9})$ entraînent

$$80z_{n+9}>28x_{n+9}+7,$$

d'où, en comparant avec (18.10)

$$x_{n+9}<\frac{919}{628}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+10}>\frac{628}{291}>2,$$

ce qui contredit le lemme 13 et est donc exclu;

— si $a_{n+8}=4$, on a

$$z_{n+7}=\frac{3x_{n+9}+z_{n+9}}{4x_{n+9}+1}, \qquad x_{n+7}=\frac{5x_{n+9}+1}{4x_{n+9}+1},$$

et (18.9) entraîne

$$263>380z_{n+9}+141x_{n+9};$$

mais comme l'inégalité $z_{n+9}t_{n+9}>\frac{7}{20}(x_{n+9}-y_{n+9})$ entraîne $z_{n+9}>\frac{7}{20}x_{n+9}$, on en déduit

$$x_{n+9}<\frac{263}{274}<1$$

ce qui est contradictoire.

Donc, en rassemblant ces résultats, on voit que le cas $a_{n+6}=1$ est lui aussi à écarter, et l'on peut énoncer :

Lemme 16 : *$a_n=4$ ne peut intervenir qu'immédiatement suivi de l'une des séquences*

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 4, \qquad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3, \qquad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \qquad \text{ou} \qquad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3.$$

En rapprochant ce lemme du lemme 15, on voit que (pour n assez grand) l'hypothèse $a_n=3$ ou 4 entraîne pour tout $n'\geqq n$, $a_{n'}=1, 3$ ou 4, donc en particulier $a_{n'}\neq 2$. Or le lemme 14, joint au corollaire du lemme 7, entraîne $\overline{\lim_n}\, a_n=3$ ou 4. Par suite, on a bien $a_n\neq 2$ pour tout n assez grand, et l'on peut énoncer :

Lemme 17. — *Pour tout n assez grand, on a $a_n=1$, 3 ou 4, l'éventualité $a_n=3$ ou 4 intervenant une infinité de fois.*

19. Exclusion des séquences 4 1 1 1 3 et 3 1 1 1 1 1 3. — Il résulte des lemmes 15 et 16 que la séquence 4 1 1 1 3 ne peut intervenir que comme partie de l'une ou de l'autre des deux séquences

1 1 1 4 1 1 1 3 1 1 1 4 ou 1 1 1 4 1 1 1 3 1 1 1 1 1 3.

Soit n le rang du cinquième terme de chacune de ces séquences. Dans les deux cas, on a $-y_n > \frac{3}{14}$ et (lemme 1) $t_n - y_n < 1$. Par suite

$$t_{n+4} = \frac{t_n + 7 - 5y_n}{11 - 7y_n} < \frac{124}{175}, \qquad -y_{n+4} = \frac{3 - 2y_n}{11 - 7y_n} > \frac{48}{175},$$

$$t_{n+4} - y_{n+4} = \frac{t_n + 10 - 7y_n}{11 - 7y_n} < \frac{172}{175}.$$

L'inégalité I_{n+4} entraîne donc

$$x_{n+4} > -\frac{48}{175} + \frac{20.124.48.172}{175(1240.48 + 15.296)} = \frac{29\,008}{18\,655},$$

d'où

$$x_{n+5} < \frac{18\,655}{10\,353}, \qquad x_{n+6} > \frac{10\,353}{8\,302} \qquad \text{et} \qquad x_{n+7} < \frac{8\,302}{2\,051}.$$

Si $a_{n+7} = 4$, on en déduit $x_{n+8} > \frac{2\,051}{98} > 20$ ce qui est exclu, ainsi, par suite, que la première des deux séquences en question.

L'inégalité J_{n+4} entraîne de son côté

$$x_{n+4} > -\frac{48}{175} + \frac{20.172.347}{7.175.519} = \frac{1\,019\,296}{635\,775},$$

d'où

$$x_{n+5} > \frac{635\,775}{383\,521}, \qquad x_{n+6} < \frac{383\,521}{252\,254} \qquad \text{et} \qquad x_{n+7} > \frac{252\,254}{131\,267}.$$

Si $a_{n+7} = 1$ on en déduit

$$x_{n+8} < \frac{131\,267}{120\,987} \qquad \text{et} \qquad x_{n+9} > \frac{120\,987}{10\,280} > 11$$

ce qui est exclu, ainsi, par suite, que la seconde des séquences en question.

D'où

Lemme 18. — *La séquence* 4 1 1 1 3 *est exclue.*

D'après les lemmes 15 à 18, la séquence 3 1 1 1 1 1 3 ne peut intervenir que comme partie de l'une ou l'autre des séquences

3 1 1 1 1 1 3 1 1 1 1 1 3 ou 4 1 1 1 1 1 3 1 1 1 1 1 3.

Désignons par $n - 7$ le rang du premier terme de chacune de ces deux séquences. On a, dans les deux cas :

$$-y_{n-6} > \frac{1}{5}, \qquad t_{n-6} - y_{n-6} < 1$$

et

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-6} + 28 - 18y_{n-6}}{37 - 23y_{n-6}}, \qquad -y_{n+1} = \frac{29 - 18y_{n-6}}{37 - 23y_{n-6}}.$$

L'inégalité

$$z_{n+1}t_{n+1} > \frac{7}{20}(x_{n+1} - y_{n+1})$$

s'écrit donc

$$\frac{20}{7}z_{n+1} > \frac{(37 - 23y_{n-6})x_{n+1} + 29 - 18y_{n-6}}{t_{n-6} + 28 - 18y_{n-6}} > \frac{(37 - 23y_{n-6})x_{n+1} + 29 - 18y_{n-6}}{29 - 17y_{n-6}}.$$

Cette dernière fonction homographique de $-y_{n-6}$ est croissante, car son déterminant est $38x_{n+1} + 29 > 0$; elle est donc supérieure à l'expression obtenue en remplaçant $-y_{n-6}$ par $\frac{1}{5}$; d'où l'inégalité

(19.1) $$3240z_{n+1} > 1456x_{n+1} + 1141.$$

Or les formules 2.6 donnent

$$z_{n+1} = \frac{12x_{n+6} + 4 - z_{n+6}}{11x_{n+6} + 3}, \qquad x_{n+1} = \frac{18x_{n+6} + 5}{11x_{n+6} + 3}.$$

Donc (19.1) entraîne

(19.2) $$2257 > 3240z_{n+6} - 121x_{n+6}.$$

Or les inégalités $t_{n+6} < \frac{3}{4}$ et $-y_{n+6} > \frac{1}{4}$, entraînées par $a_{n+5} = 3$, donnent, avec $z_{n+6}t_{n+6} > \frac{7}{20}(x_{n+6} - y_{n+6})$:

(19.3) $$60z_{n+6} > 28x_{n+6} + 7,$$

d'où, en comparant (19.2) et (19.3) :

$$x_{n+6} < \frac{1879}{1391}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+7} > \frac{1391}{488} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 13.

Donc

LEMME 19. — *La séquence* 3 1 1 1 1 1 3 *est exclue.*

Désignons par A, B, C, les séquences respectives :

	A.				B.						C.			
a................	4	1	1	1	4	1	1	1	1	1	3	1	1	1
b................	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Les lemmes 15 à 19 permettent d'énoncer :

PROPOSITION 9. — *Les seuls couples* (ξ, η) *pour lesquels on puisse avoir* $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$ *sont ceux dont le développement est exclusivement constitué, à partir d'un certain rang, par les séquences* A, B, C *la séquence* C *devant être, en outre, immédiatement précédée de* B.

20. PREMIÈRE ÉTUDE DES COMBINAISONS DES SÉQUENCES A, B, C. — Nous n'essaierons pas d'obtenir des résultats plus détaillés relatifs au développement des couples (ξ, η) astreints à la seule condition $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}\cdot$ Pour poursuivre l'étude des petites valeurs de $c(\xi, \eta)$, nous compléterons d'abord la proposition 9 par une autre relative aux couples (ξ, η) soumis à la condition plus restrictive $\left(\text{car } \frac{71}{25} < \frac{20}{7}\right)$

$$c(\xi, \eta) < \frac{71}{25} \tag{20.1}$$

qui permet de substituer aux inégalités (15.1) les inégalités plus fortes

$$z_n t_n > \frac{25}{71}(x_n - y_n), \qquad (x_n - z_n)(t_n - y_n) > \frac{25}{71}(x_n - y_n) \tag{20.2}$$

valables, elles aussi, à partir d'un certain rang, ce qui sera de nouveau sous-entendu.

Montrons que la condition (20.1) impose aux développements correspondants, outre bien entendu les conditions formulées dans la proposition 9, de ne plus contenir les séquences ABA, ABB, CBA et CBB.

D'après la proposition 9, ces séquences ne peuvent intervenir que comme partie de la séquence

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad a \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1, \qquad \text{où } a = 3 \text{ ou } 4.$$

Désignons par $n - 5$ le rang de l'entier a en question; on a, dans les deux cas

$$-y_{n-4} > \frac{3}{14}, \qquad t_{n-4} - y_{n-4} < 1$$

et, d'après les formules (2.6)

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-4} + 13 - 9y_{n-4}}{17 - 11y_{n-4}}, \qquad -y_{n+1} = \frac{14 - 9y_{n-4}}{17 - 11y_{n-4}}.$$

L'inégalité

$$z_{n+1} t_{n+1} > \frac{25}{71}(x_{n+1} - y_{n+1})$$

entraîne donc

$$\frac{71}{25} z_{n+1} > \frac{(17 - 11y_{n-4})x_{n+1} + 14 - 9y_{n-4}}{t_{n-4} + 13 - 9y_{n-4}} > \frac{(17 - 11y_{n-4})x_{n+1} + 14 - 9y_{n-4}}{14 - 8y_{n-4}}$$

Cette dernière fonction homographique de $-y_{n-4}$, de discriminant

$$18x_{n+1}+14>0,$$

est supérieure à l'expression obtenue en remplaçant $-y_{n-4}$ par $\frac{3}{14}$, d'où l'inégalité

(20.3) $$3\,124 z_{n+1} > 1\,355 x_{n+1} + 1\,115.$$

Or

$$z_{n+1}=\frac{33x_{n+8}+19-z_{n+8}}{31x_{n+8}+17}, \qquad x_{n+1}=\frac{51x_{n+8}+28}{31x_{n+8}+17};$$

donc (20.3) entraîne

(20.4) $$2\,461 > 3\,124 z_{n+8} + 578 x_{n+8}.$$

Or $-y_{n+8}>\frac{1}{2}$; donc l'inégalité $z_{n+8}t_{n+8}>\frac{25}{71}(x_{n+8}-y_{n+8})$ donne

(20.5) $$142 z_{n+8} > 50 x_{n+8} + 25.$$

En comparant (20.5) et (20.4) on obtient

$$x_{n+8}<\frac{1911}{1678}, \qquad \text{d'où} \qquad x_{n+9}>\frac{1678}{233}>7$$

ce qui est exclu.

Pour les couples (ξ, η) satisfaisant à (20.1), les séquences ABA, ABB, CBA et CBB sont donc exclues; c'est dire que les séquences AB et CB ne peuvent intervenir dans le développement de ces couples qu'immédiatement suivies de C. En tenant compte de la proposition 9, on obtient donc :

Proposition 10. — *Les seuls couples* (ξ, η) *pour lesquels on puisse avoir* $c(\xi, \eta)<\frac{71}{25}$ *sont ceux dont le développement est exclusivement constitué à partir d'un certain rang, par la répétition indéfinie de la séquence* A, *ou la répétition indéfinie de la séquence* B, *ou la répétition indéfinie de la séquence* BC, *ou enfin la combinaison des séquences* A *et* BC.

III. — Détermination des valeurs de $c(\xi, \eta)$ inférieures à γ.

21. Avant d'aborder l'étude des couples (ξ, η) concernés par la proposition 10, établissons quelques formules, conséquences des formules (2.6). Remarquons d'abord que, d'après (2.6), on a

(21.1) $$z_n = x_n - b_n - \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = a_n - b_n - \frac{z_{n+1}-1}{x_{n+1}} = c_n - \frac{z_{n+1}-1}{x_{n+1}}.$$

Supposons maintenant qu'on ait $c_n = c_{n+1} = \ldots = c_{n+k} = 1$; on en déduit

$$z_n - 1 = -\frac{z_{n+1} - 1}{x_{n+1}}, \qquad \text{d'où} \qquad z_n - 1 = (-1)^{k+1} \frac{z_{n+k+1} - 1}{x_{n+1} \ldots x_{n+k+1}}.$$

D'autre part, en posant $x_n = \dfrac{P_k x_{n+k+1} + P_{k-1}}{Q_k x_{n+k+1} + Q_{k-1}}$, où $\dfrac{P_k}{Q_k}$ et $\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ sont les $k^{\text{ième}}$ et $(k-1)^{\text{ième}}$ réduites du développement de x_n en fraction continue, on a

$$x_{n+1} \ldots x_{n+k+1} = Q_k x_{n+k+1} + Q_{k-1},$$

d'où

$$z_n - 1 = (-1)^{k+1} \frac{z_{n+k+1} - 1}{Q_k x_{n+k+1} + Q_{k-1}}. \tag{21.2}$$

Dans les développements que nous envisageons désormais, qui sont exclusivement constitués du couple $(a_n, b_n) = (1, 0)$ répété trois ou cinq fois consécutives, et des couples $(3, 1)$ et $(4, 2)$, l'égalité $c_n = 2$ caractérise ces deux derniers, tandis que $c_n = 1$ caractérise le premier. D'après (21.1) et (21.2), on aura donc :

— si $c_n = 2$, avec $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 1$:

$$z_n - 1 = 1 + \frac{z_{n+4} - 1}{3x_{n+4} + 2}; \tag{21.3}$$

— si en outre $c_{n+4} = c_{n+5} = 1$:

$$z_n - 1 = 1 + \frac{z_{n+6} - 1}{8x_{n+6} + 5}. \tag{21.4}$$

22. Étude des développements de période A. — Soit (x_0, z_0) le couple dont le développement admet, dès son premier terme, la période A. On a, d'après les formules classiques du développement en fraction continue et (21.3)

$$x_0 = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_4) = \frac{14x_4 + 9}{3x_4 + 2}, \qquad z_0 = 2 + \frac{z_4 - 1}{3x_4 + 2}.$$

De $x_4 = x_0$ et $z_4 = z_0$, avec $x_0 > 1$, on en déduit

$$x_0 = 2 + \sqrt{7}, \qquad z_0 = \frac{21 + 3\sqrt{7}}{14},$$

qui permettent aisément le calcul de x_1, x_2, x_3 et z_1, z_2, z_3.

Les nombres x_n et z_n appartiennent tous au corps de $\sqrt{7}$; ils ne prennent respectivement que quatre valeurs distinctes, correspondant à $n = 0$, 1, 2 et 3, en raison de leur périodicité. Les nombres y_n tendent respectivement, selon leur indice, vers les conjugués y'_n des x_n; et, par suite, les t_n tendent vers les conjugués t'_n des z_n. Donc $c(x_0, z_0)$ est égal à la plus grande des huit valeurs que prennent $\dfrac{x_n - y'_n}{z_n t'_n}$ (quatre valeurs) et $\dfrac{x_n - y'_n}{(x_n - z_n)(t'_n - y'_n)}$ (quatre valeurs). Or, parmi ces huit valeurs, deux seulement sont distinctes, et égales respectivement à $\frac{28\sqrt{7}}{27}$ et $\frac{28\sqrt{7}}{29}$. Donc

$$c(x_0, z_0) = \frac{28\sqrt{7}}{27} = 2,743\ldots.$$

On constate que cette valeur est effectivement inférieure à $\frac{71}{25}$.

Pour représenter la classe des nombres équivalents à (x_0, z_0) nous remarquerons que $(x_0, z_0) \sim \left(\sqrt{7}, \frac{3\sqrt{7}+7}{14}\right)$ et que ces deux couples sont encore équivalents à (ξ, η) avec

$$\xi = \frac{\sqrt{7}+2}{3\sqrt{7}+7} = \frac{7-\sqrt{7}}{14}, \qquad \eta = \frac{3\sqrt{7}+7}{14} \cdot \frac{1}{3\sqrt{7}+7} = \frac{1}{14},$$

où η a la forme la plus simple compatible avec cette équivalence. D'où

Proposition 11. — *Les couples* (ξ, η) *dont le développement admet, à partir d'un certain rang, la période* A, *sont tels que*

$$(\xi, \eta) \sim \left(\frac{7-\sqrt{7}}{14}, \frac{1}{14}\right), \qquad \text{avec} \quad c(\xi, \eta) = \frac{28\sqrt{7}}{27} \quad (^1).$$

23. **Étude des développements de période B.** — Soit (x_0, z_0) le couple dont le développement admet la période B, d'où

$$x_0 = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_6) = \frac{37x_6 + 23}{8x_6 + 5},$$

$$z_0 = 2 + \frac{z_6 - 1}{8x_6 + 5} \qquad [\text{formule } (\mathbf{21.4})],$$

c'est-à-dire, puisque $x_0 = x_6$ et $z_0 = z_6$:

$$x_0 = 2 + \frac{\sqrt{110}}{4}, \qquad z_0 = \frac{30 + \sqrt{110}}{20}.$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent montre que $c(x_0, z_0)$ est égal à la plus grande des douze valeurs que prennent les nombres (du corps de $\sqrt{110}$) $\frac{x_n - y'_n}{z_n t'_n}$ (six valeurs) et $\frac{x_n - y'_n}{(x_n - z_n)(t'_n - y'_n)}$ (six valeurs), Ces douze valeurs se réduisent à six valeurs distinctes dont les inverses, divisés par

(1) Ces couples (ξ, η) sont ceux envisagés par Cassels (*loc. cit.*), qui prouve que cette valeur de $c(\xi, \eta)$ est la seule qui soit inférieure à $\frac{4}{11}$, pourvu que η ne soit pas de la forme $M\xi + N$, avec M, N entiers.

$100\sqrt{110}$, valent respectivement 370, 395, 405, 416, 430 et 470. On a donc

$$c(x_0, z_0) = \frac{10\sqrt{110}}{37} = 2,834\ldots,$$

ce qui est encore inférieur à $\frac{71}{25}$.

Pour représenter la classe des nombres équivalents à (x_0, z_0) nous remarquerons que $(x_0, z_0) \sim \left(\frac{\sqrt{110}}{4}, \frac{10+\sqrt{110}}{20}\right) \sim (\xi, \eta)$ avec

$$\xi = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{110}+2}{\frac{1}{2}\sqrt{110}+5} = \frac{15-\sqrt{110}}{10}, \qquad \eta = \frac{10+\sqrt{110}}{20}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{110}+5} = \frac{1}{10},$$

où η a la forme la plus simple compatible avec cette équivalence. D'où :

Proposition 12. — *Les couples* (ξ, η) *dont le développement admet, à partir d'un certain rang, la période* B, *sont tels que*

$$(\xi, \eta) \sim \left(\frac{15-\sqrt{110}}{10}, \frac{1}{10}\right), \qquad \text{avec} \quad c(\xi, \eta) = \frac{10\sqrt{110}}{37} \quad (^5).$$

24. Étude des développements de période BC. — Soit (x_0, z_0) le couple dont le développement admet la période BC, d'où

$$(24.1) \quad x_0 = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_0) = \frac{476x_0+305}{103x_0+66},$$

$$z_0 = 2 + \frac{1}{8x_6+5} + \frac{z_0-1}{(8x_6+5)(3x_0+2)} \qquad [\text{formules } (21.3) \text{ et } (21.4)],$$

d'où

$$(24.2) \qquad z_0 = 2 + \frac{3x_0+2+z_0-1}{103x_0+66}.$$

De (24.1) et (24.2) on tire

$$x_0 = \frac{205+12\sqrt{510}}{103}, \qquad z_0 = \frac{19x_0+95}{90}.$$

$c(x_0, z_0)$ est égal à la plus grande des vingt valeurs que prennent $\frac{x_n-y'_n}{z_n t'_n}$ et $\frac{x_n-y'_n}{(x_n-z_n)(t'_n-y'_n)}$. Ces vingt valeurs se réduisent à dix valeurs distinctes, dont les inverses, divisés par $360\sqrt{510}$, sont 2872, 2873, 2888, 2932, 3007, 3112,

(5) Ces couples et cette constante sont ceux signalés par G. Poitou et moi-même en 1952, puis dans ma thèse (*loc. cit.*), où il est établi que la valeur en question de $c(\xi, \eta)$ est la plus petite de celles pour lesquelles η est rationnel, non entier, avec un dénominateur au plus égal à 10.

3 247, 3 833, 4 807, 6 247. On a donc

$$c(x_0, z_0) = \frac{360\sqrt{510}}{2\,872} = \frac{45\sqrt{510}}{359} = 2{,}830\ldots,$$

ce qui est aussi inférieur à $\frac{71}{25}$.

Pour représenter la classe des nombres équivalents à (x_0, z_0) nous remarquerons que $(x_0, z_0) \sim (x_1, z_1)$, avec

$$x_1 = \frac{69 + 4\sqrt{510}}{99}, \qquad z_1 = \frac{9x_1 + 71}{90};$$

on obtient encore un couple équivalent (x, z) en diminuant x_1 et z_1 d'une unité, ce qui donne

$$x = \frac{4\sqrt{510} - 30}{99}, \qquad z = \frac{9x - 10}{90}.$$

Enfin, en remarquant que $10 - 9x > 0$, on obtient un couple équivalent (ξ, η) par

$$\xi = \frac{1 - x}{10 - 9x} = \frac{225 - \sqrt{510}}{2\,340}, \qquad \eta = \frac{-z}{10 - 9x} = \frac{1}{90},$$

où η a la forme la plus simple compatible avec cette équivalence. D'où :

Proposition 13. — *Les couples (ξ, η) dont le développement admet, à partir d'un certain rang, la période* BC, *sont tels que*

$$(\xi, \eta) \sim \left(\frac{225 - \sqrt{510}}{2\,340}, \frac{1}{90}\right), \qquad \text{avec} \quad c(\xi, \eta) = \frac{45\sqrt{510}}{359}.$$

25. D'après la proposition 10, tous les couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta) < \frac{71}{25}$ différents de ceux qui sont concernés par les propositions 11, 12, 13, et où η n'est pas de la forme $M\xi + N$ (M, N entiers), ont un développement exclusivement constitué des séquences A et BC, où chacune de ces deux séquences, ainsi par suite que la séquence BCA, intervient une infinité de fois. Ce sont ces couples que nous allons désormais étudier exclusivement. Nous désignerons par D leur développement et nous montrerons d'abord que pour eux

$$c(\xi, \eta) = \overline{\lim_n} \frac{x_n - y_n}{z_n t_n},$$

où l'indice n parcourt seulement les valeurs pour lesquelles on a $a_{n-1} = 3$ (deuxième rang de chaque séquence C).

Pour faire cette démonstration, nous allons d'abord donner des encadrements, valables pour n assez grand, pour les valeurs de x_n, y_n, z_n, t_n aux rangs n tels que $a_n \neq 1$.

26. Encadrements pour x_n avec $a_n = 3$ ou 4. — Soient $x(\mathrm{A})$, $x(\mathrm{B})$, $x(\mathrm{C})$ les valeurs respectives de x_n au rang n du *premier terme* d'une séquence A, B ou C d'un développement D.

Comme, dans un développement D, la séquence A est suivie de A ou de B, on a

$$x(\mathrm{A}) = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x') = 4 + \frac{31x' + 20}{48x' + 31} \qquad \text{avec} \quad 1 < x' < 5,$$

d'où

$$4,645 < x(\mathrm{A}) < 4,646.$$

Comme une séquence B est suivie de CA ou CB, on a

$$x(\mathrm{B}) = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x') = 4 + \frac{64x' + 41}{103x' + 66}, \qquad \text{avec} \quad 4 < x' < 5,$$

d'où

$$4,621 < x(\mathrm{B}) < 4,622.$$

Comme une séquence C est suivie de A ou de B, on a

$$x(\mathrm{C}) = (3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x') = 3 + \frac{31x' + 20}{48x' + 31}, \qquad \text{avec} \quad 1 < x' < 5,$$

d'où

$$3,645 < x(\mathrm{C}) < 3,646.$$

27. Encadrements pour y_n avec $a_n = 3$ ou 4. — Soient $y(\mathrm{A})$, $y(\mathrm{B})$, $y(\mathrm{C})$ les valeurs respectives de y_n au rang *n suivant immédiatement* l'une des séquences A, B, ou C d'un développement D.

Comme la séquence A est précédée de A ou C, on a

$$-y(\mathrm{A}) = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x') = \frac{31x' + 20}{48x' + 31}, \qquad \text{avec} \quad 3 < x' < 5.$$

d'où

$$0,645 < -y(\mathrm{A}) < 0,646.$$

Comme la séquence B est précédée de A ou C, on a

$$-y(\mathrm{B}) = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x') = \frac{79x' + 51}{127x' + 82}, \qquad \text{avec} \quad 3 < x' < 5,$$

d'où

$$0,622 < -y(\mathrm{B}) < 0,623.$$

Comme la séquence C est précédée de B, on a

$$-y(\mathrm{C}) = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x') = \frac{66x' + 41}{103x' + 64}, \qquad \text{avec} \quad 4 < x' < 5,$$

d'où

$$0,640 < -y(\mathrm{C}) < 0,641.$$

Rassemblons ces résultats :

LEMME 20. — *Dans un développement* D, *on a*

$$
\begin{aligned}
&4{,}645 < x(\mathrm{A}) < 4{,}646, && 0{,}645 < -y(\mathrm{A}) < 0{,}646;\\
&4{,}621 < x(\mathrm{B}) < 4{,}622, && 0{,}622 < -y(\mathrm{B}) < 0{,}623;\\
&3{,}645 < x(\mathrm{C}) < 3{,}646, && 0{,}640 < -y(\mathrm{C}) < 0{,}641.
\end{aligned}
$$

28. ENCADREMENTS POUR z_n AVEC $a_n = 3$ OU 4. — Soient $z(\mathrm{A})$, $z(\mathrm{B})$, $z(\mathrm{C})$ les valeurs respectives de z_n au rang n du *premier terme* d'une séquence A, B ou C d'un développement D. Les encadrements cherchés seront obtenus en deux étapes.

Première étape. — Les séquences A et C sont suivies de A ou B; d'après la formule (21.3) on a donc

$$z(\mathrm{A}) = 2 + \frac{z'-1}{3x'+2}, \qquad \text{avec} \quad 2 < x' - z' < 3 \qquad \text{et} \qquad 4 < x' < 5,$$

d'où

$$2 < 2 + \frac{x'-4}{3x'+2} < z(\mathrm{A}) < 2 + \frac{x'-3}{3x'+2} < 2 + \frac{2}{17}.$$

Les mêmes inégalités sont valables pour $z(\mathrm{C})$, d'après (21.3).

La séquence B est suivie de C; d'après la formule (21.4), on a donc

$$z(\mathrm{B}) = 2 + \frac{z'-1}{8x'+5}, \qquad \text{avec} \quad 1 < x' - z' < 2 \qquad \text{et} \qquad 3 < x' < 4,$$

d'où

$$2 < 2 + \frac{x'-3}{8x'+5} < z(\mathrm{B}) < 2 + \frac{x'-2}{8x'+5} < 2 + \frac{2}{37}.$$

Nous retiendrons seulement le résultat suivant :

LEMME 21 : $z(\mathrm{A})$, $z(\mathrm{B})$ *et* $z(\mathrm{C})$ *sont compris entre* 2 *et* $2 + \frac{2}{17}$.

Deuxième étape. — Si la séquence A est suivie de B, donc de BC, on a, d'après (21.3) et (21.4)

$$z(\mathrm{A}) = 2 + \frac{8x'+5}{127x'+79} + \frac{z'-1}{127x'+79}, \qquad \text{avec} \quad 3 < x' < 4 \qquad \text{et} \qquad 2 < z' < 2 + \frac{2}{17}$$

d'après le lemme 21, d'où

$$\frac{8x'+6}{127x'+79} < z(\mathrm{A}) - 2 < \frac{8x'+6+\frac{2}{17}}{127x'+79},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la décroissance de ces fonctions homographiques de x' :

$$2{,}064 < z(\mathrm{A}) < 2{,}066.$$

Si la séquence A est suivie de A, donc de AA ou de AB, on a

$$z(\mathrm{A}) = 2 + \frac{3x' + 2 + z' - 1}{48x' + 31}, \qquad \text{avec} \quad 4 < x' < 5 \quad \text{et} \quad 2 < z' < 2 + \frac{2}{17} \text{ (lemme 21)},$$

d'où

$$\frac{3x' + 3}{48x' + 31} < z(\mathrm{A}) - 2 < \frac{3x' + 3 + \frac{2}{17}}{48x' + 31},$$

et par suite

$$2{,}066 < z(\mathrm{A}) < 2{,}068.$$

A cause de (21.3), $z(\mathrm{C})$ donne lieu aux mêmes inégalités.

La séquence B étant suivie de C, donc de CA ou de CB, on a

$$z(\mathrm{B}) = 2 + \frac{3x' + 2 + z' - 1}{103x' + 66}, \qquad \text{avec} \quad 4 < x' < 5 \quad \text{et} \quad 2 < z' < 2 + \frac{2}{17} \text{ (lemme 21)}$$

et par suite

$$2{,}030 < z(\mathrm{B}) < 2{,}032.$$

Rassemblons ces résultats :

Lemme 22. — *Dans un développement* D, *on a*

$$2{,}064 < z(\mathrm{A}) < 2{,}068, \qquad 2{,}030 < z(\mathrm{B}) < 2{,}032, \qquad 2{,}064 < z(\mathrm{C}) < 2{,}068.$$

29. Encadrements pour t_n avec $a_n = 3$ ou 4. — Soient $t(\mathrm{A})$, $t(\mathrm{B})$, $t(\mathrm{C})$ les valeurs respectives de t_n au rang *n suivant immédiatement* l'une des séquences A, B ou C d'un développement D. Les encadrements cherchés seront obtenus en deux étapes, et en utilisant les formules suivantes, analogues à (21.3) et (21.4) :

— Si $c_n = 2$, avec $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 1$:

$$t_n - 1 = 1 + \frac{t_{n+4} - 1}{3y_{n+4} + 2},$$

d'où, si $a_n = 4$:

(29.1) $$t_{n+6} = 1 - \frac{2 - t_n}{14 - 3y_n},$$

et si $a_n = 3$:

(29.2) $$t_{n+6} = 1 - \frac{2 - t_n}{11 - 3y_n}.$$

— Si $c_n = 2$, avec $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = c_{n+4} = c_{n+5} = 1$:

$$t_n - 1 = 1 + \frac{t_{n+6} - 1}{8y_{n+6} + 5},$$

d'où, si $a_n = 4$

(29.3) $$t_{n+6} = 1 - \frac{2 - t_n}{37 - 8y_n}.$$

Première étape. — Les formules (29.1), (29.3) et (29.2) donnent respectivement :

$$t(A) = 1 - \frac{2-t'}{14-3y'}, \qquad t(B) = 1 - \frac{2-t'}{37-8y'}, \qquad t(C) = 1 - \frac{2-t'}{11-3y'},$$

avec, dans les trois cas, $0 < t' < 1$ et $0 < -y' < 1$, d'où

$$\frac{6}{7} < t(A) < \frac{16}{17}, \qquad \frac{35}{37} < t(B) < \frac{44}{45}, \qquad \frac{9}{11} < t(C) < \frac{13}{14}.$$

Nous retiendrons seulement le résultat suivant :

LEMME 23 : $t(A)$, $t(B)$, $t(C)$ *sont compris entre* $\frac{9}{11}$ *et* 1 (*donc entre* 0,8 *et* 1).

Deuxième étape. — Si la séquence A est précédée de A, on a, d'après (29.1)

$$t(A) = 1 - \frac{16-3y'-t'}{223-48y'}, \qquad \text{avec} \quad 0{,}5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0{,}8 < t' < 1 \quad (\text{lemme 23}),$$

d'où

$$0{,}932 < t(A) < 0{,}934.$$

Si la séquence A est précédée de C, on a, d'après (29.1) et (29.2)

$$t(A) = 1 - \frac{13-3y'-t'}{175-48y'}, \qquad \text{avec} \quad 0{,}5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0{,}8 < t' < 1,$$

d'où

$$0{,}931 < t(A) < 0{,}933.$$

Si la séquence B est précédée de A, on a, d'après (29.1) et (29.3)

$$t(B) = 1 - \frac{16-3y'-t'}{590-127y'}, \qquad \text{avec} \quad 0{,}5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0{,}8 < t' < 1,$$

d'où

$$0{,}974 < t(B) < 0{,}975.$$

Si la séquence B est précédée de C, on a, d'après (29.2) et (29.3)

$$t(B) = 1 - \frac{13-3y'-t'}{463-127y'}, \qquad \text{avec} \quad 0{,}5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad \frac{9}{11} < t' < 1,$$

d'où

$$0{,}974 < t(B) < 0{,}975.$$

Enfin, la séquence C étant nécessairement précédée de B, on a

$$t(C) = 1 - \frac{39-8y'-t'}{476-103y'}, \qquad \text{avec} \quad 0{,}5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0{,}8 < t' < 1,$$

d'où

$$0{,}920 < t(C) < 0{,}921.$$

Rassemblons ces résultats.

LEMME 24. — *Dans un développement* D, *on a*

$$0{,}931 < t(\mathrm{A}) < 0{,}934, \qquad 0{,}974 < t(\mathrm{B}) < 0{,}975, \qquad 0{,}920 < t(\mathrm{C}) < 0{,}921.$$

30. Pour faire la démonstration annoncée au paragraphe 25, nous allons maintenant, à l'aide des lemmes 20, 22 et 24, donner des majorations ou des minorations, selon le cas, des quantités

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{x_n - y_n}{(x_n - y_n)(t_n - y_n)}$$

pour les différents rangs d'un développement D.

On abrège les calculs en remarquant d'abord que $a_n = 1$, d'où $b_n = 0$, entraînent

$$\frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} = \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{z_{n+1} t_{n+1}}, \tag{30.1}$$

de sorte qu'il suffit d'étudier $\frac{x_n - y_n}{z_n t_n}$ à tous les rangs n, et $\frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)}$ seulement aux rangs n tels que $a_n \neq 1$.

Étudions séparément les séquences A, B et C d'un développement D. Pour abréger, nous désignerons, dans ce paragraphe et les trois suivants, les quantités x_n, y_n, z_n, t_n respectivement par :

x, y, z, t pour le premier rang de la séquence envisagée;

x_k, y_k, z_k, t_k pour le ($k+1^{\text{ième}}$) rang de cette séquence ($1 \leq k \leq 3$ ou 5);

x', y', z', t' pour le rang qui suit immédiatement le dernier rang de cette séquence.

31. ÉTUDE DE LA SÉQUENCE A. — La séquence A étant suivie de A ou B et précédée de A ou C, on a

$$x = x(\mathrm{A}), \quad z = z(\mathrm{A}), \quad y' = y(\mathrm{A}), \quad t' = t(\mathrm{A});$$
$$x' = x(\mathrm{A}) \text{ ou } x(\mathrm{B}), \quad z' = z(\mathrm{A}) \text{ ou } z(\mathrm{B}), \quad y = y(\mathrm{A}) \text{ ou } y(\mathrm{C}),$$
$$t = t(\mathrm{A}) \text{ ou } t(\mathrm{C});$$

donc, d'après les lemmes 20, 22 et 24 :

$$4{,}645 < x < 4{,}646, \quad 0{,}640 < -y < 0{,}646, \quad 2{,}064 < z < 2{,}068, \quad 0{,}920 < t < 0{,}934;$$
$$4{,}621 < x' < 4{,}646, \quad 0{,}645 < -y' < 0{,}646, \quad 2{,}030 < z' < 2{,}068, \quad 0{,}931 < t' < 0{,}034.$$

De ces inégalités on déduit :

$$\frac{x-y}{zt} < \frac{4{,}65 + 0{,}65}{2{,}06 . 0{,}92} < 2{,}8, \qquad \frac{x-y}{(x-z)(t-y)} < \frac{4{,}65 + 0{,}65}{2{,}6 . 1{,}5} < 2.$$

$$x_1 = \frac{3x'+2}{2x'+1} < \frac{3.4{,}6 + 2}{2.4{,}6 + 1} < 1{,}55, \qquad -y_1 = \frac{1}{4-y} < \frac{1}{4{,}6} < 0{,}22,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z'-1}{2x'+1} > 1 - \frac{1{,}1}{2.4{,}6+1} > 0{,}89, \qquad t_1 = \frac{t+2-y}{4-y} > \frac{0{,}9 + 2 + 0{,}6}{4{,}6} > 0{,}76;$$

d'où

$$\frac{x_1 - y_1}{z_1 t_1} < \frac{1,55 + 0,22}{0,89 . 0,76} < 2,62.$$

$$x_2 = \frac{2x' + 1}{x' + 1} < \frac{2 . 4,65 + 1}{4,65 + 1} < 1,824, \qquad -y_2 = \frac{4 - y}{5 - y} < \frac{4,65}{5,65} < 0,824,$$

$$z_2 = 1 + \frac{z' - 1}{x' + 1} > 1 + \frac{1,03}{5,65} > 1,18, \qquad t_2 = \frac{t + 3 - y}{5 - y} > \frac{0,92 + 3 + 0,64}{5,64} > 0,808;$$

d'où

$$\frac{x_2 - y_2}{z_2 t_2} < \frac{1,824 + 0,824}{1,18 . 0,808} < 2,8.$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x'} < 1 + \frac{1}{4,6} < 1,22, \qquad -y_3 = \frac{5 - y}{9 - 2y} < \frac{5,6}{10,2} < 0,55,$$

$$z_3 = 1 - \frac{z' - 1}{x'} > 1 - \frac{1,1}{4,6} > 0,76, \qquad t_3 = \frac{t + 7 - 2y}{9 - 2y} > \frac{0,9 + 7 + 1,2}{9 + 1,2} > 0,89;$$

d'où

$$\frac{x_3 - y_3}{z_3 t_3} < \frac{1,22 + 0,55}{0,76 . 0,89} < 2,62.$$

En résumé, on peut énoncer :

Lemme 25. — *Si n est l'indice d'un terme de la séquence* A *dans un développement* D, *on a*

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} < 2,8 \qquad \textit{avec, si } a_n = 4, \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} < 2.$$

32. Étude de la séquence B. — La séquence B étant suivie de C et précédée de A ou C, on a, d'après les lemmes 20, 22 et 24 :

$$\begin{array}{ll} 4,621 < x < 4,622, & 0,640 < -y < 0,646, \\ 2,030 < z < 2,032, & 0,920 < t < 0,934, \\ 3,645 < x' < 3,646, & 0,622 < -y' < 0,623, \\ 2,064 < z' < 2,068, & 0,974 < t' < 0,975. \end{array}$$

De ces inégalités on déduit :

$$\frac{x - y}{zt} < \frac{4,63 + 0,65}{2,03 . 0,92} < 2,83, \qquad \frac{x - y}{(x - z)(t - y)} < \frac{4,63 + 0,65}{2,5 . 1,5} < 2.$$

$$x_1 = \frac{8x' + 5}{5x' + 3} < \frac{8 . 3,6 + 5}{5 . 3,6 + 3} < 1,61, \qquad -y_1 = \frac{1}{4 - y} < \frac{1}{4,6} < 0,22,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z' - 1}{5x' + 3} > 1 - \frac{1,1}{5 . 3,6 + 5} > 0,94, \qquad t_1 = \frac{t + 2 - y}{4 - y} > \frac{0,9 + 2 + 0,6}{4,6} > 0,76;$$

d'où

$$\frac{x_1 - y_1}{z_1 t_1} < \frac{1,61 + 0,22}{0,94 . 0,76} < 2,6,$$

$$x_2 = \frac{5x' + 3}{3x' + 2} < \frac{5 . 3,65 + 3}{3 . 3,65 + 2} < 1,641, \qquad -y_2 = \frac{4 - y}{5 - y} < \frac{4,65}{5,65} < 0,824,$$

$$z_2 = 1 + \frac{z' - 1}{3x' + 2} > 1 + \frac{1,064}{3 . 3,646 + 2} > 1,082, \qquad t_2 = \frac{t + 3 - y}{5 - y} > \frac{0,92 + 3 + 0,64}{5,64} > 0,808,$$

d'où

$$\frac{x_2-y_2}{z_2t_2}<\frac{1,641+0,824}{1,082.0,808}<2,83.$$

$$x_3=\frac{3x'+2}{2x'+1}<\frac{3.3,6+2}{2.3,6+1}<1,57, \qquad -y_3=\frac{5-y}{9-2y}<\frac{5,6}{10,2}<0,55,$$

$$z_3=1-\frac{z'-1}{2x'+1}>1-\frac{1,1}{2.3,6+1}>0,86, \qquad t_3=\frac{t+7-2y}{9-2y}>\frac{0,9+7+1,2}{9+1,2}<0,89;$$

d'où

$$\frac{x_3-y_3}{z_3t_3}<\frac{1,57+0,55}{0,86.0,89}<2,8.$$

$$x_4=\frac{2x'+1}{x'+1}<\frac{2.4+1}{4+1}=1,8, \qquad -y_4=\frac{9-2y}{14-3y}<\frac{9+2}{14+3}<0,7,$$

$$z_4=1+\frac{z'-1}{x'+1}>1+\frac{1}{6}>1,1, \qquad t_4=\frac{t+12-3y}{14-3y}>\frac{12,9}{14}>0,9;$$

d'où

$$\frac{x_4-y_4}{z_4t_4}<\frac{1,8+0,7}{1,1.0,9}<2,6.$$

$$x_3=1+\frac{1}{x'}<1+\frac{1}{3,64}<1,275, \qquad -y_5=\frac{14-3y}{23-5y}<\frac{14+3.0,6}{23+5.0,6}<0,608,$$

$$z_5=1-\frac{z'-1}{x'}>1-\frac{1,07}{3,64}>0,706, \qquad t_5=\frac{t+21-5y}{23-5y}>\frac{0,9+21+3}{23+3}>0,957;$$

d'où

$$\frac{x_5-y_5}{z_5t_5}<\frac{1,275+0,608}{0,706.0,957}<2,8.$$

En résumé, on peut énoncer :

LEMME 26. — *Si n est l'indice d'un terme de la séquence* B *dans un développement* D, *on a*

$$\frac{x_n-y_n}{z_nt_n}<2,83, \qquad \textit{avec, si } a_n=4, \quad \frac{x_n-y_n}{(x_n-z_n)(t_n-y_n)}<2.$$

33. ÉTUDE DE LA SÉQUENCE C. — La séquence C est précédée de B et suivie de A ou de B. D'après les lemmes 20, 22 et 24, on a donc :

$$\begin{array}{ll} 3,645< \quad x<3,646, & 2,064<z<2,068, \\ 0,622<-y<0,623, & 0,974<t<0,975, \\ 0,640<-y'<0,641, & 0,920<t'<0,921; \end{array}$$

avec, si C est suivie de A :

$$4,645<x'<4,646, \qquad 2,064<z'<2,068;$$

et, si C est suivie de B :

$$4,621<x'<4,622, \qquad 2,030<z'<2,032.$$

De ces inégalités on déduit :

— si C est suivie de A :

$$x_1 = \frac{3x'+2}{2x'+1} > \frac{3.4,65+2}{2.4,65+1} > 1,5485, \qquad -y_1 = \frac{1}{3-y} > \frac{1}{3,623} > 0,2760,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z'-1}{2x'+1} < 1 - \frac{1,064}{2.4,646+1} < 0,8967,$$

$$t_1 = \frac{t+1-y}{3-y} < \frac{0,975+1+0,623}{3,623} < 0,7171;$$

d'où

$$\frac{x_1-y_1}{z_1 t_1} > \frac{1,5485+0,2760}{0,8967.0,7171} > 2,837;$$

— si C est suivie de B :

$$x_1 = \frac{3x'+2}{2x'+1} < \frac{3.4,62+2}{2.4,62+1} < 1,5489, \qquad -y_1 = \frac{1}{3-y} < \frac{1}{3,622} < 0,2761,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z'-1}{2x'+1} > 1 - \frac{1,032}{2.4,62+1} > 0,8992,$$

$$t_1 = \frac{t+1-y}{3-y} > \frac{0,974+1+0,622}{3,622} > 0,7167;$$

d'où

$$\frac{x_1-y_1}{z_1 t_1} < \frac{1,5489+0,2761}{0,8992.0,7167} < 2,833;$$

— dans les deux cas (C suivie de A ou de B) :

$$\frac{x-y}{zt} < \frac{3,7+0,7}{2.0,9} < 2,5 \qquad \frac{x-y}{(x-z)(t-y)} < \frac{3,7+0,7}{1,5.1,6} < 2.$$

$$x_2 = \frac{2x'+1}{x'+1} < \frac{2.4,65+1}{4,65+1} < 1,8231, \qquad -y_2 = \frac{3-y}{4-y} < \frac{3,623}{4,623} < 0,7841,$$

$$z_2 = 1 + \frac{z'-1}{x'+1} > 1 + \frac{1,03}{5,65} > 1,1823, \qquad t_2 = \frac{t+2-y}{4-y} > \frac{0,974+2+0,622}{4,622} > 0,778;$$

d'où

$$\frac{x_2-y_2}{z_2 t_2} < \frac{1,8231+0,7841}{1,1823.0,778} < 2,835.$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x'} < 1 + \frac{1}{3,6} < 1,28, \qquad -y_3 = \frac{4-y}{7-2y} < \frac{4,6}{8,2} < 0,57,$$

$$z_3 = 1 - \frac{z'-1}{x'} > 1 - \frac{1,1}{4,6} > 0,76, \qquad t_3 = \frac{t+5-2y}{7-2y} > \frac{0,97+5+1,2}{7+1,2} > 0,87;$$

d'où

$$\frac{x_3-y_3}{z_3 t_3} < \frac{1,28+0,57}{0,76.0,87} < 2,8.$$

En résumé, on peut énoncer :

LEMME 27. — *Si n est l'indice d'un terme de la séquence* C *dans un développement* D, *on a*

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} < 2,835, \qquad \textit{avec, si } a_n = 3, \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} < 2,$$

sauf si C *est immédiatement suivie de* A, *n étant en outre tel que* $a_{n-1} = 3$, *auquel cas on a*

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} > 2,837.$$

En rapprochant les lemmes 25, 26, 27, on voit que le programme proposé au début du paragraphe 25 est rempli avec une précision supplémentaire, et l'on peut énoncer, en tenant compte de (30.1) :

PROPOSITION 14. — *Pour les couples* (ξ, η) *dont le développement est du type* D, *on a*

$$c(\xi, \eta) = \overline{\lim_{n}} \frac{x_n - y_n}{z_n t_n} \geqq 2,837,$$

où l'indice n parcourt seulement les valeurs pour lesquelles on a $a_{n-1} = 3$, *la séquence* C *commençant au rang* $n - 1$ *étant en outre immédiatement suivie de la séquence* A.

En tenant compte de la proposition 14, il résulte des propositions 11, 12 et 13, qui concernent des valeurs de $c(\xi, \eta)$ toutes inférieures à 2,837, et de la proposition 10, que les valeurs de $c(\xi, \eta)$ correspondant aux développements de périodes A, BC, ou B respectivement, sont isolées et sont les trois plus petites valeurs de $c(\xi, \eta)$, pourvu que η ne soit pas de la forme $\eta = M\xi + N$ (M, N entiers). En rapprochant ce résultat de ceux du paragraphe 9, relatifs au cas où $\eta = M\xi + N$, on voit que les parties *a*, *b*, *c*, *d* et *e* du théorème initial sont établies, avec la précision supplémentaire suivante, qui sera plus loin incluse dans la partie *f* du théorème :

PROPOSITION 15. — *Les valeurs de* $c(\xi, \eta)$ *supérieures à* $\frac{10\sqrt{110}}{37} = 2,834\ldots$ *sont supérieures à* 2,837. *Si de plus* $c(\xi, \eta) < \frac{71}{25} = 2,84$, *le développement du couple* (ξ, η) *est du type* D.

34. FORMULES RELATIVES AUX RANGS PRIVILÉGIÉS. — Nous allons maintenant comparer entre eux les couples (ξ, η) de développement D en nous fondant sur le nombre des séquences BC répétées consécutivement entre deux séquences A dans le développement D. Nous appellerons *privilégiés* les rangs *n* du développement visés par la proposition 14. Pour le calcul de $c(\xi, \eta)$, on peut se borner à considérer ces rangs privilégiés, ce que nons ferons désormais.

Soit n_0 un tel rang privilégié. Nous supposerons que dans le développement D auquel il appartient, la séquence A qui commence au rang n_0+3 est suivie d'au moins i séquences BC consécutives, et précédée d'au moins j séquences BC consécutives (i et j entiers, $i \geqq 0$, $j \geqq 1$). Nous désignerons par X, Y, Z, T les valeurs de x_{n_0}, y_{n_0}, z_{n_0}, t_{n_0}.

Désignons par a_i, x_i et z_i les valeurs de a_n, x_n et z_n au rang $n_0+11+10i$, qui est le cinquième rang après le dernier rang de la $i^{\text{ième}}$ séquence BC qui suit A, puisque la séquence BC contient 10 termes. S'il y a, après la séquence A, exactement i séquences BC consécutives, donc suivies de AA ou de AB, on a $a_i=4$, et s'il y a au moins $i+1$ séquences BC consécutives, on a $a_i=1$.

Désignons par a_j, y_j et t_j les valeurs de a_n, y_n et t_n au rang n_0-10j, qui est le troisième rang avant le premier rang de la $j^{\text{ième}}$ séquence BC précédant A. On a $a_j=1$, mais, s'il y a, avant la séquence A, exactement j séquences BC consécutives, donc elles-mêmes précédées de A, le quotient incomplet précédant a_j vaut 4, tandis que s'il y a au moins $j+1$ séquences BC consécutives avant A, ce quotient incomplet vaut 3.

Nous allons exprimer X et Z en fonction de x_i et z_i, et Y et T en fonction de y_j et t_j. Pour cela, il est commode d'introduire la suite $\{s_k\}$ définie par la formule de récurrence

$$s_{k+1}=542 s_k - s_{k-1} \qquad (k \text{ entier quelconque}), \tag{34.1}$$

avec

$$s_0=0, \qquad s_1=1, \qquad \text{d'où} \qquad s_{-k}=-s_k.$$

Calcul de X *et* Z *en fonction de* x_i *et* z_i. — D'après les définitions qu'on vient de donner, on a

$$\mathrm{X}=(1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_0)=\frac{765x_0+494}{494x_0+319}$$

et

$$x_0=(1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_1)=\varphi_1(x_1)=\varphi_i(x_i),$$

où φ_i désigne la $(i-1)^{\text{ième}}$ itérée de φ_1 [on pose $\varphi_0(x)=x$], avec

$$\varphi_i(x)=\frac{e_i x+f_i}{g_i x+h_i},$$

où e_i, f_i, g_i, h_i satisfont à la même récurrence que s_i (34.1), avec

$$e_0=1, \qquad f_0=0, \qquad g_0=0, \qquad h_0=1;$$
$$e_1=398, \qquad f_1=257, \qquad g_1=223, \qquad h_1=144;$$
$$e_i h_i - f_i g_i = 1.$$

On en déduit

$$\mathrm{X}=\frac{\mathrm{E}_i x_i+\mathrm{F}_i}{\mathrm{G}_i x_i+\mathrm{H}_i}, \tag{34.2}$$

où

$$E_i = 765 e_i + 494 g_i, \qquad F_i = 765 f_i + 494 h_i, \qquad G_i = 494 e_i + 319 g_i, \qquad H_i = 494 f_i + 319 h_i.$$

E_i, F_i, G_i, H_i satisfont donc à la même récurrence que s_i, avec

$$E_{-1} = -2, \qquad F_{-1} = 7, \qquad G_{-1} = -1, \qquad H_{-1} = 4;$$
$$E_0 = 765, \qquad F_0 = 494, \qquad G_0 = 494, \qquad H_0 = 319;$$

(34.3) $$E_i H_i - F_i G_i = -1.$$

Des valeurs prises pour $i = 0$ et $i = 1$ par e_i, f_i, g_i, h_i, on déduit

(34.4) $$e_i = 398 s_i - s_{i-1}, \qquad f_i = 257 s_i, \qquad g_i = 223 s_i, \qquad h_i = 144 s_i - s_{i-1};$$

des valeurs prises pour $i = -1$ et $i = 0$ par E_i, F_i, G_i, H_i, on déduit

(34.5) $$\begin{cases} E_i = 765\, s_{i+1} + 2 s_i, & F_i = 494\, s_{i+1} - 7 s_i, \\ G_i = 494 s_{i+1} + s_i, & H_i = 319\, s_{i+1} - 4 s_i. \end{cases}$$

D'autre part, l'application répétée des formules (21.1) et (21.2) donne

$$Z - 1 = -\frac{51\, x_0 + 33 + z_0 - 1}{G_0 x_0 + H_0},$$

$$z_{k-1} - 1 = \frac{51\, x_k + 33 + z_k - 1}{g_1 x_k + h_1} \qquad (1 \leqq k \leqq i);$$

d'où, en regroupant par un calcul par récurrence facile :

$$z_0 - 1 = \frac{51\{(e_0 + e_1 + \ldots + e_{i-1}) x_i + f_0 + \ldots + f_{i-1}\} + 33\{(g_0 + \ldots + g_{i-1}) x_i + h_0 + \ldots + h_{i-1}\} + z_i - 1}{g_i x_i + h_i},$$

$$Z - 1 = -\frac{51\{(e_0 + e_1 + \ldots + e_{i-1}) x_i + f_0 + \ldots + f_{i-1}\} + 33\{(g_0 + \ldots + g_{i-1}) x_i + h_0 + \ldots + h_{i-1}\} + z_i - 1}{G_i x_i + H_i}.$$

Or, en désignant par θ et θ' les racines de l'équation

$$\theta^2 = 542\,\theta - 1, \qquad \text{d'où} \qquad \theta\theta' = 1,$$

on a

$$s_i = \frac{\theta^i - \theta'^i}{\theta - \theta'};$$

d'où

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_i = \frac{1}{\theta - \theta'}\left(\frac{\theta^{i+1} - 1}{\theta - 1} - \frac{\theta'^{i+1} - 1}{\theta' - 1}\right) = \frac{s_{i+1} - s_i - 1}{\theta + \theta' - \theta\theta' - 1} = \frac{s_{i+1} - s_i - 1}{540}.$$

Des formules (34.4) on tire donc, en tenant compte de (34.1) :

$$\sum_{k=0}^{i} e_k = \frac{1}{540}(397 s_{i+1} + 143 s_i + 143), \qquad \sum_{k=0}^{i} f_k = \frac{257}{540}(s_{i+1} - s_i - 1),$$

$$\sum_{k=0}^{i} g_k = \frac{223}{540}(s_{i+1} - s_i - 1), \qquad \sum_{k=0}^{i} h_k = \frac{1}{540}(143 s_{i+1} + 397 s_i + 397).$$

En substituant ces valeurs, on trouve pour Z :

$$Z = \frac{G_i x_i + H_i - \frac{1}{90}(4\,601\, s_{i+1} - 11\, s_i - 11)x_i - \frac{1}{90}(2\,971\, s_{i+1} - s_i - 1) - (z_i - 1)}{G_i x_i + H_i},$$

d'où

$$(34.6)\quad Z = \frac{(G_i - 51\, s_{i+1})x_i + H_i - 33\, s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1)(11\, x_i + 1) - (z_i - 1)}{G_i x_i + H_i}.$$

Calcul de Y *et* T *en fonction de y_j et t_j.* — En posant $Y = y_0$ et $T = t_0$, on a

$$Y = y_0 = -\left(0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -\frac{1}{y_1}\right) = -\psi_1(-y_1) = -\psi_j(-y_j),$$

où ψ_j désigne la $(j-1)^{\text{ième}}$ itérée de ψ_1 [on pose $\psi_0(x) = x$], avec

$$(34.7)\qquad \psi_j(x) = \frac{E'_j x + F'_j}{G'_j x + H'_j}, \qquad \text{d'où} \qquad -Y = \frac{-E'_j y_j + F'_j}{-G'_j y_j + H'_j},$$

où E'_j, F'_j, G'_j, H'_j satisfont à la même récurrence que s_j (34.1), avec

$$(34.8)\qquad E'_j H'_j - G'_j F'_j = 1$$

et

$$E'_0 = 1,\quad F'_0 = 0,\quad G'_0 = 0,\quad H'_0 = 1,$$
$$E'_1 = 82,\quad F'_1 = 127,\quad G'_1 = 297,\quad H'_1 = 460;$$

d'où

$$(34.9)\quad E'_j = 82\, s_j - s_{j-1},\qquad F'_j = 127\, s_j,\qquad G'_j = 297\, s_j,\qquad H'_j = 460\, s_j - s_{j-1}.$$

D'autre part, en procédant comme au paragraphe 29 pour l'établissement de (29.1), (29.2) et (29.3), on trouve

$$t_{k-1} - 1 = -\frac{-84\, y_k + 130 - (t_k - 1)}{-G'_1 y_k + H'_1} \qquad (1 \leq k \leq j),$$

d'où, en regroupant par un calcul par récurrence facile

$$T - 1 = -\frac{\left\{\begin{array}{l} 84\,\{-(E'_0 + E'_1 + \ldots + E'_{j-1})y_j + F'_0 + \ldots + F'_{j-1}\} \\ \quad + 130\,\{-(G'_0 + \ldots + G'_{j-1})y_j + H'_0 + \ldots + H'_{j-1}\} - (t_j - 1) \end{array}\right\}}{-G'_j y_j + H'_j}.$$

Or, de (34.9) on tire, en tenant compte de (34.1)

$$\sum_{k=0}^{j-1} E'_k = \frac{1}{540}(81\, s_j + 459\, s_{j-1} + 459), \qquad \sum_{k=0}^{j-1} F'_k = \frac{127}{540}(s_j - s_{j-1} - 1),$$

$$\sum_{k=0}^{j-1} G'_k = \frac{297}{540}(s_j - s_{j-1} - 1), \qquad \sum_{k=0}^{j-1} H'_k = \frac{1}{540}(459\, s_j + 81\, s_{j-1} + 81);$$

d'où

$$(34.10)\quad T = \frac{-(G'_j - 84 s_j) y_j + H'_j - 130 s_j - \frac{1}{90}(s_j - s_{j-1} - 1)(-9 y_j + 23) + t_j - 1}{-G'_j y_j + H'_j}.$$

35. Ces formules étant établies, envisageons les deux séquences suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} S : \ A\underbrace{BC\ldots BC}_{j \text{ fois BC}}A\underbrace{BC\ldots BC}_{i \text{ fois BC}}A \\ S' : \ A\underbrace{BC\ldots\ldots BC}_{j' \text{ fois BC}}A\underbrace{BC\ldots\ldots BC}_{i' \text{ fois BC}}A \end{array}\right\} \text{avec} \quad 0 \leqq i < i', \qquad 1 \leqq j < j'.$$

Désignons respectivement par X, Y, Z, T et X′, Y′, Z′, T′ les valeurs, pour S et S′, de x_n, y_n, z_n, t_n au rang privilégié qui précède immédiatement la séquence centrale A dans S et dans S′, et posons

$$x_i = x, \qquad z_i = z, \qquad y_j = y, \qquad t_j = t \quad \text{pour la séquence S;}$$
$$x_i = x', \qquad z_i = z', \qquad y_j = y', \qquad t_j = t' \quad \text{pour la séquence S}'.$$

Les nombres X, Y, Z, T; X′, Y′, Z′, T′; x, y, z, t; x', y', z', t' sont susceptibles des encadrements suivants, déduits des formules de récurrence de l'algorithme et des lemmes 20, 22 et 24.

On a

$$X = \frac{3x(A) + 2}{2x(A) + 1}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{3.4,65 + 2}{2.4,65 + 1} < X < \frac{3.4,64 + 2}{2.4,64 + 1};$$

le même encadrement vaut pour X′, d'où

$$(35.1) \qquad 1,548 < X < 1,549, \qquad 1,548 < X' < 1,549.$$

On a

$$Z = 1 - \frac{z(A) - 1}{2x(A) + 1}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - \frac{1,068}{2.4,645 + 1} < Z < 1 - \frac{1,064}{2.4,646 + 1};$$

le même encadrement vaut pour Z′, d'où

$$(35.2) \qquad 0,896 < Z < 0,897, \qquad 0,896 < Z' < 0,897.$$

On a

$$-Y = \frac{1}{3 - y(B)}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{3,623} < -Y < \frac{1}{3,622};$$

le même encadrement vaut pour $-$ Y′ et $-y'$, d'où

$$(35.3) \quad 0,276 < -Y < 0,277, \qquad 0,276 < -Y' < 0,277, \qquad 0,276 < -y' < 0,277.$$

On a

$$T = \frac{t(B) + 1 - y(B)}{3 - y(B)}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{0,974 + 1 + 0,622}{3,622} < T < \frac{0,975 + 1 + 0,623}{3,623};$$

le même encadrement vaut pour T′ et t', d'où

$$(35.4)\qquad 0{,}716 < \mathrm{T} < 0{,}718, \qquad 0{,}716 < \mathrm{T}' < 0{,}718, \qquad 0{,}716 < t' < 0{,}718.$$

On a

$$x' = \frac{2x(\mathrm{C})+1}{x(\mathrm{C})+1}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2.3{,}65+1}{3{,}65+1} < x' < \frac{2.3{,}64+1}{3{,}64+1};$$

donc

$$(35.5)\qquad 1{,}784 < x' < 1{,}785.$$

On a

$$z' = 1 + \frac{z(\mathrm{C})-1}{x(\mathrm{C})+1}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 + \frac{1{,}064}{4{,}646} < z' < 1 + \frac{1{,}068}{4{,}645};$$

donc

$$(35.6)\qquad 1{,}229 < z' < 1{,}230.$$

On a

$$x = x(\mathrm{A}) \quad \text{ou} \quad x(\mathrm{B}) \qquad \text{et} \qquad z = z(\mathrm{A}) \quad \text{ou} \quad z(\mathrm{B}),$$

d'où

$$(35.7)\qquad 4{,}621 < x < 4{,}646, \qquad 2{,}030 < z < 2{,}068.$$

Enfin on a

$$-y = \frac{1}{4-\bar{y}} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\bar{t}+2-\bar{y}}{4-\bar{y}},$$

avec

$$\bar{y} = y(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \bar{t} = t(\mathrm{A}),$$

ou

$$\bar{y} = y(\mathrm{C}) \qquad \text{et} \qquad \bar{t} = t(\mathrm{C});$$

d'où

$$\frac{1}{4{,}646} < -y < \frac{1}{4{,}64} \qquad \text{et} \qquad \frac{0{,}920+2+0{,}640}{4{,}64} < t < \frac{0{,}934+2+0{,}646}{4{,}646},$$

c'est-à-dire

$$(35.8)\qquad 0{,}215 < -y < 0{,}216, \qquad 0{,}767 < t < 0{,}771.$$

36. En utilisant les inégalités (35.1) à (35.8) et les formules (34.1) à (34.10), nous allons maintenant évaluer la différence

$$\frac{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}{\mathrm{ZT}} - \frac{\mathrm{X}'-\mathrm{Y}'}{\mathrm{Z}'\mathrm{T}'} = \left(\frac{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}{\mathrm{ZT}} - \frac{\mathrm{X}'-\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}'\mathrm{T}}\right) - \left(\frac{\mathrm{X}'-\mathrm{Y}'}{\mathrm{Z}'\mathrm{T}'} - \frac{\mathrm{X}'-\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}'\mathrm{T}}\right)$$

en évaluant séparément chacune des deux parenthèses.

Calcul de $\dfrac{X-Y}{ZT} - \dfrac{X'-Y}{Z'T}$. — D'après (34.2) et (34.6), on a [6]

$$(36.1)\qquad \begin{aligned}\Delta &= [(X-Y)Z' - (X'-Y)Z](G_i x + H_i)(G_i x' + H_i)\\ &= [(E_i - G_i Y)x + F_i - H_i Y]\\ &\quad\times\Big\{\Big[G_i - 51 s_{i+1} - \frac{11}{90}(s_{i+1} - s_i - 1)\Big]x'\\ &\qquad + H_i - 33 s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) - (z' - 1)\Big\}\\ &\quad - [(E_i - G_i Y)x' + F_i - H_i Y]\\ &\quad\times\Big\{\Big[G_i - 51 s_{i+1} - \frac{11}{90}(s_{i+1} - s_i - 1)\Big]x\\ &\qquad + H_i - 33 s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) - (z - 1)\Big\}.\end{aligned}$$

En développant Δ, on trouve

$$(36.2)\qquad \Delta = \mathfrak{X}(x - x') + \mathfrak{Z}(z - z') + \mathfrak{U}(x'z - xz'),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= E_i - G_i Y + (E_i - G_i Y)\Big[H_i - 33 s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1)\Big]\\ &\quad - (F_i - H_i Y)\Big[G_i - 51 s_{i+1} - \frac{11}{90}(s_{i+1} - s_i - 1)\Big],\end{aligned}$$

$$\mathfrak{Z} = F_i - H_i Y, \qquad \mathfrak{U} = E_i - G_i Y.$$

Développons $\mathfrak{X}$ en tenant compte de (34.3) et (34.5). Il vient

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} - (E_i - G_i Y) &= E_i H_i - F_i G_i + s_{i+1}[51 F_i - 33 E_i - Y(51 H_i - 33 G_i)]\\ &\quad + \frac{s_{i+1} - s_i - 1}{90}[11 F_i - E_i - Y(11 H_i - G_i)]\\ &= -1 - \frac{1}{90}[11 F_i - E_i - Y(11 H_i - G_i)]\\ &\quad + \Big(\frac{79}{90} - \frac{Y}{2}\Big)(s_{i+1}^2 - 542 s_i s_{i+1} + s_i^2).\end{aligned}$$

Or, d'après (34.1), on a

$$s_{i+1}^2 - 542 s_i s_{i+1} + s_i^2 = s_i^2 - s_{i+1} s_{i-1} = s_1^2 - s_2 s_0 = 1.$$

Par suite, en regroupant :

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{90}[91 E_i - 11 F_i - 11 - Y(91 G_i - 11 H_i + 45)].$$

---

(6) Désormais, dans tous les calculs qui suivront, les crochets auront la signification associative habituelle, et ne désigneront plus la partie entière de la quantité qu'ils encadrent.

D'après (34.5), on a donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= \frac{1}{90}[91(765s_{i+1}+2s_i)-11(494s_{i+1}-7s_i)-11\\ &\qquad -Y\{91(494s_{i+1}+s_i)-11(319s_{i+1}-4s_i)+45\}]\\ &= \frac{1}{90}[64\,181s_{i+1}+259s_i-11-Y(41\,445s_{i+1}+135s_i+45)],\\ \mathfrak{Z} &= 494s_{i+1}-7s_i-Y(319s_{i+1}-4s_i),\\ \mathfrak{U} &= 765s_{i+1}+2s_i-Y(494s_{i+1}+\ s_i).\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (35.3) pour $-Y$, on déduit donc de (36.2)

$$\begin{gathered}75\,619{,}82s_{i+1}+296{,}26s_i+1{,}42<90\mathfrak{X}<75\,661{,}265s_{i+1}+296{,}395s_i+1{,}465,\\ 582{,}044s_{i+1}-8{,}104s_i<\mathfrak{Z}<582{,}363s_{i+1}-8{,}108s_i,\\ 901{,}344s_{i+1}+2{,}276s_i<\mathfrak{U}<901{,}838s_{i+1}+2{,}277s_i.\end{gathered}$$

De (34.1) on tire

(**36**.3) $$s_{i+1}\geqq 1 \quad \text{et} \quad 0\leqq 541s_i\leqq s_{i+1} \quad (i\geqq 0),$$

d'où

$$840s_{i+1}<\mathfrak{X}<841s_{i+1}, \qquad 582s_{i+1}<\mathfrak{Z}<583s_{i+1}, \qquad 901s_{i+1}<\mathfrak{U}<902s_{i+1}.$$

Or, de (35.5), (35:6) et (35.7), on déduit

$$2{,}836<x-x'<2{,}862, \qquad 0{,}8<z-z'<0{,}839, \qquad 1{,}987<xz'-x'z<2{,}094;$$

d'où

$$840.2{,}836+582.0{,}8-902.2{,}094<\frac{\Delta}{s_{i+1}}<841.2{,}862+583.0{,}839-901.1{,}987,$$

c'est-à-dire

(**36**.4) $$959s_{i+1}<\Delta<1\,106s_{i+1}.$$

D'autre part, en utilisant encore les formules (34.5) et les inégalités (35.5) et (35.7), on trouve

$$\begin{aligned}&(1\,200{,}296s_{i+1}-2{,}216s_i)(2\,601{,}774s_{i+1}+0{,}621s_i)\\ &\quad<(G_ix+H_i)(G_ix'+H_i)<(1\,200{,}79s_{i+1}-2{,}215s_i)(2\,614{,}124s_{i+1}+0{,}646s_i),\end{aligned}$$

d'où, d'après (36.3)

(**36**.5) $$3\,120\,000s_{i+1}^2<(G_ix+H_i)(G_ix'+H_i)<3\,140\,000s_{i+1}^2.$$

Des inégalités (35.2) et (35.4) on déduit encore

(**36**.6) $$0{,}574<(0{,}896)^2.0{,}716<ZZ'T<(0{,}897)^2.0{,}718<0{,}578.$$

De (36.1), (36.4), (36.5) et (36.6) on déduit finalement

$$\frac{959}{0{,}578.3\,140\,000s_{i+1}}<\frac{X-Y}{ZT}-\frac{X'-Y}{Z'T}<\frac{1\,106}{0{,}574.3\,120\,000s_{i+1}},$$

d'où

$$(36.7)\qquad \frac{1}{1900 s_{i+1}} < \frac{X-Y}{ZT} - \frac{X'-Y}{Z'T} < \frac{1}{1600 s_{i+1}}.$$

37. *Calcul de* $\frac{X'-Y'}{Z'T'} - \frac{X'-Y}{Z'T}$. *Conséquences.* — D'après (34.7) et (34.10), on a

$$(37.1)\qquad \begin{aligned}\Delta' &= [(X'-Y')T - (X'-Y)T'](-G'_j y + H'_j)(-G'_j y' + H'_j)\\ &= [F'_j + X'H'_j - y'(E'_j + X'G'_j)]\\ &\quad\times\Big[H'_j - 130 s_j - \frac{23}{90}(s_j - s_{j-1} - 1)\\ &\qquad - y\Big\{G'_j - 84 s_j - \frac{1}{10}(s_j - s_{j-1} - 1)\Big\} + t - 1\Big]\\ &\quad - [F'_j + X'H'_j - y(E'_j + X'G'_j)]\\ &\quad\times\Big[H'_j - 130 s_j - \frac{23}{90}(s_j - s_{j-1} - 1)\\ &\qquad - y'\Big\{G'_j - 84 s_j - \frac{1}{10}(s_j - s_{j-1} - 1)\Big\} + t' - 1\Big],\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(37.2)\qquad \Delta' = \mathcal{Y}(y'-y) + \mathcal{T}(t-t') + \mathcal{V}(t'y - ty').$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &= E'_j + X'G'_j + (F'_j + X'H'_j)\Big[G'_j - 84 s_j - \frac{1}{10}(s_j - s_{j-1} - 1)\Big]\\ &\quad - (E'_j + X'G'_j)\Big[H'_j - 130 s_j - \frac{23}{90}(s_j - s_{j-1} - 1)\Big],\\ \mathcal{T} &= F'_j + X'H'_j, \qquad \mathcal{V} = E'_j + X'G'_j.\end{aligned}$$

Développons $\mathcal{Y}$ en tenant compte de (34.8) et (34.9). Il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} - (E'_j + X'G'_j) &= F'_j G'_j - E'_j H'_j + s_j[130 E'_j - 84 F'_j + X'(130 G'_j - 84 H'_j)]\\ &\quad + \frac{s_j - s_{j-1} - 1}{90}[23 E'_j - 9 F'_j + X'(23 G'_j - 9 H'_j)]\\ &= -1 - \frac{1}{90}[23 E'_j - 9 F'_j + X'(23 G'_j - 9 H'_j)]\\ &\quad + \frac{23 - 9X'}{90}(s_{j-1}^2 - 542 s_j s_{j-1} + s_j^2)\\ &= -\frac{1}{90}[23 E'_j - 9 F'_j + 67 + X'(23 G'_j - 9 H'_j + 9)].\end{aligned}$$

D'après (34.9) on a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} &= \frac{1}{90}[67(82 s_j - s_{j-1}) + 9.127 s_j - 67 + X'\{67.297 s_j + 9(460 s_j - s_{j-1}) - 9\}]\\ &= \frac{1}{90}[6637 s_j - 67 s_{j-1} - 67 + X'(24039 s_j - 9 s_{j-1} - 9)],\\ \mathcal{T} &= 127 s_j + X'(460 s_j - s_{j-1}), \qquad \mathcal{V} = 82 s_j - s_{j-1} + 297 X' s_j.\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (35.1) pour X', on en déduit

$$43\,849{,}372 s_j - 80{,}932 s_{j-1} - 80{,}932 < 90\mathcal{Y} < 43\,873{,}411 s_j - 80{,}941 s_{j-1} - 80{,}941,$$
$$839{,}080 s_j - 1{,}548 s_{j-1} < \mathcal{E} < 839{,}540 s_j - 1{,}549 s_{j-1},$$
$$541{,}756 s_j - s_{j-1} < \mathcal{V} < 542{,}053 s_j - s_{j-1}.$$

De

(37.3) $$s_j \geqq 1, \qquad 0 \leqq 541 s_{j-1} \leqq s_j,$$

on déduit alors

$$486 s_j < \mathcal{Y} < 488 s_j, \qquad 839 s_j < \mathcal{E} < 840 s_j, \qquad 541 s_j < \mathcal{V} < 543 s_j.$$

Or, de (35.3), (35.4) et (35.8), on tire

$$0{,}06 < y - y' < 0{,}062, \qquad 0{,}049 < t - t' < 0{,}055, \qquad 0{,}056 < yt' - y't < 0{,}06$$

et (37.2) entraîne donc

$$-488.0{,}062 + 839.0{,}049 + 541.0{,}056 < \frac{\Delta'}{s_j} < -486.0{,}06 + 840.0{,}055 + 543.0{,}06,$$

c'est-à-dire

(37.4) $$41 s_j < \Delta' < 50 s_j.$$

D'autre part, en utilisant encore les formules (34.9) et les inégalités (35.3) et (35.8), on trouve

$$\begin{aligned}&(541{,}972 s_j - s_{j-1})(523{,}855 s_j - s_{j-1})\\ &\quad < (\mathrm{H}'_j - \mathrm{G}'_j y)(\mathrm{H}'_j - \mathrm{G}'_j y') < (542{,}269 s_j - s_{j-1})(524{,}071 s_j - s_{j-1}),\end{aligned}$$

d'où

(37.5) $$283\,000 s_j^2 < (\mathrm{H}'_j - \mathrm{G}'_j y)(\mathrm{H}'_j - \mathrm{G}'_j y') < 285\,000 s_j^2.$$

Des inégalités (35.2) et (35.4) on déduit encore

(37.6) $$0{,}458 < (0{,}716)^2.0{,}896 < \mathrm{TT'Z} < (0{,}718)^2.0{,}897 < 0{,}463.$$

De (37.1), (37.4), (37.5) et (37.6), on déduit finalement

$$\frac{41}{0{,}463.285\,000 s_j} < \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}'}{\mathrm{Z'T'}} - \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}}{\mathrm{Z'T}} < \frac{50}{0{,}458.283\,000 s_j},$$

d'où

(37.7) $$\frac{1}{3\,300 s_j} < \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}'}{\mathrm{Z'T'}} - \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}}{\mathrm{Z'T}} < \frac{1}{2\,500 s_j}.$$

En rapprochant les inégalités (36.7) et (37.7) on obtient donc

(37,8) $$\frac{1}{1\,900 s_{i+1}} - \frac{1}{2\,500 s_j} < \frac{\mathrm{X} - \mathrm{Y}}{\mathrm{ZT}} - \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}'}{\mathrm{Z'T'}} < \frac{1}{1\,600 s_{i+1}} - \frac{1}{3\,300 s_j}.$$

En posant $\lambda = \dfrac{\mathrm{X} - \mathrm{Y}}{\mathrm{ZT}}$ et $\lambda' = \dfrac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}'}{\mathrm{Z'T'}}$, et en tenant compte des inégalités

$1 \leqq s_k \leqq \frac{1}{541} s_{k+1}$, où k est, comme j et $i+1$, un entier au moins égal à 1, et aussi de $\lim\limits_{k \to +\infty} s_k = +\infty$, on voit que (37.8) permet d'énoncer, en conservant les notations du paragraphe 35 pour les séquences S et S′ :

Lemme 28. — *Les inégalités* $0 \leqq i < i'$ *et* $1 \leqq j < j'$ *entraînent, pour les séquences* S *et* S′ :

a. $$|\lambda - \lambda'| < \varepsilon \quad \textit{dès que} \quad i, j \geqq \mathrm{K}(\varepsilon),$$
où ε *est un nombre positif arbitraire et où* $\mathrm{K}(\varepsilon)$ *ne dépend que de* ε ;

b. $$\lambda - \lambda' > \sigma(\mathrm{K}') > 0 \quad \textit{si} \quad i < j \textit{ avec } i \leqq \mathrm{K}',$$
où K′ *est un entier positif et où* $\sigma(\mathrm{K}')$ *ne dépend que de* K′ ;

c. $$\lambda' - \lambda > \tau(\mathrm{K}'') > 0 \quad \textit{si} \quad j \leqq i \textit{ avec } j \leqq \mathrm{K}'',$$
où K″ *est un entier positif et où* $\tau(\mathrm{K}'')$ *ne dépend que de* K″.

38. Les développements $\mathcal{D}_\infty$. — Considérons un couple (ξ, η) de développement D. A chacun des rangs privilégiés n_k de D, on peut associer une séquence S_k de type S, avec $i = i_k \geqq 0$, $j = j_k \geqq 1$ et $\lambda_k = \frac{x_{n_k} - y_{n_k}}{z_{n_k} t_{n_k}}$, d'où $c(\xi, \eta) = \overline{\lim\limits_k} \lambda_k$. Si, à partir d'un certain rang, on ne rencontre plus dans D deux séquences A consécutives, on a, pour k assez grand, $i_k \geqq 1$ et $j_k = i_{k-1}$; nous désignerons par $\mathcal{D}$ un tel développement D particulier, entièrement défini, à partir d'un certain rang, par la suite des entiers i_k, avec $i_k \geqq 1$.

Envisageons d'abord les développements $\mathcal{D}$, notés $\mathcal{D}_\infty$, pour lesquels i_k tend vers l'infini avec k. Étant données deux valeurs quelconques k_1 et k_2 de k dans un tel développement, on peut toujours trouver une séquence S′ définie par des entiers i' et j' ou i' est supérieur à la fois à i_{k_1} et i_{k_2} et j' supérieur à la fois à $j_{k_1} = i_{k_1 - 1}$ et $j_{k_2} = i_{k_2 - 1}$. Du lemme 28*a*, on déduit donc :

$$(38.1) \qquad |\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}| \leqq |\lambda_{k_1} - \lambda'| + |\lambda_{k_2} - \lambda'| < 2\varepsilon$$

pourvu que $i_{k_1 - 1}$, i_{k_1}, $i_{k_2 - 1}$, i_{k_2} soient supérieurs à $\mathrm{K}(\varepsilon)$, ce qui a lieu dès que k_1 et k_2 sont assez grands. De (38.1) on déduit que λ_k tend vers une limite unique, soit γ, lorsque k tend vers l'infini, quel que soit $\mathcal{D}_\infty$. Il existe donc une infinité continue de couples (ξ, η), correspondant aux développements $\mathcal{D}_\infty$, tels que $c(\xi, \eta) = \gamma$.

Pour calculer γ, désignons par $(x^\star, z^\star)$ le couple dont le développement admet, dès son premier rang, la période CB, et par $y^\star$ et $t^\star$ les conjugués des nombres quadratiques $x^\star$ et $z^\star$. Puisque la séquence A ne se distingue de la séquence C que par la substitution du couple (4, 2) au couple (3, 1) au premier rang, sans changer la valeur de $a - b = c$ à ce rang, lorsque k tend vers l'infini dans $\mathcal{D}_\infty$, x_{n_k+3} tend vers $x^\star+1$ et z_{n_k+3} vers $z^\star$. Donc

$$x_{n_k} \to \frac{3(x^\star+1)+2}{2(x^\star+1)+1} = \mathrm{X}^\star \quad \text{et} \quad z_{n_k} \to 1 - \frac{z^\star - 1}{2(x^\star+1)+1} = \mathrm{Z}^\star.$$

D'autre part, y_{n_k-1} et t_{n_k-1} tendent respectivement vers $y^\star$ et $t^\star$, donc

$$y_{n_k} \to \frac{1}{y^\star - 3} = \mathrm{Y}^\star \quad \text{et} \quad t_{n_k} \to \frac{y^\star - 1 - t^\star}{y^\star - 3} = \mathrm{T}^\star.$$

De

$$x^\star = (3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x^\star) = \frac{463x^\star + 288}{127x^\star + 79}$$

et

$$z^\star = 2 + \frac{8x^\star + 5 + z^\star - 1}{127x^\star + 79},$$

on tire

$$x^\star = \frac{192 + 12\sqrt{510}}{127}, \quad y^\star = \frac{192 - 12\sqrt{510}}{127}, \quad z^\star = \frac{23x^\star + 102}{90}, \quad t^\star = \frac{23y^\star + 102}{90},$$

d'où

$$\mathrm{X}^\star = \frac{1275 - 4\sqrt{510}}{765}, \quad \mathrm{Y}^\star = \frac{63 - 4\sqrt{510}}{99}, \quad \mathrm{Z}^\star = \frac{731 - 2\sqrt{510}}{765}, \quad \mathrm{T}^\star = \frac{400 - 2\sqrt{510}}{495},$$

et par suite

$$\gamma = \frac{\mathrm{X}^\star - \mathrm{Y}^\star}{\mathrm{Z}^\star \mathrm{T}^\star} = \frac{366\,795}{773\,868 - 28\,547\sqrt{510}}.$$

On vérifie d'ailleurs que $\gamma < \frac{71}{25}$. On peut donc énoncer :

PROPOSITION 16. — *Pour l'infinité continue des couples* (ξ, η) *qui admettent un développement* $\mathcal{D}_\infty$, *on a*

$$c(\xi, \eta) = \gamma = \frac{366\,795}{773\,868 - 28\,547\sqrt{510}} = 2,839\,278\,85\ldots < \frac{71}{25}.$$

39. LES DÉVELOPPEMENTS $\mathcal{D}_r$. — Reprenons un couple (ξ, η) de développement D quelconque, auquel sont associées les deux suites d'entiers $\{i_k\}$ et $\{j_k\}$ avec $c(\xi, \eta) = \overline{\lim\limits_k}\,\lambda_k$ et comparons-le à un couple (ξ', η') dont le développement est caractérisé par exemple par la suite $\{i'_k\}$ où

$$i'_k = k + \max(j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}),$$

avec $c(\xi', \eta') = \overline{\lim\limits_k}\,\lambda'_k$. On a $\lim\limits_k i'_k = +\infty$; le développement de (ξ', η') est donc du type $\mathcal{D}_\infty$, et l'on a $c(\xi', \eta') = \gamma$. D'autre part, pour tout $k \geqq 1$, on a

$$0 \leqq i_k < i'_k, \qquad 1 \leqq j_k < i'_{k-1}$$

et le lemme 28*b* s'applique. Par suite, si l'on a une infinité de fois $i_k = 0$

dans D, on a une infinité de fois

$$\lambda_k > \lambda'_k + \sigma(0),$$

d'où

$$c(\xi, \eta) > c(\xi', \eta') = \gamma.$$

Donc l'hypothèse $c(\xi, \eta) \leqq \gamma$ implique que D est du type $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que $j_k = i_{k-1}$. En appliquant une nouvelle fois le lemme 28*b*, on voit que si, pour une infinité de valeurs de k, on a $i_k < i_{k-1}$, on a $c(\xi, \eta) \geqq \gamma$, et même $c(\xi, \eta) > \gamma$ si $\underline{\lim}_k i_k$ est finie.

Par contre, si, à partir d'un certain rang, on a $i_k = i_{k-1} = r \geqq 1$, ce qui implique la périodicité de $\mathcal{D}$, le lemme 28*c* montre que $c(\xi, \eta) < \gamma$. Nous dirons alors que le développement de (ξ, η) est du type $\mathcal{D}_r$. Enfin, si i_k tend vers l'infini sans décroître, on a évidemment $c(\xi, \eta) = \gamma$. En tenant compte des propositions 15 et 16, on peut donc énoncer :

PROPOSITION 17. — *Les seuls couples* (ξ, η) *tels que*

$$\frac{10\sqrt{110}}{37} < c(\xi, \eta) < \gamma$$

sont ceux dont le développement est du type $\mathcal{D}_r$ *(*r *entier* $\geqq 1$*).*

Enfin, si (ξ, η) a un développement $\mathcal{D}_r$ et (ξ', η') un développement $\mathcal{D}_{r'}$ avec $r < r'$, le lemme 28*c* entraîne $c(\xi, \eta) < c(\xi', \eta')$. D'autre part, le lemme 28*a* entraîne que $c(\xi, \eta)$ est arbitrairement proche de γ dès que r est assez grand. Donc :

PROPOSITION 17 *bis*. — *Les valeurs* γ_r *de* $c(\xi, \eta)$ *telles que*

$$\frac{10\sqrt{110}}{37} < c(\xi, \eta) < \gamma$$

sont isolées. Elles correspondent aux développements périodiques $\mathcal{D}_r$*, croissent avec l'entier* $r \geqq 1$*, et admettent* γ *pour valeur d'accumulation.*

En rapprochant ces résultats de ceux de la fin du paragraphe 33, on voit que pour achever la démonstration du théorème initial, il ne reste qu'à déterminer les valeurs γ_r, et des couples (ξ_r, η_r) convenables de développement $\mathcal{D}_r$.

40. CALCUL DE γ_r. — Les développements $\mathcal{D}_r$ sont caractérisés par leur période

$$\text{ABC} \ldots \text{BC} \qquad (r \text{ fois BC}).$$

Envisageons le couple (ξ_r, η_r) dont le développement $\mathcal{D}_r$ est constitué exclusivement par la répétition indéfinie de cette période, précédée de $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, avec $b_0 = b_1 = b_2 = 0$. ξ_r et η_r sont donc respectivement égaux aux valeurs de x_n

et z_n aux rangs privilégiés n du développement ϖ_r; les valeurs de y_n et t_n à ces mêmes rangs privilégiés tendent respectivement lorsque $n \to +\infty$ vers les nombres ξ'_r et η'_r conjugués des nombres quadratiques ξ_r, η_r, et l'on a

$$\gamma_r = c(\xi_r, \eta_r) = \frac{\xi_r - \xi'_r}{\eta_r \eta'_r}. \tag{40.1}$$

Pour calculer ξ_r et η_r, remarquons, en reprenant les notations du paragraphe 34, qu'on peut poser d'une part

$$\xi_r = \mathrm{X}, \qquad \text{avec} \quad x_{r-1} = (1 \quad 1 \quad 3 \quad \xi_r) = \frac{7\xi_r + 2}{4\xi_r + 1},$$

d'où

$$\xi_r = \frac{\mathrm{A}_r \xi_r + \mathrm{B}_r}{\mathrm{C}_r \xi_r + \mathrm{D}_r} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_r \mathrm{D}_r - \mathrm{B}_r \mathrm{C}_r = 1, \tag{40.2}$$

et, par suite,

$$\xi_r = \frac{\mathrm{A}_r - \mathrm{D}_r + \sqrt{(\mathrm{A}_r + \mathrm{D}_r)^2 - 4}}{2\mathrm{C}_r}, \tag{40.3}$$

avec, d'après (34.2)

$$\mathrm{A}_r = 7\mathrm{E}_{r-1} + 4\mathrm{F}_{r-1}, \quad \mathrm{B}_r = 2\mathrm{E}_{r-1} + \mathrm{F}_{r-1}, \quad \mathrm{C}_r = 7\mathrm{G}_{r-1} + 4\mathrm{H}_{r-1}, \quad \mathrm{D}_r = 2\mathrm{G}_{r-1} + \mathrm{H}_{r-1},$$

c'est-à-dire, en utilisant (34.5)

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_r &= 7\,331\, s_r - 14 s_{r-1}, & \mathrm{B}_r &= 2\,024 s_r - 3 s_{r-1}, \\ \mathrm{C}_r &= 4\,734 s_r - 9 s_{r-1}, & \mathrm{D}_r &= 1\,307 s_{r-1} - 2 s_{r-1}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_r &= 14 s_{r+1} - 257 s_r, & \mathrm{B}_r &= 3 s_{r+1} + 398 s_r, \\ \mathrm{C}_r &= 9 s_{r+1} - 144 s_r, & \mathrm{D}_r &= 2 s_{r+1} + 223 s_r. \end{aligned} \right. \tag{40.4}$$

On peut poser d'autre part :

$$\eta_r = \mathrm{Z}, \qquad \text{avec} \quad z_{r-1} = 1 + \frac{\xi_r - (\eta_r - 1)}{4\xi_r + 1},$$

d'où, d'après (34.6) :

$$\eta_r = \frac{\left\{ \begin{aligned} &(\mathrm{G}_{r-1} - 51 s_r)(7\xi_r + 2) + (\mathrm{H}_{r-1} - 33 s_r)(4\xi_r + 1) \\ &\quad - \frac{1}{90}(s_r - s_{r-1} - 1)(81\xi_r + 23) - \xi_r + \eta_r - 1 \end{aligned} \right\}}{\mathrm{G}_{r-1}(7\xi_r + 2) + \mathrm{H}_{r-1}(4\xi_r + 1)}$$

$$= 1 - \frac{489 s_r \xi_r + 135 s_r + \frac{1}{90}(s_r - s_{r-1} - 1)(81\xi_r + 23) + \xi_r - (\eta_r - 1)}{\mathrm{C}_r \xi_r + \mathrm{D}_r}.$$

En tenant compte de $s_{r+1} = 542 s_r - s_{r-1}$, on en déduit

$$\eta_r - 1 = - \frac{\frac{1}{10}(9 s_{r+1} + 21 s_r + 1)\xi_s + \frac{1}{90}(23 s_{r+1} - 293 s_r - 23)}{\mathrm{C}_r \xi_r + \mathrm{D}_r - 1}. \tag{40.5}$$

Or (40.2) entraîne

$$\frac{\xi_r}{C_r\xi_r + D_r - 1} = \frac{(1 - D_r)\xi_r + B_r}{A_r + D_r - 2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{C_r\xi_r + D_r - 1} = \frac{C_r\xi_r + 1 - A_r}{A_r + D_r - 2}.$$

Il en résulte que (40.5) entraîne

$$\eta_r - 1 = -\frac{\frac{1}{10}(9s_{r+1} + 21s_r + 1)(1 - D_r)\xi_r + B_r + \frac{1}{90}(23s_{r+1} - 293s_r - 23)(C_r\xi_r + 1 - A_r)}{A_r + D_r - 2},$$

c'est-à-dire, en utilisant (40.4) :

$$\eta_r - 1 = \frac{\frac{1}{10}(16s_{r+1} - 166s_r - 1)\xi_r - \frac{1}{15}\left(62s_{r+1} - 437s_r - \frac{23}{6}\right)}{A_r + D_r - 2}$$
$$- \left(\frac{1}{2}\xi_r - \frac{79}{90}\right)\frac{s_{r+1}^2 - 542s_rs_{r+1} + s_r^2}{A_r + D_r - 2}.$$

Comme $s_{r+1}^2 - 542s_rs_{r+1} + s_r^2 = s_r^2 - s_{r+1}s_{r-1} = 1$, on a finalement

$$\eta_r = \frac{M'_r\xi_r + N'_r}{\Delta'_r}, \tag{40.6}$$

avec, d'après (40.4) :

$$\left\{\begin{aligned} &M'_r = \frac{1}{10}(16s_{r+1} - 166s_r - 6), \qquad N'_r = \frac{1}{15}(178s_{r+1} - 73s_r - 13); \\ &\Delta'_r = A_r + D_r - 2 = 16s_{r+1} - 34s_r - 2. \end{aligned}\right. \tag{40.7}$$

On peut simplifier l'expression (40.6) de η_r en utilisant la formule

$$s_{p+q} = s_ps_{q+1} - s_{p-1}s_q$$

qu'on établit aisément en partant de l'égalité $s_n = \frac{\theta^n - \theta'^n}{\theta - \theta'}$ (*cf.* p. 341). Distinguons deux cas, suivant la parité de r.

Si $r = 2p$ (p entier $\geqq 1$), on a

$$s_{r+1} = s_{p+1}^2 - s_p^2, \qquad s_r = s_p(s_{p+1} - s_{p-1}) = s_p(2s_{p+1} - 542s_p),$$

et aussi

$$s_{p+1}^2 - 542s_ps_{p+1} + s_p^2 = 1;$$

d'où

$$\begin{aligned} M'_{2p} &= \frac{1}{10}[16(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 166s_p(2s_{p+1} - 542s_p) - 6(s_{p+1}^2 - 542s_ps_{p+1} + s_p^2)] \\ &= (s_{p+1} + 257s_p)(s_{p+1} + 35s_p), \\ N'_{2p} &= \frac{1}{15}[178(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 73s_p(2s_{p+1} - 542s_p) - 13(s_{p+1}^2 - 542s_ps_{p+1} + s_p^2)] \\ &= (11s_{p+1} + 75s_p)(s_{p+1} + 35s_p), \\ \Delta'_{2p} &= 2[8(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 17s_p(2s_{p+1} - 542s_p) - (s_{p+1}^2 - 542s_ps_{p+1} + s_p^2)] \\ &= 2(7s_{p+1} + 263s_p)(s_{p+1} + 35s_p). \end{aligned}$$

Si $r=2p+1$ (p entier $\geqq 0$), on a

$$s_{r+1}=s_{p+1}(s_{p+2}-s_p)=s_{p+1}(542s_{p+1}-2s_p), \qquad s_r=s_{p+1}^2-s_p^2,$$

et aussi

$$s_{p+1}^2-542s_ps_{p+1}+s_p^2=1;$$

d'où

$$\begin{aligned}M'_{2p+1}&=\frac{1}{10}[16s_{p+1}(542s_{p+1}-2s_p)-166(s_{p+1}^2-s_p^2)-6(s_{p+1}^2-542s_ps_{p+1}+s_p^2)]\\&=(25s_{p+1}+8s_p)(34s_{p+1}+2s_p),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N'_{2p+1}&=\frac{1}{15}[178s_{p+1}(542s_{p+1}-2s_p)-73(s_{p+1}^2-s_p^2)-13(s_{p+1}^2-542s_ps_{p+1}+s_p^2)]\\&=(189s_{p+1}+2s_p)(34s_{p+1}+2s_p),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{2p+1}&=2[8s_{p+1}(542s_{p+1}-2s_p)-17(s_{p+1}^2-s_p^2)-(s_{p+1}^2-542s_1s_{p+1}+s_p^2)]\\&=2(127s_{p+1}+8s_p)(34s_{p+1}+2s_p).\end{aligned}$$

Les trois nombres M'_{2p}, N'_{2p}, Δ'_{2p} ont donc en commun le facteur

(40.8) $$\delta_{2p}=s_{p+1}+35s_p,$$

et les nombres M'_{2p+1}, N'_{2p+1}, Δ'_{2p+1}, le facteur

(40.9) $$\delta_{2p+1}=34s_{p+1}+2s_p.$$

On a

(40.10) $$\xi_r=\frac{\frac{1}{2}(A_r-D_r)+\sqrt{\Delta_r\delta_r(\Delta_r\delta_r+2)}}{C_r}, \qquad \eta_r=\frac{M_r\xi_r+N_r}{2\Delta_r},$$

(40.11) $$\gamma_r=\frac{8\Delta_r^2\sqrt{\Delta_r\delta_r(\Delta_r\delta_r+2)}}{C_r(M_r\xi_r+N_r)(M_r\xi'_r+N_r)}=\frac{8\Delta_r^2\sqrt{\Delta_r\delta_r(\Delta_r\delta_r+2)}}{C_rN_r^2+(A_r-D_r)M_rN_r-B_rM_r^2}$$ [7],

avec, si $r=2p$:

(40.12) $$M_{2p}=s_{p+1}+257s_p, \qquad N_{2p}=11s_{p+1}+75s_p, \qquad \Delta_{2p}=7s_{p+1}+263s_p$$

et, si $r=2p+1$:

(40.13) $$M_{2p+1}=25s_{p+1}+8s_p, \qquad N_{2p+1}=189s_{p+1}+2s_p, \qquad \Delta_{2p+1}=127s_{p+1}+6s_p.$$

Les formules (40.8) à (40.13) achèvent d'établir le théorème initial, comme il avait été annoncé au début de ce paragraphe. Elles donnent en particulier

$$\xi_1=\frac{502+4\sqrt{32\,385}}{789}, \qquad \xi_2=\frac{1\,632\,498+\sqrt{(2\,340\,890)^2-1)}}{2\,565\,819};$$

$$\eta_1=\frac{25\xi_1+189}{254}, \qquad \eta_2=\frac{709\xi_2+6\,037}{8\,114};$$

$$\gamma_1=\frac{12\,192\sqrt{32\,385}}{772\,841}; \qquad \gamma_2=\frac{16\,228\sqrt{(2\,340\,890)^2-1}}{13\,379\,443\,561}.$$

---

(7) On peut établir que le dénominateur de cette expression est divisible par $2\Delta_r$.

Remarque. — La formule de récurrence $s_{p+1} = 542 s_p - s_{p-1}$, avec $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$ montre que s_p et s_{p+1} sont premiers entre eux et que s_p a la parité de p. On en déduit les résultats suivants :

Tout facteur premier commun à M_{2p}, N_{2p} et $2\Delta_{2p}$ est impair, car M_{2p} et N_{2p} sont impairs puisque s_{p+1} et s_p sont de parité différente. Un tel facteur premier commun doit donc diviser M_{2p}, N_{2p} et Δ_{2p}, et aussi $11 M_{2p} - N_{2p} = 2^5 . 43 s_p$ et $7 M_{2p} - \Delta_{2p} = 2^9 . 3 s_p$, ce qui entraîne qu'il doit diviser s_p et par suite $M_{2p} - 257 s_p = s_{p+1}$, donc qu'il doit se réduire à l'unité. Donc M_{2p}, N_{2p} et Δ_{2p} sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble.

Tout facteur premier impair commun à M_{2p+1}, N_{2p+1} et $2\Delta_{2p+1}$ doit diviser M_{2p+1}, N_{2p+1} et Δ_{2p+1}, donc aussi $\Delta_{2p+1} - M_{2p+1} = 6 . 17 s_{p+1}$ et $4 N_{2p+1} - \Delta_{2p+1} = 17 . 37 s_{p+1}$; donc il est égal à 17, ou bien il divise s_{p+1}. Or, on vérifie aisément par la formule de récurrence qu'on a $M_{2p+1} \equiv \pm 8 \pmod{17}$; donc le facteur commun cherché ne peut être égal à 17. D'autre part, s'il divise s_{p+1}, il doit diviser $N_{2p+1} - 189 s_{p+1} = 2 s_p$, donc aussi s_p, puisqu'on l'a supposé impair; il doit donc se réduire à l'unité. Le seul facteur premier commun possible pour M_{2p+1}, N_{2p+1} et Δ_{2p+1} est donc 2 si l'on néglige 1.

En fait, si p est pair, M_{2p+1} et N_{2p+1} sont impairs; donc M_{2p+1}, N_{2p+1} et $2\Delta_{2p+1}$ sont premiers entre eux. Si p est impair, M_{2p+1} et N_{2p+1} sont pairs mais non tous deux divisibles par 4, sans quoi 4 diviserait $4 N_{2p+1} - M_{2p+1} = 731 s_{p+1}$, donc diviserait s_{p+1} et $N_{2p+1} - 189 s_{p+1} = 2 s_p$, ce qui est impossible puisqu'alors s est impair. Donc, si p est impair, le p. g. c. d. de M_{2p+1}, N_{2p+1} et $2\Delta_{2p+1}$ est 2.

Ces résultats impliquent, grâce à l'identité de Bezout, qu'on peut trouver un couple (ξ'_r, η'_r) équivalent au couple (ξ_r, η_r) avec

$$\eta'_r = \frac{1}{2\Delta_r} \quad \text{si } r \not\equiv 3 \pmod{4} \qquad \text{et} \qquad \eta'_r = \frac{1}{\Delta_r} \quad \text{si } r \equiv 3 \pmod{4}.$$