

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ BLANCHARD

Sur les variétés analytiques complexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 73, n° 2 (1956), p. 157-202

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_2_157_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

PAR M. ANDRÉ BLANCHARD.

INTRODUCTION.

On sait que les variétés kählériennes forment une classe remarquable de variétés analytiques complexes (surtout dans le cas compact). Le premier exemple de variété analytique complexe compacte non kählérienne a été indiqué par Hopf : cet exemple est obtenu comme espace quotient de C^n privé de l'origine par un groupe discret d'homothéties ; c'est aussi un espace fibré analytique complexe dont la base est un espace projectif complexe et dont la fibre est un tore muni d'une structure complexe. D'autres exemples ont été donnés de variétés analytiques complexes compactes non kählériennes, et ce sont en fait des espaces fibrés dont les fibres sont des tores complexes. A défaut de conditions permettant de caractériser les variétés qui admettent une structure de variété kählérienne, on pouvait se demander dans quelles conditions un espace fibré analytique complexe compact admet une métrique kählérienne.

Le théorème principal II du présent travail répond à ce problème (en supposant toutefois que le groupe de Poincaré de la base opère d'une manière assez simple sur la cohomologie de la fibre). Il y a trois conditions nécessaires et suffisantes : les deux premières ne sont pas surprenantes car elles expriment que la fibre et la base sont des variétés kählériennes (la nécessité est évidente pour la fibre) ; la troisième condition concerne la topologie de l'espace fibré, elle exprime que la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$ en cohomologie réelle est nulle (c'est cette condition qui n'est pas vérifiée dans les exemples de variétés analytiques complexes compactes non kählériennes).

A l'époque de la publication de ce résultat [3], K. Kodaira [13] montrait que tout espace fibré analytique complexe dont la fibre est un espace projectif complexe et dont la base est une variété compacte kählérienne (resp. algébrique projective) est une variété kählérienne (resp. algébrique projective). A. Borel et K. Kodaira en déduisaient un énoncé analogue, la fibre étant cette fois une

variété algébrique projective à *premier nombre de Betti nul*, en montrant que les automorphismes de la structure complexe de la fibre sont alors induits par des homographies d'un espace projectif complexe dans lequel est plongée la fibre.

On pouvait alors se demander ce qu'on peut dire si $H^1(F) \neq 0$; on doit évidemment supposer remplie la troisième condition du théorème principal II, mais cela ne suffit pas : on doit écrire une quatrième condition qui exprime que la variété d'Albanese de l'espace fibré est une variété algébrique. Ceci amenait à étudier plus complètement la variété d'Albanese d'une variété analytique complexe compacte. Dans la première partie de ce travail se trouve une définition de la variété d'Albanese d'une variété analytique complexe compacte (kählérienne ou non), puis une étude de la structure de la variété d'Albanese d'un espace fibré analytique complexe compact : en gros, la variété d'Albanese d'un espace fibré $E(B, F)$ est un espace fibré dont la fibre est un quotient $A'(F)$ de la variété d'Albanese de la fibre $A(F)$, et dont la base est la variété d'Albanese $A(B)$. La troisième condition du théorème principal II peut alors s'exprimer ainsi : $A'(F)$ est un quotient de $A(F)$ par un groupe *discret*.

Le théorème principal I qui termine la première partie exprime qu'un groupe connexe d'automorphismes de la structure analytique complexe d'une variété algébrique projective V , qui détermine un groupe discret de translations de la variété d'Albanese $A(V)$, est induit par un groupe d'homographies pour un plongement convenable de V dans un espace projectif complexe. Ce théorème est utilisé pour montrer le théorème principal III (conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace analytique complexe compact soit une variété algébrique projective), en s'inspirant de la méthode donnée par Borel et Kadaïra pour le cas où $H^1(F) = 0$; on suppose $A(E)$ algébrique et l'on utilise un supplémentaire de $A'(F)$ dans $A(E)$ [19], on s'arrange ensuite pour réduire le groupe structural à un groupe qui détermine un groupe discret de translations de $A(F)$: on peut alors utiliser le théorème principal I pour se ramener au cas où la fibre est un espace projectif complexe.

Le paragraphe 4 de la deuxième partie combine la théorie de la suite spectrale avec les résultats classiques sur la cohomologie des variétés kählériennes; il montre que la troisième condition du théorème principal II (la fibre étant kählérienne) implique des résultats beaucoup plus précis sur la cohomologie de l'espace fibré. Le paragraphe 4 de la deuxième partie précise le théorème II en montrant que si l'on connaît sur la fibre et sur la base des métriques kählériennes analytiques (pour la structure analytique réelle sous-jacente à la structure analytique complexe) on peut trouver sur l'espace fibré une métrique kählérienne analytique (à condition de supposer que le groupe structural n'a qu'un nombre fini de composantes connexes). Le dernier paragraphe concernant l'éclatement d'une variété kählérienne le long d'une sous-variété figure ici en raison de la ressemblance de la méthode pour construire une forme de Kähler

sur la variété éclatée avec la méthode de démonstration du théorème principal II.

Qu'il me soit permis ici d'exprimer ma reconnaissance la plus profonde à M. Henri Cartan qui n'a cessé de me prodiguer ses précieux conseils et à qui je dois d'importantes améliorations. Je remercie très vivement M. André Lichnerowicz qui m'a donné d'utiles conseils, et M. Laurent Schwartz. Je remercie aussi Armand Borel et Jean-Pierre Serre pour leurs intéressantes suggestions.

PREMIÈRE PARTIE.

AUTOMORPHISMES DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES.

1. Généralités. Automorphismes d'un espace fibré.

Généralités. — Soit G le groupe des automorphismes d'une variété analytique complexe; G^0 désignera la composante connexe de l'identité dans le groupe G . On a des renseignements sur le groupe G si la variété donnée est un domaine borné de C^n [10] ou bien une variété compacte ([7] et [8]); dans les deux cas, c'est un groupe de Lie opérant analytiquement dans la variété au point de vue de la structure analytique réelle sous-jacente à la structure analytique complexe. Plus précisément, on peut trouver un nombre fini de points p_s tels qu'un automorphisme g est déterminé par les $g(p_s)$, de plus si V_s est un voisinage de p_s , l'ensemble des g , tels que $g(p_s)$ est dans V_s , forme un voisinage de l'identité, et l'on obtient ainsi un système fondamental de voisinages de l'identité.

Dans le cas d'un domaine borné de C^n , le groupe G n'est jamais complexe, en ce sens précis que si une transformation infinitésimale X appartient à G , JX (J défini par la structure complexe) ne peut pas appartenir à G , comme on le voit immédiatement en utilisant le théorème de Liouville.

Si X est un champ de vecteurs dans une variété complexe V , une fonction holomorphe dans V vérifie $\theta(JX)f = i\theta(X)f$, et inversement les fonctions f vérifiant cette égalité pour un nombre suffisant de champs sont holomorphes. Si X est une transformation infinitésimale du groupe G des automorphismes de V , $\exp(\theta(tX))f$ est holomorphe quel que soit t pourvu que f soit holomorphe; $\theta(X)f$ est alors holomorphe, ce qui exige que $\theta(JX)$ commute avec $\theta(X)$. Si $\{z_j\}$ désigne un système de coordonnées locales complexes dans U , $\theta(X)$ peut s'écrire $u_j\partial_j + \bar{u}_j\bar{\partial}_j$ dans U , ∂_j et $\bar{\partial}_j$ désignant les dérivations partielles $\frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$.

On a alors

$$\theta(X)\theta(JX) - \theta(JX)\theta(X) = 2i(\bar{u}_j\bar{\partial}_j u_k \partial_k - u_j\partial_j \bar{u}_k \bar{\partial}_k).$$

On voit donc que si $\theta(X)$ commute avec $\theta(JX)$, on a $\bar{\partial}_j u_k = 0$, ce qui veut dire

que les u_i sont holomorphes; $\theta(X)f$ est alors holomorphe en même temps que f . Si la variété V est compacte, $\exp\theta(tX)$ est un homéomorphisme qui transforme toute fonction holomorphe sur un ouvert en une fonction holomorphe sur l'ouvert correspondant, c'est donc un automorphisme de la structure analytique complexe. On voit donc que *le groupe G est un groupe complexe qui opère analytiquement au point de vue de la structure analytique complexe de V* . On peut dire que l'algèbre de Lie de G^0 est l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur toute la variété V .

On ne peut généralement rien dire du nombre des composantes connexes du groupe G ; ainsi pour un tore complexe le groupe G peut avoir une composante connexe, un nombre fini ou une infinité selon le choix des périodes.

Automorphismes des variétés fibrées. — Soient E une variété analytique complexe compacte, et p une application analytique de E dans une variété V . L'image de E dans V est un sous-ensemble analytique B de V [17]; d'autre part, l'image inverse $p^{-1}(b)$ d'un point de B se compose d'un nombre fini de sous-ensembles analytiques de E . Nous supposons de plus que la « fibration » $p : E \rightarrow B$ admet des sections locales analytiques, c'est-à-dire que pour tout point b de B , il existe une application analytique σ_b d'un voisinage de b dans B , à valeurs dans E et telle que $p \circ \sigma_b$ soit l'identité sur le domaine de définition de σ_b . Soient U et U' deux ouverts de V contenant b , isomorphes à des domaines bornés de \mathbb{C}^n , et tels que l'adhérence de U' soit contenue dans U . L'ensemble des automorphismes g de E tels que $g(p^{-1}(U'))$ soit contenu dans $p^{-1}(U)$ forme un voisinage de l'identité dans le groupe G des automorphismes de E ; g étant un tel automorphisme et F une composante connexe de $p^{-1}(b)$, $p(g(F))$ est contenu dans U donc réduit à un point, car toute application analytique d'un ensemble analytique compact à valeurs dans \mathbb{C}^n est constante [17]. Les automorphismes de E assez voisins de l'identité, donc ceux de la composante connexe G^0 dans G , respectent la « fibration » de E par les composantes connexes de $p^{-1}(b)$.

En particulier si les « fibres » de l'application sont connexes, l'application de E sur B est respectée par $G^0(E)$, et l'on a un homomorphisme de $G^0(E)$ dans $G^0(B)$ grâce à l'existence des sections locales analytiques.

Dans le cas d'une fibration au sens strict, la démonstration est plus élémentaire, car il suffit de savoir qu'une application d'une variété compacte à valeurs dans \mathbb{C}^n est constante.

PROPOSITION I.1. — *Soit p une application analytique d'une variété compacte complexe E sur un ensemble analytique B telle que les fibres de l'application soient connexes. Alors les automorphismes appartenant à la composante connexe $G^0(E)$ du groupe $G(E)$ des automorphismes de la structure analytique complexe de E , respectent l'application p . D'où s'il existe des sections locales analytiques, un homomorphisme canonique de $G^0(E)$ dans $G^0(B)$.*

Considérons le produit de deux variétés compactes complexes B et F ; en appliquant la proposition I.1 aux deux fibrations évidentes on a :

COROLLAIRE. — *La composante connexe $G^0(B \times F)$ de l'identité dans le groupe des automorphismes de la variété compacte complexe $B \times F$, est canoniquement isomorphe au produit $G^0(B) \times G^0(F)$.*

Impossibilité de fibrer l'espace projectif complexe. — Soit une application p de $P_n(C)$ sur B ; je dis que les fibres de l'application sont des ensembles finis de points, ou bien B est réduit à un point. En effet considérons la fibre connexe d'un point a de $P_n(C)$: si $b \neq a$ appartient à cette fibre, tout point x de $P_n(C)$ appartient à cette fibre, car il existe une homographie qui transforme le couple (a, x) en le couple (a, b) ; la fibre connexe de a est donc réduite à a ou bien est l'espace tout entier. La recherche des fibrations au sens strict se réduit à la question des revêtements; mais tout automorphisme de $P_n(C)$ laisse au moins un point fixe : *il n'y a donc aucune vraie fibration de l'espace projectif complexe.*

2. La variété d'Albanese. Homomorphisme de G^0 dans $A(V)$. Variété d'Albanese d'un espace fibré. Variété de Picard.

La variété d'Albanese. — Bien que la théorie de la variété d'Albanese d'une variété analytique complexe compacte V soit surtout utile dans le cas où V est une variété kählérienne, il est nécessaire ici de faire la théorie de la variété d'Albanese sans supposer que V soit kählérienne. Nous verrons alors ce qu'on peut dire en général de la variété d'Albanese d'un espace fibré analytique complexe $E(B, F)$; on arrivera à une conclusion plus forte quand on supposera l'espace fibré $E(B, F)$ kählérien, tout au moins lorsque le groupe de Poincaré de la base opère trivialement sur le premier groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$. Enfin le résultat sur la variété d'Albanese d'un espace fibré kählérien interviendra d'une manière essentielle pour la recherche des conditions dans lesquelles un espace fibré $E(B, F)$ est une variété algébrique projective.

Soit V une variété analytique complexe compacte connexe sur laquelle nous choisissons arbitrairement un point a ; soit \hat{V} le revêtement universel de V défini au moyen des chemins d'origine a dans V ; nous désignerons encore par a le point de \hat{V} défini par le chemin nul. Si s est un élément du groupe de Poincaré $\pi_1(V, a)$, on désignera aussi par s l'automorphisme de \hat{V} correspondant. Nous avons alors la notion de *fonction holomorphe additive* : c'est une fonction f holomorphe sur \hat{V} telle que

$$f(s..x) = f(x) + \varphi(s),$$

x étant un point de \hat{V} , et $\varphi(s)$ une représentation de $\pi_1(V)$ dans le groupe

additif \mathbb{C} (ou plus généralement dans l'espace vectoriel complexe où f prend ses valeurs).

Soit t une forme différentielle holomorphe fermée de degré 1 sur V ; nous pouvons faire les deux remarques suivantes :

a. Si la partie réelle de t est nulle, t est nulle (c'est évident).

b. t est la différentielle d'une fonction holomorphe additive f , et si $t \neq 0$, les parties réelles des périodes de t (ou de f) ne sont pas toutes nulles : en effet dans le cas contraire la partie réelle de f serait une vraie fonction sur V , et atteindrait son maximum en un point de V , mais ceci n'est possible que si f est constante; car au voisinage d'un point où l'on a des coordonnées locales analytiques $z_k = x_k + iy_k$ la partie réelle de f est une fonction harmonique de l'ensemble des variables (x_k, y_k) .

De ces deux remarques il résulte que l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes fermées de degré 1 sur V est de dimension réelle finie et au plus égale à $b_1(V)$, premier nombre de Betti de V . Soit $D'(V)$ l'espace vectoriel complexe des formes différentielles holomorphes fermées de degré 1 sur V ; on a une application F du groupe d'homologie $H_1(V, \mathbb{Z})$ dans D , dual de D' (dual complexe et non antidual), définie ainsi

$$(df, F(u)) = \int_u df;$$

L'image de $H_1(V, \mathbb{Z})$ par F est un sous-groupe Δ de D . Je dis que le sous-espace vectoriel de D engendré par Δ est D lui-même; en effet si Δ engendrait un vrai sous-espace, il y aurait une forme linéaire réelle non nulle sur D qui serait nulle sur Δ ; cette forme serait la partie réelle d'une forme linéaire complexe L , et L définirait une forme différentielle holomorphe fermée sur V dont les périodes des parties réelles seraient nulles, ce qui contredirait la remarque (*b*).

Soit a le point choisi sur la variété \hat{V} ; on définit une application holomorphe additive, encore notée F , de \hat{V} dans D par

$$(df, F(x)) = f(x) - f(a)$$

[on voit que si l'on remplace le point a par un point a' , $F(x)$ est remplacé par $F(x) - F(a')$].

L'application F de \hat{V} dans D est universelle. — Soit G une application holomorphe additive de \hat{V} nulle en a , prenant ses valeurs dans un espace vectoriel complexe B de dimension finie; si b' est un élément de B' , dual de B , $(G(x), b')$ est une fonction holomorphe additive $f(x)$ (nulle en a). On a ainsi une application linéaire complexe de B' dans D' qui à b' fait correspondre $df = d(G(x), b')$, et si g est l'application transposée, on a

$$(G(x), b') = f(x) = (F(x), df(x)) = (g \circ F(x), b').$$

On voit que G se met sous la forme $g \circ F$; de plus g est déterminée de manière unique par cette formule puisqu'on doit avoir alors $(G(x), b') = (g \circ F(x), b')$ pour tout b' .

Applications dans les tores complexes. — Soit G une application analytique complexe, nulle en a , de V dans un tore complexe Θ , quotient d'un espace vectoriel complexe B par un sous-groupe discret de rang maximum. G peut se remonter en une application holomorphe additive \hat{G} de \hat{V} dans B . Cette application \hat{G} est de la forme $g \circ F$ comme on vient de le voir, g étant un homomorphisme de D dans B . Si p désigne la projection de B sur le tore complexe Θ , $G = p \circ g \circ F$. L'application $p \circ g$ est une application de D dans Θ évidemment nulle sur le groupe Δ . Soit alors $\bar{\Delta}$ le plus petit sous-groupe fermé de D , contenant Δ , et dont la composante connexe de 0 est un sous-espace vectoriel complexe de D ($\bar{\Delta}$ est l'intersection des sous-groupes fermés contenant Δ , et dont les composantes connexes de 0 sont des sous-espaces vectoriels complexes de D); $D/\bar{\Delta}$ est un tore complexe $T(V)$, et toute application analytique de D dans un tore complexe Θ , nulle sur Δ , est composée de l'application canonique de D sur T et d'une application de T dans Θ . Il en résulte que toute application analytique de V dans un tore complexe Θ , nulle en a , est composée d'une manière unique de l'application de V dans $T(V)$ qui vient d'être définie et d'un homomorphisme de $T(V)$ dans Θ .

Si l'on considère maintenant une application analytique de V dans Θ , sans supposer que a soit envoyé à l'origine dans Θ , on se ramène au cas précédent en composant l'application donnée avec une translation convenable de Θ . L'application donnée est alors composée de l'application canonique de V dans $T(V)$ et d'une application affine de $T(V)$ dans Θ . La variété $T(V)$ et l'application canonique de V dans $T(V)$ constituent alors une solution du problème suivant : *Trouver un tore complexe affine $A(V)$ et une application $p : V \rightarrow A(V)$ de manière que toute application analytique de V dans un tore complexe Θ se mette d'une manière unique sous la forme $f \circ p$, f étant une application affine de $A(V)$ dans Θ .* Il est immédiat d'autre part que la solution de ce problème est unique à un isomorphisme près.

La variété $A(V)$, munie de l'application p , s'appellera *la variété d'Albanese de V* .

Si m est la dimension complexe de D , on a vu que $2m \leq b_1$, b_1 étant le premier nombre de Betti de V . La dimension n de $A(V)$ est au plus égale à m . Dans le cas particulier où $2m = b_1$, on a $n = m$ car le groupe Δ est nécessairement fermé; on est dans ce cas si V est une variété kählérienne.

Exemple d'une variété V telle que $n \neq m$. — Cette variété va être obtenue comme espace fibré analytique complexe, dont la base B sera une droite projective complexe et la fibre un tore complexe. La droite projective complexe peut

être définie par deux cartes locales U_1 et U_2 , où l'on a respectivement des coordonnées locales z_1 et z_2 prenant leurs valeurs dans \mathbb{C} ; le recollement de ces deux cartes se fait par $z_1 \cdot z_2 = 1$. Soit d'autre part un tore T à deux dimensions complexes défini par deux coordonnées x et y , et quatre périodes $(2i\pi, 0)$, $(a, 1)$, (b, i) , et (c, g) . On vérifie aisément que ces quatre périodes sont linéairement indépendantes si

$$\operatorname{Ré}(c) \neq \operatorname{Ré}(a) \cdot \operatorname{Ré}(g) + \operatorname{Ré}(b) \cdot \operatorname{Im}(g),$$

les symboles $\operatorname{Ré}$ et Im désignant la partie réelle et le coefficient de i ; on voit qu'on peut choisir d'abord g comme on veut, puis trouver a , b et c convenables. V est alors obtenu en recollant $U_1 \times T$ et $U_2 \times T$ suivant la loi

$$z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad y_2 = y_1 \quad \text{et} \quad x_2 = x_1 + \operatorname{Log} z_1.$$

V est une variété complexe dont le premier nombre de Betti est 3. Il y a donc au plus une forme différentielle fermée holomorphe de degré 1; on voit que dy convient effectivement: ses périodes sont 1, i et g . Si l'on a choisi g irrationnel [c'est-à-dire $\operatorname{Ré}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ non tous deux rationnels], Δ n'est pas fermé et $A(V)$ est réduit à un point: on a $m = 1$ et $n = 0$.

Homomorphismes définis par une application analytique. — Soient V_1 et V_2 deux variétés analytiques complexes compactes, et f une application analytique de V_1 dans V_2 ; si p_1 et p_2 désignent les applications canoniques de V_1 dans $A(V_1)$ et de V_2 dans $A(V_2)$, $p_2 \circ f$ est une application analytique de V_1 dans $A(V_2)$; il y a donc une application affine f_A bien déterminée de $A(V_1)$ dans $A(V_2)$ telle que

$$p_2 \circ f = f_A \circ p_1.$$

f_A à son tour détermine un homomorphisme de $T(V_1)$ dans $T(V_2)$. En effet, si a et x sont deux points de $A(V_1)$, f_A étant une application affine, $f_A(x) - f_A(a)$ ne dépend que de $x - a$, c'est-à-dire que si t_1 est une translation de $A(V_1)$, il existe une translation $t_2 = \varphi(t_1)$ telle que

$$f_A \circ t_1 = t_2 \circ f_A;$$

$t_1 \rightarrow t_2$ est un homomorphisme φ de $T(V_1)$ dans $T(V_2)$ déterminé par f_A .

Si θ est une translation de $A(V_2)$, f_A et $\theta \circ f_A$ déterminent le même homomorphisme φ : en effet si $f_A \circ t_1 = t_2 \circ f_A$, on a

$$\theta \circ f_A \circ t_1 = \theta \circ t_2 \circ f_A$$

et les translations commutent entre elles, ceci est aussi $t_2 \circ \theta \circ f_A$. Réciproquement si deux applications affines f_A et g_A de $A(V_1)$ dans $A(V_2)$ définissent le même homomorphisme φ , on a

$$g_A(x) - g_A(a) = f_A(x) - f_A(a)$$

quels que soient x et a dans $A(V_1)$, d'où il résulte que $g_\lambda(x) - f_\lambda(x)$ ne dépend pas de x , c'est-à-dire que g_λ est de la forme $\theta \circ f_\lambda$.

Si l'on a une application f_{12} (resp. f_{23}) de V_1 dans V_2 (resp. V_2 dans V_3), soit $f_{13} = f_{23} \circ f_{12}$ on a visiblement

$$(f_{13})_\lambda = (f_{23})_\lambda \circ (f_{12})_\lambda \quad \text{et} \quad \varphi_{13} = \varphi_{23} \circ \varphi_{12}.$$

Il en résulte que si g est un automorphisme de V , g_λ et φ sont des automorphismes de $A(V)$ et $T(V)$ respectivement. Si de plus g opère trivialement sur le premier groupe de Betti de V , φ est l'automorphisme identique de $T(V)$, et g_λ est une *translation* de la variété d'Albanese $A(V)$: c'est la translation définie par $p(g(a)) - p(a)$, a étant un point quelconque de V et p la projection de V dans $A(V)$.

Le groupe des automorphismes de $T(V)$ étant discret, tout g qui appartient à $G^0(V)$ (composante connexe de l'identité dans le groupe G des automorphismes de V) est dans le cas précédent. On a donc un *homomorphisme canonique de G^0 dans $T(V)$* . Le noyau de cet homomorphisme sera désigné par N , et la composante connexe de l'identité dans N par N^0 . Le quotient G^0/N^0 est un groupe abélien complexe qui admet un monomorphisme local dans $T(V)$, mais on ne sait pas en général si l'image de G^0/N^0 dans $T(V)$ est fermée. Nous pouvons ainsi énoncer :

PROPOSITION I.2.1. — *Soient V une variété analytique complexe compacte connexe, p l'application canonique de V dans sa variété d'Albanese $A(V)$, G' le groupe des automorphismes de V qui opèrent trivialement sur le premier groupe d'homologie réelle de V . Alors G' contient G^0 (groupe connexe des automorphismes de V), et il existe un homomorphisme de G' dans $T(V)$, tel que si à $g \in G'$ correspond $t \in T(V)$ on ait $p \circ g = t \circ p$.*

Variétés attachées à un espace fibré. — Nous allons montrer :

PROPOSITION I.2.2. — *Soient E et B deux variétés analytiques complexes compactes et connexes. Soit $p : E \rightarrow B$ une application analytique. On suppose que p est une fibration au sens de Serre ([15], p. 443), que chaque fibre F est une sous-variété analytique complexe de E , et que tout point de la base B admet un voisinage au-dessus duquel il existe une section analytique de l'espace fibré E . Dans ces hypothèses le diagramme suivant est une suite exacte, quelle que soit la fibre F choisie dans l'espace fibré :*

$$T(F) \xrightarrow{i_*} T(E) \xrightarrow{p_*} T(B) \rightarrow 0.$$

(Parmi les espaces fibrés satisfaisant à l'hypothèse, il y a évidemment les espaces *fibrés analytiques complexes*; nous donnerons ci-dessous un exemple d'espace fibré n'appartenant pas à cette catégorie.)

Démonstration de la proposition I.2.2. — Montrons d'abord que l'image de $T(F)$ dans $T(E)$ ne dépend pas du choix de F : soit F_0 une fibre, et u une forme différentielle holomorphe fermée sur E provenant d'une forme linéaire sur $T(E)$, nulle sur l'image de $T(F_0)$ dans $T(E)$. La forme induite par u sur F_0 est alors nulle; la classe de cohomologie réelle de u induit donc la classe nulle sur F_0 , et par suite sur toutes les fibres puisque $E(B, F)$ est fibré au sens de Serre. Il en résulte que la forme u induit sur toute fibre une forme holomorphe fermée représentant la classe de cohomologie nulle, c'est-à-dire que u induit zéro sur toutes les fibres.

L'image de $T(F)$ dans $T(E)$ est alors contenue dans l'image de $T(F_0)$ dans $T(E)$, sinon il existerait une forme linéaire sur le revêtement de $T(E)$ qui induirait zéro sur le revêtement de l'image de $T(F_0)$ et non sur celui de l'image de $T(F)$, c'est-à-dire une forme différentielle holomorphe dans E , nulle sur F_0 et non sur F . Puisque l'image de $T(F)$ est contenue dans l'image de $T(F_0)$ quel que soit le choix des deux fibres F_0 et F , elle ne dépend pas de la fibre choisie.

Désignons par $T'(F)$ l'image constante de $T(F)$ dans $T(E)$. Nous allons définir maintenant une application $s : B \rightarrow T(E)/T'(F)$ qui définira un homomorphisme $s_* : T(B) \rightarrow T(E)/T'(F)$. Soit a un point de E jouant le rôle d'origine; a jouera ce rôle également dans la fibre passant par a , et $p(a)$ jouera ce rôle dans B . Chaque fibre de E a pour image dans $T(E)$ un sous-ensemble d'une variété déduite de $T'(F)$ par une translation, de sorte que chaque fibre a pour image dans $T(E)/T'(F)$ un point.

L'application s est alors définie ainsi : soit x un point de B , F_x la fibre $p^{-1}(x)$; $s(x)$ est l'image de F_x dans $T(E)/T'(F)$. Comme nous avons supposé l'existence de sections locales analytiques au voisinage de chaque point de B , l'application s peut être définie au voisinage d'un point par $\pi_E \circ \sigma_x$, π_E étant l'application $E \rightarrow T(E)$, et σ_x l'application qui remonte un voisinage de x dans la section analytique qui existe par hypothèse au voisinage de x ; ceci prouve que l'application $s : B \rightarrow T(E)/T'(F)$ est analytique complexe.

Comme $p_* \circ i_* = 0$, p_* définit une application, qu'on notera encore p_* , de $T(E)/T'(F)$ dans $T(B)$. Nous voulons montrer que cette dernière application est inverse de s_* définie par s . Il est immédiat en effet que $p_* \circ s_*$ et $s_* \circ p_*$ sont inverses l'une de l'autre pour les points images de B dans $T(B)$ et de E dans $T(E)/T'(F)$ respectivement. Or il résulte du caractère universel de la variété d'Albanese que si une application de $T(V)$ dans un tore complexe est déterminée sur l'image de V dans $T(V)$, elle est complètement déterminée, et cela est encore vrai si l'on remplace $T(V)$ par un *quotient* de $T(V)$; il en résulte dans le cas précédent que l'application s_* est inverse de l'application p_* de $T(E)/T'(F)$ dans $T(B)$. Cet isomorphisme démontre la proposition I.2.2.

Exemple de fibration au sens de la proposition I.2.2. — Considérons la variété $S_2 \times T^4$, un point de S_2 étant défini par trois coordonnées x, y, z liées

par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; et un point de T^4 étant défini par un quaternion $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ modulo un sous-groupe discret de rang 4. On convient que la sphère S_2 estm unie de sa structure complexe habituelle, et l'on définit une structure presque complexe sur $S_2 \times T^4$ en convenant que l'opération J sur les vecteurs tangents à T^4 au point $(x, y, z; q)$ est définie par la multiplication par le quaternion $xi + yj + zk$. On peut vérifier alors [2] que cette structure presque complexe est en réalité une *structure complexe* et la projection de $S_2 \times T^4$ sur S_2 définie par $(x, y, z; q) \rightarrow (x, y, z)$ est une fibration satisfaisant aux hypothèses de la proposition I.2.2.

Autres variétés attachées à un espace fibré analytique complexe. — Soit $E(B, F)$ un espace *fibré analytique complexe*, de base B et de fibre F; B et F sont supposées compactes connexes, et de plus on suppose que le groupe de Poincaré $\pi_1(B)$ opère trivialement sur le groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$ [donc sur $T(F)$]. On peut alors choisir un groupe structural opérant trivialement sur $T(F)$; ce nouveau groupe structural opère par translations dans $A(F)$ ainsi que dans $A'(F)$, si l'on appelle $A'(F)$ l'image de $A(F)$ dans $A(E)$. On peut alors définir canoniquement deux variétés V et W fibrées principales de base B, de fibre $A(F)$ et $A'(F)$ respectivement, associées au fibré $E(B, F)$. De cette définition il résulte que W est le fibré image inverse de $A(E)$ par l'application $B \rightarrow A(B)$. On a donc le diagramme d'applications

$$E \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow A(E)$$

et l'application composée $E \rightarrow A(E)$ est l'application naturelle de E dans sa variété d'Albanese. On a aussi des applications

$$T(E) \rightarrow T(V) \rightarrow T(W) \rightarrow T(E)$$

et l'application composée $T(E) \rightarrow T(E)$ est l'identité. Je dis que ces trois homomorphismes sont des isomorphismes de $T(E)$, $T(V)$ et $T(W)$: en effet le diagramme

$$E \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow A(E)$$

détermine le diagramme [$T'(F)$ désigne l'image de $T(F)$ dans $T(E)$] :

$$\begin{array}{ccccccc} T(F) & \rightarrow & T(E) & \rightarrow & T(B) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T(F) & \rightarrow & T(V) & \rightarrow & T(B) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T(F) & \rightarrow & T(W) & \rightarrow & T(B) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T(F) & \rightarrow & T(E) & \rightarrow & T(B) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes horizontales sont des suites exactes, les homomorphismes de la première colonne des épimorphismes et ceux de la troisième colonne des isomorphismes; alors le lemme des quatre concernant les épimorphismes

permet de dire que le diagramme

$$T(E) \rightarrow T(V) \rightarrow T(W) \rightarrow T(E)$$

est un diagramme d'épimorphismes; puisque le composé est l'identité, ce sont des *isomorphismes*.

Ces variétés V et W interviendront dans la recherche des conditions dans lesquelles $E(B, F)$ est une variété algébrique (*cf.* II^e partie, § 5).

La variété de Picard. — La variété de Picard sera utilisée dans la suite uniquement pour des variétés kählériennes. Nous ne chercherons pas à la définir pour une variété complexe compacte quelconque, et nous en donnerons ici une définition classique sous la forme qui paraît la plus utile pour la suite. Notons que la variété de Picard sera toujours envisagée avec une structure de groupe.

Soit V une variété compacte complexe connexe, telle que la dimension de $A(V)$ soit égale au premier nombre de Betti de V . On définira alors la variété de Picard $P(V)$ comme le groupe quotient du groupe des multiplicateurs spéciaux [c'est-à-dire le groupe des homomorphismes de $\pi_1(V)$ dans C^* nuls sur le groupe de torsion], par le groupe des multiplicateurs triviaux (c'est-à-dire le groupe des multiplicateurs des exponentielles des formes de première espèce sur V) [18]. On voit que ce groupe classe les espaces fibrés principaux de fibre C^* pour lesquels on aura montré l'existence d'une section périodique.

On va voir que la variété de Picard $P(V)$ est l'antiduale de la variété $T(V)$. En effet la dimension de $T(V)$ étant $b_1(V)$, tout multiplicateur spécial est le multiplicateur d'une fonction de la forme $\exp(2i\pi(z + \bar{y}))$, y et z étant des primitives de formes de première espèce; on voit donc que la variété de Picard est le groupe des formes antiholomorphes modulo les formes $d\bar{y}$ telles que le multiplicateur de $\exp(2i\pi\bar{y})$ soit le multiplicateur de $\exp(2i\pi x)$, dx étant une forme de première espèce. S'il en est ainsi les périodes de $dx - d\bar{y}$ sont entières, donc celles de $\text{Im}(dx - d\bar{y}) = \text{Im}(dx + dy)$ sont nulles, d'où $\text{Im}(dx) = -\text{Im}(dy)$, ce qui entraîne $dx = -dy$. On a alors

$$\text{Ré}(dx - dy) = -2\text{Ré}(dy)$$

et la partie réelle de dy est à périodes demi-entières. Réciproquement si l'on considère une forme dy telle que $\text{Ré}(dy)$ soit à périodes demi-entières, il est clair que le multiplicateur de $\exp(2i\pi\bar{y})$ est le multiplicateur de $\exp(-2i\pi y)$, c'est-à-dire un multiplicateur trivial.

La variété de Picard est donc le groupe des formes antiholomorphes \bar{h} modulo les formes dont la partie réelle est à périodes demi-entières, et la structure complexe de la variété de Picard provient de la multiplication par i des formes antiholomorphes. Cette structure complexe provient évidemment de la structure complexe naturelle sur le groupe des multiplicateurs. Si à une forme \bar{h} on fait correspondre $2\text{Ré}(\bar{h})$, la variété de Picard s'identifie alors à

l'espace des formes réelles qui sont parties réelles de formes holomorphes, modulo les formes à périodes entières, avec la structure complexe définie par l'opérateur $-C$ (l'opérateur C de certains auteurs étant $-C$ pour d'autres, nous choisissons celui d'A. Weil : C multiplie par i les formes holomorphes et par $-i$ les formes antiholomorphes). La variété de Picard apparaît ainsi comme antiduale de la variété d'Albanese.

**3. Le théorème principal I. Famille d'espaces fibrés.
Théorème de Weil. Étude de $\theta(X)F$. Le théorème.**

Le théorème sur les automorphismes d'une variété algébrique. Position du problème. — Soit V une variété compacte kählérienne. Si D est un diviseur défini sur V par des fonctions f_j définies sur les ouverts d'un recouvrement U_j , telles que f_k/f_j soit une fonction holomorphe inversible sur $U_j \cap U_k$, il sera naturel étant donné un automorphisme g de V , de définir gD par les fonctions $f_j(g^{-1}(x))$ sur les ouverts $g(U_j)$. Considérons en particulier les automorphismes g appartenant à la composante connexe G^0 de l'identité dans le groupe G des automorphismes de V ; la classe de cohomologie entière de gD est alors égale à la classe de cohomologie entière de D , et $gD - D$ définit un point de la variété de Picard $P(V)$. Dans le cas particulier où la classe de cohomologie réelle de D est nulle, D est le diviseur d'une fonction méromorphe multiplicative f ([18], p. 875), gD est le diviseur de $gf = f(g^{-1}(x))$, et $gD - D$ est le diviseur de gf/f qui est une vraie fonction méromorphe car gf a le même groupe de multiplicateurs que f , puisque $g \in G^0$. Donc $gD - D$ est équivalent à zéro.

D étant à nouveau un diviseur de classe caractéristique quelconque, on a

$$\begin{aligned} g_1 g_2 D - D &= g_1 g_2 D - g_2 D + g_2 D - D \\ &= g_1 (g_2 D - D) - (g_2 D - D) + g_1 D - D + g_2 D - D, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $g_1 D - D + g_2 D - D$ puisque la classe caractéristique de $g_2 D - D$ est nulle.

On peut donc dire que D étant donné, l'application qui, à $g \in G^0$, fait correspondre $gD - D$ modulo l'équivalence linéaire est une représentation de G^0 dans la variété de Picard de V . D'autre part $gD - D$ dépend linéairement de la classe caractéristique de D .

Nous avons trouvé précédemment une représentation naturelle de G^0 dans le groupe $T(V)$ des translations de la variété d'Albanese $A(V)$ (prop. I.2.1) et il s'agit maintenant de trouver quelle relation il y a entre cette représentation et les représentations dans la variété de Picard définies au moyen de diviseurs.

Ce problème va être traité par des méthodes différentielles : à un diviseur D défini par les fonctions f_j sur les ouverts U_j , on fait correspondre le fibré F de

fibre C^* défini par les fonctions de passage définies modulo 1 :

$$f_{jk} = \frac{1}{2i\pi} \text{Log} \frac{f_k}{f_j} \quad \text{dans } U_j \cap U_k.$$

Le fibré gF est alors le fibré défini par les fonctions $f_{jk}(g^{-1}(x))$, fonctions définies sur $g(U_j \cap U_k)$. Si X est une transformation infinitésimale appartenant au groupe G^0 , on définira le fibré $\theta(X)F$ comme un fibré principal de fibre C et de base V défini au moyen des fonctions $-\theta(X)f_{jk}$ holomorphes dans $U_j \cap U_k$.

L'ensemble des gF pour $g \in G^0$ va constituer une famille analytique particulière d'espaces fibrés,

Familles d'espaces fibrés. — Cette notion généralise la notion de famille analytique de diviseurs due à A. Weil [18].

Soient V une variété analytique complexe, S une variété topologique (resp. différentiable, resp. analytique complexe), Γ un groupe de Lie complexe, U_j un recouvrement de $V \times S$ [dont un point quelconque sera noté (x, s)]; une famille continue (resp. différentiable, resp. analytique) d'espaces fibrés analytiques complexes principaux de base V , de groupe Γ , sera un espace fibré principal de base $V \times S$, de groupe Γ défini par des fonctions f_{jk} dans $U_j \cap U_k$ à valeurs dans Γ , telles que $f_{jk} \cdot f_{kl} \cdot f_{lj} = 1$, $f_{jk}(x, s)$ étant analytique complexe par rapport à x et uniformément continu de s sur tout compact (resp. différentiable par rapport au couple x, s ; resp. analytique complexe par rapport au couple x, s). A un point s de S correspond l'espace fibré défini par les restrictions des f_{jk} à $V \times s$, c'est-à-dire l'espace fibré image réciproque de l'application $x \rightarrow (x, s)$. Il est clair qu'à la famille de diviseurs définie par un diviseur D sur $V \times S$ correspond la famille d'espaces fibrés définie par l'espace fibré correspondant à D sur $V \times S$. s_0 étant un point de S , les U_j découpent sur $V \times s_0$ un recouvrement $U'_j \times s_0$; il existe un recouvrement de V par des U''_j contenus dans les U'_j tel que si s est assez voisin de s_0 , les traces des U_j sur $V \times s$ contiennent les $U''_j \times s$.

Pour faire l'étude locale d'une famille d'espaces fibrés analytiques au voisinage d'une valeur s_0 du paramètre, on pourra donc supposer que nous avons un recouvrement fixe de la variété V .

Invariant d'un fibré de groupe C ou C^ et de base kählérienne.* — Soit d'abord un fibré F de groupe C défini sur une base V kählérienne par des fonctions holomorphes f_{jk} . Si l_k est une partition de l'unité indéfiniment différentiable, on a en posant $f_j = -\sum_k l_k \cdot f_{jk}$, des fonctions indéfiniment différentiables telles que $f_{jk} = f_k - f_j$. Puisque f_{jk} est holomorphe on a $d'' f_{jk} = 0$, donc $d'' f_j$ est une forme partout définie sur V ; le laplacien $\Delta f_j = 2 d'' d'' f_j$ s'écrivant comme d'' d'une forme partout définie est orthogonal aux formes harmoniques, on a donc

une fonction f telle que $\Delta f = \Delta f_j$, et f s'obtient au moyen de l'opérateur de Green : $f = G(\Delta f_j)$. Alors $f_j - f$ est harmonique et $d(f_j - f) = h_j - \bar{h}$, h_j étant une forme holomorphe fermée de degré 1 définie dans U_j et \bar{h} une forme complexe conjuguée d'une forme de première espèce. \bar{h} est l'invariant qui caractérise le fibré F ; F admet une section multiforme dont les périodes sont celles de la forme antiholomorphe \bar{h} .

Si nous avons maintenant une famille continue d'espaces fibrés paramétrée par s restant voisin de s_0 , le recouvrement de V étant fixe, f_{jk} est uniformément continu de s sur tout compact et il en est de même de ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque donné à l'avance. Δf_j est alors uniformément continu de s sur V , et d'après la continuité de l'opérateur de Green, f est uniformément continu de s et par suite \bar{h} dépend continûment de s .

De même si s est un paramètre numérique, f_{jk} admettant une dérivée par rapport à s , celle-ci sera notée $\partial_s f_{jk}$; on voit que f_j , Δf_j , f et \bar{h} admettent des dérivées par rapport à s respectivement égales à

$$\partial_s f_j = - \sum_k l_k \cdot \partial_s f_{jk}, \quad \Delta \partial_s f_j, \quad \partial_s f = G(\Delta \partial_s f_j),$$

et $\partial_s \bar{h}$ égal à l'invariant de l'espace fibré défini par les $\partial_s f_{jk}$ ([9], chap. 1, § 1, prop. 2).

Comme l'invariant du fibré défini par les $i f_{jk}$ est $i \bar{h}$, \bar{h} désignant l'invariant du fibré défini par les f_{jk} , on voit tout de suite que l'invariant d'une famille analytique complexe de fibrés de fibre C sur une variété kählérienne est analytique complexe (la structure complexe sur l'espace des formes antiholomorphes étant définie par la multiplication par i).

Lorsque F est un fibré de fibre C^* topologiquement trivial on peut le remonter en un fibré \hat{F} de fibre C ; \hat{F} possède un invariant \bar{h} et le point de la variété de Picard correspondant à F n'est pas autre chose que \bar{h} réduit modulo les formes antiholomorphes dont les parties réelles des périodes sont demi-entières.

On retrouve alors un théorème d'A. Weil : ([18], p. 882).

THÉORÈME I. 3. 1. — *Soit V une variété compacte kählérienne. Si l'on a sur V une famille analytique de diviseurs dont la classe de cohomologie entière est nulle, cette famille étant paramétrée par une variété S , cette famille définit une application analytique de S dans la variété de Picard $P(V)$,*

COROLLAIRE. — *Les représentations de $G^0(V)$ dans la variété de Picard $P(V)$ définies pour une variété kählérienne V en faisant correspondre à chaque diviseur D et à chaque $g \in G^0$, la classe de $gD - D$ modulo l'équivalence linéaire sont analytiques complexes.*

On voit de plus que si X est une transformation infinitésimale appartenant à G^0 , et $g = \exp \theta(X)$, F étant le fibré correspondant au diviseur D , l'invariant du fibré $\theta(X)F$ réduit modulo les formes dont les parties réelles des périodes sont demi-entières, est le point de $P(V)$ correspondant à $gD - D$.

Étude de $\theta(X)F$. — Soit F un espace fibré analytique complexe principal de base V compacte kählérienne et de fibre C^* (considéré comme C modulo 1) F est défini par des f_{jk} , définis sur $U_j \cap U_k$ tels que

$$f_{jk} + f_{kl} + f_{lj} = 0 \quad (\text{mod } 1),$$

l_k désignant toujours une partition de l'unité indéfiniment différentiable on peut poser

$$h_j^0 = - \sum_k l_k \cdot df_{jk};$$

les h_j^0 sont des formes différentielles de type $(1, 0)$ indéfiniment différentiables telles que $df_{jk} = h_k^0 - h_j^0$. (Ceci peut s'interpréter comme une connexion dans l'espace fibré F ; nous reviendrons sur cette notion dans la deuxième partie.)

df_{jk} étant une forme fermée holomorphe dans $U_j \cap U_k$, on a $d(df_{jk}) = 0$ et $\partial(df_{jk}) = 0$, d'où il résulte que dh_j^0 et ∂h_j^0 sont des formes définies sur toute la variété V . Écrivant $\Delta h_j^0 = \partial dh_j^0 + d\partial h_j^0$, on voit que Δh_j^0 est somme d'un bord et d'un cobord, donc est orthogonal aux formes harmoniques. Si l'on pose $h = G(\Delta h_j^0)$, $\Delta h = \Delta h_j^0$ et les $h_j = h_j^0 - h$ sont des formes harmoniques sur les cartes U_j , et l'on a $df_{jk} = h_k - h_j$.

La forme $R = -dh_j$ définie sur V représente la classe caractéristique réelle du fibré F : en effet si dans chaque $U_j \times C^*$, z_j est la coordonnée fibre, $dz_j - h_j$ est une forme différentielle définie dans l'espace fibré, qui dans chaque fibre induit une forme dont la période est 1, et dont la différentielle est R . Cette forme est donc à périodes entières; d'autre part elle est harmonique, puisque les h_j sont harmoniques et que d commute avec Δ ; c'est donc une forme réelle, ce qu'on peut aussi montrer directement en utilisant le fait que $\text{Im} f_{jk}$ est bien défini.

X étant une transformation infinitésimale appartenant au groupe G^0 , l'invariant du fibré $\theta(X)F$ est égal à $-\text{H}(d''f_j)$ si l'on a mis $-\theta(X)f_{jk}$ sous la forme $f_k - f_j$. Or on a

$$\theta(X)f_{jk} = i(X)df_{jk} = i(X)h_k - i(X)h_j.$$

L'invariant de $\theta(X)F$ est donc la partie harmonique et de type $(0, 1)$ de $d(i(X)h_j)$. D'autre part nous savons que

$$d \circ i(X) = \theta(X) - i(X) \circ d$$

et comme $\theta(X)h_j$ est de type $(1, 0)$, h_j étant de type $(1, 0)$, l'invariant du

fibré $\theta(X)F$ est finalement la partie harmonique et de type $(0, 1)$ de $-i(X)dh_j = i(X)R$.

R étant une forme réelle comme on l'a vu plus haut, l'invariant de $\theta(X)F$ est encore la forme antiholomorphe dont la partie réelle est $\frac{1}{2}H(i(X)R)$. La forme R , fermée et de type $(1, 1)$, peut s'écrire comme différence de deux formes de Kähler [c'est-à-dire fermées, de type $(1, 1)$ et positives] sur V .

Considérons alors $H(i(X)Q)$, Q étant une forme de Kähler. Au champ de vecteurs X , la métrique kählérienne définie par la forme Q fait correspondre une forme x de degré 1; un calcul local immédiat montre que $i(X)Q = -Cx$ [C multipliant par i les formes de type $(1, 0)$ et par $-i$ les formes de type $(0, 1)$]. La forme $H(i(X)Q)$ sera déterminée par ses produits scalaires avec les formes harmoniques y de degré 1 (les produits scalaires étant définis par la métrique correspondante à Q); or y étant harmonique et de même degré qu'une forme u , on voit facilement que $(y, Hu) = (y, u)$. Nous avons donc

$$(y, H(i(X)Q)) = (y, i(X)Q) = -(y, Cx) = -(Cy, C^2x) = (Cy, x) = \int_V i(X)Cy \frac{Q^n}{n!}.$$

Mais une forme harmonique y n'est pas autre chose que l'image inverse, par l'application canonique de V dans $A(V)$, d'une forme de $A(V)$ invariante par translation; $i(X)Cy$ est donc la constante $(p(X), Cy)$, produit de Cy [considérée comme forme dans $T(V)$] et de la projection $p(X)$ de X dans $T(V)$ qui est un vecteur constant de $T(V)$. En particulier si X appartient au groupe N^0 , $p(X) = 0$; on a alors $H(i(X)Q) = 0$: le fibré $\theta(X)F$ est trivial. On voit maintenant que $H(i(X)R)$ ne dépend que de R et de $p(X)$, projection de X dans $T(V)$, d'où en remontant aux transformations finies :

PROPOSITION I.3.1. — *Le groupe N^0 opère trivialement sur tout espace fibré principal de base V kählérienne compacte et de fibre C^* .*

Ce qui donne immédiatement :

PROPOSITION I.3.2. — *Les représentations de $G^0(V)$ dans la variété de Picard $P(V)$ définies ci-dessus (corollaire du théorème I.3.1) sont triviales sur le groupe N^0 .*

[N^0 désigne toujours la composante connexe du noyau de la représentation naturelle de G^0 dans le groupe $T(V)$ des translations de $A(V)$].

Nous sommes alors amené à nous demander si le groupe N noyau de l'homomorphisme $G^0 \rightarrow T(V)$ transforme tout diviseur en un diviseur équivalent : Le théorème I.3.2 ci-dessous donne un résultat un peu plus faible, valable pour les variétés algébriques projectives.

Cas où V est une variété algébrique projective. — Maintenant que nous savons que seul le quotient G^0/N^0 opère sur les fibrés de fibre C^* , nous pouvons considérer $p(X)$ comme un vecteur fini du revêtement universel de $T(V)$, vecteur correspondant à un élément g de G^0 , X étant un vecteur tel que $(\exp X) \cdot g^{-1}$ soit dans N^0 . La forme antiholomorphe de partie réelle $\frac{1}{2} H(i(X)R)$, réduite modulo les formes dont la partie réelle est à périodes demi-entières, est le point de $P(V)$ correspondant $gF - F$. Nous allons voir que si $p(X)$ est une période de $T(V)$, $H(i(X)R)$ est à périodes rationnelles.

Il suffit de voir que si Q est une forme de Hodge, et si $p(X)$ est une période de $T(V)$, $H(i(X)Q)$ est à périodes rationnelles. Soit y_k une base du module des formes y telles que Cy soit à périodes entières. Dire que $p(X)$ est une période de $T(V)$ équivaut à dire que les $(p(X), Cy_k)$ sont des entiers : les produits scalaires $(y_k, i(X)Q)$ sont rationnels d'après

$$(y_k, i(X)Q) = (p(X), Cy_k) \int_V \frac{Q^n}{n!};$$

mais d'autre part

$$(y, i(X)Q) = (Cy_k, x) = \int_V (Cy_k) \wedge *x = \int_V (Cy_k) \wedge (HCx) \wedge \frac{Q^{n-1}}{(n-1)!}$$

et pour que cette dernière expression soit rationnelle quel que soit l'indice k , il faut que HCx soit à périodes rationnelles. D'où

THÉORÈME I.3.2. — *V étant une variété algébrique projective, D un diviseur sur V, et g un élément du groupe $N(V)$, c'est-à-dire un élément de $G^0(V)$ dont l'image dans le groupe $T(V)$ des translations de $A(V)$ est nulle, la classe de $gD - D$ modulo l'équivalence linéaire appartient à un sous-groupe fini de la variété de Picard $P(V)$.*

Soient Φ un sous-groupe fini de $T(V)$, et N_Φ l'image inverse de Φ dans G^0 par la représentation naturelle de G^0 dans le groupe $T(V)$. Considérons un diviseur ample D ([12]. p. 89); $gD - D$ définit un élément d'un sous-groupe fini Φ_1 de $p(V)$ lorsque g parcourt N_Φ ; si m est l'ordre maximum d'un élément de Φ_1 , mD est encore un diviseur ample et $m(gD - D)$ est équivalent à zéro.

Soit alors f_j une base de l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f , telles que $(f) \succ -mD$; l'application qui à un point x de V fait correspondre le point de coordonnées homogènes $f_j(x)$ dans un espace projectif complexe est un plongement défini par le diviseur mD . Soit g un élément du groupe N_Φ ; le diviseur de $f_j \circ g$ s'obtient en appliquant g^{-1} au diviseur de f_j , de sorte que $(f_j \circ g) \succ -g^{-1}(mD)$; or g^{-1} étant élément de N_Φ , $g^{-1}(mD)$ est linéairement équivalent à mD , c'est-à-dire qu'il existe une fonction φ méromorphe telle que $(\varphi) = g^{-1}(mD) - mD$. On a alors

$$(\varphi \cdot f_j \circ g) = (\varphi) + (f_j \circ g) \succ -mD,$$

d'où

$$\varphi \cdot f_j(g(x)) = \sum_k g_{jk} \cdot f_k(x).$$

Cette formule signifie que g a pour image, par le plongement de V dans l'espace projectif, la restriction à l'image de V de l'homographie définie par la matrice g_{jk} . Cette homographie dépend analytiquement de g comme on le voit en considérant un ensemble fini convenable de points de V . Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME PRINCIPAL I. — *Soit Φ un sous-groupe fini du groupe $T(V)$ des translations de la variété d'Albanese $A(V)$ d'une variété algébrique projective V ; soit N_Φ l'image inverse de Φ dans G^0 , groupe connexe des automorphismes de V . Alors il existe un plongement de V dans un espace projectif complexe tel que le groupe N_Φ d'automorphismes de V soit induit par un groupe d'homographies.*

Remarque sur les fibrés à fibre commutative. — Si F est un fibré principal de fibre un groupe abélien C^n/Δ , on peut encore définir les formes harmoniques h_j à valeurs dans C^n , ainsi que la forme $R = -dh_j$; ses périodes appartiennent au groupe Δ et elle définit la transgression en cohomologie réelle. Une différence importante avec le cas de la fibre C^* est que R n'a plus de raison d'être de type $(1, 1)$; il y a généralement un terme de type $(2, 0)$ et un terme de type $(1, 1)$. Remarquons que la nullité du terme de type $(1, 1)$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse écrire

$$df_{jk} = h_k - h_j,$$

les h_j étant des formes holomorphes, que nous pouvons interpréter comme définissant une *connexion analytique complexe* invariante dans l'espace fibré. Lorsque cette condition est réalisée, il est clair que les fibrés $\theta(X)F$ sont triviaux; d'ailleurs tout champ analytique dans V se remonte alors en un champ analytique dans l'espace fibré. En général l'invariant du fibré $\theta(X)F$ est encore la forme (à valeur dans C^n) égale à la partie harmonique et de type $(0, 1)$ de $i(X)R$; nous voyons que pour trouver cet invariant, seule la partie de type $(1, 1)$ de R intervient, car $i(X)$ appliqué à une forme de type $(2, 0)$ donne un résultat de type $(1, 0)$; nous pouvons donc faire le raisonnement qui a conduit à la proposition I.3.1, proposition qui se généralise ainsi :

PROPOSITION I.3.3. — *Le groupe N^0 opère trivialement sur tout espace fibré principal de base V kählérienne compacte et de fibre un groupe abélien.*

Relations avec la géométrie algébrique. — En supposant que G est un groupe algébrique opérant algébriquement et fidèlement dans une variété algébrique V , on a un homomorphisme de $A(G)$, variété d'Albanese de G , dans le groupe des

translations de $A(V)$; A. Borel a montré (non publié) que le noyau de cet homomorphisme est un groupe fini; il en résulte que la composante connexe du noyau de la représentation de G dans le groupe des translations de $A(V)$ est le noyau Γ de la représentation de G dans sa variété d'Albanese $A(G)$. On a alors le résultat correspondant à notre proposition I.4 : si g appartient à ce noyau Γ , et si D est un diviseur sur V , $gD - D$ est équivalent à zéro. Il serait intéressant de savoir si le groupe connexe G^0 des automorphismes d'une variété algébrique projective V est un groupe algébrique opérant algébriquement dans V ? Dans l'affirmative cela montrerait que l'image de G^0 dans le groupe des translations de $A(V)$ est fermée.

DEUXIÈME PARTIE.

ESPACES FIBRÉS KÄHLÉRIENS.

1. Cohomologie réelle d'un espace fibré à fibre kählérienne. Cas d'une variété fibrée algébrique.

La cohomologie réelle d'un espace fibré à fibre kählérienne. — Dans ce paragraphe nous appliquons la théorie de la suite spectrale [15] à un espace fibré $E(B, F)$ compact connexe, de base B et de fibre F connexes. Dans ce qui suit il n'est question que de *cohomologie réelle*.

THÉORÈME II.1.1. — *Soit $E(B, F)$ un espace fibré au sens de Serre, compact connexe. On suppose que la fibre est une variété compacte connexe de dimension $2n$ et admet une classe de cohomologie Q de degré 2 telle que la multiplication par Q^{n-p} détermine un isomorphisme de $H^p(F)$ sur $H^{2n-p}(F)$. Soit $H^*(F)^\pi$ la sous-algèbre de $H^*(F)$ formée des éléments invariants par $\pi_1(B)$; on suppose que $H^*(F)^\pi$ contient Q et $H^1(F)$; on suppose aussi que $H^*(F)^\pi$ admet un espace vectoriel supplémentaire stable par $\pi_1(B)$. Dans ces hypothèses, une condition nécessaire et suffisante pour que la classe Q soit induite par une classe de cohomologie de l'espace fibré est que la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$ soit nulle.*

Démonstration. — Le système local $H^*(F)$ est somme directe du système trivial $H^*(F)^\pi$ et d'un autre système local. $H^*(F)^\pi$ étant de dimension finie, l'homomorphisme

$$H^*(B) \otimes H^*(F)^\pi \rightarrow H^*(B, H^*(F)^\pi)$$

est un isomorphisme, de sorte que l'homomorphisme

$$H^*(B) \otimes H^*(F)^\pi \rightarrow H^*(B, H^*(F)^\pi) = E_2$$

est un monomorphisme de $H^*(B) \otimes H^*(F)^\pi$ sur un facteur direct du terme E_2 de la suite spectrale. Remarquons que $H^{2n-1}(F)$ et $H^{2n}(F)$ sont sous-espaces

vectoriels de $H^*(F)^\pi$, comme on le voit en utilisant la multiplication par Q^{n-1} et par Q^n . On peut écrire

$$d_2 Q = \sum_k b_k y_k,$$

les b_k formant une base de $H^2(B)$ et les y_k étant dans $H^1(F)$. Soit x un élément de $H^1(F)$; on a $x \cdot Q^n = 0$, d'où

$$(1) \quad 0 = d_2(x \cdot Q^n) = (d_2 x) \cdot Q^n - n x \cdot Q^{n-1} \cdot d_2 Q,$$

si l'on connaît $d_2 Q$, cette formule nous donne $(d_2 x) \cdot Q^n$ donc $d_2 x$; autrement dit, la connaissance de $d_2 Q$ détermine l'application $x \rightarrow d_2 x$ pour $x \in H^1(F)$, c'est-à-dire la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$. Inversement, supposons connue la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$; alors la formule (1) donne les produits de $d_2 Q$ avec les $x \cdot Q^{n-1}$, donc les produits des y_k avec tous les éléments de $H^{2n-1}(F)$, d'après l'hypothèse sur la classe Q ; et ceci détermine les y_k d'après la dualité de Poincaré (car l'hypothèse sur la classe Q entraîne l'orientabilité de F). Ainsi la nullité de $d_2 Q$ équivaut à la nullité de la transgression $H^1(F) \rightarrow H_2(B)$. Lorsque $d_2 Q = 0$, Q et ses puissances peuvent être considérées comme éléments du terme E_3 de la suite spectrale; $d_3 Q$ est un élément b de $H^3(B)$, et comme $Q^{n+1} = 0$ on a

$$0 = d_3(Q^{n+1}) = (n+1)b \cdot Q^n,$$

ce qui entraîne la nullité de $d_3 Q$: la classe Q est alors induite par une classe de l'espace fibré. (Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit une classe induite par une classe de l'espace fibré et que $d_r Q = 0$ pour $r \geq 2$; ici $d_r Q = 0$ si $r > 3$ pour une raison de degré.)

Conditions d'application du théorème II. 1. I. — A part le cas où $\pi_1(B)$ opère trivialement dans la cohomologie de la fibre, cas que nous examinerons de plus près, on sera assuré de l'existence du supplémentaire stable de $H^*(F)$ s'il existe un produit scalaire défini positif dans $H^*(F)$, et invariant par $\pi_1(B)$; ceci est vrai dans le cas suivant :

SCHOLIE. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe, compact connexe, dont la fibre F connexe possède une classe Q invariante par $\pi_1(B)$ et représentable par une forme de Kähler sur F . Alors $E(B, F)$ vérifie les hypothèses du théorème II. 1. I.

En effet $E(B, F)$ étant fibré analytique complexe, $\pi_1(B)$ respecte l'opération $y \rightarrow Cy$, y étant une classe de cohomologie réelle de F , et C étant l'opération définie à partir de la structure complexe [multiplication par i pour les formes de type $(1,0)$, par $-i$ pour les formes de type $(0,1)$]; $\pi_1(B)$ respectant aussi la

classe Q , respecte le produit scalaire défini par

$$\langle x, y \rangle = \int_F x \wedge (Cy) \wedge Q^{n-p}$$

sur $H^p(F)$. Ce produit scalaire est défini positif [18].

THÉORÈME II. 1. 2. — *Soit $E(B, F)$ un espace fibré au sens de Serre, compact connexe. On suppose que la fibre est une variété compacte connexe de dimension $2n$ et admet une classe de cohomologie Q de degré 2 telle que la multiplication par Q^{n-p} détermine un isomorphisme de $H^p(F)$ sur $H^{2n-p}(F)$. On suppose en outre que $\pi_1(B)$ opère trivialement sur $H^*(F)$. Alors la nullité de la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$ entraîne la nullité de toutes les différentielles de Leray : les espaces vectoriels de cohomologie réelle de E sont isomorphes à ceux de $B \times F$.*

Démonstration. — Raisonons par l'absurde. Soit d_s la première différentielle qui ne soit pas nulle; le terme E_s de la suite spectrale est isomorphe à E_2 . De plus on a vu dans la démonstration du théorème II. 1. 1 que $d_s Q = 0$ pour $s \geq 2$. Soit r l'entier tel que d_s soit nul sur toute forme de F de degré $\leq r$, mais non sur toute forme de degré $r+1$. Je dis tout d'abord que d_s est nul sur toute classe de F de degré $\geq 2n-r$; en effet, d'après l'hypothèse sur Q , une forme de degré $2n-p \geq 2n-r$ peut s'écrire $x \cdot Q^{n-p}$ avec x de degré $p \leq r$; on a $d_s(x \cdot Q^{n-p}) = 0$ puisque $d_s x = d_s Q = 0$. On a alors $n > r$ (sinon d_s serait nul sur toutes les classes de cohomologie). Soit x une classe de degré $r+1$ de F ; $d_s x$ est un élément de $H^s(B) \otimes H^{r-s+2}(F)$, et l'on peut donc déterminer $d_s x$ au moyen de ses produits avec les éléments de $H^{2n-r+s-2}(F)$ (dualité de Poincaré). Soit z un élément de $H^{2n-r+s-2}(F)$; on a $x \cdot z = 0$, car le degré fibre de $x \cdot z$ est $2n+s-1 > 2n$. On a aussi $d_s z = 0$, car $2n-r+s-2 \geq 2n-r$ de $d_s(x \cdot z) = 0$ et $d_s z = 0$ on tire $(d_s x) \cdot z = 0$, et ceci étant vrai pour tout $z \in H^{2n-r+s-2}(F)$, on a $d_s x = 0$, ce qui contredit la définition de r .

COROLLAIRE. — *Soit E une variété algébrique projective, qui est un espace fibré algébrique de base B et de fibre F ; alors il existe un isomorphisme des espaces vectoriels de cohomologie réelle de E sur ceux de $B \times F$, compatible avec les types.*

En effet si le fibré n'a pas été défini *a priori* avec un groupe structural connexe, on peut restreindre celui-ci à un groupe connexe, puisqu'un point générique de B appartient à tous les ouverts de Zariski de B ; alors $\pi_1(B)$ opère trivialement sur $H^*(F)$, et il suffit de considérer une forme de Kähler induite par un plongement de E dans un espace projectif complexe. L'existence d'un isomorphisme compatible avec les types résulte de ce que l'application $H^*(E) \rightarrow H^*(F)$ définie par l'injection de F dans E est compatible avec les types.

PROPOSITION II. 1. — *Soit $E(B, F)$ une variété compacte complexe kählérienne*

vérifiant les hypothèses du théorème II. 1. 2; on suppose que B possède une structure analytique complexe et que l'application $p : E \rightarrow B$ est analytique complexe; on suppose de plus que les fibres sont des sous-variétés analytiques complexes sans singularité de E. Alors la structure des jacobiniennes de Weil d'une fibre ne dépend pas de la fibre choisie.

Il s'agit en effet de voir que l'opérateur C est compatible avec l'isomorphisme des cohomologies des différentes fibres. Soit u une classe de cohomologie réelle de degré quelconque de F; il existe une classe ν de E qui induit u sur chaque fibre, d'après le théorème II. 1. 2; soit θ le représentant harmonique de ν défini par la structure kählérienne de E; θ induit sur chaque fibre un représentant θ_f de la classe u . La forme $C\theta$ est une forme fermée de E, puisque E est kählérien; cette forme induit des formes $C\theta_f$ représentant une classe constante Cu , qui coïncide avec la classe définie sur chaque fibre à partir de u , car l'opération C définie pour les formes différentielles d'une fibre est induite par l'opération C définie pour les formes différentielles de E.

Exemple. — Considérons la structure analytique complexe sur la variété $S_2 \times T^4$ déjà indiquée au paragraphe 2 de la première partie. La projection sur S_2 est bien une application analytique complexe d'une part, et une fibration au sens de Serre d'autre part (c'est même une fibration triviale au point de vue de la structure analytique réelle sous-jacente, mais non une fibration analytique complexe); cependant les structures analytiques complexes de diverses fibres, qui s'identifient à leurs variétés d'Albanese, sont différentes. *La structure considérée n'est donc pas kählérienne.*

Remarque. — Nous avons raisonné ici sur la cohomologie singulière; mais si $E(B, F)$ est un espace fibré analytique complexe, le même raisonnement peut se faire pour la suite spectrale obtenue au moyen des formes différentielles et l'opérateur d (ce qui n'apporte rien d'essentiellement nouveau); si en outre F est kählérienne ce raisonnement est encore valable pour la *suite spectrale en d'' -cohomologie*. (A. Borel non publié.)

2. Conditions nécessaires pour qu'un espace fibré soit kählérien. Connexions. La forme P.

Formes différentielles et connexions. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré indéfiniment différentiable de base B et de fibre F; soit p la projection de E sur B. On considère un recouvrement ouvert $\{U_j\}$ de B assez fin pour que $p^{-1}(U_j)$ soit isomorphe à $U_j \times F$ et qu'il existe sur U_j des coordonnées locales x_α .

Pour chaque j on a un isomorphisme g_j qui applique $p^{-1}(U_j)$ sur $U_j \times F$, et au-dessus de $U_j \cap U_k$, $g_j \cdot g_k^{-1}$ est un automorphisme de $(U_j \cap U_k) \times F$ de la forme

$$(x, z) \rightarrow (x, g_{jk}(x, z)),$$

z désignant un point de la fibre type. Pour chaque x , l'application $z \rightarrow g_{jk}(x, z)$ est un élément du groupe structural. Si l'on a dans la fibre-type des coordonnées z_r (il faudrait de nouveau considérer un recouvrement, mais il sera sous-entendu sans difficultés car tout ce qui va intervenir dans la suite a un caractère tensoriel évident vis-à-vis des changements de coordonnées n'intéressant que la fibre-type), les isomorphismes g_j définissent dans $p^{-1}(U_j)$ des coordonnées $(x_\alpha, z_{r,j})$, et les automorphismes g_{jk} peuvent être caractérisés par les fonctions

$$z_{r,k} = z_r(g_{jk}(x_\alpha, z_{r,j}))$$

(dans la suite les indices j, k indiqueront une carte locale de B , les indices r, s, t le rang d'une coordonnée fibre, et les indices grecs affecteront les coordonnées base),

Une forme différentielle de degré 1 dans l'espace fibré peut s'écrire dans $p^{-1}(U_j)$ sous la forme $t_{r,j} dz_{r,j} + t_{\alpha,j} dx_\alpha$. Au-dessus de $U_j \cap U_k$ on doit avoir une expression identique à $t_{r,j} dz_{r,j} + t_{\alpha,j} dx_\alpha$ en remplaçant, dans $t_{r,k} dz_{r,k} + t_{\alpha,k} dx_\alpha$ $dz_{r,k}$ par

$$\partial_s z_r(g_{jk}(x_\alpha, z_{r,j})) dz_{s,j} + \partial_\alpha z_r(g_{jk}(x_\alpha, z_{r,j})) dx_\alpha.$$

On voit en particulier que si les $t_{r,j}$ sont identiquement nuls, les $t_{r,k}$ sont nuls au-dessus de $U_j \cap U_k$; on peut donc parler de forme ne contenant que des différentielles des coordonnées base : ce sont d'ailleurs les formes nulles sur les champs de vecteurs tangents aux fibres de l'espace fibré. Si l'on note X_1^0 l'espace des formes différentielles de degré 1 de E , et X_1^1 l'espace des formes de degré 1 de E qui s'annulent sur les champs de vecteurs tangents aux fibres, un élément de X_1^0/X_1^1 sera un ensemble d'expressions de la forme $t_{r,j} dz_{r,j}$; les formules qui permettent de passer de $t_{r,j}$ à $t_{r,k}$ au-dessus de $U_j \cap U_k$ sont les mêmes que pour les coefficients correspondants des formes différentielles. Les éléments de X_1^0/X_1^1 pourront être appelés des fonctions sur la base à valeurs dans les formes différentielles de degré 1 des fibres.

Une *connexion* est une opération commutant avec la multiplication par une fonction, qui applique l'espace quotient X_1^0/X_1^1 dans l'espace X_1^0 , de manière qu'en composant avec l'application naturelle de X_1^0 sur X_1^0/X_1^1 on obtienne l'identité dans X_1^0/X_1^1 . Une telle opération est alors déterminée par des $h_{r\alpha,j}$ définis au-dessus de U_j , et à l'élément $t_{r,j} dz_{r,j}$ de X_1^0/X_1^1 correspond la forme

$$t_{r,j}(dz_{r,j} - h_{r\alpha,j} dx_\alpha);$$

nous n'écrirons pas les formules permettant de passer de $h_{r\alpha,j}$ à $h_{r\alpha,k}$; mais si l'on désigne par $h_{r,j}$ la somme $h_{r\alpha,j} dx_\alpha$, on a évidemment pour $h_{r,j}$ une formule analogue à celle qui donne $dz_{r,k}$ en fonction de $dz_{r,j}$, soit

$$h_{r,k} = \partial_s z_r(g_{jk}(x, z)) h_{s,j} + \partial_\alpha z_r(g_{jk}(x, z)) dx_\alpha.$$

D'après cette formule, on voit que $h_{r\alpha,j}$ n'est pas un tenseur sur l'espace fibré,

mais que si l'on fait un changement de coordonnées dans $p^{-1}(U_j)$ par exemple (identifié à $U_j \times F$) qui opère séparément sur les coordonnées fibre et les coordonnées base, $h_{r\alpha}$ se comporte alors comme un tenseur covariant en dz_r et contravariant en dx_α .

On peut dire encore que la connexion définit sur les $p^{-1}(U_j)$ des tenseurs h_j , dépendant de la manière dont $p^{-1}(U_j)$ est identifié à $U_j \times F$, avec les formules de passage suivantes au-dessus de $U_j \cap U_k$:

$$h_k - h_j = h_{jk},$$

le tenseur h_{jk} ayant pour composantes dans le système de coordonnées $(x_\alpha, z_{r,k})$:

$$h_{r\alpha, jk} = \partial_\alpha z_r (g_{jk}(x_\alpha, z_{r,j})).$$

Inversement la donnée de tenseurs vérifiant ces formules de passage définit une connexion; on voit donc qu'on peut toujours trouver des connexions en utilisant des partitions de l'unité.

Il existe une interprétation géométrique très simple de la notion de connexion : en un point de l'espace fibré les formes $dz_{r,j} - h_{r\alpha, j} dx_\alpha$, lorsque r varie de 1 à n (n étant la dimension de la fibre F), sont linéairement indépendantes et s'annulent sur un supplémentaire de l'espace tangent à la fibre dans l'espace tangent à l'espace fibré; inversement la donnée d'un champ d'éléments transversaux à la fibre en chaque point détermine les $h_{r\alpha, j}$, c'est-à-dire la connexion.

Une opération bécarre. — Soit φ une fonction de la base à valeurs dans les formes de degré n des fibres, indéfiniment différentiable, et qui définit sur chaque fibre la classe fondamentale, c'est-à-dire dont l'intégrale est 1 (la fibre est supposée compacte et orientée); étant donné une fonction f sur l'espace fibré, $f\varphi$ est aussi une fonction de la base à valeurs dans les formes de degré n des fibres, et l'expression $\int_F f\varphi$, définie sans ambiguïté, est une fonction définie sur la base.

L'opération $f \rightarrow \int_F f\varphi$ peut être appelée « moyenne sur les fibres ».

Ceci étant, supposons qu'il existe une forme différentielle fermée de degré 1 : $t = t_r dz_r$, sur la fibre-type, invariante par le groupe structural. Cette forme est la différentielle d'une fonction additive $u(z)$ que nous pouvons adjoindre aux coordonnées z : on a alors

$$u(g_{jk}(x, z)) = u(z_{r,j}) + f_{jk}(x) \quad (\text{modulo une période de } u).$$

La forme $t_r dz_{r,j}$ définie dans $p^{-1}(U_j)$ peut donc s'exprimer au-dessus de $U_j \cap U_k$ par $t_r dz_{r,k} - df_{jk}(x)$. On peut dire encore que pour une forme de degré 1 de $E(B, F)$ induisant une forme invariante par le groupe structural sur les fibres, la propriété d'avoir des coefficients des différentielles des coordonnées base constants sur les fibres a un sens.

Soit alors une connexion déterminée par des $h_{r\alpha,j}$, et une « moyenne sur les fibres » déterminée par un élément φ de X_n^0/X_1^n représentant sur chaque fibre la classe fondamentale; les expressions

$$t_r dz_{r,j} - \left(\int_F t_r h_{r\alpha,j} \varphi \right) dx_\alpha$$

représentent une forme différentielle de degré 1 définie sur l'espace fibré E. Les coefficients des dx_α étant constants sur les fibres, la différentielle extérieure de cette forme est une forme de la base : sa classe de cohomologie est l'image par la transgression de la classe représentée par la forme $t_r dz_r$.

Ceci s'appliquera aux espaces fibrés analytiques complexes, car les formes de première espèce de la fibre sont invariantes par le groupe structural si l'on suppose que celui-ci opère trivialement sur le premier groupe de cohomologie (réelle) de la fibre.

Espaces fibrés analytiques complexes. — Dans le cas d'un espace fibré analytique complexe nous considérons des coordonnées complexes $z_{r,j}$ et x_α , ainsi que leurs complexes conjuguées $\bar{z}_{r,j}$ et \bar{x}_α ; une connexion s'exprime en général au moyen des expressions $h_{r\alpha,j} dx_\alpha + k_{r\alpha,j} d\bar{x}_\alpha$ correspondant à dz_r , et les expressions complexes conjuguées correspondant à $d\bar{z}_r$. Des connexions particulières sont celles où les $k_{r\alpha}$ sont nuls; elles se caractérisent par le fait qu'elles respectent les types, c'est-à-dire qu'à un élément de X_1^0/X_1^1 de type $(1, 0)$ [resp. $(0, 1)$] elles font correspondre une forme de même type. Ces connexions sont celles qui s'interprètent géométriquement par des champs de sous-variétés linéaires complexes transversales aux fibres des espaces tangents à la variété $E(B, F)$.

Soit donnée une fonction de la base à valeurs dans les formes de type (p, q) des fibres, c'est-à-dire un élément de $X_{p,q}^0/X_{p,q}^1$, quotient de l'espace des formes de type p, q sur E par l'espace des formes de type p, q contenant une différentielle de coordonnée base. Une telle fonction est définie par des expressions

$$a_{r,\dots,s,\dots} dz_r \wedge \dots \wedge d\bar{z}_s \wedge \dots;$$

Étant donnée une connexion respectant les types, on peut considérer la forme

$$a_{r,\dots,s,\dots} (dz_r - h_{r\alpha} dx_\alpha) \wedge \dots \wedge (d\bar{z}_s - \bar{h}_{s\beta} d\bar{x}_\beta) \wedge \dots;$$

cette forme ne dépend pas linéairement de l'élément donné de $X_{p,q}^0/X_{p,q}^1$, mais définit un élément de $X_{p,q}^0/X_{p,q}^2$ ($X_{p,q}^2$, espace des formes de type p, q contenant deux différentielles de coordonnées base) qui dépend linéairement de l'argument.

Le cas le plus intéressant pour notre but est le cas des formes de type $(1, 1)$. Si Q est une forme définie positive de type $(1, 1)$, Q définit une métrique hermitienne; en chaque point de l'espace fibré, l'espace tangent orthogonal à la fibre est une sous-variété *linéaire complexe* d'équation $dz_r = h_{r\alpha} dx_\alpha$ (h_r désigne la

somme $h_{r\alpha} dx_\alpha$), et la forme Q s'écrit

$$Q = a_{rs}(dz_r - h_r) \wedge (d\bar{z}_s - \bar{h}_s) + f_{\alpha\beta} dx_\alpha \wedge d\bar{x}_\beta,$$

avec $a_{rs} = -\bar{a}_{sr}$ et $f_{\beta\alpha} = -\bar{f}_{\alpha\beta}$ (les indices de cartes locales sont sous-entendus).

Nous poserons

$$H_{r\alpha} = a_{rs}\bar{h}_{s\alpha}, \quad H_r = a_{rs}\bar{h}_s,$$

et

$$H = -H_{r\alpha} dz_r \wedge d\bar{x}_\alpha - \bar{H}_{s\beta} d\bar{z}_s \wedge dx_\beta.$$

Les $H_{r\alpha}$ sont les composantes contravariantes de la connexion; on remarque que la relation entre les $H_{r\alpha}$ et les $h_{r\alpha}$ ne dépend pas de Q mais seulement de l'élément de $X_{1,1}^0/X_{1,1}^1$ correspondant. De même que les tenseurs h_j , on a des tenseurs H_j définis sur $p^{-1}(U_j)$ qui sont d'ailleurs des formes différentielles; H_j dépend de la manière dont $p^{-1}(U_j)$ est identifié à $U_j \times F$, et l'on a

$$H_k - H_j = H_{jk},$$

les composantes de H_{jk} étant données évidemment par

$$H_{r\alpha, jk} = a_{rs}\bar{h}_{s\alpha, jk}.$$

Remarquons que Q étant écrit dans le système de coordonnées $(x_\alpha, z_{r,j})$, H_j en est la partie comprenant des produits d'une différentielle base et d'une différentielle fibre; on écrit

$$Q = \hat{Q}_j + H_j + (f_{\alpha\beta, j} + a_{rs, j} h_{r\alpha, j} \bar{h}_{s\alpha, j}) dx_{\alpha, j} \wedge d\bar{x}_{\beta, j},$$

\hat{Q}_j désignant l'expression $a_{rs, j} dz_{r, j} \wedge d\bar{z}_{s, j}$ (l'indice de carte locale sera souvent sous-entendu).

La forme P. — Si $E(B, F)$ est un espace fibré analytique complexe à fibre compacte, de dimension complexe n , et si Q est une forme de type $(1, 1)$ positive sur E, posons

$$P = \frac{1}{(n+1)!} \int_F Q^{n+1}$$

(l'opération \int_F est l'intégration sur les fibres). Pour calculer P il faut écrire les termes de Q^{n+1} contenant $2n$ différentielles fibre; ce calcul peut se faire en un point où l'on suppose $a_{rr} = i$ et $a_{rs} = 0$ si $s \neq r$. On a alors

$$Q = i(dz_r - h_r) \wedge (d\bar{z}_r - \bar{h}_r) + f_{\alpha\beta} dx_\alpha \wedge d\bar{x}_\beta,$$

et lorsqu'on écrit Q^{n+1} il n'y a pas lieu de considérer les produits de $n+1$ termes tels que $(dz_r - h_r) \wedge (d\bar{z}_r - \bar{h}_r)$ car un tel produit contient deux couples au moins de termes identiques du premier degré et est donc nul; il est alors évident que le terme de degré fibre $2n$ est

$$(n+1)! \cdot i^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \wedge (f_{\alpha\beta} dx_\alpha \wedge d\bar{x}_\beta).$$

Or $i^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$ n'est pas autre chose que $\frac{\hat{Q}^n}{n!}$; on a donc en général

$$P = \int_F f_{\alpha\beta} \frac{Q^n}{n!} dx_\alpha \wedge d\bar{x}_\beta.$$

Les $f_{\alpha\beta}$ étant les coefficients d'une forme définie positive sur l'espace normal aux fibres, et $\frac{Q^n}{n!}$ une mesure positive sur les fibres, il en résulte que P est une forme correspondant à une métrique hermitienne de la base B. Si la forme Q est fermée, il est clair que P est fermée d'après sa définition. D'où :

PROPOSITION II. 2. — *Si un espace fibré analytique complexe $E(B, F)$ à fibre F compacte est kählérien, sa base B est kählérienne.*

Compte tenu du théorème II. 1. 1, nous pouvons énoncer les conditions nécessaires suivantes :

Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe, compact, de base B et de fibre F. On suppose de plus que $\pi_1(B)$ opère trivialement sur le premier groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$. Les conditions suivantes sont nécessaires pour que E soit kählérien :

1° *Le groupe de Poincaré $\pi_1(B)$ respecte une classe de cohomologie de degré 2 de F correspondant à une métrique kählérienne.*

2° *B admet une métrique kählérienne;*

3° *La transgression qui applique $H^1(F)$ dans $H^2(B)$ est nulle.*

Nous nous proposons au paragraphe suivant de montrer que ces conditions sont suffisantes.

3. Conditions suffisantes. Conditions différentielles locales, Constructions de Q, de H, relation avec la transgression. Le théorème principal II.

Conditions suffisantes. — Si un espace analytique complexe $E(B, F)$ vérifie les conditions qu'on vient d'énumérer, on sait d'après le théorème II. 1. 1 que la classe de cohomologie de degré 2 de la fibre figurant dans la première condition est induite par une classe de l'espace fibré, mais cela ne suffit pas pour montrer que $E(B, F)$ est kählérien : il faut trouver une forme *de type (1, 1) positive* induisant dans chaque fibre une forme de la classe en question.

Une forme Q de type (1, 1) sur E s'écrit dans $p^{-1}(U_j)$:

$$Q = a_{rs,j} dz_{r,j} \wedge d\bar{z}_{s,j} - H_{r\alpha,j} dz_{r,j} \wedge d\bar{x}_\alpha - \bar{H}_{s\beta,j} d\bar{z}_{s,j} \wedge dx_\beta + f_{\alpha\beta,j} dx_\alpha \wedge d\bar{x}_\beta,$$

avec $a_{sr} = -\bar{a}_{rs}$ et $f_{\beta\alpha} = -\bar{f}_{\alpha\beta}$ (nous sous-entendrons souvent l'indice de carte locale j).

Désignons par \hat{Q}_j la forme définie dans $p^{-1}(U_j)$ par l'expression $a_{rs,j} dz_{r,j} \wedge d\bar{z}_{s,j}$; au-dessus de $U_j \cap U_k$ la forme $\hat{Q}_j - \hat{Q}_k$ est de filtration 1, donc les \hat{Q}_j définissent un élément de $X_{1,1}^0/X_{1,1}^1$ que nous désignerons par \hat{Q} . De même nous désignerons par \check{Q}_j l'expression

$$a_{rs,j} dz_{r,j} \wedge d\bar{z}_{s,j} - H_{r\alpha,j} dz_{r,j} \wedge d\bar{x}_\alpha - \bar{H}_{s\beta,j} d\bar{z}_{s,j} \wedge dx_\beta;$$

$\check{Q}_j - \check{Q}_k$ est de filtration 2, de sorte que les \check{Q}_j définissent un élément de $X_{1,1}^0/X_{1,1}^2$ qui sera désigné par \check{Q} .

Le cobord d'une forme de filtration p étant de filtration p , on peut définir le cobord de \hat{Q} : c'est un élément de $(X_{2,1}^0 + X_{1,2}^0)/(X_{2,1}^1 + X_{1,2}^1)$; et le cobord de \check{Q} est un élément de $(X_{2,1}^0 + X_{1,2}^0)/(X_{2,1}^2 + X_{1,2}^2)$.

Nous allons construire sur E une forme de Kähler Q en plusieurs étapes : on construira d'abord \hat{Q} de manière que son cobord soit nul ; puis on constatera que la condition « \hat{Q} détermine une classe de cohomologie constante sur les fibres » est la condition nécessaire et suffisante pour trouver \check{Q} fermé, \check{Q} devant redonner \hat{Q} par passage au quotient. On verra alors que le cobord d'un représentant quelconque de \check{Q} qui est de filtration 2, est lié à la transgression ; si la transgression est nulle, il sera possible de trouver un représentant Q fermé et de type (1, 1) ; enfin comme on aura choisi \hat{Q} de manière que \hat{Q} induise des formes de Kähler sur les fibres, il n'y aura plus dans l'étape finale qu'à ajouter à Q une forme de Kähler de B (multipliée par un nombre assez grand) pour obtenir une forme positive sur E.

Deux lemmes :

LEMME II. 3. 1. — Soient F une variété compacte complexe kählérienne (resp. admettant une forme de Kähler analytique) et x_α des paramètres réels. Soit u une forme fermée sur F, cohomologue à zéro et de type (p, q), à coefficients indéfiniment différentiables (resp. analytiques) par rapport aux x_α et aux coordonnées sur F ; il existe une forme ν de type (p - 1, q) et une forme ω de type (p, q - 1) à coefficients indéfiniment différentiables (resp. analytiques) des x_α et des coordonnées sur F, telles que $u = d\nu = d\omega$.

En effet la forme de Kähler définit un opérateur de Green G et un opérateur partie harmonique H, on a [11]

$$u = Hu + 2d''d''Gu + 2d''d'Gu = Hu + 2d'd'Gu + 2d'd''Gu;$$

mais ici $Hu = 0$, $d'u = 0$, et $d''u = 0$, donc

$$u = 2d''d''Gu = 2d'd'Gu.$$

En posant $\nu = 2d'Gu$ et $\omega = 2d''Gu$, on voit que $u = d'\nu = d''\omega$; on a

$$d''\nu = 2d''d'Gu = -2d'd''Gu = -2d'Gd''u = 0;$$

de même $d'\varpi = 0$, donc $u = d\varrho = d\varpi$. D'autre part ϱ et ϖ sont visiblement de types respectifs $(p-1, q)$ et $(p, q-1)$.

La différentiabilité de ϱ et ϖ provient de ce que G est un opérateur continu de l'espace vectoriel des formes différentielles indéfiniment différentiables sur F dans lui-même, et de ([9], chap. 1, § 1, prop. 2).

Dans le cas où les coefficients de la forme u sont des fonctions analytiques des x_α et des coordonnées sur F , la forme de Kähler de F étant analytique, désignons par F_1 la structure analytique réelle de F , et \bar{F}_1 la variété complexe déduite de F_1 par prolongement à des valeurs complexes des changements de cartes sur F_1 ; la définition de u peut être prolongée à des x_α complexes, et pour chaque système (x_α) à un voisinage de F_1 dans \bar{F}_1 . La forme Gu est, pour chaque système (x_α) , analytique ([14], théorème 26), donc ses coefficients se prolongent à un voisinage de F_1 dans \bar{F}_1 . D'autre part les coefficients de Gu sont analytiques des x_α , d'après différentiabilité, et $G(iu) = iGu$. Les coefficients de Gu sont alors analytiques par rapport aux x_α et aux coordonnées sur F .

LEMME II. 3.2. — *Soit u une forme différentielle fermée cohomologue à zéro, à coefficients indéfiniment différentiables (resp. analytiques réels) sur une variété kählérienne (resp. admettant une forme de Kähler analytique) compacte. On suppose que u est somme d'une forme de type $(p+1, q)$ et d'une forme de type $(p, q+1)$. On peut alors trouver une forme ϱ (resp. analytique) de type (p, q) telle que $u = d\varrho$.*

Posons $u = u^{p+1, q} + u^{p, q+1}$; $du = 0$ entraîne

$$d'u^{p+1, q} = 0 \quad \text{et} \quad d'u^{p, q+1} = 0.$$

On a aussi $Hu = 0$, donc $Hu^{p, q+1} = 0$ et $Hu^{p+1, q} = 0$. On a donc

$$u^{p+1, p} = 2'd'd'Gu^{p+1, q}.$$

Si l'on pose $\varpi = 2d'd'Gu^{p+1, q}$, on a $u^{p+1, q} = d'\varpi$, et ϖ est de type (p, q) ; $u - d\varrho$ est alors de type $(p, q+1)$ et c'est un cobord; on achève au moyen du lemme précédent.

Nous pouvons aborder maintenant la construction d'une forme de Kähler sur $E(B, \bar{F})$. Si Q est écrit sous la forme

$$Q = a_{rs} dz_r \wedge d\bar{z}_s - H_{r\alpha} dz_r \wedge d\bar{x}_\alpha - \bar{H}_{s\beta} d\bar{z}_s \wedge dx_\beta + f_{\alpha\beta}^0 dx_\alpha \wedge d\bar{x}_\beta$$

(en sous-entendant les indices de cartes locales), la nullité de dQ s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \text{Condition 1 : } \partial_t a_{rs} - \partial_r a_{ts} = 0, & \bar{\partial}_u a_{rs} - \bar{\partial}_s a_{ru} = 0, \\ \text{» 2 : } \partial_u H_{r\alpha} - \partial_r H_{u\alpha} = 0, & \bar{\partial}_u \bar{H}_{s\alpha} - \bar{\partial}_s \bar{H}_{u\alpha} = 0, \\ \text{» 3 : } \partial_\alpha a_{rs} - \partial_r H_{s\alpha} = 0, & \bar{\partial}_\alpha a_{rs} + \bar{\partial}_s H_{r\alpha} = 0, \\ \text{» 4 : } \partial_\beta \bar{H}_{s\alpha} - \partial_\alpha \bar{H}_{s\beta} = 0, & \bar{\partial}_\beta H_{r\alpha} - \bar{\partial}_\alpha H_{r\beta} = 0, \\ \text{» 5 : } \partial_t f_{\alpha\beta}^0 + \partial_\alpha H_{t\beta} = 0, & \bar{\partial}_u f_{\alpha\beta}^0 - \bar{\partial}_\beta \bar{H}_{u\alpha} = 0, \\ \text{» 6 : } \partial_\gamma f_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha f_{\gamma\beta}^0 = 0, & \bar{\partial}_\gamma f_{\alpha\beta}^0 - \bar{\partial}_\beta f_{\alpha\gamma}^0 = 0. \end{array}$$

La condition 1 exprime que dQ est de filtration 1, ou encore que $d\hat{Q}$ (défini dans $X_{1,1}^0/X_{1,1}^1$) est nul, ou enfin que Q induit une forme fermée sur chaque fibre.

Les conditions 2 et 3, jointes à la condition 1, expriment que dQ est de filtration 2, ou encore que $d\check{Q}$ (défini dans $X_{1,1}^0/X_{1,1}^2$) est nul.

Les conditions 4 et 5, jointes à 1, 2 et 3, signifient que dQ est de filtration 3; remarquons que les premiers membres de la condition 4 ne dépendent que de la classe de Q modulo $X_{1,1}^2$ (c'est-à-dire de \check{Q}). La réunion des six conditions signifie évidemment que $dQ = 0$.

Première étape : Construction de Q . — Par hypothèse, il existe une classe de cohomologie de la fibre, invariante par $\pi_1(B)$, et admettant une forme de Kähler comme représentant; nous pouvons faire en sorte que cette classe soit invariante par le groupe structural, c'est-à-dire par les g_j, g_k^{-1} . Il existe alors une forme de Kähler Q_f sur la fibre-type, qui définit d'une manière évidente des formes Q_j sur $U_j \times F$, et les $g_j^{-1}(Q_j)$ déterminent une classe de cohomologie constante sur les fibres de $E(B, F)$. Au-dessus de $U_j \cap U_k$, $g_k^{-1}(Q_j)$ n'est pas égal à $g_k^{-1}(Q_k)$. Soit alors l_j une partition de l'unité indéfiniment différentiable sur B , subordonnée au recouvrement U_j ; la forme $l_j \cdot g_j^{-1}(Q_j)$ est une forme dont le cobord est de filtration 1 [car c'est $dl_j \wedge g_j^{-1}(Q_j)$]; d'ailleurs elle induit visiblement sur chaque fibre une forme de Kähler représentant la classe de cohomologie définie par Q_f . La classe \hat{Q} de la forme $l_j \cdot g_j^{-1}(Q_j)$ est la classe dans laquelle nous allons construire la forme Q . [On peut dire encore que les coefficients a_{rs} satisfaisant à la condition 1, sont ceux de $l_j g_j^{-1}(Q_j)$],

Remarque. — Si nous sommes parti d'une forme de Kähler de la fibre à coefficients analytiques (pour la structure analytique réelle sous-jacente à la structure analytique complexe de F), la méthode que nous avons suivie ne nous donne pas des a_{rs} analytiques, et si la base B possède une forme de Kähler analytique, on peut construire sur E une forme de Kähler analytique. Dans le paragraphe 4 nous reviendrons sur la démonstration de cette première étape, afin de voir dans quelles conditions peut trouver des a_{rs} analytiques.

Deuxième étape : Construction de \check{Q} dans la classe de \hat{Q} : problème local. — Il s'agit de trouver l'expression de toutes les formes H_j dans $p^{-1}(U_j)$, telles que les $H_{r\alpha, j}$ satisfassent aux conditions 2 et 3. Dans $p^{-1}(U_j)$ identifié à $U_j \times F$, considérons H_j comme une forme sur U_j dont les coefficients sont des formes de degré 1 de F . Le coefficient de $d\bar{x}_\alpha$ est la forme $-H_{r\alpha} dz_r$ dont la différentielle est

$$(\partial_s H_{r\alpha} - \partial_r H_{s\alpha}) dz_r \wedge d\bar{z}_s + \bar{\partial}_s H_{r\alpha} dz_r \wedge d\bar{z}_s.$$

Or les conditions 2 et 3 signifient que cette dernière expression est égale à

$$\bar{\partial}_\alpha (a_{rs} dz_r \wedge d\bar{z}_s);$$

on reconnaît là un cobord, car $a_{r_s} dz_r \wedge d\bar{z}_s$ est une forme fermée de F représentant une classe de cohomologie constante. Le lemme II.3.1 nous donne alors une solution H_j dans $p^{-1}(U_j)$, et il est clair que les autres solutions s'obtiennent en ajoutant à H_j une forme sur U_j dans laquelle les coefficients de $d\bar{x}_\alpha$ sont des fonctions sur U_j , à valeurs dans l'espace des formes de première espèce de F (et ceux de dx_α leurs conjugués). De plus si les a_{r_s} sont analytiques, ces solutions H_j sont analytiques (pourvu qu'on ait choisi pour les déterminer l'opérateur de Green défini par une forme de Kähler analytique sur F).

Troisième étape : Construction de \check{Q} : problème global. — Les formes H_j qu'on vient d'obtenir ne définissent un élément de $X_{1,1}/X_{1,1}^2$ que si $\hat{Q}_j + H_j - \hat{Q}_k - H_k$ est de filtration 2, c'est-à-dire si $H_k - H_j = H_{jk} \pmod{X_{1,1}^2}$, où H_{jk} ne dépend que de \hat{Q} et des isomorphismes des $p^{-1}(U_j)$ sur $U_j \times F$; on a H_{jk} en prenant les termes contenant une différentielle dans $\hat{Q}_k - \hat{Q}_j$. Posons alors

$$H_k - H_j = H_{jk} + H'_{jk};$$

comme $d(\hat{Q}_j + H_j)$ et $d(\hat{Q}_k + H_k)$ sont de filtration 2, on peut dire que $d(\hat{Q}_k + H_j + H'_{jk})$ est de filtration 2; or $\hat{Q}_k + H_j + H'_{jk}$ est égal à $\hat{Q}_k + H_k - H'_{jk}$ modulo $X_{1,1}^2$; il en résulte que dH'_{jk} est de filtration 2, ce qui veut dire que H'_{jk} est une forme sur $U_j \cap U_k$ dans laquelle le coefficient de $d\bar{x}_\alpha$ est à valeurs dans l'espace des formes de première espèce sur F . Pour trouver des expressions H'_j satisfaisant encore aux conditions 2 et 3, et tels que $H_k^1 - H_j^1 = H_{jk}$, il suffit de prendre $H_j^1 = H_j + l_k H'_{jk}$, si l_j est une partition de l'unité indéfiniment différentiable,

Il faut procéder autrement si l'on veut une solution analytique les (a_{r_s} étant analytiques). Dans ce cas les H_j , donc les H'_{jk} , sont analytiques. Ces derniers définissent alors un 1-cocycle du faisceau des formes de B dans lesquelles les coefficients de dx_α sont analytiques et à valeurs dans l'espace des formes de première espèce de F (et les coefficients de $d\bar{x}_\alpha$ leurs conjugués); ce faisceau est visiblement un *faisceau analytique réel cohérent*, et si B admet une forme de Kähler analytique, ses groupes de cohomologie sont nuls [16]; il en résulte l'existence d'expressions H'_j analytiques, satisfaisant aux conditions 2 et 3 ainsi qu'à $H_k^1 - H_j^1 = H_{jk}$, d'où une solution provisoire \check{Q}^1 définie par les expressions $\hat{Q}_j = H_j^1$.

Les autres expressions H_j qui conviennent s'obtiennent en ajoutant une forme de B dans laquelle les coefficients de $d\bar{x}_\alpha$ sont des formes de première espèce de F (et ceux de dx_α leurs conjugués), éventuellement à coefficients analytiques.

Quatrième étape : Étude des relations de \check{Q}^1 avec la transgression, et détermination définitive de \check{Q} . — Considérons maintenant les termes de dH_j^1 contenant

une différentielle fibre; on a (en sous-entendant les indices de cartes locales) :

$$\begin{aligned} & (\bar{\partial}_\beta H_{r\alpha} - \bar{\partial}_\alpha H_{r\beta}) dz_r \wedge d\bar{x}_\beta \wedge d\bar{x}_\alpha + (\partial_\beta \bar{H}_{s\alpha} - \partial_\alpha \bar{H}_{s\beta}) d\bar{z}_s \wedge dx_\beta \wedge dx_\alpha \\ & + \partial_\beta H_{r\alpha} dz_r \wedge dx_\beta \wedge d\bar{x}_\alpha - \bar{\partial}_\alpha \bar{H}_{s\beta} d\bar{z}_s \wedge dx_\beta \wedge d\bar{x}_\alpha; \end{aligned}$$

les coefficients de $d\bar{x}_\beta \wedge d\bar{x}_\alpha$, $dx_\beta \wedge dx_\alpha$ et $dx_\beta \wedge d\bar{x}_\alpha$ sont trois formes de F : la première $(\bar{\partial}_\beta H_{r\alpha} - \bar{\partial}_\alpha H_{r\beta}) dz_r$ a pour différentielle

$$(\bar{\partial}_\beta (\partial_r H_{s\alpha} - \partial_s H_{r\alpha}) + \bar{\partial}_\alpha (\partial_s H_{r\beta} - \partial_r H_{s\beta})) dz_r \wedge dz_s + (-\bar{\partial}_\beta \bar{\partial}_s H_{r\alpha} + \bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}_s H_{r\beta}) dz_r \wedge d\bar{z}_s$$

qui est nulle d'après les conditions 2 et 3. Il en est de même pour les formes qui sont coefficients de $dx_\beta \wedge dx_\alpha$ et $dx_\beta \wedge d\bar{x}_\alpha$.

Il résulte donc des conditions 2 et 3 que si C est une classe d'homologie de F de dimension 1, l'expression $\int_C dH_j^1$ calculée dans $U_j \times F$ a un sens indépendant du choix du cycle représentant la classe C.

Soit t la forme harmonique de degré 1 de F correspondant à la classe C; on a

$$\int_C dH_j^1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_F dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge \hat{Q}_j^{n-1} \quad \left(\text{on suppose } \int_F \frac{Q_j^n}{n!} = 1 \right).$$

Mais d'autre part H_j^1 définit une connexion : t étant une forme de F, les expressions $t - (t.H_j^1)$ représentant une forme de E [($t.H$) est un produit intérieur]. Or t , étant somme d'une forme holomorphe et d'une forme antiholomorphe, est invariant par le groupe structural, et les expressions

$$t - \int_F (t.H_j^1) \wedge \frac{\hat{Q}_j^n}{n!}$$

représentent encore une forme sur E. Ces dernières expressions s'écrivent encore

$$t + \frac{1}{(n-1)!} \int_F H_j^1 \wedge (Ct) \wedge \hat{Q}_j^{n-1},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$t + \frac{1}{(n-1)!} \int_F H_j^1 \wedge (Ct) \wedge (\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1},$$

car le calcul de cette dernière intégrale ne fait intervenir que les termes de degré fibre $2n - 2$ dans $(\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1}$, c'est-à-dire \hat{Q}_j^{n-1} . L'intérêt que présente cette expression est de donner plus simplement la différentielle de cette forme; en effet, d'après les conditions 2 et 3, $d(\hat{Q}_j + H_j^1)$ est de degré fibre égal à 1, donc $d(\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1}$ est de degré fibre égal à $2n - 3$. La différentielle de la forme

$$t + \frac{1}{(n-1)!} \int_F H_j^1 \wedge (Ct) \wedge (\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1}$$

se réduit donc à

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge (\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1}.$$

Or pour calculer cette intégrale il faut *a priori* tenir compte des termes de degré fibre $2n-2$ et $2n-3$ figurant dans $(\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1}$, c'est-à-dire

$$\hat{Q}_j^{n-1} + (n-1)H_j^1 \wedge \hat{Q}_j^{n-2}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge (\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge \hat{Q}_j^{n-1} \\ &+ \frac{1}{(n-2)!} \int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge H_j^1 \wedge \hat{Q}_j^{n-2}. \end{aligned}$$

Mais il est visible que

$$\int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge H_j^1 \wedge \hat{Q}_j^{n-2} = \int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge H_j^1 \wedge (\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-2},$$

car seuls les termes de degré fibre le plus élevé interviennent, est ceci est alors la différentielle de $\int_{\mathbb{F}} H_j^1 \wedge (Ct) \wedge H_j^1 \wedge (\hat{Q}_j + H_j^1)^{n-2} = 0$ (le degré fibre de la forme qui est sous le signe d'intégration n'atteignant pas $2n$). La forme différentielle t de la fibre est alors induite par une forme de \mathbb{E} dont la différentielle est

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{F}} dH_j^1 \wedge (Ct) \wedge \hat{Q}_j^{n-1}.$$

Ceci prouve en passant que cette expression est indépendante de la carte locale U_j ; ce calcul reflète ce que nous avons vu sur la suite spectrale appliquée à un espace fibré à fibre kählérienne : en effet, l'opération qui, à un cycle C de \mathbb{F} , fait correspondre $\int_C dH_j^1$ (qui ne dépend pas de j comme on vient de le voir), est un homomorphisme de $H_1(\mathbb{F})$ dans $H^2(\mathbb{B})$, auquel correspond un élément de $H^1(\mathbb{F}) \otimes H^2(\mathbb{B})$ qui n'est pas autre chose que le d_2 de la classe de Kähler choisie sur la fibre.

Nous retrouvons ici le fait que s'il existe une forme de Kähler dans l'espace fibré, la transgression $H^1(\mathbb{F}) \rightarrow H^2(\mathbb{B})$ est nulle; en effet, si $dQ = 0$, les conditions 4 et 5 alors vérifiées expriment que dH_j^1 n'a pas de terme de degré fibre égal à 1 : les formes

$$t + \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{F}} H_j^1 \wedge (Ct) \wedge \hat{Q}_j^{n-1}$$

(t parcourant l'ensemble des formes harmoniques de degré 1 de \mathbb{F}) sont alors fermées, ce qui exprime la nullité de la transgression.

Inversement, introduisons ici l'hypothèse de la nullité de la transgression $H^1(\mathbb{F}) \rightarrow H^2(\mathbb{B})$; nous pouvons dire que C étant un cycle de la fibre, les expressions

$\int_C dH_j^1$ définissent un cobord de la base. Soit alors $\{t_1, t_2, \dots, t_\lambda, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_\lambda, \dots\}$ une base de l'espace vectoriel des formes harmoniques de degré 1 de F, les t étant holomorphes et les \bar{t}_λ étant leurs conjuguées; soit $\{C_\lambda, \bar{C}_\lambda\}$ la base d'homologie duale; soit $u_\lambda = \int_{C_\lambda} dH_j^1$; on a aussi $\bar{u}_\lambda = \int_{\bar{C}_\lambda} dH_j^1$. Comme $(\bar{\partial}_\beta H_{r,\alpha} - \bar{\partial}_\alpha H_{r,\beta}) dz_r$ est une forme holomorphe, u_λ contient des termes de types (0, 2) et (1, 1) seulement; il existe donc, d'après le lemme II.3.2, des formes \bar{w}_λ de type (0, 1) telles que $u_\lambda = d\bar{w}_\lambda$. De plus, si les a_{rs} et les $H_{k\alpha,j}^1$ sont analytiques, les u_λ sont analytiques et le procédé du lemme donne les formes w_λ analytiques, si l'on suppose que B est pourvue d'une *forme de Kähler analytique* (on utilise pour déterminer les w_λ l'opérateur de Green défini par cette forme).

L'élément \check{Q} de $X_{1,1}^0/X_{1,1}^2$ est alors obtenu définitivement en posant

$$H_j = H_j^1 + t_\lambda \wedge \bar{w}_\lambda + \bar{t}_\lambda \wedge w_\lambda.$$

Les formes H_j ainsi obtenues vérifient les propriétés déjà obtenues pour les H_j^1 , et de plus on vérifie que C étant un cycle de F, on a $\int_C dH_j = 0$. La forme holomorphe $(\bar{\partial}_\beta H_{r,\alpha} - \bar{\partial}_\alpha H_{r,\beta}) dz_r$ et sa conjuguée sont alors nécessairement nulles; ceci veut dire que la condition 4 est vérifiée par les H_j .

Cinquième étape : Fin de la construction d'une forme de Kähler sur E(B, F). —

Le fait que $\int_C dH_j = 0$ quel que soit le cycle C de la fibre, prouve encore que la forme $\partial_\alpha H_{r,\beta} dz_r - \bar{\partial}_\beta \bar{H}_{r,\alpha} d\bar{z}$ est une différentielle exacte; or la condition 5 exprime que ce doit être la différentielle de $f_{\alpha\beta}^0$ sur chaque fibre. La condition 5 détermine les $f_{\alpha\beta}^0$ si on se les donne en un point de chaque fibre. Il est maintenant facile d'obtenir une forme Q telle que ses coefficients satisfassent aux conditions 1 à 5; dQ est alors de filtration 2, et le fait que $ddQ = 0$ implique que les coefficients de la forme dQ ont des dérivées partielles nulles par rapport aux coordonnées fibres; il en résulte que dQ est l'image inverse par p d'une forme de la base.

Si l'on pose $P = \frac{1}{(n+1)!} \int_F Q^{n+1}$, on en déduit

$$dP = \frac{1}{n!} \int_F dQ \wedge Q^n = dQ \quad \left(\text{cette formule suppose toujours } \int_F \frac{Q^n}{n!} = 1 \right).$$

La forme $Q - P$ est alors une forme fermée de type (1, 1) qui induit des formes de Kähler sur chaque fibre. De plus si les a_{rs} et les $H_{r\alpha,j}$ sont analytiques, la forme $Q - P$ qui s'obtient en choisissant les $f_{\alpha\beta}^0$ de manière que leurs moyennes sur chaque fibre soient nulles, est analytique.

On achève en ajoutant à $Q - P$ une forme de Kähler de B multipliée par un nombre assez grand pour obtenir une forme positive sur E(B, F).

THÉORÈME PRINCIPAL II. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe compact, de base B et de fibre F . On suppose de plus que le groupe de Poincaré $\pi_1(B)$ opère trivialement sur le premier groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$. Pour que $E(B, F)$ soit kählérien, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réunies :

1° Il existe une forme de Kähler sur F représentant une classe de cohomologie invariante par $\pi_1(B)$.

2° B est une variété kählérienne.

3° La transgression qui applique le groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$ dans le groupe de cohomologie réelle $H^2(B)$ est nulle.

[Cette dernière condition peut s'écrire $b_1(E) = b_1(B) + b_1(F)$, b_1 désignant le premier nombre de Betti].

4. Existence d'une forme de Kähler analytique. Lemmes sur les fibrés analytiques réels.

Existence d'une forme de Kähler analytique. — Nous nous proposons de chercher dans quelles conditions un espace fibré analytique complexe compact $E(B, F)$ admet une forme de Kähler analytique. Il est d'abord évident que s'il admet une forme de Kähler analytique Q , Q induit sur une fibre quelconque une forme de Kähler analytique; d'autre part la forme

$$P = \frac{1}{(n+1)!} \int_F Q^{n+1}$$

définie sur la base est une forme de Kähler analytique. *Il est donc nécessaire que la fibre et la base admettent des formes de Kähler analytiques.*

Supposons maintenant que B et F admettent des formes de Kähler analytiques, $E(B, F)$ satisfaisant d'autre part aux conditions du théorème principal II; nous avons vu alors au cours de la démonstration de ce théorème que si les coefficients a_{rs} sont analytiques, on peut trouver sur E une forme de Kähler analytique. Nous allons montrer ici qu'on peut trouver des a_{rs} analytiques, sous l'hypothèse supplémentaire suivante : *le groupe structural est connexe.* — Le résultat s'étendra ensuite au cas où le groupe structural possède un nombre fini de composantes connexes.

La démonstration est basée sur le résultat suivant (non publié) de H. Cartan ; *Les théorèmes A et B de la théorie des faisceaux [16] sont valables pour les sous-variétés analytiques réelles de R^n .*

Convention. — V étant une variété analytique réelle, et W une partie fermée de V , l'expression « W admet un plongement prolongeable » aura la signification suivante : « il existe une application analytique réelle f de V dans un espace

numérique R^n , dont la restriction à W est biunivoque et propre, et telle que le jacobien de f soit de rang égal à la dimension de V en tout point de W ».

LEMME II.4.1. — *Soient B une sous-variété analytique réelle d'un espace R^n , et $E(B, V, G)$ un espace fibré analytique réel à fibre vectorielle V (V est de dimension finie sur R ou C , C est le groupe linéaire de V). Alors l'image inverse dans E d'un compact quelconque de B admet un plongement prolongeable.*

En effet, le théorème A de [16], appliqué au faisceau des germes de sections du fibré dual, montre qu'il existe un nombre fini de fonctions analytiques réelles dans E , linéaires sur chaque fibre, et dont on peut extraire un ensemble de coordonnées pour toute fibre située au-dessus d'un compact donné à l'avance de B ; en ajoignant à ces fonctions les coordonnées qui définissent le plongement de B , on obtient une application de E dans un espace numérique qui vérifie visiblement les conditions exigées.

LEMME II.4.2. — *Soient B une sous-variété analytique réelle d'un espace R^n , et $P(B, G)$ un espace fibré principal analytique réel dont la fibre G est un groupe fermé de matrices. Alors l'image inverse dans P d'un compact quelconque de B admet un plongement prolongeable. En particulier : si B est compact, P est sous-variété d'un espace numérique.*

En effet le lemme II.4.1 s'étend immédiatement à un fibré dont la fibre est sous-variété d'un espace R^m , si les automorphismes de la fibre appartenant au groupe structural sont induits par des matrices opérant sur R^m . Or ceci est le cas si la fibre est un groupe fermé de matrices, et si le groupe structural est le groupe de ses translations à droite, à condition d'appliquer le groupe dans R^m en prenant comme coordonnées les éléments des matrices ainsi que l'inverse de leur déterminant.

LEMME II.4.3 — *Soient B une sous-variété analytique réelle d'un espace R^n , U une partie de B limitée par une sphère de R^n , $P(B, G)$ un espace fibré principal analytique réel dont la fibre est un groupe de Lie connexe G , $P(U, G)$ l'espace fibré image inverse de $P(B, G)$ par injection de U dans B . Alors tout compact de $P(U, G)$ admet un plongement prolongeable [c'est-à-dire qu'on a une application prolongeable à $P(U, G)$ et non à $P(B, G)$].*

Remarquons d'abord que tout groupe de Lie connexe admet une représentation linéaire localement fidèle dont l'image est un groupe fermé de matrices : le théorème d'Ado nous dit en effet qu'il existe une représentation localement fidèle; or le groupe des commutateurs $[G, G]$ a nécessairement pour image un groupe fermé ([20], prop. 9); si l'image de G n'est pas fermée il suffit de considérer la représentation somme directe avec une représentation fidèle du

groupe abélien $G/[G, G]$ dont l'image est fermée, pour obtenir une représentation de G sur un groupe fermé de matrices G' . Le noyau de cette représentation est un groupe abélien N à un nombre fini de générateurs.

Soit $P'(B, G) = P(B, G)/N$, et $P'(U, G) = P(U, G)/N$, U étant relativement compact dans B ; d'après le lemme II.4.2 : $P'(U, G)$ admet un plongement prolongeable [c'est-à-dire par des fonctions prolongeables à $P'(B, G)$]. Mais si U est limité par la sphère de rayon r_0 par exemple, adjoignons la fonction $Tg(\pi r^2/2r_0^2)$ aux coordonnées qui définissent le plongement prolongeable de $P'(U, G)$; nous obtenons alors un plongement de $P'(U, G)$ considéré comme variété abstraite.

N étant un groupe abélien à un nombre fini de générateurs, peut être considéré comme groupe fermé de matrices [on le met sous forme de produits de groupes de la forme Z et $Z/(q)$, et l'on représente les facteurs $Z/(q)$ par des rotations et les facteurs Z par des rotations hyperboliques, enfin on fait la somme directe de ces représentations]. Il suffit alors d'appliquer le lemme II.4.2 à $P(U, G)$ fibré, de fibre N et de base $P'(U, G)$.

Remarque. — On a un résultat un peu plus fort dans ce cas particulier : Si V est une sous-variété analytique réelle de R^n et V un revêtement galoisien de V , le groupe de Galois étant Z , alors V est une sous-variété analytique réelle de R^{n+1} .

En effet, soit T un générateur du groupe du revêtement; le théorème B de [16] étant valable pour V , il existe une forme différentielle fermée de degré 1 dont l'intégrale f est une fonction analytique réelle vérifiant $f(Tx) = f(x) + 1$. Il suffit d'adjoindre f aux coordonnées qui donnent le plongement de V dans R^n , pour avoir un plongement de \hat{V} dans R^{n+1} (cf. revêtements des variétés de Stein [16]).

LEMME II.4.4. — Dans les hypothèses du lemme II.4.3, soit K un sous-groupe compact de G . Alors tout compact de $P(U, G)/K$ admet un plongement prolongeable.

Il s'agit de montrer qu'il existe des fonctions analytiques sur $P(U, G)/K$ permettant de séparer deux points x et y arbitraires, ainsi que des fonctions ayant des dérivées partielles données en x ; or on obtient des fonctions analytiques sur $P(U, G)/K$ à partir de fonctions analytiques sur $P(U, G)$ au moyen d'une opération de moyenne évidente. D'autre part x et y ont pour image inverse dans $P(U, G)$ deux sous-variétés analytiques compactes X et Y , et le lemme sera démontré si l'on montre l'existence de fonctions analytiques dans $P(U, G)$ prenant les valeurs 0 et 1 respectivement sur X et Y , ainsi que des fonctions admettant un développement limité donné sur X . Il suffit pour cela de considérer un plongement prolongeable d'un compact de $P(U, G)$ contenant X et Y , et d'appliquer le théorème B de [16] à l'espace R^n dans lequel est fait le plongement.

PROPOSITION II. 4. — Soient B une sous-variété analytique réelle d'un espace R^n , $P(B, G)$ un espace fibré principal analytique réel dont la fibre est un groupe de Lie connexe G , K un sous-groupe compact de G . Si $P(B, G)/K$ admet une section continue, il existe au-dessus de tout compact de B une section analytique.

En effet, soient C un compact de B , et U une partie de B limité par une sphère, \bar{C} une section continue au-dessus de C ; utilisons un plongement prolongeable d'un voisinage de \bar{C} dans $P(U, G)/K$. Il suffit de déformer \bar{C} en section analytique par le procédé de J. H. C. Whitehead; les points de B sont repérés par des coordonnées x_r (en nombre peut-être supérieur à la dimension de B); la section \bar{C} est définie par des fonctions continues des x_r à valeurs dans l'espace du plongement du voisinage choisi de \bar{C} ; ces fonctions peuvent être approchées par des polynômes, ce qui définit une variété analytique voisine de \bar{C} qu'on projette sur l'image de $P(U, C)/K$. On obtient alors une section analytique pourvu qu'on ait pris une approximation suffisante de \bar{C} .

La proposition II. 4 entraîne immédiatement :

THÉORÈME II. 4. 1. — Soient B une variété analytique réelle compacte plongable dans un espace numérique, et $E(B, F, G)$ un espace fibré analytique réel dont le groupe G est un groupe de Lie connexe; soit K un sous-groupe compact maximal de G . Le groupe structural de la structure fibrée analytique réelle peut être réduit à K .

Ce théorème va jouer un rôle essentiel dans la question en vue, mais remarquons en passant que si F est aussi une variété compacte plongable dans un espace numérique, lorsque nous avons réduit le groupe structural à K nous avons un nouvel espace fibré principal associé compact P ; $P \times F$ est compact de sorte que E , quotient de $P \times F$ par K opérant d'une manière convenable, est plongable dans un espace numérique.

D'autre part une variété compacte analytique réelle est plongable analytiquement dans un R^n si et seulement si elle admet une métrique riemannienne analytique; un revêtement fini a alors la même propriété, et réciproquement. Donc si $E(B, F)$ est un espace fibré analytique réel dont le groupe structural a un nombre fini de composantes connexes, on obtient, en passant par l'intermédiaire d'un revêtement fini de la base :

COROLLAIRE. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique réel dont la fibre et la base sont des variétés compactes à métrique riemannienne analytique; supposons que le groupe structural soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Alors $E(B, F)$ admet une métrique riemannienne analytique.

Revenons maintenant aux variétés analytiques complexes. Si Q est une forme de Kähler sur une variété complexe F , et g un automorphisme de la

structure analytique complexe de F , la forme $g(Q)$ est encore une forme de Kähler analytique. Si g parcourt un sous-groupe compact K du groupe des automorphismes de F [dans la suite K sera un sous-groupe compact maximal du groupe structural, supposé connexe, d'un espace fibré $E(B, F)$], la forme

$$Q_f = \int_K g(Q) d\mu(K),$$

où $d\mu(K)$ désigne la mesure de Haar sur K , est une forme de Kähler analytique sur F , invariante par les éléments du groupe K .

Considérons maintenant l'espace *fibré analytique complexe* $E(B, F, G)$ comme espace *fibré analytique réel*; B étant à métrique kählérienne analytique, et G connexe, le théorème II. 4. 1 montre qu'on peut réduire le groupe structural de cette structure fibrée analytique réelle à K , sous-groupe compact maximal de G . Alors $E(B, F, G)$ est représenté par des isomorphismes locaux k_j de $p^{-1}(U_j)$ sur $U_j \times F$, les $k_j k_i^{-1}$ appartenant à K . Une forme Q_f sur F , invariante par K , définit directement des formes Q_j , sur $p^{-1}(U_j)$ induisant sur les fibres des formes indépendantes de l'indice j . On a donc l'élément cherché Q de $X_{1,1}^0/X_{1,1}^1$, et ses coefficients a_r , sont analytiques réels.

Or voit donc que si $E(B, F)$ est un espace fibré satisfaisant aux conditions du théorème principal II, et si de plus le groupe structural est connexe, B et F étant à métrique kählérienne analytique, alors $E(B, F)$ admet une métrique kählérienne analytique. Il est évident d'autre part qu'un revêtement fini d'une variété admet une métrique kählérienne analytique si et seulement si cette variété admet une métrique kählérienne analytique, de sorte que le théorème principal II peut se compléter ainsi, comme on le voit en passant par un revêtement fini de la base :

THÉOREME II. 4. 2. — *Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe compact kählérien dont le groupe structural a un nombre fini de composantes connexes. Une condition nécessaire et suffisante pour que E admette une forme de Kähler analytique est que B et F admettent des formes de Kähler analytiques.*

5. Conditions pour qu'un espace fibré analytique complexe soit une variété algébrique. Cas où $H^1(F) = 0$. Cas général. Théorème principal III.

Conditions pour qu'un espace fibré analytique complexe soit une variété algébrique projective. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe satisfaisant aux conditions du théorème principal II (§ 3); nous nous proposons maintenant de chercher dans quelles conditions E est une variété algébrique projective (ou, ce qui revient au même, une variété de Hodge [13]).

Il est facile d'écrire des conditions nécessaires : supposons que E soit une variété algébrique projective : alors E possède une forme de Hodge Q , et Q

induit sur les fibres des formes de Hodge (la fibre est donc nécessairement une variété algébrique projective) définissant une classe de cohomologie de degré 2 de F , invariante par $\pi_1(B)$. D'autre part nous avons défini en II.2 une forme de Kähler P sur la base, par la formule

$$P = \frac{1}{(n+1)!} \int_F Q^{n+1}.$$

Q étant une forme à périodes entières, il est clair que $(n+1)! P$ est une forme à périodes entières. La base est alors nécessairement une variété algébrique projective. De plus nous savons que la variété d'Albanese $A(E)$ est nécessairement une variété abélienne.

Nous allons montrer que ces conditions sont en gros suffisantes, en commençant par le cas spécial où le premier nombre de Betti de F est nul.

Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe compact, de base B et de fibre connexe F . On suppose que $b_1(F)$ est nul, que B est une variété de Hodge, et que $\pi_1(B)$ respecte une classe de cohomologie de degré 2 de F dont un représentant est une forme de Hodge sur F . On sait alors construire une forme de Kähler Q sur E , qui induit sur les fibres une forme de Hodge (théorème principal II). Soit $P = \int_F \frac{Q^{n+1}}{(n+1)!}$, et soit R une forme sur B de degré 2 (et de type quelconque); on a immédiatement, en considérant les degrés fibre dans le développement de $(Q + R)^{n+1}$,

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_F (Q + R)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_F Q^{n+1} + \frac{1}{n!} \left(\int_F Q^n \right) R$$

[par abus de langage, on écrit R à la place de $p^*(R)$]. Soit $P(R)$ cette expression; elle dépend linéairement de R , le coefficient étant rationnel puisque Q induit une forme de Hodge sur les fibres. Or il y a un R tel que $Q + R$ soit à périodes entières, car on sait que, en cohomologie sur le corps des rationnels, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(B) \rightarrow H^2(E) \rightarrow H^2(F).$$

l'image de $H^2(E)$ dans $H^2(F)$ étant l'ensemble des classes invariantes par $\pi_1(B)$. Il en résulte que $P(R)$ est une forme à périodes rationnelles si et seulement si $Q + R$ est à périodes rationnelles. Faisons alors intervenir la propriété de B d'être une variété de Hodge : il existe une forme R de type $(1, 1)$ non négative, telle que $P(R)$ soit une forme à périodes rationnelles, et un de ses multiples est une forme de Hodge.

Nous pouvons donc énoncer le lemme (dont nous ferons dépendre le théorème principal III) :

LEMME II.5. — *Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe compact, de base B et de fibre F . On suppose que $b_1(F)$ est nul, les conditions suivantes sont alors suffisantes pour que E soit une variété algébrique positive :*

1° Le groupe de Poincaré $\pi_1(B)$ respecte une classe de cohomologie de degré 2 de F dont un représentant est une forme de Hodge sur F .

2° B est une variété algébrique projective.

Remarquons le cas particulier suivant : *Tout espace fibré analytique complexe dont la base est une variété algébrique projective, et la fibre un espace projectif complexe, est lui-même une variété algébrique projective.*

Ce dernier lemme a été montré par une méthode différente par A. Borel et K. Kodaira, en commençant par le cas particulier où la fibre est un espace projectif complexe. Le théorème principal I va nous permettre de généraliser leur méthode au cas où le premier nombre de Betti de la fibre est différent de zéro.

Supposons maintenant que $E(B, F)$ soit un espace fibré analytique complexe compact, dont la fibre F connexe et la base B soient des variétés algébriques projectives et dont le groupe structural soit *connexe* [ce qui implique que $\pi_1(B)$ opère trivialement sur $H^1(F)$]; supposons enfin que la variété d'Albanese de E soit une variété abélienne.

Considérons les variétés V et W définies en I.2; comme $A(E)$ est fibré par la variété abélienne $A'(F)$, la base étant la variété abélienne $A(B)$, dire que $A(E)$ est une variété abélienne équivaut à dire que la sous-variété $A'(F)$ de $A(E)$ admet une supplémentaire qui la coupe en un nombre de points ([19], p. 40); donc le groupe structural de $A(E)$, et par suite celui de W fibré par $A'(F)$, est un groupe fini; V étant un revêtement de W , le groupe structural de V fibré par $A(F)$ est un groupe fini Φ . Le fibré E étant défini par les fonctions g_{jk} à valeurs dans le groupe connexe G^0 des automorphismes de F , il correspond à ces fonctions des t_{jk} , translations de $A(F)$, et il y a des t_j à valeurs dans le revêtement de T [image de G^0 dans le groupe des translations de $A(F)$] tels que $t_{jk} = t_k - t_j \pmod{\Phi}$. Il est facile de trouver une application analytique complexe qui remonte le revêtement de T dans G^0 , soit $t_j \rightarrow \hat{t}_j$, et si g_j désigne l'isomorphisme local de $p^{-1}(U_j)$ sur $U_j \times F$, en remplaçant g_j par $\hat{t}_j^{-1} g_j$, on réduit le groupe structural au sous-groupe N_Φ correspondant à Φ . Le théorème principal I nous ramène alors au cas particulier où la fibre est un espace projectif complexe. D'où

THÉORÈME PRINCIPAL III. — *Soit $E(B, F)$ un espace fibré analytique complexe compact, de base B et de fibre connexe F , à groupe structural connexe. Pour que E soit une variété algébrique projective, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réunies :*

1° F est une variété algébrique projective.

2° B est une variété algébrique projective.

3° $b_1(E) = b_1(B) + b_1(F)$.

4° La variété d'Albanese $A(E)$ est une variété algébrique projective.

Ce résultat s'étend facilement au cas où le groupe structural a un nombre fini de composantes connexes : il suffit de considérer un revêtement fini convenable de la base.

6. **Éclatement d'une variété kählérienne. Cohomologie réelle de la variété obtenue.**
Construction d'une forme de Kähler sur la variété obtenue.
Construction d'une forme de Kähler analytique.

Éclatement d'une variété kählérienne. — Soit X une variété analytique complexe compacte, et A une sous-variété sans singularité de X , il existe un recouvrement de X par des ouverts U_j , découpant sur A des ensembles A_j (dont certains sont vides); et sur U_j il existe des coordonnées locales complexes. On peut supposer que sur les U_j qui rencontrent A , on a des coordonnées z_k et x_α telles que A_j soit défini par les équations $z_r = 0$ (les x_α sont au nombre de $n =$ dimension de A , et les z_r au nombre de $m - n$, m étant la dimension de X). Dans $U_j \cap U_k$ l'ensemble des coordonnées $(x_\alpha, z_r)_k$ est fonction holomorphe $f((x_\alpha, z_r)_j)$, et les dérivées partielles $\frac{\partial z_{r,k}}{\partial x_{\alpha,j}}$ s'annulent sur $A_j \cap A_k$, tandis que le tableau des $\frac{\partial x_{\alpha,k}}{\partial x_{\alpha,j}}$ est de rang n , et le tableau des $\frac{\partial z_{k,k}}{\partial z_{r,j}}$ est de rang $m - n$ dans un voisinage de $A_j \cap A_k$.

Ceci étant on obtient la variété Y , résultant de l'éclatement de X le long de A , en remplaçant les U_j (tels que A_j soit non vide) par la sous-variété W_j de $U_j \times \mathbb{P}_{m-n-1}(\mathbb{C})$ d'équations

$$t_r \cdot z_s - t_s \cdot z_r = 0,$$

les t_r étant des coordonnées homogènes dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{m-n-1}(\mathbb{C})$. On identifie alors $(x_\alpha, z_r)_k$ avec $f((x_\alpha, z_r)_j)$ en dehors de $A_j \times \mathbb{P}_{m-n-1}(\mathbb{C})$, identification qui se prolonge naturellement à

$$(x_\alpha, 0)_k = f((x_\alpha, 0)_j), \quad t_{r,k} = \frac{\partial z_{r,k}}{\partial z_{s,j}} t_{s,j} \quad \text{sur } (A_j \cap A_k) \times \mathbb{P}_{m-n-1}(\mathbb{C}).$$

On obtient ainsi la variété Y , et une projection de Y sur X qui est un isomorphisme en dehors d'une variété B qui se projette sur A ; B est un espace fibré analytique complexe de base A et de fibre $\mathbb{P}_{m-n-1}(\mathbb{C})$.

Si X est une variété algébrique projective plongée dans un espace projectif où l'on a des coordonnées homogènes u_k , on obtient un plongement de Y dans un espace projectif en prenant comme coordonnées homogènes tous les produits des u_k par les polynômes qui définissent la sous-variété A (on s'arrange pour avoir des polynômes de même degré). Nous allons montrer que si X est seulement supposé kählérien, Y admet une métrique kählérienne, en nous inspirant de la démonstration faite par K. Kodaira [13] dans le cas où A est réduit à un point.

Les nombres de Betti de Y :

LEMME II.6. — Soit l'homomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a & \rightarrow & b & \rightarrow & c & \rightarrow & d & \rightarrow & e \\
 | & & | & & | & & | & & | \\
 \text{épimorphisme} & & \text{monomorphisme} & & | & & \text{isomorphisme} & & \text{monomorphisme} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E
 \end{array}$$

avec les précisions indiquées sur le schéma. L'homomorphisme de c dans C est alors un monomorphisme, et l'homomorphisme de B dans C définit un isomorphisme de B/b sur C/c . La démonstration est élémentaire.

Y étant obtenue par éclatement de X le long de A, on a un homomorphisme de l'algèbre de cohomologie réelle $H^*(X)$ dans l'algèbre de cohomologie réelle $H^*(Y)$, qui est isomorphisme en dimension $\geq m$. Or si u est un élément de $H^p(X)$, il y a un v dans $H^{2m-p}(X)$ tel que $u \cdot v \neq 0$. L'image de u dans $H^p(Y)$ ne peut donc être nulle. L'homomorphisme $H^p(X) \rightarrow H^p(Y)$ est donc un *monomorphisme*. D'où la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H^p(X - A) & \rightarrow & H^p(X) & \rightarrow & H^p(A) & \rightarrow & H^{p+1}(X - A) & \rightarrow & H^{p+1}(X) \\
 | & & | & & | & & | & & | \\
 \text{isomorphisme} & & \text{monomorphisme} & & \text{monomorphisme} & & \text{isomorphisme} & & \text{monomorphisme} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H^p(Y - B) & \rightarrow & H^p(Y) & \rightarrow & H^p(B) & \rightarrow & H^{p+1}(Y - B) & \rightarrow & H^{p+1}(Y)
 \end{array}$$

Nous savions déjà que $H^p(A) \rightarrow H^p(B)$ est un monomorphisme (théorème II.1.2); mais le lemme nous apprend que $H^p(Y)/H^p(X)$ est isomorphe à $H^p(B)/H^p(A)$.

Le polynôme de Poincaré $P_Y(t)$ est donc donné par

$$P_Y(t) = P_X(t) + P_A(t) \times (t^2 + t^4 + \dots + t^{2(m-n-1)}).$$

En particulier, on a $b_1(Y) = b_1(X)$; X et Y ont donc même variété d'Albanese.

Construction d'une forme de Kähler sur Y. — De ces considérations de cohomologie il résulte que la classe de degré 2 d'un espace projectif se projetant en un point de A est induite par une classe de Y. La seule difficulté est de s'assurer qu'on peut construire une forme fermée de type $(1, 1)$ qui soit *positive* sur Y.

Nous supposons qu'il existe une forme de Kähler sur X; cette forme s'écrira dans les U_j tels que A_j soit non vide :

$$ia_{rs}(x_\alpha, \bar{z}_r) dz_r \wedge d\bar{z}_s + \text{termes en } dz_r \wedge d\bar{x}_\alpha, \dots$$

Soient alors les formes

$$Q_j = \frac{i}{2\pi} d' d'' (\text{Log } a_{rs}(x_\alpha, 0) \bar{z}_r \cdot \bar{z}_s).$$

On voit, en mettant successivement chaque coordonnée z_u en évidence de la manière suivante dans l'expression de Q_j :

$$Q_j = \frac{i}{2\pi} d' d'' \left(\text{Log } a_{rs}(x_\alpha, 0) \frac{z_r \bar{z}_s}{z_u \bar{z}_u} \right),$$

que Q_j est une forme régulière sur W_j , image inverse d'une forme sur $A_j \times P_{m-n-1}(\mathbb{C})$ par l'application $(x_\alpha, z_r) \rightarrow (x_\alpha, t_r)$, forme qui induit sur l'image inverse d'un point de A_j une forme standard sur l'espace projectif correspondant. Il en résulte que la forme Q_j possède la propriété suivante : en ajoutant à Q_j une forme régulière sur U_j et positive, multipliée par un nombre assez grand, on obtient une forme positive sur W_j . Ayant défini ainsi Q_j sur les U_j qui rencontrent A , nous posons $Q_j = 0$ sur les U_j ne rencontrant pas A .

Comme le rapport $\frac{a_{rs,k}(x_\alpha, 0) z_{r,k} \bar{z}_{s,k}}{a_{rs,j}(x_\alpha, 0) z_{r,j} \bar{z}_{s,j}}$ est une fonction régulière sur $U_j \cap U_k$ tendant visiblement vers 1 quand le point (x_α, z_r) tend vers A , on voit que $Q_k - Q_j$ est une forme régulière sur $U_j \cap U_k$ induisant zéro sur A .

(f_j) étant une partition de l'unité subordonnée à (U_j) , la forme $f_j Q_j$ ajoutée à une forme positive sur X multipliée par un nombre assez grand donne une forme positive sur Y ; sa différentielle $d(f_j Q_j)$, égale à $df_j \wedge Q_j$, est alors une forme régulière sur X qui induit zéro sur A , comme on le voit par récurrence sur la suite des indices de cartes locales. Or $d(f_j Q_j)$ est nul en dehors d'un voisinage de A , donc induisant zéro sur A ; c'est un cobord dans X et, d'après le lemme II.3.2, $d(f_j Q_j) = dQ_0$, Q_0 étant une forme de type $(1, 1)$ sur X .

La forme $f_j Q_j - Q_0$ est alors une forme fermée de type $(1, 1)$ qui, ajoutée à une forme de Kähler sur X multipliée par un nombre assez grand, donne une forme de Kähler sur Y .

Supposons maintenant que nous soyons parti d'une forme de Kähler analytique sur X . Les Q_j sont alors analytiques, et les $Q_k - Q_j$ étant des formes analytiques sur $U_j \cap U_k$ peuvent se mettre sous la forme $R_k - R_j$, R_j étant une forme analytique sur U_j : en effet, le premier groupe de cohomologie du faisceau des formes de type $(1, 1)$ de X à coefficients analytiques est nul [16]. La forme $d(Q_j - R_j) = -dR_j$ est une forme analytique sur X ; il est facile de voir que c'est un cobord : en effet si l'on a d'autres formes R'_j régulières sur U_j telles que $Q_k - Q_j = R'_k - R'_j$, il est clair que dR'_j représente la même classe que dR_j , car leur différence est le bord de la forme $R'_j - R_j$ partout définie sur X . Il suffit alors de poser $Q_j - R'_j = \sum_k f_k Q_k$ comme on a fait précédemment.

D'après le lemme II.3.2, le cobord analytique $-dR_j$ est la différentielle d'une forme Q_0 analytique de type $(1, 1)$, et la forme $Q_j - R_j - Q_0$ est une forme fermée analytique de type $(1, 1)$ qui, ajoutée à une forme de Kähler analytique sur X multipliée par un nombre assez grand, donne une forme de Kähler analytique sur Y . Ainsi :

THÉORÈME II.6. — Si X est une variété compacte kählérienne (resp. à forme de Kähler analytique) et Y une variété obtenue par éclatement de X le long d'une sous-variété sans singularité de X , Y est une variété kählérienne (resp. admettant une forme de Kähler analytique).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1337.
- [2] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 657.
- [3] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2281.
- [4] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1342.
- [5] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1300.
- [6] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 2198.
- [7] S. BOCHNER et D. MONTGOMERY, *Locally compact groups of differentiable transformations* (*Ann. Math.*, t. 47, 1946, p. 639-653).
- [8] S. BOCHNER et D. MONTGOMERY, *Groups on analytic manifolds* (*Ann. Math.*, t. 48, 1947, p. 659-669).
- [9] N. BOURBAKI, *Fonctions d'une variable réelle* (chap. I), Hermann, Paris, 1949 (*Act. scient. et ind.*, 1074).
- [10] H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Hermann, Paris, 1935 (*Act. scient. et ind.*, 198).
- [11] H. CARTAN, *Séminaire H. Cartan*, t. 4, 1951-1952, exposé 1 (multigraphié).
- [12] K. KODAIRA, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties* (*Ann. Math.*, t. 59, 1954, p. 86-134).
- [13] K. KODAIRA, *On Kähler varieties of restricted type* (*Ann. Math.*, t. 60, 1954, p. 28-48).
- [14] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1222).
- [15] J. P. SERRE, *Homologie singulière des espaces fibrés* (*Ann. Math.*, t. 34, 1951, p. 425-505).
- [16] J. P. SERRE, *Séminaire H. Cartan*, t. 4, 1951-1952, exposé 20 (multigraphié).
- [17] K. STEIN, *Séminaire H. Cartan*, t. 6, 1953-1954, exposés 13 et 14 (multigraphié).
- [18] A. WEIL, *On Picard Varieties* (*Amer. J. Math.*, t. 74, 1952, p. 865-894).
- [19] A. WEIL, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, Paris, 1938 (*Act. scient. et ind.*, 1064).
- [20] M. LAZARD, *Séminaire « Sophus Lie »* t. 1, 1954-1955, exposé 6 (multigraphié).