Annales scientifiques de l'É.N.S.

Hubert Delange

Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 73, nº 1 (1956), p. 15-74
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_1_15_0>

SUR

LA DISTRIBUTION DES ENTIERS AYANT CERTAINES PROPRIÉTÉS

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Nous nous proposons ici de traiter un certain nombre de problèmes du type suivant :

Trouver une expression équivalente pour x infini au nombre des entiers au plus égaux à x et possédant une ou plusieurs propriétés données.

L'exemple le plus connu de problème de ce type est celui qui consiste à déterminer une expression équivalente pour x infini au nombre des nombres premiers au plus égaux à x. On sait que l'on peut prendre $\frac{x}{\log x}$.

Certains des résultats que nous établirons sont connus depuis longtemps; d'autres ont été énoncés par nous en 1951 ([1]), mais paraîssaient nouveaux à cette date; quelques-uns sont publiés ici pour la première fois à notre connaissance.

Nous les obtiendrons tous par une même méthode, qui consiste à considérer la série de Dirichlet $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{n_j^s}$, où $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ sont les entiers ayant la ou les propriétés données, et étudier le comportement au voisinage de la droite $\mathcal{R}s = 1$ de la fonction définie par cette série.

Dans chacun des cas traités, cette fonction est holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = 1$ autres que le point 1, et possède en ce point une singularité que nous déterminerons avec précision. Nous déduirons de là une expression

([1]) *Quelques formules asymptotiques de la théorie des nombres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1392-1393).

équivalente pour x infini au nombre des n_j au plus égaux à x, au moyen d'une généralisation du théorème de Ikehara que nous nous avons établie dans un travail précédent ([2]).

Nous utiliserons le fait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les fonctions L de Dirichlet ne s'annulent pas dans le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqq 1$, mais aucune propriété de ces fonctions dans la bande $0 < \mathcal{R}s < 1$.

Nous désignerons par $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier n et par $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers. Autrement dit, les fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ seront définies de la manière suivante :

$$\omega(1) = \Omega(1) = 0$$

et, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers différents et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des entiers positifs,

$$\omega(n) = k \qquad \text{et} \qquad \Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Il est clair que l'on a $\Omega(n) = \omega(n)$ si n n'est divisible par aucun carré, et seulement dans ce cas.

Nous donnerons d'abord des théorèmes concernant les entiers assujettis à certaines conditions simples portant sur $\omega(n)$ et $\Omega(n)$, puis les entiers assujettis aux mêmes conditions et, en outre, à appartenir à une progression arithmétique donnée. Puis nous considérerons les entiers assujettis à des conditions faisant intervenir un ensemble donné de nombres premiers, ou même deux tels ensembles.

1. Préliminaires.

1.1. Précisons d'abord les notations que nous emploierons dans toute la suite.

1.1.1. Il est entendu que la lettre n désigne un entier positif, qui n'est assujetti *a priori* à aucune condition, tandis que la lettre p désigne toujours un nombre premier.

1.1.2 Les signes $\sum_{n \in A} f(n)$ ou $\prod_{n \in A} f(n)$, où A est un ensemble infini donné de nombres entiers et $f(n)$ une fonction donnée de l'entier n, désignent la série $\sum_{j=1}^{+\infty} f(n_j)$, ou le produit infini $\prod_{j=1}^{+\infty} f(n_j)$, où $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ sont les nombres de A rangés par ordre croissant ([3]).

([2]) *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 71, 1954, p. 213-242.

([3]) Pratiquement l'ordre n'a pas d'importance, car il y a toujours convergence absolue.

Si A est l'ensemble de tous les entiers positifs, nous omettons le signe $n \in A$. Ainsi $\sum f(n)$ désigne la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$, $\prod f(n)$ le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

1.1.3. De même, E étant un ensemble infini donné *de nombres premiers* et $f(n)$ une fonction donnée de l'entier n, les signes $\sum_{p \in E} f(p)$, ou $\prod_{p \in E} f(p)$, désignent la série $\sum_{j=1}^{+\infty} f(p_j)$, ou le produit infini $\prod_{j=1}^{+\infty} f(p_j)$, où $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$ sont les nombres de E rangés par ordre croissant.

Si E est l'ensemble de tous les nombres premiers, nous omettons le signe $p \in E$. Ainsi $\sum f(p)$ désigne la série $\sum_{j=1}^{+\infty} f(p_j)$, $\prod f(p)$ désigne le produit infini $\prod_{j=1}^{+\infty} f(p_j)$, où $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$ sont tous les nombres premiers, rangés par ordre croissant.

1.1.4. Éventuellement, au lieu de $n \in A$ ou de $p \in E$, nous écrivons les relations qui expriment l'appartenance de n à A ou de p à E.

Par exemple, si A désigne l'ensemble des entiers n tels que $\omega(n) = q$ donné, au lieu de $\sum_{n \in A} f(n)$ ou $\prod_{n \in A} f(n)$, nous pourrons écrire $\sum_{\omega(n)=q} f(n)$ ou $\prod_{\omega(n)=q} f(n)$.

Si E désigne l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à

$$p \equiv l \pmod{k},$$

au lieu de $\sum_{p \in E} f(p)$ ou $\prod_{p \in E} f(p)$, nous pourrons écrire $\sum_{p \equiv l \pmod{k}} f(p)$ ou $\prod_{p \equiv l \pmod{k}} f(p)$, etc.

1.1.5. Nous désignons par P l'ensemble de tous les nombres premiers.

1.1.6. Nous désignons par Q l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun carré. (En allemand, un tel entier est dit *quadratfrei*.)

Ainsi $n \in Q$ équivaut à $\Omega(n) = \omega(n)$.

1.1.7. E désignant un ensemble de nombres premiers, nous désignons par $\mathcal{E}[E]$ l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers appartiennent à E.

$n \in Q \cap \mathcal{E}[E]$ signifie donc que n est égal à un produit de nombres premiers *différents* appartenant à E.

1.1.8. Conformément à l'usage établi, a et b étant deux entiers positifs, nous écrivons a/b pour indiquer que a divise b, $a \not| b$ pour indiquer que a ne divise pas b, et nous désignons par (a, b) le plus grand commun diviseur de a et b.

$(a, b) = 1$ signifie donc que a et b sont premiers entre eux.

1.1.9. Lorsque nous le jugeons plus commode, nous écrivons $\exp z$ au lieu de e^z.

1.2 Donnons maintenant quelques lemmes dont nous aurons besoin pour nos démonstrations.

1.2.1. Lemme 1. — *Soit g une fonction réelle ou complexe de l'entier n ayant les propriétés suivantes :*

1° $|g(n)| \leq 1$ *quel que soit* n,

2° $g(1) = 1$;

3° $g(nn') = g(n)g(n')$ *toutes les fois que* $(n, n') = 1$.

Alors, quel que soit l'ensemble infini E *de nombres premiers, on a pour* $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p \in \mathrm{E}} \left[1 + \frac{g(p)}{p^s}\right] = \sum_{n \in \mathrm{Q} \cap \mathcal{E}[\mathrm{E}]} \frac{g(n)}{n^s}. \tag{1}$$

Désignons par $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$ les nombres de E, par $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ ceux de $\mathrm{Q} \cap \mathcal{E}[\mathrm{E}]$, rangés par ordre croissant.

a. On voit d'abord, par récurrence, que, quel que soit $q \geq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{j=1}^{q} \left[1 + \frac{g(p_j)}{p_j^s}\right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g_q(n_j)}{n_j^s}, \tag{2}$$

où la fonction $g_q(n)$ est définie sur l'ensemble $\mathrm{Q} \cap \mathcal{E}[\mathrm{E}]$ par

$$g_q(n) = \begin{cases} g(n) & \text{si } n \text{ n'est divisible par aucun nombre premier autre que } p_1, p_2, \ldots, p_q; \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

La formule (2) est évidente pour $q = 1$.

En la supposant vraie pour $q = r \geq 1$, on voit que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\prod_{j=1}^{r+1} \left[1 + \frac{g(p_j)}{p_j^s}\right] = \left\{\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g_r(n_j)}{n_j^s}\right\} \left[1 + \frac{g(p_{r+1})}{p_{r+1}^s}\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\prod_{j=1}^{r+1} \left[1 + \frac{g(p_j)}{p_j^s}\right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g_r(n_j)}{n_j^s} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g_r(n_j)g(p_{r+1})}{(n_j p_{r+1})^s}. \tag{3}$$

Mais, si $g_r(n_j) \neq 0$, $n_j p_{r+1}$ est un nombre de $\mathrm{Q} \cap \mathcal{E}[\mathrm{E}]$, et l'on a

$$g_r(n_j)g(p_{r+1}) = g(n_j p_{r+1}) = g_{r+1}(n_j p_{r+1}) - g_r(n_j p_{r+1}).$$

Tout terme non nul de la seconde série au second membre de (3) peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{g_{r+1}(n) - g_r(n)}{n^s},$$

où n est un entier appartenant à $Q \cap \mathcal{E}[E]$,

D'ailleurs, tout entier n appartenant à $Q \cap \mathcal{E}[E]$ et tel que

$$g_{r+1}(n) - g_r(n) \neq 0$$

est une des valeurs prises par le produit $n_j p_{r+1}$ quand j prend toutes les valeurs telles que $g_r(n_j) \neq 0$.

La seconde série au second membre de (3) est donc égale à la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_{r+1}(n_j) - g_r(n_j)}{n_j^s},$$

dont les termes non nuls sont les mêmes, et (3) montre simplement que (2) est vraie pour $q = r+1$.

b. s étant fixé, avec $\mathcal{R}s = \sigma > 1$, quand q tend vers $+\infty$, $\frac{g_q(n_j)}{n_j^s}$ tend vers $\frac{g(n_j)}{n_j^s}$ et, comme la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g_q(n_j)}{n_j^s}$ est uniformément convergente par rapport à q puisque $\left|\frac{g_q(n_j)}{n_j^s}\right| \leq \frac{1}{n_j^\sigma}$, sa somme tend vers $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g(n_j)}{n_j^s}$.

(2) montre alors que le produit infini $\prod_{j=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{g(p_j)}{p_j^s}\right]$ est égal à $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g(n_j)}{n_j^s}$ (4), ce qui est précisément le résultat annoncé.

1.2.2. Lemme 2. — *Soit h une fonction réelle ou complexe de l'entier n ayant les propriétés suivantes :*

1° $|h(n)| \leq 1$ *quel que soit n;*

2° $h(1) = 1$;

3° $h(mn) = h(m)\,h(n)$ *quels que soient les entiers m et n.*

Alors, quel que soit l'ensemble infini E *de nombres premiers, on a pour* $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p \in E} \frac{1}{1 - \frac{h(p)}{p^s}} = \sum_{n \in \mathcal{E}[E]} \frac{h(n)}{n^s}. \tag{4}$$

Ici, il faut remarquer que, pour $\mathcal{R}s > 1$, tous les facteurs du produit infini sont définis, car les différences $1 - \frac{h(p)}{p^s}$ ne sont pas nulles, et ce produit infini

(4) Il est clair que ce produit infini est absolument convergent.

est convergent du fait que le produit infini $\prod\left[1-\frac{h(p)}{p^s}\right]$ est absolument convergent.

Nous désignerons encore par $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$ les nombres de E, mais cette fois par $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ ceux de $\mathcal{E}[E]$, les uns et les autres étant toujours rangés par ordre croissant.

a. On voit d'abord que, quel que soit $q \geqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{j=1}^{q} \frac{1}{1-\frac{h(p_j)}{p_j^s}} = \sum_{n\in\mathcal{E}_q} \frac{h(n)}{n^s}, \tag{5}$$

où $\mathcal{E}_q$ est l'ensemble des nombres de $\mathcal{E}[E]$ qui ne sont divisibles par aucun nombre premier autre que $p_1, p_2, \ldots, p_q$.

En effet, cette formule est évidente pour $q = 1$.

En la supposant vraie pour $q = r \geqq 1$, on voit que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{r+1} \frac{1}{1-\frac{h(p_j)}{p_j^s}} &= \left\{\sum_{n\in\mathcal{E}_r} \frac{h(n)}{n^s}\right\} \frac{1}{1-\frac{h(p_{r+1})}{p_{r+1}^s}}, \\ &= \left\{\sum_{n\in\mathcal{E}_r} \frac{h(n)}{n^s}\right\} \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h(p_{r+1})^k}{(p_{r+1}^k)^s}\right\}.\end{aligned}$$

Mais le produit de Dirichlet des deux dernières séries, qui sont absolument convergentes pour $\mathcal{R}s > 1$, est la série

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_{r+1}} \frac{h(n)}{n^s}.$$

b. La formule (5) peut évidemment s'écrire

$$\prod_{j=1}^{q} \frac{1}{1-\frac{h(p_j)}{p_j^s}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_q(n_j)}{n_j^s}, \tag{6}$$

où la fonction $h_q(n)$ est définie sur $\mathcal{E}[E]$ par

$$h_q(n) = \begin{cases} h(n) & \text{si } n \text{ appartient à } \mathcal{E}_q; \\ 0 & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Pour s fixé, avec $\mathcal{R}s = \sigma > 1$, quand q tend vers $+\infty$, $\frac{h_q(n_j)}{n_j^s}$ tend vers $\frac{h(n_j)}{n_j^s}$ et, comme la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_q(n_j)}{n_j^s}$ est uniformément convergente par rapport à q puisque $\left|\frac{h_q(n_j)}{n_j^s}\right| \leqq \frac{1}{n^\sigma}$, sa somme tend vers $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h(n_j)}{n_j^s}$.

La formule (6) montre alors que le produit infini

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\dfrac{h(p_j)}{p_j^s}}$$

est égal à $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h(n_j)}{n_j^s}$, ce qui est le résultat annoncé.

1.2.3. Lemme 3. — *Soient g et h deux fonctions réelles ou complexes de l'entier n satisfaisant aux hypothèses des lemmes 1 et 2, avec en outre, pour g, $g(p^k) = g(p)$ quels que soient le nombre premier p et l'entier $k \geqq 1$.*

Alors, quel que soit l'ensemble infini E de nombres premiers, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p\in E}\left[1+\frac{g(p)\,h(p)}{p^s-h(p)}\right] = \sum_{n\in\mathcal{E}[E]} \frac{g(n)\,h(n)}{n^s}. \tag{7}$$

Nous conserverons ici les notations utilisées dans la démonstration du lemme 2.

a. Remarquons d'abord que, pour $\mathcal{R}s > 1$, tous les facteurs du produit infini sont définis puisque les différences $p^s - h(p)$ ne sont pas nulles, et ce produit infini est absolument convergent car, si $\mathcal{R}s = \sigma$,

$$\left|\frac{g(p)\,h(p)}{p^s-h(p)}\right| \leqq \frac{1}{p^\sigma - 1}.$$

b. Remarquons d'autre part que, pour chaque j, on a pour $\mathcal{R}s > 0$, et en particulier pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$1+\frac{g(p_j)\,h(p_j)}{p_j^s-h(p_j)} = 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{g(p_j)\,h(p_j)^k}{(p_j^s)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g(p_j^k)\,h(p_j^k)}{(p_j^k)^s}.$$

c. Ceci étant, on voit que, quel que soit $q \geqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{j=1}^{q}\left[1+\frac{g(p_j)\,h(p_j)}{p_j^s-h(p_j)}\right] = \sum_{n\in\mathcal{E}_q} \frac{g(n)\,h(n)}{n^s}. \tag{8}$$

Ce que l'on a dit en *b* montre d'abord que cette formule est vraie pour $q = 1$.

D'autre part, en la supposant vraie pour $q = r \geqq 1$, on voit que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r+1}\left[1+\frac{g(p_j)\,h(p_j)}{p_j^s-h(p_j)}\right] &= \left\{\sum_{n\in\mathcal{E}_r}\frac{g(n)\,h(n)}{n^s}\right\}\left\{1+\frac{g(p_{r+1})\,h(p_{r+1})}{p_{r+1}^s-h(p_{r+1})}\right\},\\ &= \left\{\sum_{n\in\mathcal{E}_r}\frac{g(n)\,h(n)}{n^s}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g(p_{r+1}^k)\,h(p_{r+1}^k)}{(p_{r+1}^k)^s}\right\}.\end{aligned}$$

Mais le produit de Dirichlet des deux dernières séries, qui sont absolument convergentes pour $\mathcal{R}s > 1$, est la série

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_{r+1}} \frac{g(n)\,h(n)}{n^s}.$$

d. La formule (8) peut évidemment s'écrire

$$\prod_{j=1}^{q} \left[1 + \frac{g(p_j)\,h(p_j)}{p_j^s - h(p_j)}\right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{l_q(n_j)}{n_j^s}, \tag{9}$$

où la fonction $l_q(n)$ est définie sur $\mathcal{E}[\mathrm{E}]$ par

$$l_q(n) = \begin{cases} g(n)\,h(n) & \text{si } n \text{ appartient à } \mathcal{E}_q\,; \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Pour s fixé, avec $\mathcal{R}s = \sigma > 1$, quand q tend vers $+\infty$, $\frac{l_q(n_j)}{n_j^s}$ tend vers $\frac{g(n_j)\,h(n_j)}{n_j^s}$ et, comme la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{l_q(n_j)}{n_j^s}$ est uniformément convergente par rapport à q puisque $\left|\frac{l_q(n_j)}{n_j^s}\right| \leqq \frac{1}{n_j^\sigma}$, sa somme tend vers $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g(n_j)\,h(n_j)}{n_j^s}$.

La formule (9) montre alors que le produit infini

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{g(p_j)\,h(p_j)}{p_j^s - h(p_j)}\right]$$

est égal à la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g(n_j)\,h(n_j)}{n_j^s}$.

1.2.4. **Lemme 4.** — *Soient* E *un ensemble quelconque, non vide, de nombres premiers, et $f(p)$ une fonction réelle ou complexe du nombre premier p, satisfaisant à*

$$|f(p)| \leqq 1 \quad \textit{pour tout } p \textit{ appartenant à } \mathrm{E}.$$

1° *Il existe une fonction* $G(s, z)$ *holomorphe pour* $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ *et* z *quelconque, telle que l'on ait pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* z *quelconque*

$$\prod_{p \in \mathrm{E}} \left[1 + \frac{z f(p)}{p^s}\right] = G(s, z) \exp\left\{z \sum_{p \in \mathrm{E}} \frac{f(p)}{p^s}\right\}. \tag{10}$$

On a $G(s, 0) = 1$ *et* $G(s, z) \neq 0$ *pour* $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ *et* $|z| \leqq \sqrt{2}$.

2° *Il existe une fonction* $H(s, z)$ *holomorphe pour* $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ *et* z *quelconque,* *telle que l'on ait pour $\Re s > 1$ et z quelconque*

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z f(p)}{p^s - f(p)} \right] = H(s, z) \exp \left\{ z \sum_{p \in E} \frac{f(p)}{p^s} \right\}. \tag{11}$$

On a $H(s, z) = \dfrac{G(s, z-1)}{G(s, -1)}$, *de sorte que* $H(s, 0) = 1$.

Observons d'abord que les facteurs du produit $\prod_{p \in E} \left[1 + \dfrac{z f(p)}{p^s - f(p)} \right]$ sont tous définis quand $\Re s > 0$, car alors, pour chaque p appartenant à E, $|p^s| > |f(p)|$ et, par suite, $p^s - f(p) \neq 0$, et que, lorsque l'ensemble E est infini, les produits infinis

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z f(p)}{p^s} \right] \quad \text{et} \quad \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z f(p)}{p^s - f(p)} \right]$$

sont absolument convergents pour $\Re s > 1$ et z quelconque, et la série

$$\sum_{p \in E} \frac{f(p)}{p^s}$$

est absolument convergente pour $\Re s > 1$, car on a pour $\Re s = \sigma > 1$

$$\left| \frac{z f(p)}{p^s} \right| \leqq \frac{|z|}{p^\sigma}, \qquad \left| \frac{z f(p)}{p^s - f(p)} \right| \leqq \frac{|z|}{p^\sigma - 1} \qquad \text{et} \qquad \left| \frac{f(p)}{p^s} \right| \leqq \frac{1}{p^\sigma}.$$

Démonstration de 1°. — Si l'ensemble E est fini, on peut définir $G(s, z)$ quels que soient s et z en résolvant (10) par rapport à $G(s, z)$. La fonction ainsi obtenue est holomorphe quels que soient s et z, prend la valeur 1 pour $z = 0$ et s quelconque et ne s'annule pas pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leqq \sqrt{2}$, car, si l'on a ces inégalités, on a pour chaque p appartenant à E

$$|z f(p)| \leqq \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad |p^s| > \sqrt{2}$$

et, par suite,

$$1 + \frac{z f(p)}{p^s} \neq 0.$$

De plus, cette fonction satisfait évidemment à (10) quels que soient s et z.

Supposons maintenant que l'ensemble E soit infini.

Nous considérerons alors le produit infini

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z f(p)}{p^s} \right] \exp \left\{ - \frac{z f(p)}{p^s} \right\}.$$

Ce produit infini est absolument convergent pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et z quelconque et, quels que soient $R > 0$ et $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, la convergence est uniforme pour $\Re s \geqq \sigma_0$ et $|z| \leqq R$.

En effet, pour $\mathcal{R}s \geqq \sigma_0$ et $|z| \leqq R$, on a quel que soit p appartenant à E

$$\left|\frac{zf(p)}{p^s}\right| \leqq \frac{R}{p^{\sigma_0}} \leqq \frac{R}{2^{\sigma_0}}.$$

Mais il existe un nombre positif M tel que la fonction entière $\frac{(1+u)e^{-u}-1}{u^2}$ soit de module au plus égal à M pour $|u| \leqq \frac{R}{2^{\sigma_0}}$, autrement dit que l'on ait

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leqq M|u|^2 \qquad \text{pour} \quad |u| \leqq \frac{R}{2^{\sigma_0}}.$$

On voit donc que, pour $\mathcal{R}s \geqq \sigma_0$ et $|z| \leqq R$, on a quel que soit p appartenant à E

$$\left|\left[1+\frac{zf(p)}{p^s}\right]\exp\left[-\frac{zf(p)}{p^s}\right]-1\right| \leqq M\frac{R^2}{p^{2\sigma_0}}.$$

D'autre part, chaque facteur du produit infini étant une fonction de s et z holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et z quelconque, la valeur de ce produit infini est aussi une fonction de s et z holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et z quelconque.

Soit $G(s, z)$ cette dernière fonction.

Il est clair que $G(s, 0) = 1$ et que $G(s, z) \neq 0$ pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leqq \sqrt{2}$, puisque, si l'on a ces ces inégalitées, on a pour chaque p appartenant à E

$$1+\frac{zf(p)}{p^s} \neq 0.$$

De plus, on voit immédiatement que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$G(s, z) = \left\{\prod_{p\in E}\left[1+\frac{zf(p)}{p^s}\right]\right\}\exp\left[-z\sum_{p\in E}\frac{f(p)}{p^s}\right],$$

du fait que le produit infini et la série figurant au second membre sont alors convergents. Cette égalité est équivalente à (10).

Démonstration de 2°. — En posant

$$H(s, z) = \frac{G(s, z-1)}{G(s, -1)},$$

on définit une fonction $H(s, z)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et z quelconque commme quotient de deux fonctions holomorphes, le dénominateur ne s'annulant pas.

On a évidemment $H(s, 0) = 1$.

D'autre part, on a (11) pour $\mathcal{R}s > 1$ et z quelconque.

En effet, si $\mathcal{R}s > 1$, pour chaque p appartenant à E, $p^s - f(p)$ est différent de zéro et l'on a quel que soit z

$$\left[1+\frac{zf(p)}{p^s-f(p)}\right]\left[1-\frac{f(p)}{p^s}\right]=1+\frac{(z-1)f(p)}{p^s}.$$

Que l'ensemble E soit fini ou non, on en déduit par multiplication

$$\left\{\prod_{p\in E}\left[1+\frac{zf(p)}{p^s-f(p)}\right]\right\}\cdot\left\{\prod_{p\in E}\left[1-\frac{f(p)}{p^s}\right]\right\}=\prod_{p\in E}\left[1+\frac{(z-1)f(p)}{p^s}\right],$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de (10),

$$\left\{\prod_{p\in E}\left[1+\frac{zf(p)}{p^s-f(p)}\right]\right\}G(s,-1)\exp\left[-\sum_{p\in E}\frac{f(p)}{p^s}\right]=G(s,z-1)\exp\left[(z-1)\sum_{p\in E}\frac{f(p)}{p^s}\right],$$

d'où l'on tire

$$\prod_{p\in E}\left[1+\frac{zf(p)}{p^s-f(p)}\right]=\frac{G(s,z-1)}{G(s,-1)}\exp\left[z\sum_{p\in E}\frac{f(p)}{p^s}\right].$$

1.3. Ajoutons que la généralisation du théorème de Ikehara à laquelle nous avons fait allusion dans l'introduction interviendra par l'intermédiaire des deux théorèmes particuliers que nous allons énoncer maintenant.

Dans ces deux théorèmes, A est un ensemble de nombres entiers positifs et $\nu(x)$ est le nombre des entiers appartenant à A et au plus égaux à x.

De plus, il est entendu, *comme dans toute la suite*, que les expressions

$$(s-1)^\alpha \quad (\alpha \text{ réel quelconque}), \qquad \log(s-1) \qquad \text{et} \qquad \log\frac{1}{s-1},$$

qui ne sont considérées que dans le demi-plan $\mathcal{R}s>1$, sont prises avec leurs déterminations principales, c'est-à-dire que, si $s-1=re^{i\theta}$, avec $r>0$ et $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, on a

$$(s-1)^\alpha=r^\alpha e^{i\alpha\theta}, \qquad \log(s-1)=\log r+i\theta, \qquad \log\frac{1}{s-1}=\log\frac{1}{r}-i\theta,$$

avec $\log r$ et $\log\frac{1}{r}$ réels.

Théorème a. — *Soit ρ un nombre réel qui ne soit pas un entier négatif ou nul. Supposons que l'on ait pour $\mathcal{R}s>1$*

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}=(s-1)^{-\rho}a(s)+b(s),$$

avec a et b holomorphes pour $\mathcal{R}s\geq 1$ et $a(1)\neq 0$, ou même, plus généralement,

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s}=(s-1)^{-\rho}a(s)+\sum_{j=1}^{q}(s-1)^{-\lambda_j}\{c_j(s)\cos[\mu_j\log(s-1)]+d_j(s)\sin[\mu_j\log(s-1)]\}+b(s),$$

avec a, b, les c_j et les d_j holomorphes pour $\mathcal{R}s \geqq 1$, $a(1) \neq 0$, *les* λ_j *et les* μ_j *réels, les* λ_j *inférieurs à* ρ, *et aucun des nombres* $\lambda_j + i\mu_j$ *n'étant un entier* $\leqq 0$.

Alors, on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\nu(x) \sim \frac{a(1)}{\Gamma(\rho)} x (\log x)^{\rho-1}.$$

Théorème *b*. — ρ *étant un nombre réel quelconque et q un entier* $\geqq 1$, *supposons que l'on ait pour* $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = (s-1)^{-\rho} \sum_{j=0}^{q} a_j(s) \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^j + b(s),$$

avec $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_q$ *et b holomorphes pour* $\mathcal{R}s \geqq 1$ *et* $a_q(1) \neq 0$.

Alors,

1° *Si* ρ *n'est pas un entier* $\leqq 0$, *on a pour x infini*

$$\nu(x) \sim \frac{a_q(1)}{\Gamma(\rho)} x (\log x)^{\rho-1} (\log \log x)^q;$$

2° *Si* $\rho = -m$, *avec m entier* $\geqq 0$, *on a pour x infini*

$$\nu(x) \sim (-1)^m m!\, q a_q(1)\, x (\log x)^{-m-1} (\log \log x)^{q-1}.$$

Ces deux théorèmes se déduisent immédiatement des théorèmes III et IV de notre travail cité plus haut (⁵), en tenant compte de ce que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \nu(e^t)\, dt.$$

2. Entiers assujettis à des conditions portant sur $\omega(n)$ et $\Omega(n)$.

2.1. On sait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann ne s'annule pas pour $\mathcal{R}s \geqq 1$. Ceci entraîne que l'on peut trouver un domaine simplement connexe contenant le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqq 1$ et contenu dans le demi-plan ouvert $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, dans lequel $\zeta(s)$ ne possède aucun zéro (⁶).

Dans tout ce chapitre, nous désignerons par Δ un tel domaine, choisi une fois pour toutes.

(⁵) *Loc. cit.*, p. 235-236 et 239.

(⁶) On peut, par exemple, faire correspondre à chaque zéro complexe de $\zeta(s)$ la demi-droite formée des points de même partie imaginaire et de partie réelle au plus égale à la sienne, et prendre l'ensemble des points du demi-plan $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ qui n'appartiennent à aucune de ces demi-droites. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, ceci donne simplement le demi-plan $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$.

2.2. En prenant $f(p) = 1$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, le lemme 4 nous apprend qu'il existe deux fonctions $G(s, z)$ et $H(s, z)$ holomorphes pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et z quelconque, satisfaisant à

$$G(s, 0) = H(s, 0) = 1,$$

et telles que l'on ait pour $\mathcal{R}s > 1$ et z quelconque

$$\prod\left(1 + \frac{z}{p^s}\right) = G(s, z) \exp\left\{z \sum \frac{1}{p^s}\right\} \tag{12}$$

et

$$\prod\left[1 + \frac{z}{p^s - 1}\right] = H(s, z) \exp\left\{z \sum \frac{1}{p^s}\right\}. \tag{13}$$

On a d'ailleurs $H(s, z) = \dfrac{G(s, z-1)}{G(s, -1)}$ et $G(s, z)$ est différent de zéro pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leq \sqrt{2}$.

En faisant $z = -1$ dans (12), on obtient

$$\frac{1}{\zeta(s)} = G(s, -1) \exp\left\{-\sum \frac{1}{p^s}\right\},$$

d'où

$$\exp\left\{\sum \frac{1}{p^s} - \log \frac{1}{s-1}\right\} = (s-1)\zeta(s) G(s, -1). \tag{14}$$

Le produit $(s-1)\zeta(s)G(s, -1)$ est une fonction holomorphe et toujours différente de zéro dans Δ. Il existe donc une fonction $r(s)$ holomorphe dans Δ et telle que, dans ce domaine,

$$e^{r(s)} = (s-1)\zeta(s) G(s, -1). \tag{15}$$

$r(s)$ n'est d'ailleurs déterminée qu'à un multiple de $2\pi i$ près. (14) montre que, si on la choisit convenablement, elle est égale pour $\mathcal{R}s > 1$ à

$$\sum \frac{1}{p^s} - \log \frac{1}{s-1}.$$

On arrive donc au résultat suivant :

Il existe une fonction $r(s)$ holomorphe dans Δ telle que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\sum \frac{1}{p^s} = \log \frac{1}{s-1} + r(s). \tag{16}$$

2.2.1. Remarquons en passant que le théorème *b* permet de déduire immédiatement de là le théorème des nombres premiers, à savoir que le nombre des nombres premiers au plus égaux à x est équivalent pour x infini à $\dfrac{x}{\log x}$.

2.3. En tenant compte de (16), les formules (12) et (13) donnent

$$\prod\left(1+\frac{z}{p^s}\right)=G(s,z)\exp[z\,r(s)]\exp\left\{z\log\frac{1}{s-1}\right\}$$

et

$$\prod\left[1+\frac{z}{p^s-1}\right]=H(s,z)\exp[z\,r(s)]\exp\left\{z\log\frac{1}{s-1}\right\}.$$

Les fonctions $G(s,z)\exp[z\,r(s)]$ et $H(s,z)\exp[z\,r(s)]$ sont évidemment holomorphes pour s appartenant à Δ et z quelconque. De plus, la première est différente de zéro pour s appartenant à Δ et $|z|\leqq\sqrt{2}$.

On arrive ainsi au résultat suivant :

Il existe deux fonctions $\mathcal{G}(s,z)$ et $\mathcal{H}(s,z)$ holomorphes pour s appartenant à Δ et z quelconque, telles que, pour $\mathcal{R}s>1$ et z quelconque,

$$\prod\left(1+\frac{z}{p^s}\right)=\mathcal{G}(s,z)\exp\left\{z\log\frac{1}{s-1}\right\}\tag{17}$$

et

$$\prod\left(1+\frac{z}{p^s-1}\right)=\mathcal{H}(s,z)\exp\left\{z\log\frac{1}{s-1}\right\}.\tag{18}$$

On a pour tout s appartenant à Δ

$$\mathcal{G}(s,0)=\mathcal{H}(s,0)=1.$$

De plus, on a $\mathcal{G}(s,z)\neq 0$ pour s appartenant à Δ et $|z|\leqq\sqrt{2}$

En faisant $z=1$ dans (17) et (18), on en déduit que, pour $\mathcal{R}s>1$,

$$\mathcal{G}(s,1)=(s-1)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

et

$$\mathcal{H}(s,1)=(s-1)\zeta(s).$$

Par suite,

$$\mathcal{G}(1,1)=\frac{6}{\pi^2}\qquad\textit{et}\qquad\mathcal{H}(1,1)=1.$$

D'autre part, dans Δ,

$$\mathcal{G}(s,-1)=G(s,-1)\,e^{-r(s)}$$

et, d'après (15), ceci est égal à $\dfrac{1}{(s-1)\zeta(s)}$.

Donc $\mathcal{G}(1,-1)=1$.

2.3.1. Notons que *l'on a pour s appartenant à Δ et z quelconque*

$$\mathcal{H}(s,z)=\frac{\mathcal{G}(s,z-1)}{\mathcal{G}(s,-1)}.$$

En effet,

$$\mathcal{H}(s,z)=\frac{G(s,z-1)}{G(s,-1)}\exp[z\,r(s)]=\frac{G(s,z-1)\exp[(z-1)r(s)]}{G(s,-1)\exp[-r(s)]}.$$

2.3.2. En raison de l'holomorphie des fonctions $\mathcal{G}(s, z)$ et $\mathcal{H}(s, z)$, on a pour s appartenant à Δ et z quelconque

$$\mathcal{G}(s, z) = \sum_{j=0}^{+\infty} A_j(s) z^j$$

et

$$\mathcal{H}(s, z) = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j(s) z^j,$$

où les fonctions $A_j(s)$ et les fonctions $B_j(s)$ sont holomorphes dans Δ.

De même, $\mathcal{G}(s, -z)$ ne s'annulant pas pour s appartenant à Δ et $|z| < \sqrt{2}$, la fonction $\frac{1}{\mathcal{G}(s, -z)}$ est holomorphe pour ces valeurs, et l'on a pour s appartenant à Δ et $|z| < \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\mathcal{G}(s, -z)} = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j(s) z^j,$$

où les fonctions $C_j(s)$ sont holomorphes dans Δ.

Comme $\mathcal{G}(s, 0) = \mathcal{H}(s, 0) = 1$, on a dans Δ

$$A_0(s) = B_0(s) = C_0(s) = 1.$$

2.4. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)}$, $h(n) = 1$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod \left[1 + \frac{z}{p^s - 1}\right] = \sum \frac{z^{\omega(n)}}{n^s}.$$

En tenant compte de (18), on voit donc que *l'on a pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* $|z| \leqq 1$

$$\sum \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{H}(s, z) \exp\left\{ z \log \frac{1}{s-1} \right\}. \tag{19}$$

2.4.1. Ceci étant, donnons-nous un entier $q > 1$ et un entier r quelconque. Posons, pour simplifier l'écriture, $e^{\frac{2\pi i}{q}} = \gamma$.

En faisant dans (19) $z = \gamma^k$, avec k entier quelconque, et multipliant les deux membres par γ^{-rk}, on obtient

$$\sum \frac{\gamma^{k[\omega(n) - r]}}{n^s} = \gamma^{-rk} \mathcal{H}(s, \gamma^k) \exp\left\{ \gamma^k \log \frac{1}{s-1} \right\}.$$

En tenant compte de ce que, h étant entier,

$$\sum_{k=0}^{q-1} \gamma^{kh} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \text{ n'est pas multiple de } q; \\ q & \text{si } h \text{ est multiple de } q, \end{cases}$$

on déduit de là que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\sum_{\omega(n) \equiv r \pmod q} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \gamma^{-rk} \mathcal{H}(s, \gamma^k) \exp\left\{ \gamma^k \log \frac{1}{s-1} \right\}.$$

Si $q = 2m + 1$, avec $m \geqq 1$, en séparant le terme correspondant à $k = 0$ et groupant ensemble les termes correspondant à $k = j$ et $k = 2m + 1 - j$, où $j = 1, 2, \ldots, m$, le second membre s'écrit

$$(s-1)^{-1} \frac{\mathcal{H}(s, 1)}{q} + \sum_{j=1}^{m} (s-1)^{-\lambda_j} \{ c_j(s) \cos[\mu_j \log(s-1)] + d_j(s) \sin[\mu_j \log(s-1)] \},$$

avec

$$\lambda_j + i\mu_j = \gamma^j,$$

$$c_j(s) = \frac{1}{q} [\gamma^{-rj} \mathcal{H}(s, \gamma^j) + \gamma^{rj} \mathcal{H}(s, \gamma^{-j})],$$

$$d_j(s) = \frac{1}{qi} [\gamma^{-rj} \mathcal{H}(s, \gamma^j) - \gamma^{rj} \mathcal{H}(s, \gamma^{-j})].$$

Si $q = 2$, on a simplement

$$(s-1)^{-1} \frac{\mathcal{H}(s, 1)}{2} + \frac{(-1)^r}{2} (s-1) \mathcal{H}(s, -1).$$

Si $q = 2m$, avec $m > 1$, en séparant le terme correspondant à $k = 0$ et le terme correspondant à $k = m$ et groupant ensemble les termes correspondant à $k = j$ et $k = 2m - j$, où $j = 1, 2, \ldots, m - 1$, on obtient

$$(s-1)^{-1} \frac{\mathcal{H}(s, 1)}{q} + \sum_{j=1}^{m-1} (s-1)^{-\lambda_j} \{ c_j(s) \cos[\mu_j \log(s-1)] + d_j(s) \sin[\mu_j \log(s-1)] \}$$
$$+ \frac{(-1)^r}{q} (s-1) \mathcal{H}(s, -1),$$

λ_j, μ_j, $c_j(s)$ et $d_j(s)$ étant donnés par les mêmes formules que pour $q = 2m + 1$.

Dans tous les cas, le théorème *a* permet de conclure que, pour x infini, le nombre des n au plus égaux à x et tels que

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

est équivalent à $\frac{x}{q}$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème 1. — *q étant un entier > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

est équivalent pour x infini à $\frac{x}{q}$.

2.4.2. Si $|z| \leqq 1$ et $\mathcal{R}s > 1$, du fait que la série $\sum \frac{z^{\omega(n)}}{n^s}$ est absolument convergente, on peut la transformer de la façon suivante :

On calcule d'abord la somme de la série formée par les termes pour lesquels $\omega(n)$ a une valeur donnée q, soit

$$z^q \sum_{\omega(n)=q} \frac{1}{n^s},$$

puis on forme une série avec les sommes correspondant aux différentes valeurs de q.

On obtient ainsi une série entière en z.

Mais, pour chaque s de partie réelle > 1, on a l'égalité (19) pour $|z| \leqq 1$. Cette série doit donc coïncider avec le développement du second membre de (19) suivant les puissances de z.

On voit ainsi que, *quel que soit* $q \geqq 1$, *on a pour* $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{\omega(n)=q} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{B_j(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^{q-j}. \tag{20}$$

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que $\omega(n) = q$ est équivalent pour x infini à*

$$\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x} \quad (^7).$$

2.5. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 2 montre, en prenant $h(n) = z^{\Omega(n)}$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{z}{p^s}} = \sum \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s}.$$

Mais, en remplaçant z par $-z$ dans (17), on a

$$\prod \left(1 - \frac{z}{p^s}\right) = \mathcal{G}(s, -z) \exp\left\{-z \log \frac{1}{s-1}\right\}.$$

Donc, si $|z| \leqq 1$ et $\mathcal{R}s > 1$, on a, comme $\mathcal{G}(s, -z) \neq 0$,

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{z}{p^s}} = \frac{1}{\mathcal{G}(s, -z)} \exp\left\{z \log \frac{1}{s-1}\right\}.$$

---

(7) Ce théorème, qui contient évidemment comme cas particulier le théorème des nombres premiers, est bien connu (*cf.* LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd 1, p. 211-213. Dans la suite, nous désignerons simplement cet Ouvrage par : LANDAU, *Handbuch*).

On voit donc que *l'on a pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* $|z| \leqq 1$

$$(21) \qquad \sum \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{\mathcal{G}(s, -z)} \exp\left\{ z \log \frac{1}{s-1} \right\}.$$

2.5.1. En faisant à partir de cette formule un calcul semblable à celui du paragraphe 2.4.1, où $\mathcal{H}(s, z)$ sera remplacé par $\frac{1}{\mathcal{G}(s, -z)}$, et appliquant le théorème a, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3. — *q étant un entier > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\Omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à $\frac{x}{q}$ (8).

2.5.2. En identifiant les développements suivant les puissances de z des deux membres de (21), comme on l'a fait au paragraphe 2.4.2 pour la formule (19), on voit que, *quel que soit $q \geqq 1$, on a pour* $\mathcal{R}s > 1$

$$(22) \qquad \sum_{\Omega(n)=q} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{C_j(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^{q-j}.$$

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

Théorème 4. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que $\Omega(n) = q$ est équivalent pour x infini à*

$$\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}.$$

2.6. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 1 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)}$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod \left(1 + \frac{z}{p^s}\right) = \sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s}.$$

En tenant compte de (17), on voit donc que *l'on a pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* $|z| \leqq 1$

$$(23) \qquad \sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{G}(s, z) \exp\left\{ z \log \frac{1}{s-1} \right\}.$$

2.6.1. En faisant encore à partir de cette formule un calcul semblable à celui du paragraphe 2.4.1, où $\mathcal{H}(s, z)$ sera remplacé cette fois par $\mathcal{G}(s, z)$, et appli-

---

(8) Le cas particulier de ce théorème correspondant à $q = 2$ se trouve déjà dans Landau, *Handbuch* (Bd 2, p. 621). Le cas général a été établi en 1940 par S. S. Pillai (*Generalization of a theorem of Mangoldt, Proc. Indian Acad. Sc.*, Sect. A, t. 11, 1940, p. 13-20).

quant le théorème a, on obtient, compte tenu de ce que $\mathcal{G}(1, 1) = \frac{6}{\pi^2}$, le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *q étant un entier > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

et qui ne sont divisibles par aucun carré est équivalent pour x infini à

$$\frac{6}{\pi^2}\frac{x}{q} \quad (^9).$$

2.6.2. En identifiant les développements suivant les puissances de z des deux membres de (23), comme on l'a fait au paragraphe 2.4.2 pour la formule (19), on voit que, *quel que soit $q \geq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$*

$$(24) \qquad \sum_{\substack{n \in Q \\ \omega(n) = q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j(s)}{(q-j)!}\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j}.$$

On en déduit, par application du théorème b, le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *q étant un entier ≥ 1, le nombre des n au plus égaux à x qui sont le produit de q nombres premiers différents est équivalent pour x infini à*

$$\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x} \quad (^{10}).$$

2.7. En comparant les théorèmes 2, 4 et 6, on voit que les n qui ne sont pas « quadratfrei » apportent une contribution négligeable dans le décompte des n au plus égaux à x tels que $\omega(n) = q$ comme dans celui des n au plus égaux à x tels que $\Omega(n) = q$.

On va voir qu'il est possible dans les deux cas d'évaluer cette contribution.

2.7.1. En retranchant la formule (24) de la formule (20), on obtient, compte tenu de ce que $A_0(s) = B_0(s) = 1$,

$$(25) \qquad \sum_{\substack{\omega(n) = q \\ n \notin Q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=1}^{q} \frac{B_j(s) - A_j(s)}{(q-j)!}\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j} \qquad (\mathcal{R}s > 1).$$

Si l'on prend $q = 1$, la formule se réduit à

$$\sum_{\substack{\omega(n) = 1 \\ n \notin Q}} \frac{1}{n^s} = B_1(s) - A_1(s).$$

---

(9) Le cas particulier de ce théorème correspondant à $q = 2$ se trouve dans LANDAU, *Handbuch* (Bd 2, p. 606). Le cas général a été établi par S. Selberg (*Zur Theorie der quadratfrei Zahlen, Math. Z.*, t. 44, 1939, p. 306-318), puis à nouveau par S. S. Pillai [*loc. cit.*, note (8) *supra*].

(10) Ce théorème est bien connu (*cf.* LANDAU, *Handbuch*, Bd 1, p. 208-211).

Mais les n tels que $\omega(n) = 1$ et $n \notin Q$ sont simplement les entiers de la forme p^k, où p est un nombre premier et k un entier $\geqq 2$.

La série étant absolument convergente, on peut calculer sa somme de la façon suivante : on calcule la somme des termes obtenus à partir d'un même p, puis on additionne les sommes correspondant aux différentes valeurs de p. On obtient ainsi

$$B_1(s) - A_1(s) = \sum \frac{1}{p^s(p^s - 1)} \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}s > 1.$$

La série au second membre représentant une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, et en particulier dans Δ, du fait que, quel que soit $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, elle est uniformément convergente pour $\mathcal{R}s \geqq \sigma_0$, l'égalité a lieu partout dans Δ.

En particulier,

$$B_1(1) - A_1(1) = \sum \frac{1}{p(p-1)} \neq 0.$$

Ceci étant, si $q \geqq 2$, le théorème b permet de déduire de la formule (25) une expression équivalente pour x infini au nombre des n au plus égaux à x tels que $\omega(n) = q$ et n'appartenant pas à Q.

On a ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *q étant un entier $\geqq 2$, le nombre des n au plus égaux à x tels que $\omega(n) = q$ et qui ne sont pas « quadratfrei » est équivalent pour x infini à*

$$S_1 \frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x},$$

où S_1 est la constante définie par

$$S_1 = \sum \frac{1}{p(p-1)} \quad (^{11}).$$

2.7.2. En retranchant la formule (24) de la formule (22), on obtient

$$\sum_{\substack{\Omega(n)=q \\ n \notin Q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{C_j(s) - A_j(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^{q-j} \qquad (\mathcal{R}s > 1). \tag{26}$$

Ici encore, le terme correspondant à $j = 0$ disparaît, du fait que l'on a $C_0(s) = A_0(s) = 1$.

Il en est de même du terme correspondant à $j = 1$.

En effet, d'après la définition des fonctions $A_j(s)$ et $C_j(s)$, $A_1(s) = \mathcal{G}'_z(s, 0)$ et $C_1(s)$ est la valeur pour $z = 0$ de $\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\mathcal{G}(s, -z)}\right]$, qui est égal à $\frac{\mathcal{G}'_z(s, -z)}{\mathcal{G}(s, -z)^2}$,

---

(11) Si $q = 1$, il résulte immédiatement du théorème des nombres premiers que le nombre des entiers considérés est équivalent pour x infini à $\frac{2\sqrt{x}}{\log x}$.

soit aussi $\mathcal{G}'_z(s, 0)$. Par conséquent,

$$C_1(s) - A_1(s) = 0.$$

La formule (26) se réduit donc, en supposant $q \geqq 2$, à

$$(27) \qquad \sum_{\substack{\Omega(n)=q \\ n \notin Q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=2}^{q} \frac{C_j(s) - A_j(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^{q-j}.$$

Si l'on prend $q = 2$, on obtient

$$\sum \frac{1}{p^{2s}} = C_2(s) - A_2(s),$$

puisque les n n'appartenant pas à Q et tels que $\Omega(n) = 2$ sont simplement les carrés des nombres premiers.

L'égalité a lieu partout dans Δ puisque les deux membres sont holomorphes dans ce domaine. En particulier,

$$C_2(1) - A_2(1) = \sum \frac{1}{p^2} \neq 0.$$

Ceci étant, si $q \geqq 3$, le théorème b permet de déduire de la formule (27) une expression équivalente pour x infini au nombre des n au plus égaux à x tels que $\Omega(n) = q$ et n'appartenant pas à Q.

On a ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *q étant un entier $\geqq 3$, le nombre des n au plus égaux à x tels que $\Omega(n) = q$ et qui ne sont pas « quadratfrei » est équivalent pour x infini à*

$$S'_1 \frac{x(\log \log x)^{q-3}}{(q-3)!\log x},$$

où S'_1 est la constante définie par

$$S'_1 = \sum \frac{1}{p^2} \quad (^{12}).$$

2.8. On peut aussi, comme nous allons l'indiquer rapidement, évaluer le nombre des entiers au plus égaux à x et pour lesquels $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ ont tous deux des valeurs données.

En effet, si $|u| \leqq 1$ et $|v| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant

$$g(n) = u^{\omega(n)}, \qquad h(n) = v^{\Omega(n)}$$

et E égal à l'ensemble de tous les nombres premiers, que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$(28) \qquad \prod \left[1 + \frac{uv}{p^s - v}\right] = \sum \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)}}{n^s}.$$

---

(12) Si $q = 2$, les nombres considérés sont les carrés des nombres premiers et le nombre de ceux qui sont au plus égaux à x est équivalent pour x infini à $\frac{2\sqrt{x}}{\log x}$.

Si $q = 1$, on ne peut avoir $\Omega(n) = q$ et n non « quadratfrei ».

Introduisons la fonction $\mathcal{F}(s, z, z')$ définie pour s appartenant à Δ, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque, par

$$\mathcal{F}(s, z, z') = \left\{ \prod \left(1 + \frac{z}{p^s - z'} \right) \exp \left[- \frac{z}{p^s - z'} \right] \right\} \exp \left\{ zz' \sum \frac{1}{p^s (p^s - z')} + z\, r(s) \right\},$$

où $r(s)$ est la fonction qui figure dans la formule (16).

On voit aisément que $\mathcal{F}(s, z, z')$ est holomorphe pour s appartenant à Δ, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque, et que, pour $\mathcal{R}s > 1$, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque,

$$\prod \left(1 + \frac{z}{p^s - z'} \right) = \mathcal{F}(s, z, z') \exp \left\{ z \log \frac{1}{s-1} \right\}.$$

La formule (28) montre que, si $|u| \leqq 1$ et $|v| \leqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)}}{n^s} = \mathcal{F}(s, uv, v) \exp \left\{ uv \log \frac{1}{s-1} \right\}. \tag{29}$$

Mais on a pour s appartenant à Δ, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque,

$$\mathcal{F}(s, z, z') = \sum_{j,k} f_{j,k}(s) z^j z'^k,$$

où les fonctions $f_{j,k}(s)$ sont holomorphes dans Δ. D'ailleurs, quel que soit $k \geqq 1$, $f_{0,k}(s) = 0$, puisque $\mathcal{F}(s, 0, z') = 1$ quels que soient s appartenant à Δ et z' de module inférieur à $\sqrt{2}$.

Ceci permet de développer le second membre de (29) suivant les puissances de u et v.

q et r étant des entiers $\geqq 1$, en égalant les coefficients de $u^q v^{q+r}$ dans les deux membres, on obtient, compte tenu de ce que $f_{0,r}(s) = 0$,

$$\sum_{\substack{\omega(n)=q \\ \Omega(n)=q+r}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=1}^{q} \frac{f_{j,r}(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^{q-j} \qquad (\mathcal{R}s > 1). \tag{30}$$

En prenant $q = 1$, la formule se réduit à

$$\sum \frac{1}{p^{(1+r)s}} = f_{1,r}(s).$$

En raison de l'holomorphie, l'égalité a lieu non seulement pour $\mathcal{R}s > 1$ mais partout dans Δ. En particulier,

$$f_{1,r}(1) = \sum \frac{1}{p^{1+r}}.$$

Pour $q > 1$, on peut appliquer le théorème b.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 9. — *q étant un entier $\geqq 2$ et r un entier $\geqq 1$, le nombre des n au* *plus égaux à x tels que $\omega(n)=q$ et $\Omega(n)=q+r$ est équivalent pour x infini à*

$$S_{1,r}\frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x},$$

où $S_{1,r}$ est la constante définie par

$$S_{1,r}=\sum\frac{1}{p^{1+r}} \quad (^{13}).$$

2.8.1. On peut remarquer que ce théorème entraîne le théorème 8, les n au plus égaux à x qui satisfont à $\Omega(n)=q\geqq 3$ et ne sont pas « quadratfrei » pouvant se subdiviser en ceux pour lesquels $\omega(n)=q-1$, $\omega(n)=q-2$, ...

Les premiers comptent seuls pratiquement, les autres forment un appoint négligeable.

2.9. La formule (29) permet aussi d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 10. — *q et q' étant deux entiers >1, et r et r' deux entiers quelconques, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega(n)\equiv r \pmod q \qquad et \qquad \Omega(n)\equiv r' \pmod{q'}$$

est équivalent pour x infini à $\frac{x}{qq'}$.

Il suffit de faire $u=\alpha^m$, $v=\beta^{m'}$, avec $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{q}}$ et $\beta=e^{\frac{2\pi i}{q'}}$, multiplier par $\alpha^{-mr}\beta^{-m'r'}$, puis ajouter les égalités obtenues en donnant à m et m' tous les systèmes de valeurs entières satisfaisant à

$$0\leqq m\leqq q-1, \qquad 0\leqq m'\leqq q'-1.$$

On obtient ainsi une expression de

$$\sum_{\substack{\omega(n)\equiv r \pmod q\\ \Omega(n)\equiv r' \pmod{q'}}}\frac{1}{n^s}$$

et l'on applique le théorème a.

3. — Entiers appartenant à une progression arithmétique donnée et assujettis à des conditions portant sur $\omega(n)$ et $\Omega(n)$.

3.1. Dans tout ce chapître, *k sera un entier >1*, que nous pouvons supposer fixé, *et h le nombre des entiers positifs inférieurs à k et premiers avec k.*

---

(13) Comme $\Omega(n)\geqq\omega(n)$, on ne peut avoir $\omega(n)=q$ et $\Omega(n)=q+r$ que si $r\geqq 0$. Si r était nul, les entiers satisfaisant à ces conditions seraient ceux considérés au théorème 6.

Si $r\geqq 1$ et $q=1$, les entiers considérés ici sont les puissances $r+1^{\text{ièmes}}$ des nombres premiers. Le nombre de ceux qui sont au plus égaux à x est équivalent pour x infini à $(r+1)\frac{x^{\frac{1}{r+1}}}{\log x}$.

Nous désignerons par $\chi_1(n), \chi_2(n), \ldots, \chi_h(n)$ les caractères modulo k, en convenant que $\chi_1(n)$ est le caractère principal, c'est-à-dire celui qui est égal à 1 pour tout n premier avec k.

On sait que, pour chaque caractère $\chi_j(n)$, on a

$$\begin{aligned} |\chi_j(n)| &= 1 \quad \text{si } n \text{ est premier avec } k, \\ \chi_j(n) &= 0 \quad \text{dans le cas contraire,} \end{aligned}$$

et, quels que soient n et n',

$$\chi_j(nn') = \chi_j(n)\,\chi_j(n').$$

On sait aussi que, si l est un entier quelconque premier avec k, on a

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{\chi_j(n)}{\chi_j(l)} = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } n \not\equiv l \pmod{k}, \\ h & \text{lorsque } n \equiv l \pmod{k}. \end{cases}$$

D'autre part, à chaque caractère χ_j correspond une fonction $L_j(s)$ définie pour $\mathcal{R}s > 1$ par

$$L_j(s) = \sum \frac{\chi_j(n)}{n^s}.$$

On a d'ailleurs aussi

$$L_j(s) = \prod \frac{1}{1 - \dfrac{\chi_j(p)}{p^s}}.$$

Pour $j \neq 1$, $L_j(s)$ est une fonction entière. $L_1(s)$ est une fonction ayant pour seule singularité à distance finie un pôle simple, de résidu $\frac{h}{k}$, au point $s = 1$.

Aucune des fonctions $L_j(s)$ ne possède de zéros dans le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqq 1$. On peut donc trouver un domaine simplement connexe contenant le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqq 1$ et contenu dans le demi plan ouvert $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, dans lequel les fonctions $L_j(s)$ ne possèdent aucun zéro ([14]).

Nous désignerons par Δ_k un tel domaine, choisi une fois pour toutes.

3.2. En prenant $f(p) = \chi_j(p)$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, le lemme 4 nous apprend qu'à chaque caractère χ_j correspondent deux fonctions $G_j(s, z)$ et $H_j(s, z)$ holomorphes pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et z quelconque, satisfaisant à

$$G_j(s, 0) = H_j(s, 0) = 1,$$

([14]) On peut, par exemple, faire correspondre à chaque zéro de partie réelle > 0 de chacune des fonctions L_j la demi-droite formée des points de même partie imaginaire et de partie réelle au plus égale à la sienne, et prendre l'ensemble des points du demi-plan $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ qui n'appartiennent à aucune de ces demi-droites.

et telles que l'on ait pour $\mathcal{R}s > 1$ et z quelconque

$$(31)\qquad \prod\left[1+\frac{z\chi_j(p)}{p^s}\right] = G_j(s, z)\exp\left\{z\sum\frac{\chi_j(p)}{p^s}\right\}$$

et

$$(32)\qquad \prod\left[1+\frac{z\chi_j(p)}{p^s-\chi_j(p)}\right] = H_j(s, z)\exp\left\{z\sum\frac{\chi_j(p)}{p^s}\right\}.$$

On a d'ailleurs

$$H_j(s, z) = \frac{G_j(s, z-1)}{G_j(s, -1)}$$

et $G_j(s, z)$ est $\neq 0$ pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leqq \sqrt{2}$.

En faisant $z = -1$ dans (31), on obtient

$$\frac{1}{L_j(s)} = G_j(s, -1)\exp\left\{-\sum\frac{\chi_j(p)}{p^s}\right\},$$

d'où

$$(33)\qquad \exp\left\{\sum\frac{\chi_j(p)}{p^s}\right\} = L_j(s)\,G_j(s, -1).$$

Si $j \neq 1$, le produit $L_j(s)G_j(s, -1)$ est une fonction holomorphe et toujours différente de zéro dans Δ_k. Il existe donc une fonction $r_j(s)$ holomorphe dans Δ_k et telle que, dans ce domaine,

$$e^{r_j(s)} = L_j(s)\,G_j(s, -1).$$

$r_j(s)$ n'est d'ailleurs déterminée qu'à un multiple de $2\pi i$ près. (33) montre que, si on la choisit convenablement, elle est égale pour $\mathcal{R}s > 1$ à

$$\sum\frac{\chi_j(p)}{p^s}.$$

Si $j = 1$, (33) peut s'écrire

$$\exp\left\{\sum\frac{\chi_1(p)}{p^s} - \log\frac{1}{s-1}\right\} = (s-1)\,L_1(s)\,G_1(s, -1).$$

Le second membre est encore une fonction holomorphe et toujours différente de zéro dans Δ_k et l'on en déduit l'existence d'une fonction $r_1(s)$ holomorphe dans Δ_k et égale pour $\mathcal{R}s > 1$ à

$$\sum\frac{\chi_1(p)}{p^s} - \log\frac{1}{s-1}.$$

On arrive donc au résultat suivant :

Il existe des fonctions $r_1(s), r_2(s), \ldots, r_h(s)$ holomorphes dans Δ_k et telles que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$(34)\qquad \sum\frac{\chi_j(p)}{p^s} = \begin{cases} r_j(s) & si\ j > 1, \\ \log\dfrac{1}{s-1} + r_1(s) & si\ j = 1. \end{cases}$$

3.2.1. Si l est un entier quelconque premier avec k, la formule (34) donne

$$\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{\chi_j(l)}\sum\frac{\chi_j(p)}{p^s}=\log\frac{1}{s-1}+\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{\chi_j(l)}r_j(s),$$

ou

$$h\sum_{p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\frac{1}{p^s}=\log\frac{1}{s-1}+\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{\chi_j(l)}r_j(s),$$

d'où

$$\sum_{p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1}+\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{\chi_j(l)}r_j(s).$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

Si l est premier avec k, il existe une fonction $r_{k,l}(s)$ holomorphe dans Δ_k telle que, pour $\mathcal{R}s>1$,

$$\sum_{p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1}+r_{k,l}(s).$$

3.2.2. Le théorème b permet de déduire immédiatement de là le théorème des nombres premiers dans une progression arithmétique, à savoir que, si $(k, l)=1$, le nombre des nombres premiers aux plus égaux à x et satisfaisant à

$$p\equiv l\quad(\mathrm{mod}\,k)$$

est équivalent pour x infini à $\frac{1}{h}\frac{x}{\log x}$.

3.3. En tenant compte de (34), les formules (31) et (32) donnent

$$(35)\qquad \prod\left[1+\frac{z\chi_j(p)}{p^s}\right]=\begin{cases}G_j(s, z)\,e^{zr_j(s)} & \text{si } j\neq 1,\\ G_1(s, z)\,e^{zr_1(s)}\exp\left[z\log\frac{1}{s-1}\right] & \text{si } j=1\end{cases}$$

et

$$(36)\qquad \prod\left[1+\frac{z\chi_j(p)}{p^s-\chi_j(p)}\right]=\begin{cases}H_j(s, z)\,e^{zr_j(s)} & \text{si } j\neq 1,\\ H_1(s, z)\,e^{zr_1(s)}\exp\left[z\log\frac{1}{s-1}\right] & \text{si } j=1.\end{cases}$$

Pour chaque j, les fonctions $G_j(s, z)\,e^{zr_j(s)}$ et $H_j(s, z)\,e^{zr_j(s)}$ sont évidemment holomorphes pour s appartenant à Δ_k et z quelconque. De plus, la première est différente de zéro pour s appartenant à Δ_k et $|z|\leqq\sqrt{2}$.

On arrive donc au résultat suivant :

Pour chaque j satisfaisant à $1\leqq j\leqq h$, il existe des fonctions $\mathcal{G}_j(s, z)$ et $\mathcal{H}_j(s, z)$ holomorphes pour s appartenant à Δ_k et z quelconque, telles que, *pour $\mathcal{R}s > 1$ et z quelconque,*

$$(37) \qquad \prod\left[1+\frac{z\chi_j(p)}{p^s}\right]=\begin{cases}\mathcal{G}_j(s, z) & si \quad j\neq 1,\\ \mathcal{G}_1(s, z)\exp\left[z\log\frac{1}{s-1}\right] & si \quad j=1\end{cases}$$

et

$$(38) \qquad \prod\left[1+\frac{z\chi_j(p)}{p^s-\chi_j(p)}\right]=\begin{cases}\mathcal{H}_j(s, z) & si \quad j\neq 1,\\ \mathcal{H}_1(s, z)\exp\left[z\log\frac{1}{s-1}\right] & si \quad j=1.\end{cases}$$

On a pour tout s appartenant à Δ_k

$$\mathcal{G}_j(s, 0)=\mathcal{H}_j(s, 0)=1.$$

De plus, $\mathcal{G}_j(s, z)$ est différent de zéro pour s appartenant à Δ_k et $|z|\leq\sqrt{2}$.

En prenant $j=1$ et $z=1$ dans (37) et (38), on voit que, pour $\mathcal{R}s>1$,

$$\mathcal{G}_1(s, 1)=(s-1)\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{p|k}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}(s-1)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

et

$$\mathcal{H}_1(s, 1)=(s-1)\prod_{p\nmid k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=(s-1)\zeta(s)\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Par suite,

$$\mathcal{G}_1(1, 1)=\frac{6}{\pi^2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1} \qquad et \qquad \mathcal{H}_1(1, 1)=\prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{h}{k}.$$

De même, en prenant $j=1$ et $z=-1$ dans (37), on voit que, pour $\mathcal{R}s>1$,

$$\mathcal{G}_1(s, -1)=\frac{1}{(s-1)L_1(s)}.$$

Par suite,

$$\mathcal{G}_1(1, -1)=\frac{k}{h}.$$

3.3.1. Remarquons que, quel que soit j, on a pour s appartenant à Δ_k et z quelconque

$$\mathcal{H}_j(s, z)=\frac{\mathcal{G}_j(s, z-1)}{\mathcal{G}_j(s, -1)}.$$

En effet,

$$\mathcal{H}_j(s, z)=\frac{G_j(s, z-1)}{G_j(s, -1)}e^{z r_j(s)}=\frac{G_j(s, z-1)\,e^{(z-1)r_j(s)}}{G_j(s, -1)\,e^{-r_j(s)}}.$$

3.3.2. En raison de l'holomorphie des fonctions $\mathcal{G}_1(s, z)$ et $\mathcal{H}_1(s, z)$, on a pour s appartenant à Δ_k et z quelconque

$$\mathcal{G}_1(s, z)=\sum_{j=0}^{+\infty}A_{k,j}(s)z^j$$

et

$$\mathcal{H}_1(s, z) = \sum_{j=0}^{+\infty} B_{k,j}(s) z^j,$$

où les fonctions $A_{k,j}(s)$ et les fonctions $B_{k,j}(s)$ sont holomorphes dans Δ_k.

De même, $\mathcal{G}_1(s, -z)$ ne s'annulant pas pour s appartenant à Δ_k et $|z| < \sqrt{2}$, la fonction $\frac{1}{\mathcal{G}_1(s, -z)}$ est holomorphe pour ces valeurs, et l'on a pour s appartenant à Δ_k et $|z| < \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\mathcal{G}_1(s, -z)} = \sum_{j=0}^{+\infty} C_{k,j}(s) z^j,$$

où les fonctions $C_{k,j}(s)$ sont holomorphes dans Δ_k.

Comme $\mathcal{G}_1(s, 0) = \mathcal{H}_1(s, 0) = 1$, on a dans Δ_k

$$A_{k,0}(s) = B_{k,0}(s) = C_{k,0}(s) = 1.$$

3.4. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)}$, $h(n) = \chi_j(n)$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que, pour chaque caractère χ_j, on a pour $\mathcal{R} s > 1$

$$\prod \left[1 + \frac{z\chi_j(p)}{p^s - \chi_j(p)} \right] = \sum \frac{z^{\omega(n)} \chi_j(n)}{n^s}.$$

En tenant compte de la formule (38), ceci donne

$$\sum \frac{z^{\omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \begin{cases} \mathcal{H}_j(s, z) & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{H}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Si l est un entier quelconque premier avec k, on déduit de là

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{\chi_j(l)} \left\{ \sum \frac{z^{\omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} \right\} = \mathcal{H}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] + \sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{H}_j(s, z),$$

ou

$$h \sum_{n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{H}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] + \sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{H}_j(s, z).$$

On arrive donc au résultat suivant :

l étant un entier quelconque premier avec k, il existe une fonction $\mathcal{B}_{k,l}(s, z)$ holomorphe pour s appartenant à Δ_k et z quelconque, telle que, pour $\mathcal{R} s > 1$ et $|z| \leqq 1$,

$$(39) \qquad \sum_{n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{h} \mathcal{H}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] + \mathcal{B}_{k,l}(s, z).$$

3.4.1. La formule (39) permet d'établir, en raisonnant exactement comme au paragraphe 2.4.1, le théorème suivant :

Théorème 11. — *l étant un entier quelconque premier avec k, q un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à $\frac{x}{kq}$.

3.4.2. En identifiant les développements suivant les puissances de z des deux membres de la formule (39), on voit que, *quel que soit l premier avec k et quel que soit $q \geqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$*

$$\sum_{\substack{n \equiv l \pmod{k} \\ \omega(n) = q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{q} \frac{B_{k,j}(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^{q-j} + b_{k,l,q}(s), \tag{40}$$

avec $b_{k,l,q}(s)$ holomorphe dans Δ_k.

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

Théorème 12. — *l étant un entier quelconque premier avec k et q un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \omega(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{h} \frac{x (\log \log x)^{q-1}}{(q-1)! \log x}.$$

3.5. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 2 montre, en prenant $h(n) = z^{\Omega(n)} \chi_j(n)$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que, pour chaque caractère χ_j, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{z \chi_j(p)}{p^s}} = \sum \frac{z^{\Omega(n)} \chi_j(n)}{n^s}.$$

Mais, en remplaçant z par $-z$ dans (37), on obtient

$$\prod \left[1 - \frac{z \chi_j(p)}{p^s}\right] = \begin{cases} \mathcal{G}_j(s, -z) & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{G}_1(s, -z) \exp\left[-z \log \frac{1}{s-1}\right] & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{G}_j(s, -z) \neq 0$ pour $|z| \leqq 1$, on voit que, pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$,

$$\sum \frac{z^{\Omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{G}_j(s, -z)} & \text{si } j \neq 1, \\ \frac{1}{\mathcal{G}_1(s, -z)} \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Si l est un entier quelconque premier avec k, on déduit de là

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{\chi_j(l)} \left\{ \sum \frac{z^{\Omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} \right\} = \frac{1}{\mathcal{G}_1(s, -z)} \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] + \sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \frac{1}{\mathcal{G}_j(s, -z)},$$

ou

$$h \sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{\mathcal{G}_1(s, -z)} \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] + \sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \frac{1}{\mathcal{G}_j(s, -z)}.$$

On arrive donc au résultat suivant :

l étant un entier quelconque premier avec k, il existe une fonction $\mathcal{C}_{k,l}(s, z)$ holomorphe pour s appartenant à Δ_k et $|z| < \sqrt{2}$, telle que, pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leq 1$,

$$(41) \qquad \sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{h} \frac{1}{\mathcal{G}_1(s, -z)} \exp\left[z \log \frac{1}{s-1} \right] + \mathcal{C}_{k,l}(s).$$

3.5.1. La formule (41) permet d'établir, en raisonnant exactement comme au paragraphe 2.4.1, le théorème suivant :

THÉORÈME 13. — *l étant un entier quelconque premier avec k, q un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \Omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à $\dfrac{x}{kq}$ (15).

3.5.2. En identifiant les développements suivant les puissances de z des deux membres de la formule (41), on voit que, *quel que soit l premier avec k et quel que soit $q \geq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$*

$$(42) \qquad \sum_{\substack{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ \Omega(n) = q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{q} \frac{C_{k,j}(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^{q-j} + c_{k,l,q}(s),$$

avec $c_{k,l,q}(s)$ holomorphe dans Δ_k.

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

THÉORÈME 14. — *l étant un entier quelconque premier avec k et q un entier quelconque ≥ 1, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \Omega(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{h} \frac{x (\log \log x)^{q-1}}{(q-1)! \log x}.$$

---

(15) Le cas particulier de ce théorème correspondant à $q = 2$ se trouve dans LANDAU, *Handbuch* (Bd 2, p. 630).

3.6. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 1 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)}\chi_j(n)$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que, pour chaque caractère χ_j, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod \left[1 + \frac{z\chi_j(p)}{p^s}\right] = \sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega(n)}\chi_j(n)}{n^s}.$$

En tenant compte de la formule (37), ceci donne

$$\sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega(n)}\chi_j(n)}{n^s} = \begin{cases} \mathcal{G}_j(s, z) & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{G}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Si l est un entier quelconque premier avec k, on déduit de là

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{\chi_j(l)} \left\{ \sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega(n)}\chi_j(n)}{n^s} \right\} = \mathcal{G}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] + \sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{G}_j(s, z),$$

ou

$$h \sum_{\substack{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ n \in Q}} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{G}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] + \sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{G}_j(s, z).$$

On arrive donc au résultat suivant :

l étant un entier quelconque premier avec k, il existe une fonction $\mathfrak{A}_{k,l}(s, z)$ holomorphe pour s appartenant à Δ_k et z quelconque, telle que, pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$,

$$\sum_{\substack{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ n \in Q}} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{h} \mathcal{G}_1(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] + \mathfrak{A}_{k,l}(s, z). \tag{43}$$

Notons en passant que le théorème de Ikehara permet de déduire de la formule obtenue en faisant $z = 1$ dans (43) que le nombre des entiers au plus égaux à x qui ne sont divisibles par aucun carré et satisfont à

$$n \equiv l \pmod{k}$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k} \left\{ \prod_{p/k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \right\} x.$$

3.6.1. La formule (43) permet d'établir, en raisonnant comme au paragraphe 2.4.1, le théorème suivant :

THÉORÈME 15. — *l étant un entier quelconque premier avec k, q un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x qui ne sont divisibles par aucun carré et satisfont à*

$$n \equiv l \pmod{k} \quad \text{et} \quad \omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k}\left\{\prod_{p/k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\right\}\frac{x}{q} \quad [16].$$

3.6.2. En identifiant les développements suivant les puissances de z des deux membres de la formule (43), on voit que, *quel que soit l premier avec k et quel que soit $q \geqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$*

$$\sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ \omega(n)=q\\ n\in Q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{q}\frac{A_{k,j}(s)}{(q-j)!}\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j} + a_{k,l,q}(s), \tag{44}$$

avec $a_{k,l,q}(s)$ holomorphe dans Δ_k.

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

THÉORÈME 16. — *l étant un entier quelconque premier avec k et q un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x qui sont le produit de q nombres premiers différents et satisfont à*

$$n \equiv l \pmod k$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{h}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}.$$

3.7. En comparant les théorèmes 12, 14 et 16, on constate, ici encore, que, si $(k, l) = 1$, les n qui ne sont pas « quadratfrei » apportent une contribution négligeable dans le décompte des n au plus égaux à x et satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod k$$

tels que $\omega(n) = q$ ou que $\Omega(n) = q$.

Il est possible, dans les deux cas, d'évaluer cette contribution.

3.7.1. En retranchant la formule (44) de la formule (40), on obtient, compte tenu de ce que $A_{k,0}(s) = B_{k,0}(s) = 1$,

$$\sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ \omega(n)=q\\ n\notin Q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{q}\frac{B_{k,j}(s)-A_{k,j}(s)}{(q-j)!}\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j} + b_{k,l,q}(s) - a_{k,l,q}(s). \tag{45}$$

Il est facile de voir que

$$B_{k,1}(1) - A_{k,1}(1) = \sum_{p\nmid k}\frac{1}{p(p-1)} \neq 0.$$

---

[16] Le cas particulier de ce théorème correspondant à $q = 2$ se trouve dans LANDAU, *Handbuch* (Bd 2, p. 637).

En effet, $B_{k,1}(s)$ est la valeur pour $z=0$ de

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{H}_1(s, z)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mathcal{G}_1(s, z-1)}{\mathcal{G}_1(s, -1)}\right],$$

donc la valeur pour $z=-1$ de $\dfrac{\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{G}_1(s, z)}{\mathcal{G}_1(s, z)}$.

$A_{k,1}(s)$ est la valeur pour $z=0$ de $\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{G}_1(s, z)$, donc de $\dfrac{\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{G}_1(s, z)}{\mathcal{G}_1(s, z)}$ puisque $\mathcal{G}_1(s, 0)=1$.

Or la formule (37) donne

$$\mathcal{G}_1(s, z)=\exp\left[-z\log\frac{1}{s-1}\right]\prod_{p\nmid k}\left(1+\frac{z}{p^s}\right).$$

On en déduit que, pour $\mathcal{R}s>1$ et z différent de tous les nombres $-p^s$, où p ne divise pas k,

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{G}_1(s, z)}{\mathcal{G}_1(s, z)}=-\log\frac{1}{s-1}+\sum_{p\nmid k}\frac{1}{p^s+z}.$$

Les valeurs pour $z=0$ et $z=-1$ sont

$$-\log\frac{1}{s-1}+\sum_{p\nmid k}\frac{1}{p^s}\qquad\text{et}\qquad-\log\frac{1}{s-1}+\sum_{p\nmid k}\frac{1}{p^s-1}.$$

Par suite, pour $\mathcal{R}s>1$,

$$B_{k,1}(s)-A_{k,1}(s)=\sum_{p\nmid k}\frac{1}{p^s(p^s-1)}.$$

La série représentant une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}s>\frac{1}{2}$, et en particulier dans Δ_k, l'égalité a lieu partout dans Δ_k, notamment pour $s=1$.

Ceci étant, si $q\geqq 2$, le théorème b permet de déduire de la formule (45) une expression équivalente pour x infini au nombre des n au plus égaux à x, satisfaisant à

$$n\equiv l\pmod{k}\qquad\text{et}\qquad\omega(n)=q$$

et n'appartenant pas à Q.

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 17. — *l étant un entier quelconque premier avec k et q un entier quelconque $\geqq 2$, le nombre des n au plus égaux à x qui satisfont à*

$$n\equiv l\pmod{k}\qquad\text{et}\qquad\omega(n)=q$$

et ne sont pas « quadratfrei », est équivalent pour x infini à

$$S_k\frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x},\qquad\textit{où}\qquad S_k=\frac{1}{h}\sum_{p\nmid k}\frac{1}{p(p-1)}.$$

3.7.2. En retranchant la formule (44) de la formule (42), on obtient

$$(46)\qquad \sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ \Omega(n)=q\\ n\notin Q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{q} \frac{C_{k,j}(s)-A_{k,j}(s)}{(q-j)!}\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j} + c_{k,l,q}(s) - a_{k,l,q}(s).$$

Ici encore le terme en $\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^q$ disparaît du fait que

$$A_{k,0}(s) = C_{k,0}(s) = 1.$$

Il en est de même du terme en $\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-1}$. En effet, $C_{k,1}(s)$ est la valeur pour $z=0$ de

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mathcal{G}_1(s,-z)}\right] = \frac{\dfrac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,-z)}{\mathcal{G}_1(s,-z)^2},$$

soit $\frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,0)$, et $A_{k,1}(s)$ a la même valeur.

La formule (46) se réduit donc, pour $q\geqq 2$, à

$$(47)\qquad \sum_{\substack{n\equiv l \pmod k\\ \Omega(n)=q\\ n\notin Q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h}\sum_{j=2}^{q} \frac{C_{k,j}(s)-A_{k,j}(s)}{(q-j)!}\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j} + c_{k,l,q}(s) - a_{k,l,q}(s).$$

$C_{k,2}(s)$ est la moitié de la valeur pour $z=0$ de

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{1}{\mathcal{G}_1(s,-z)}\right] = -\frac{1}{\mathcal{G}_1(s,-z)^2}\frac{\partial^2\mathcal{G}_1}{\partial z^2}(s,-z) + \frac{2}{\mathcal{G}_1(s,-z)^3}\frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,-z)^2,$$

soit

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{G}_1}{\partial z^2}(s,0) + \frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,0)^2.$$

D'autre part,

$$A_{k,2}(s) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{G}_1}{\partial z^2}(s,0).$$

Donc

$$C_{k,2}(s) - A_{k,2}(s) = \frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,0)^2 - \frac{\partial^2\mathcal{G}_1}{\partial z^2}(s,0),$$

ce qui est la valeur pour $z=0$ de $\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{-\dfrac{\dfrac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,z)}{\mathcal{G}_1(s,z)}\right\}$.

Mais, d'après le calcul fait plus haut, on a pour $\mathcal{R}s>1$ et z différent de tous les nombres $-p^s$, où p ne divise pas k,

$$-\frac{\dfrac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial z}(s,z)}{\mathcal{G}_1(s,z)} = \log\frac{1}{s-1} - \sum_{p\nmid k}\frac{1}{p^s+z},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{-\frac{\dfrac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial z}(s, z)}{\mathcal{G}_1(s, z)}\right\} = \sum_{p \nmid k} \frac{1}{(p^s + z)^2}.$$

Finalement, on trouve que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$C_{k,2}(s) - A_{k,2}(s) = \sum_{p \nmid k} \frac{1}{p^{2s}}.$$

La série représentant une fonction holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, donc dans Δ_k, l'égalité a lieu partout dans Δ_k. En particulier,

$$C_{k,2}(1) - A_{k,2}(1) = \sum_{p \nmid k} \frac{1}{p^2}.$$

Ceci étant, si $q \geqq 3$, le théorème *b* permet de déduire de la formule (47) une expression équivalente pour x infini au nombre des n au plus égaux à x satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \text{et} \qquad \Omega(n) = q,$$

et n'appartenant pas à Q.

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 18. — *l étant un entier quelconque premier avec k, et q un entier $\geqq 3$, le nombre des n au plus égaux à x qui satisfont à*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \textit{et} \qquad \Omega(n) = q$$

et ne sont pas « quadratfrei », est équivalent pour x infini à

$$S'_k \frac{x(\log\log x)^{q-3}}{(q-3)!\log x}, \qquad \textit{où} \quad S'_k = \frac{1}{h}\sum_{p \nmid k} \frac{1}{p^2}.$$

3.8. On peut aussi évaluer le nombre des n au plus égaux à x, satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod{k}$$

et pour lesquels $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ ont tous deux des valeurs données.

En effet, si $|u| \leqq 1$ et $|v| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant

$$g(n) = u^{\omega(n)}, \qquad h(n) = v^{\Omega(n)} \chi_j(n)$$

et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que, pour chaque caractère χ_j, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod \left[1 + \frac{uv\chi_j(p)}{p^s - v\chi_j(p)}\right] = \sum \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)} \chi_j(n)}{n^s}. \tag{48}$$

Introduisons la fonction $\mathcal{F}_j(s, z, z')$ définie pour s appartenant à Δ_k, $|z'| < \sqrt{2}$

et z quelconque, par

$$\mathcal{F}_j(s, z, z') = \left\{ \prod \left[1 + \frac{z\chi_j(p)}{p^s - z'\chi_j(p)} \right] \exp\left[- \frac{z\chi_j(p)}{p^s - z'\chi_j(p)} \right] \right\} \times \exp\left\{ zz' \sum \frac{\chi_j(p)^2}{p^s[p^s - z'\chi_j(p)]} + z\,r_j(s) \right\},$$

où $r_j(s)$ est la fonction introduite au paragraphe 3.2.

On voit aisément que $\mathcal{F}_j(s, z, z')$ est holomorphe pour s appartenant à Δ_k, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque, et que, pour $\mathcal{R}s > 1$, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque,

$$\prod \left[1 + \frac{z\chi_j(p)}{p^s - z'\chi_j(p)} \right] = \begin{cases} \mathcal{F}_j(s, z, z') & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{F}_1(s, z, z') \exp\left[z \log \dfrac{1}{s-1} \right] & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

La formule (48) montre alors que, si $|u| \leqq 1$ et $|v| \leqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \begin{cases} \mathcal{F}_j(s, uv, v) & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{F}_1(s, uv, v) \exp\left[uv \log \dfrac{1}{s-1} \right] & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Si l est un entier quelconque premier avec k, on déduit de là

$$(49) \qquad \sum_{n \equiv l \pmod k} \frac{u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{h} \mathcal{F}_1(s, uv, v) \exp\left[uv \log \frac{1}{s-1} \right] + \frac{1}{h} \sum_{j > 1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{F}_j(s, uv, v).$$

On a pour s appartenant à Δ_k, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque,

$$\mathcal{F}_1(s, z, z') = \sum_{j, j'} f_{k,j,j'}(s)\, z^j z'^{j'},$$

où les fonctions $f_{k,j,j'}(s)$ sont holomorphes dans Δ_k.

De même,

$$\frac{1}{h} \sum_{j > 1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{F}_j(s, z, z') = \sum_{j, j'} \varphi_{k,l,j,j'}(s)\, z^j z'^{j'},$$

où les fonctions $\varphi_{k,l,j,j'}(s)$ sont holomorphes dans Δ_k.

D'ailleurs, quel que soit $q \geqq 1$, on a

$$f_{k,0,q}(s) = \varphi_{k,l,0,q}(s) = 0,$$

puisque, pour chaque j, $\mathcal{F}_j(s, 0, z') = 1$.

q et r étant des entiers $\geqq 1$, en égalant les coefficients de $u^q v^{q+r}$ dans les développements suivant les puissances de u et v des deux membres de (49), on obtient, compte tenu de ce que $f_{k,0,r}(s) = 0$,

$$(50) \qquad \sum_{\substack{n \equiv l \pmod k \\ \omega(n) = q \\ \Omega(n) = q + r}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{q} \frac{f_{k,j,r}(s)}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^{q-j} + \varphi_{k,l,q,r}(s).$$

Pour calculer le coefficient de $\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-1}$, notons que $\sum_{r=0}^{+\infty} f_{k,1,r}(s)\, z'^r$ est la valeur pour $z=0$ de $\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}_1(s, z, z')$, donc de $\dfrac{\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}_1(s, z, z')}{\mathcal{F}_1(s, z, z')}$.

Or, d'après ce que l'on a vu plus haut, on a, pour $\mathcal{R}s > 1$, $|z'| < \sqrt{2}$ et z quelconque,

$$\mathcal{F}_1(s, z, z') = \exp\left[-z\log\frac{1}{s-1}\right]\prod_{p \not\mid k}\left[1+\frac{z}{p^s-z'}\right].$$

Donc, pour $\mathcal{R}s > 1$, $|z'| < \sqrt{2}$ et z différent de tous les nombres $-(p^s - z')$, où p ne divise pas k,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}_1(s, z, z')}{\mathcal{F}_1(s, z, z')} = -\log\frac{1}{s-1} + \sum_{p \not\mid k}\frac{1}{p^s - z' + z}.$$

Par suite, pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z'| < \sqrt{2}$,

$$\sum_{r=0}^{+\infty} f_{k,1,r}(s)\, z'^r = -\log\frac{1}{s-1} + \sum_{p \not\mid k}\frac{1}{p^s - z'}.$$

On en déduit que, si $r \geqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$f_{k,1,r}(s) = \sum_{p \not\mid k}\frac{1}{p^{(r+1)s}}.$$

Par suite de l'holomorphie des deux membres, l'égalité a lieu partout dans Δ_k et, en particulier,

$$f_{k,1,r}(1) = \sum_{p \not\mid k}\frac{1}{p^{r+1}}.$$

Ceci étant, si $q > 1$, la formule (50) permet d'appliquer le théorème b.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 19. — *l étant un entier quelconque premier avec k, q un entier $\geqq 2$ et r un entier $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k}, \qquad \omega(n) = q \qquad \textit{et} \qquad \Omega(n) = q + r,$$

est équivalent pour x infini à

$$S_{k,r}\frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x}, \qquad \textit{où} \quad S_{k,r} = \frac{1}{h}\sum_{p \not\mid k}\frac{1}{p^{r+1}}.$$

3.9. La formule (49) permet aussi d'établir, par application du théorème a, le résultat suivant :

THÉORÈME 20. — *Soient l un entier premier avec k, q et q' deux entiers > 1 et r et r' deux entiers quelconques.*

Le nombre des n au plus égaux à x tels que

$$n \equiv l \pmod{k}, \qquad \omega(n) \equiv r \pmod{q} \qquad \textit{et} \qquad \Omega(n) \equiv r' \pmod{q'},$$

est équivalent pour x infini à $\dfrac{x}{kqq'}$.

3.10. Dans tout ce qui précède, nous avons toujours considéré un entier l premier avec k. Il est intéressant d'examiner ce qui se passe si l'on supprime cette hypothèse.

Si l'on désigne par d le plus grand commun diviseur de k et l, on peut écrire

$$k = dk' \qquad \text{et} \qquad l = dl',$$

où k' et l' sont premiers entre eux.

On voit alors immédiatement que, pour que l'on ait

$$n \equiv l \pmod{k},$$

il faut et il suffit que n soit de la forme dn', avec

$$n' \equiv l' \pmod{k'}.$$

3.10.1. On voit ainsi immédiatement que *le théorème 13 reste vrai sans l'hypothèse que l est premier avec k.*

En effet, le nombre des n aux plus égaux à x et satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \text{et} \qquad \Omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est égal au nombre des n' au plus égaux à $\dfrac{x}{d}$ et tels que

$$n' \equiv l' \pmod{k'} \qquad \text{et} \qquad \Omega(n') \equiv r - \Omega(d) \pmod{q}.$$

Il est donc équivalent, d'après ce qui a été établi pour le cas où $(k, l) = 1$, à

$$\frac{x}{d}\,\frac{1}{k'q} = \frac{x}{kq}.$$

3.10.2. On voit de même que le théorème 14 se généralise par le suivant :

THÉORÈME 14'. — *l étant un entier quelconque, d le plus grand commun diviseur de k et l, et q un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \textit{et} \qquad \Omega(n) = \Omega(d) + q$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{k}\left\{\prod_{p/k'} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p}}\right\}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}, \qquad \textit{où} \quad k' = \frac{k}{d}.$$

3.10.3. Pour voir ce que deviennent les autres théorèmes, il faut traiter d'abord, comme nous allons l'indiquer rapidement, certains problèmes auxiliaires correspondant encore au cas où $(k, l) = 1$.

Soient donc $p_1, p_2, \ldots, p_m$, m nombres premiers fixés, ne divisant pas k, et désignons par P_1 l'ensemble de tous les autres nombres premiers, par $\omega_1(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n appartenant à P_1, et par Q_1 l'ensemble des entiers « quadratfei » qui ne sont divisibles par aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Si $|z| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega_1(n)}$, $h(n) = \chi_j(n)$ et E égal à l'ensemble P de tous les nombres premiers, que, pour chaque caractère χ_j, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum \frac{z^{\omega_1(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \prod \left[1 + \frac{z^{\omega_1(p)} \chi_j(p)}{p^s - \chi_j(p)} \right],$$
$$= \left\{ \prod_{r=1}^{m} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi_j(p_r)}{p_r^s}} \right\} \cdot \left\{ \prod_{p \in P_1} \left[1 + \frac{z \chi_j(p)}{p^s - \chi_j(p)} \right] \right\}.$$

De même, le lemme 1 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)} \chi_j(n)$ et E égal à l'ensemble P_1, que, pour chaque caractère χ_j, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{n \in Q_1} \frac{z^{\omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \prod_{p \in P_1} \left[1 + \frac{z \chi_j(p)}{p^s} \right].$$

On peut évaluer les produits infinis

$$\prod_{p \in P_1} \left[1 + \frac{z \chi_j(p)}{p^s - \chi_j(p)} \right] \quad \text{et} \quad \prod_{p \in P_1} \left[1 + \frac{z \chi_j(p)}{p^s} \right]$$

en appliquant le lemme 4, avec $f(n) = \chi_j(n)$ et $E = P_1$, et raisonnant comme aux paragraphes 3.2, 3.2.1 et 3.3.

On arrive ainsi finalement aux résultat suivants :

Pour chaque j satisfaisant à $1 \leqq j \leqq h$, il existe des fonctions $\mathcal{G}_j^\star(s, z)$ et $\mathcal{H}_j^\star(s, z)$ holomorphes pour s appartenant à Δ_k et z quelconque, telles que, pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$,

$$\sum_{n \in Q_1} \frac{z^{\omega(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \begin{cases} \mathcal{G}_j^\star(s, z) & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{G}_1^\star(s, z) \exp\left[z \log \dfrac{1}{s-1} \right] & \text{si } j = 1 \end{cases} \tag{51}$$

et

$$\sum \frac{z^{\omega_1(n)} \chi_j(n)}{n^s} = \begin{cases} \mathcal{H}_j^\star(s, z) & \text{si } j \neq 1, \\ \mathcal{H}_1^\star(s, z) \exp\left[z \log \dfrac{1}{s-1} \right] & \text{si } j = 1. \end{cases} \tag{52}$$

Pour chaque j, on a pour tout s appartenant à Δ_k

$$\mathcal{G}_j^\star(s, 0) = 1 \qquad et \qquad \mathcal{H}_j^\star(s, 0) = \prod_{r=1}^{m} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi_j(p_r)}{p_r^s}}.$$

De plus, $\mathcal{G}_j^\star(s, z)$ est différent de zéro pour s appartenant à Δ_k et $|z| \leqq \sqrt{2}$. On a, d'autre part,

$$\mathcal{G}_1^\star(1, 1) = \frac{6}{\pi^2}\left\{\prod_{p/k} \frac{1}{1+\frac{1}{p}}\right\}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{1}{p_j}}\right\}$$

et

$$\mathcal{H}_1^\star(1, 1) = \frac{h}{k}.$$

Des formules (51) et (52) on déduit ensuite que, si l est premier avec k, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$(53) \qquad \sum_{\substack{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ n \in Q_1}} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{h}\mathcal{G}_1^\star(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{h}\sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{G}_1^\star(s, z)$$

et

$$(54) \qquad \sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{z^{\omega_1(n)}}{n^s} = \frac{1}{h}\mathcal{H}_1^\star(s, z) \exp\left[z \log \frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{h}\sum_{j>1} \frac{1}{\chi_j(l)} \mathcal{H}_1^\star(s, z).$$

La formule (54) permet d'établir les résultats suivants :

a. l étant un entier quelconque premier avec k, q un entier quelconque > 1, et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \textit{et} \qquad \omega_1(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à $\frac{x}{kq}$.

b. l étant un entier quelconque premier avec k et q un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \textit{et} \qquad \omega_1(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{h}\left\{\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\right\}\cdot \frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}.$$

De même, la formule (53) permet d'établir les résultats suivants :

c. l étant un entier quelconque premier avec k, q un entier quelconque > 1, et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x qui sont « quadratfrei », ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$, et satisfont à

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \textit{et} \qquad \omega(n) \equiv r \pmod{q},$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{h}\frac{6}{\pi^2}\left\{\prod_{p|k}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}\right\}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{1}{p_j}}\right\}\frac{x}{q}.$$

d. l étant un entier quelconque premier avec k et q un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x qui sont « quadratfrei », ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et satisfont à

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \omega(n) = q,$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{h}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}.$$

3.10.4. Le résultat *a* permet de montrer que *le théorème* 11 *reste vrai sans l'hypothèse que l est premier avec k*, le résultat *b* de généraliser le théorème 12 par le suivant :

THÉORÈME 12'. — *l étant un entier quelconque, d le plus grand commun diviseur de k et l, et q un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \omega(n) = \omega(d) + q$$

est équivalent poux x infini à

$$\frac{1}{h}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}.$$

Pour obtenir ces deux résultats, il suffit de tenir compte de ce qui a été dit au paragraphe 3.10 et d'observer que, si l'on a

$$n = dn', \qquad \text{avec} \quad n' \equiv l' \pmod{k'},$$

on a

$$\omega(n) = \omega_1(n') + \omega(d),$$

où $\omega_1(n')$ est le nombre des diviseurs premiers de n' autres que les nombres premiers qui divisent d mais pas k' (17).

3.10.5. De même, les résultats *c* et *d* permettent d'établir les théorèmes suivants, où *le plus grand commun diviseur d de k et l est maintenant supposé « quadratfrei »* (18) et $k' = \frac{k}{d}$:

THÉORÈME 15'. — *q étant un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le*

(17) Il faut observer qu'aucun diviseur premier de k' ne peut diviser n'.

(18) Il est clair que, si d était divisible par un carré, il en serait de même de tout n satisfaisant à $n \equiv l \pmod{k}$.

nombre des n au plus égaux à x qui sont « quadratfrei » et satisfont à

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad et \qquad \omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{6}{\pi^2}\left\{\prod_{p/k}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}\right\}\cdot\left\{\prod_{p/k'}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right\}\frac{x}{kq}.$$

THÉORÈME 16′. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x qui sont le produit de $\omega(d)+q$ nombres premiers différents et satisfont à*

$$n \equiv l \pmod{k}$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{1}{k}\left\{\prod_{p/k'}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right\}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x}.$$

Pour obtenir ces deux théorèmes, il suffit de tenir compte de ce qui a été dit au paragraphe 3.10 et d'observer que, si l'on a $n = dn'$, n est « quadratfrei » si, et seulement si, n' est « quadratfrei » et n'est divisible par aucun diviseur premier de d, et l'on a dans ce cas

$$\omega(n) = \omega(d) + \omega(n').$$

3.10.6. Nous laissons au lecteur le soin de voir comment on peut généraliser les théorèmes 17 et 18.

Pour généraliser les théorèmes 19 et 20, il faut d'abord établir des théorèmes analogues, où $\omega(n)$ est remplacé par un $\omega_1(n)$ ayant la même signification qu'au paragraphe 3.10.3. On y arrive par des raisonnements semblables à ceux utilisés pour les théorèmes initiaux.

On trouve en particulier que *le théorème* 20 *reste vrai sans l'hypothèse que l est premier avec k.*

4. — Entiers assujettis à des conditions faisant intervenir des ensembles de nombres premiers.

4.1. Nous dirons qu'*un ensemble* E *de nombres premiers est régulier s'il existe un nombre positif ou nul α et une fonction $r(s)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s \geqq 1$, tels que, pour $\mathcal{R}s \geqq 1$,*

$$\sum_{p\in E}\frac{1}{p^s} = \alpha\log\frac{1}{s-1} + r(s). \tag{55}$$

En particulier, d'après ce qui a été vu au paragraphe 2.2, l'ensemble P de tous les nombres premiers est régulier, α étant dans ce cas égal à 1.

Il en est évidemment de même de tout ensemble fini, α étant alors nul et $r(s)$ étant alors une fonction entière.

Si α est >0, (55) entraîne, d'après le théorème b, que le nombre des nombres de E au plus égaux à x est équivalent pour x infini à $\alpha\,\dfrac{x}{\log x}$, ce que l'on peut exprimer en disant que E est de densité α par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers (19).

Si $\alpha=0$ et si E n'est pas fini, d'après un théorème bien connu de Landau, (55) entraîne que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{p\in E}\frac{1}{p^s}$$

soit inférieure à 1.

Alors, si δ est un nombre inférieur à 1 mais supérieur à cette abscisse de convergence, le nombre des nombres de E au plus égaux à x croît moins vite que x^δ, et E est donc de densité nulle par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers.

On voit donc que, toutes les fois que l'on a (55) pour un ensemble E de nombres premiers, cet ensemble est de densité α par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers.

Nous dirons donc que E est un *ensemble régulier de densité* α.

Naturellement on a toujours $\alpha\leqq 1$.

4.1.1. D'après ce qui a été vu au paragraphe 3.2.1, *si k est un entier quelconque >1 et l un entier quelconque premier avec k, l'ensemble des nombres premiers p satisfaisant à*

$$p\equiv l \pmod{k}$$

est un ensemble régulier de densité $\dfrac{1}{h}$, où h est le nombre des entiers positifs inférieurs à k et premiers avec k.

4.1.2. E *étant un ensemble infini de nombres premiers, s'il existe un nombre positif ρ inférieur à 1 tel que la série*

$$\sum_{p\in E}\frac{1}{p^\rho}$$

soit convergente, E *est un ensemble régulier de densité* 0, puisque la série de

(19) A et B étant deux ensembles de nombres entiers positifs et A étant contenu dans B, on peut dire que A a une densité d par rapport à B si, quand x tend vers $+\infty$, le rapport du nombre des nombres de A au plus égaux à x à celui des nombres de B au plus égaux à x tend vers d.

Dirichlet $\sum_{p \in E} \frac{1}{p^s}$ est convergente pour $\mathcal{R}s > \rho$ et représente une fonction holomorphe dans ce demi-plan ([20]).

4.1.3. Il est clair que, *si* $E_1, E_2, \ldots, E_r$ *sont des ensembles réguliers de nombres premiers, de densités respectives* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, *et sans éléments communs deux à deux, l'ensemble réunion de* $E_1, E_2, \ldots, E_r$ *est un ensemble régulier de densité* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$.

En particulier, *si k est un entier* > 1 *et si* $l_1, l_2, \ldots, l_r$ *sont des entiers premiers avec k et non congrus deux à deux modulo k, l'ensemble des nombres premiers p tels que*

$$p \equiv l_j \pmod{k} \qquad \textit{pour un des } l_j$$

est un ensemble régulier de densité $\frac{r}{h}$, *où h a la même signification que plus haut.*

4.1.4. *Si* E_1 *et* E_2 *sont deux ensembles réguliers de nombres premiers, de densités respectives* α_1 *et* α_2, E_2 *étant contenu dans* E_1, *il est clair que* $E_1 - E_2$ *est un ensemble régulier de densité* $\alpha_1 - \alpha_2$.

4.1.5. Il résulte de ce qui précède que, *si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *et si on lui ajoute ou lui enlève un ensemble* E_1 *fini ou tel que la série*

$$\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p^\rho}$$

soit convergente pour un ρ *inférieur à* 1, *l'ensemble obtenu est encore régulier et de densité* α.

4.2. Si E est un ensemble quelconque de nombres premiers, en appliquant le lemme 4, avec $f(p) = 1$, on voit qu'il existe deux fonctions $G_E(s, z)$ et $H_E(s, z)$ holomorphes pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et z quelconque, satisfaisant à

$$G_E(s, 0) = H_E(s, 0) = 1,$$

et telles que l'on ait pour $\mathcal{R}s > 1$ et z quelconque

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s} \right] = G_E(s, z) \exp \left\{ z \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s} \right\} \tag{56}$$

([20]) Par conséquent, d'après ce que l'on a vu plus haut, pour un ensemble infini E de nombres premiers, l'existence d'un $\rho > 0$ et < 1 tel que la série

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p^\rho}$$

soit convergente est une condition nécessaire et suffisante pour que E soit régulier de densité 0.

et

$$(57) \qquad \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s - 1} \right] = H_E(s, z) \exp \left\{ z \sum_{p \in E} \frac{1}{p^s} \right\}.$$

On a d'ailleurs

$$H_E(s, z) = \frac{G_E(s, z-1)}{G_E(s, -1)}$$

et $G_E(s, z)$ est différent de zéro pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leqq \sqrt{2}$.

Si E est un ensemble régulier de densité α, les formules (56) et (57) donnent en tenant compte de (55)

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s} \right] = G_E(s, z) \exp[z\, r(s)] \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right]$$

et

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s - 1} \right] = H_E(s, z) \exp[z\, r(s)] \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right].$$

Si D_E est un domaine contenant le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqq 1$, contenu dans le demi-plan ouvert $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, et dans lequel $r(s)$ est holomorphe, les fonctions $G_E(s, z) \exp[z\, r(s)]$ et $H_E(s, z) \exp[z\, r(s)]$ sont holomorphes pour s appartenant à D_E et z quelconque. De plus, la première est différente de zéro pour s appartenant à D_E et $|z| \leqq \sqrt{2}$.

On arrive donc au résultat suivant :

A tout ensemble E *de nombres premiers régulier et de densité* α, *correspondent deux fonctions* $\mathcal{G}_E(s, z)$ *et* $\mathcal{H}_E(s, z)$ *holomorphes pour* s *appartenant à un certain domaine* D_E *contenant le demi-plan fermé* $\mathcal{R}s \geqq 1$ *et* z *quelconque, telles que, pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* z *quelconque,*

$$(58) \qquad \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s} \right] = \mathcal{G}_E(s, z) \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right]$$

et

$$(59) \qquad \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s - 1} \right] = \mathcal{H}_E(s, z) \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right].$$

On a, pour tout s *appartenant à* D_E,

$$\mathcal{G}_E(s, 0) = \mathcal{H}_E(s, 0) = 1.$$

De plus, on a $\mathcal{G}_E(s, z) \neq 0$ *pour* s *appartenant à* D_E *et* $|z| \leqq \sqrt{2}$.

4.2.1. On voit que, *pour* s *appartenant à* D_E *et* z *quelconque*

$$\mathcal{H}_E(s, z) = \frac{\mathcal{G}_E(s, z-1)}{\mathcal{G}_E(s, -1)}.$$

En effet,

$$\mathcal{H}_E(s,z)=\frac{G_E(s,z-1)}{G_E(s,-1)}\exp[z\,r(s)]=\frac{G_E(s,z-1)\exp[(z-1)\,r(s)]}{G_E(s,-1)\exp[-r(s)]}.$$

Il résulte de là que *l'on a*

$$\mathcal{H}_E(1,1)=\frac{1}{\mathcal{G}_E(1,-1)}. \tag{60}$$

4.2.2. En raison de l'holomorphie des fonctions $\mathcal{G}_E(s,z)$ et $\mathcal{H}_E(s,z)$ on a pour s appartenant à D_E et z quelconque

$$\mathcal{G}_E(s,z)=\sum_{j=0}^{+\infty}A_{E,j}(s)z^j$$

et

$$\mathcal{H}_E(s,z)=\sum_{j=0}^{+\infty}B_{E,j}(s)z^j,$$

où les fonctions $A_{E,j}(s)$ et les fonctions $B_{E,j}(s)$ sont holomorphes dans D_E.

De même, la fonction $\dfrac{1}{\mathcal{G}_E(s,-z)}$ est holomorphe pour s appartenant à D_E et $|z|<\sqrt{2}$ et l'on a pour ces valeurs

$$\frac{1}{\mathcal{G}_E(s,-z)}=\sum_{j=0}^{+\infty}C_{E,j}(s)z^j,$$

où les fonctions $C_{E,j}(s)$ sont holomorphes dans D_E.

Comme $\mathcal{G}_E(s,0)=\mathcal{H}_E(s,0)=1$, on a dans D_E

$$A_{E,0}(s)=B_{E,0}(s)=C_{E,0}(s)=1.$$

4.2.3. Il résulte immédiatement des formules (58) et (59) que, si E et E′ sont deux ensembles réguliers de nombres premiers sans éléments communs, on a pour $\mathcal{R}s>1$ et z quelconque, et par suite pour z quelconque et s appartenant à la composante connexe de $D_E\cap D_{E'}$ qui contient le demi-plan $\mathcal{R}s\geq 1$,

$$\mathcal{G}_{E\cup E'}(s,z)=\mathcal{G}_E(s,z)\,\mathcal{G}_{E'}(s,z)$$

et

$$\mathcal{H}_{E\cup E'}(s,z)=\mathcal{H}_E(s,z)\,\mathcal{H}_{E'}(s,z),$$

de sorte que

$$\mathcal{G}_{E\cup E'}(1,1)=\mathcal{G}_E(1,1)\,\mathcal{G}_{E'}(1,1) \tag{61}$$

et

$$\mathcal{H}_{E\cup E'}(1,1)=\mathcal{H}_E(1,1)\,\mathcal{H}_{E'}(1,1). \tag{62}$$

En particulier, si E est un ensemble régulier quelconque de nombres premiers, on a

$$\mathcal{G}_E(1,1)\,\mathcal{G}_{P-E}(1,1)=\frac{6}{\pi^2} \tag{63}$$

et

(64) $$\mathcal{H}_{E}(1, 1)\,\mathcal{H}_{P-E}(1, 1) = 1,$$

puisque, en faisant $E = P$ et $z = 1$ dans les formules (58) et (59), on obtient

$$\mathcal{G}_P(s, 1) = (s-1)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}_P(s, 1) = (s-1)\zeta(s).$$

Notons qu'en tenant compte de (60) la formule (64) donne

(65) $$\mathcal{G}_E(1, -1)\,\mathcal{G}_{P-E}(1, -1) = 1.$$

4.3. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)}$ et $h(n) = 1$, que, E étant un ensemble infini quelconque de nombres premiers, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p \in E}\left[1 + \frac{z}{p^s - 1}\right] = \sum_{n \in \mathcal{E}[E]} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s}.$$

En tenant compte de (59), on voit donc que, *si* E *est un ensemble infini de nombres premiers régulier et de densité* α, *on a pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* $|z| \leqq 1$

(66) $$\sum_{n \in \mathcal{E}[E]} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{H}_E(s, z)\exp\left[\alpha z \log\frac{1}{s-1}\right].$$

4.3.1. En faisant $z = 1$ dans la formule (66), on obtient

$$\sum_{n \in \mathcal{E}[E]} \frac{1}{n^s} = \mathcal{H}_E(s, 1)\exp\left[\alpha \log\frac{1}{s-1}\right] = \mathcal{H}_E(s, 1)\,(s-1)^{-\alpha}.$$

Si $\alpha > 0$, on peut appliquer le théorème *a*.
On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 21. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive, le nombre des entiers au plus égaux à* x *dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E *est équivalent pour* x *infini à*

$$K_E \frac{x}{(\log x)^{1-\alpha}},$$

où K_E *est une constante dépendant de* E [21].

---

[21] Le cas particulier de ce théorème correspondant à E égal à l'ensemble des nombres premiers p satisfaisant à l'une des congruences

$$p \equiv l_j \pmod{k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

où $k > 1$, $(k, l_j) = 1$ et $l_j \not\equiv l_{j'} \pmod{k}$ pour $j \neq j'$, se trouve dans Landau, *Handbuch* (Bd 2, p. 668).

On a d'ailleurs

$$K_E = \frac{\mathcal{H}_E(1, 1)}{\Gamma(\alpha)} \quad ([22]).$$

En tenant compte de (62), on en déduit que, si E et E′ sont deux ensembles réguliers de nombres premiers de densités positives α et α', et si E est contenu dans E′ et $\alpha' > \alpha$, on a

$$K_{E'} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha' - \alpha)}{\Gamma(\alpha')} K_E K_{E'-E}.$$

En tenant compte de (64), on voit que, si E est un ensemble régulier de densité α positive et inférieure à 1, on a

$$K_E K_{P-E} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}. \tag{67}$$

4.3.2. Donnons-nous maintenant un entier $q > 1$ et un entier r quelconque. Posons, pour simplifier l'écriture, $e^{\frac{2\pi i}{q}} = \gamma$.

En faisant dans (66) $z = \gamma^k$, avec k entier quelconque, et multipliant les deux membres par γ^{-rk}, on obtient

$$\sum_{n \in \mathcal{E}[E]} \frac{\gamma^{k[\omega(n)-r]}}{n^s} = \gamma^{-rk} \mathcal{H}_E(s, \gamma^k) \exp\left[\alpha\gamma^k \log \frac{1}{s-1}\right].$$

On déduit de là que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}[E] \\ \omega(n) \equiv r \pmod q}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \gamma^{-rk} \mathcal{H}_E(s, \gamma^k) \exp\left[\alpha\gamma^k \log \frac{1}{s-1}\right].$$

En raisonnant comme au paragraphe 2.4.1 et appliquant le théorème *a*, on obtient le résultat suivant :

Théorème 22. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive, q étant un entier quelconque* > 1 *et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E *et qui satisfont à*

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{K_E}{q} \frac{x}{(\log x)^{1-\alpha}}.$$

([22]) On peut montrer que

$$\frac{1}{K_E} = \Gamma(\alpha) e^{C\alpha} \lim_{x \to +\infty} \left\{ (\log x)^\alpha \prod_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\},$$

où C est la constante d'Euler.

4.3.3. En égalant les coefficients de z^q dans les développements suivant les puissances de z des deux membres de la formule (66), on obtient

$$(68)\qquad \sum_{\substack{n\in\mathcal{E}[E]\\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{\alpha^{q-j}}{(q-j)!} B_{E,j}(s)\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j}.$$

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

THÉORÈME 23. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive et si* q *est un entier quelconque* $\geqq 1$, *le nombre des* n *au plus égaux à* x *dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E *et qui satisfont à*

$$\omega(n) = q$$

est équivalent pour x *infini à*

$$\frac{\alpha^q}{(q-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{\log x}.$$

4.4. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 2 montre, en prenant $h(n) = z^{\omega(n)}$, que, E étant un ensemble infini quelconque de nombres premiers, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p\in E} \frac{1}{1-\dfrac{z}{p^s}} = \sum_{n\in\mathcal{E}[E]} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s}.$$

Mais, si E est un ensemble régulier de densité α, on a, en remplaçant z par $-z$ dans (58),

$$\prod_{p\in E}\left(1-\frac{z}{p^s}\right) = \mathcal{G}_E(s,-z)\exp\left[-\alpha z\log\frac{1}{s-1}\right].$$

Donc, si $|z| \leqq 1$ et $\mathcal{R}s > 1$, on a, comme $\mathcal{G}_E(s,-z) \neq 0$,

$$\prod_{p\in E} \frac{1}{1-\dfrac{z}{p^s}} = \frac{1}{\mathcal{G}_E(s,-z)}\exp\left[\alpha z\log\frac{1}{s-1}\right].$$

On voit donc que, *si* E *est un ensemble infini de nombres premiers régulier et de densité* α, *on a pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* $|z| \leqq 1$

$$(69)\qquad \sum_{n\in\mathcal{E}[E]} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \frac{1}{\mathcal{G}_E(s,-z)}\exp\left[\alpha z\log\frac{1}{s-1}\right].$$

4.4.1. En raisonnant comme au paragraphe 2.4.1, on déduit de là le résultat suivant :

THÉORÈME 24. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive,* q *étant un entier quelconque* > 1 *et* r *un entier quelconque, le nombre des* n *au plus égaux à* x *dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E *et qui satisfont à*

$$\Omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{K_E}{q}\,\frac{x}{(\log x)^{1-\alpha}} \quad ([23]).$$

4.4.2. En égalant les coefficients de z^q dans les développements suivant les puissances de z des deux membres de la formule (69), on obtient

$$(70) \qquad \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}[E] \\ \Omega(n)=q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{\alpha^{q-j}}{(q-j)!}\, C_{E,j}(s) \left(\log \frac{1}{s-1}\right)^{q-j}.$$

Si $\alpha > 0$, on peut appliquer le théorème b.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 25. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité α positive et si q est un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E *et qui satisfont à*

$$\Omega(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{\alpha^q}{(q-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{\log x}.$$

4.5. Si $|z| \leqq 1$, le lemme 1 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega(n)}$, que, E étant un ensemble infini quelconque de nombres premiers, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p \in E}\left(1 + \frac{z}{p^s}\right) = \sum_{n \in Q \cap \mathcal{E}[E]} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s}.$$

En tenant compte de (58), on voit donc que, *si* E *est un ensemble infini de nombres premiers régulier et de densité α, on a pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$*

$$(71) \qquad \sum_{n \in Q \cap \mathcal{E}[E]} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \mathcal{G}_E(s, z) \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1}\right].$$

4.5.1. En faisant $z = 1$ dans la formule (71), on obtient

$$\sum_{n \in Q \cap \mathcal{E}[E]} \frac{1}{n^s} = \mathcal{G}_E(s, 1) \exp\left[\alpha \log \frac{1}{s-1}\right] = \mathcal{G}_E(s, 1)(s-1)^{-\alpha}.$$

Si $\alpha > 0$, on peut appliquer le théorème a.

On obtient ainsi le théorème suivant :

([23]) Il faut tenir compte de (60).

THÉORÈME 26. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive, le nombre des n au plus égaux à* x *qui sont le produit de nombres premiers tous différents et appartenant tous à* E *est équivalent pour* x *infini à*

$$K_E^\star \frac{x}{(\log x)^{1-\alpha}};$$

où $K_E^\star$ *est une constante dépendant de* E.

En fait, $K_E^\star = \dfrac{\mathcal{G}_E(1, 1)}{\Gamma(\alpha)}$. Par suite,

$$\frac{K_E^\star}{K_E} = \frac{\mathcal{G}_E(1, 1)}{\mathcal{H}_E(1, 1)}.$$

En tenant compte de (60) ceci donne

$$\frac{K_E^\star}{K_E} = \mathcal{G}_E(1, 1)\,\mathcal{G}_E(1, -1).$$

Mais la formule (58) montre que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\mathcal{G}_E(s, 1)\,\mathcal{G}_E(s, -1) = \prod_{p\in E}\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right).$$

En faisant tendre s vers 1, on obtient

$$\mathcal{G}_E(1, 1)\,\mathcal{G}_E(1, -1) = \prod_{p\in E}\left(1 - \frac{1}{p^{2}}\right).$$

On voit donc finalement que *les constantes* K_E *et* $K_E^\star$ *sont liées par la relation*

$$\frac{K_E^\star}{K_E} = \prod_{p\in E}\left(1 - \frac{1}{p^{2}}\right).$$

4.5.2. En raisonnant comme au paragraphe 2.4.1, on déduit de la formule (71) le résultat suivant :

THÉORÈME 27. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive,* q *étant un entier quelconque* > 1 *et* r *un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à* x *qui sont le produit de facteurs premiers tous différents et appartenant tous à* E *et qui satisfont à*

$$\omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x *infini à*

$$\frac{K_E^\star}{q}\,\frac{x}{(\log x)^{1-\alpha}}.$$

4.5.3. En égalant les coefficients de z^q dans les développements suivant les puissances de z des deux membres de (71), on obtient

$$(72) \qquad \sum_{\substack{n\in\mathcal{Q}\cap\mathcal{S}[\mathrm{E}]\\ \omega(n)=q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{\alpha^{q-j}}{(q-j)!} \mathrm{A}_{\mathrm{E},j}(s)\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j}.$$

Le théorème b permet de déduire de là le résultat suivant :

THÉORÈME 28. — *Si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive et si* q *est un entier quelconque* $\geqq 1$, *le nombre des* n *au plus égaux à* x *qui sont le produit de* q *facteurs premiers tous différents et appartenant tous à* E *est équivalent pour* x *infini à*

$$\frac{\alpha^q}{(q-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{\log x}.$$

4.6. A partir des formules (68), (70) et (72), on établit, en raisonnant exactement comme aux paragraphes 2.7.1 et 2.7.2, les théorèmes suivants, où E *est toujours un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive :*

THÉORÈME 29. — *q étant un entier* $\geqq 2$, *le nombre des* n *au plus égaux à* x *dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E, *qui satisfont à* $\omega(n)=q$ *et qui ne sont pas « quadratfrei », est équivalent pour* x *infini à*

$$\mathrm{S}_{\mathrm{E}}\alpha^{q-1}\frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x}, \qquad \text{où} \quad \mathrm{S}_{\mathrm{E}} = \sum_{p\in\mathrm{E}}\frac{1}{p(p-1)} \quad [24].$$

THÉORÈME 30. — *q étant un entier* $\geqq 3$, *le nombre des* n *au plus égaux à* x *dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E, *qui satisfont à* $\Omega(n)=q$ *et qui ne sont pas « quadratfrei », est équivalent pour* x *infini à*

$$\mathrm{S}'_{\mathrm{E}}\alpha^{q-2}\frac{x(\log\log x)^{q-3}}{(q-3)!\log x}, \qquad \text{où} \quad \mathrm{S}'_{\mathrm{E}} = \sum_{p\in\mathrm{E}}\frac{1}{p^2} \quad [25].$$

4.7. Par des raisonnements absolument semblables à ceux que nous avons esquissés dans les paragraphes 2.8 et 2.9, on peut aussi établir les deux théorèmes suivants, où E a toujours la même signification :

THÉORÈME 31. — *q étant un entier* $\geqq 2$ *et* r *un entier* $\geqq 1$, *le nombre des* n *au*

---

[24] Si $q=1$, on voit immédiatement que le nombre des entiers considérés est équivalent pour x infini à $\dfrac{2\alpha\sqrt{x}}{\log x}$.

[25] Si $q=2$, comme les entiers considérés sont les carrés des nombres de E, le nombre de ceux qui sont au plus égaux à x est équivalent pour x infini à $\dfrac{2\alpha\sqrt{x}}{\log x}$.

Si $q=1$, on ne peut avoir $\Omega(n)=q$ avec n non « quadratfrei ».

plus égaux à x dont tous les diviseurs premiers appartiennent à E *et qui satisfont à*

$$\omega(n) = q \qquad et \qquad \Omega(n) = q + r$$

est équivalent pour x infini à

$$S_{E,r}\,\alpha^{q-1}\frac{x(\log\log x)^{q-2}}{(q-2)!\log x}, \qquad où \quad S_{E,r} = \sum_{p\in E}\frac{1}{p^{r+1}} \quad (^{26}).$$

THÉORÈME 32. — *q et q' étant deux entiers > 1 et r et r' deux entiers quelconques, le nombre des n au plus égaux à x dont tous les diviseurs premiers appartiennent à* E *et qui satisfont à*

$$\omega(n) \equiv r \pmod q \qquad et \qquad \Omega(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

est équivalent pour x infini à

$$\frac{K_E}{qq'}\frac{x}{(\log x)^{1-\alpha}}.$$

5. — Entiers assujettis à des conditions faisant intervenir des ensembles de nombres premiers (*suite*).

Dans tout ce qui suit, E étant un ensemble donné de nombres premiers, nous désignerons par $\omega_E(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n appartenant à E, et par $\Omega_E(n)$ le nombre des facteurs appartenant à E dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Autrement dit, les fonctions $\omega_E(n)$ et $\Omega_E(n)$ seront définies de la manière suivante :

$$\omega_E(1) = \Omega_E(1) = 0$$

et, si $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}m$, où $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers différents appartenant à E, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ des entiers positifs et m un entier qui n'est divisible par aucun des nombres de E, on a

$$\omega_E(n) = r \qquad \text{et} \qquad \Omega_E(n) = k_1 + k_2 + \ldots + k_r.$$

5.1. E étant un ensemble quelconque de nombres premiers, si $|z| \leqq 1$, le lemme 3 montre, en prenant $g(n) = z^{\omega_E(n)}$ et $h(n) = 1$, que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} = \prod\left[1 + \frac{z^{\omega_E(p)}}{p^s - 1}\right],$$
$$= \prod_{p\in E}\left[1 + \frac{z}{p^s - 1}\right]\prod_{p\in P-E}\left[1 + \frac{1}{p^s - 1}\right].$$

D'après la formule (59), si E est un ensemble régulier de densité α, de sorte

(26) On peut faire ici les mêmes remarques que pour le théorème 9.

que P — E est régulier et de densité $1-\alpha$, on a pour s appartenant à $D_E \cap D_{P-E}$ et z quelconque

$$\prod_{p \in E}\left[1+\frac{z}{p^s-1}\right] = \mathcal{H}_E(s, z)\exp\left[\alpha z \log\frac{1}{s-1}\right]$$

et

$$\prod_{p \in P-E}\left[1+\frac{1}{p^s-1}\right] = \mathcal{H}_{P-E}(s, 1)\exp\left[(1-\alpha)\log\frac{1}{s-1}\right].$$

On voit donc que, *si* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α, on a pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$

$$(73) \qquad \sum \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} = (s-1)^{\alpha-1}\,\mathcal{H}_E(s, z)\,\mathcal{H}_{P-E}(s, 1)\exp\left[\alpha z \log\frac{1}{s-1}\right].$$

5.1.1. La formule (73) permet d'établir, par les méthodes habituelles, les deux théorèmes suivants, *où* E *est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive :*

THÉORÈME 33. — *q étant un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n) \equiv r \pmod q$$

est équivalent pour x infini à $\dfrac{x}{q}$ [27].

THÉORÈME 34. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$K_{P-E}\frac{\alpha^q}{q!}\,\frac{x(\log\log x)^q}{(\log x)^\alpha} \qquad \text{si} \quad \alpha < 1,$$

et à

$$\left\{\prod_{p \notin E}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p}}\right\}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x} \qquad \text{si} \quad \alpha = 1 \quad [28].$$

5.2. En appliquant le lemme 2, avec $h(n) = z^{\Omega_E(n)}$, et tenant compte de la

---

(27) Pour ce théorème, il faut utiliser la formule (64).

(28) Si $\alpha = 1$, P — E est un ensemble régulier de densité zéro et la formule (59), où E est remplacé par P — E, donne

$$\mathcal{H}_{P-E}(s, 1) = \prod_{p \in P-E}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}.$$

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 4.1, le produit infini est uniformément convergent dans un demi-plan $\mathcal{R}s \geqq \rho$, où $\rho < 1$.

formule (58), on voit que, si E est un ensemble de nombres premiers régulier et de densité α, on a pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$

$$\begin{aligned}
\sum \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^s} &= \prod \frac{1}{1 - \dfrac{z^{\Omega_E(p)}}{p^s}}, \\
&= \left\{ \prod_{p \in E} \frac{1}{1 - \dfrac{z}{p^s}} \right\} \cdot \left\{ \prod_{p \in P-E} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} \right\}, \\
&= \frac{1}{\mathcal{G}_E(s, -z)} \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right] \frac{1}{\mathcal{G}_{P-E}(s, -1)} \exp\left[(1-\alpha) \log \frac{1}{s-1} \right], \\
&= (s-1)^{\alpha - 1} \frac{1}{\mathcal{G}_E(s, -z) \mathcal{G}_{P-E}(s, -1)} \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right].
\end{aligned}$$

5.2.1. Compte tenu de (60) et de (65), cette formule permet d'établir les deux théorèmes suivants, où E *est encore un ensemble de nombres premiers régulier et de densité* α *positive :*

THÉORÈME 35. — *q étant un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\Omega_E(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à $\dfrac{x}{q}$.

THÉORÈME 36. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\Omega_E(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$K_{P-E} \frac{\alpha^q}{q!} \frac{x(\log \log x)^q}{(\log x)^\alpha} \qquad si \quad \alpha < 1,$$

et à

$$\left\{ \prod_{p \notin E} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} \right\} \frac{x(\log \log x)^{q-1}}{(q-1)! \log x} \qquad si \quad \alpha = 1.$$

5.3. E étant encore un ensemble de nombres premiers régulier et de densité α, en appliquant le lemme 1, avec $g(n) = z^{\Omega_E(n)}$, et tenant compte de la formule (58), on voit que l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$ et $|z| \leqq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in Q} \frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} &= \prod \left[1 + \frac{z^{\omega_E(p)}}{p^s} \right], \\
&= \left\{ \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{z}{p^s} \right] \right\} \cdot \left\{ \prod_{p \in P-E} \left[1 + \frac{1}{p^s} \right] \right\}, \\
&= \mathcal{G}_E(s, z) \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right] \mathcal{G}_{P-E}(s, 1) \exp\left[(1-\alpha) \log \frac{1}{s-1} \right], \\
&= (s-1)^{\alpha-1} \mathcal{G}_E(s, z) \mathcal{G}_{P-E}(s, 1) \exp\left[\alpha z \log \frac{1}{s-1} \right].
\end{aligned}$$

5.3.1. Compte tenu de (63), cette formule permet d'établir les deux théorèmes suivants, où E a encore la même signification que dans les précédents :

THÉORÈME 37. — *q étant un entier quelconque > 1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x qui sont « quadratfrei » et satisfont à*

$$\omega_E(n) \equiv r \pmod q$$

est équivalent pour x infini à $\dfrac{6}{\pi^2}\dfrac{x}{q}$.

THÉORÈME 38. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x qui sont « quadratfrei » et satisfont à*

$$\omega_E(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$K^\star_{P-E}\frac{\alpha^q}{q!}\frac{x(\log\log x)^q}{(\log x)^\alpha} \qquad \textit{si} \quad \alpha < 1,$$

et à

$$\left\{\prod_{p\notin E}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right\}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x} \qquad \textit{si} \quad \alpha = 1 \quad ([29]).$$

5.4. E étant un ensemble quelconque de nombres premiers, on peut remarquer que, si $|z| \leqq 1$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\sum_{\omega_E(n)=\Omega_E(n)}\frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} = \left\{\sum_{n\in Q\cap\mathcal{E}[E]}\frac{z^{\omega(n)}}{n^s}\right\}\cdot\left\{\sum_{n\in\mathcal{E}[P-E]}\frac{1}{n^s}\right\},$$

car tout entier peut se mettre d'une seule manière sous la forme $n = mm'$, où m appartient à $\mathcal{E}[E]$ et m' à $\mathcal{E}[P-E]$, et l'on a $\omega_E(n) = \omega(m)$ et $\Omega_E(n) = \Omega(m)$.

Si E est régulier et de densité α, ceci donne, en tenant compte de (66) et (71),

$$\sum_{\omega_E(n)=\Omega_E(n)}\frac{z^{\omega_E(n)}}{n^s} = (s-1)^{\alpha-1}\mathcal{G}_E(s, z)\,\mathcal{H}_{P-E}(s, 1)\exp\left[\alpha z\log\frac{1}{s-1}\right].$$

Compte tenu de (64) et des expressions de K_E et $K^\star_E$, cette formule permet d'établir les trois théorèmes suivants, où E a toujours la même signification :

THÉORÈME 39. — *Le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n) = \Omega_E(n)$$

([29]) Si $\alpha = 1$, la formule (58), où E est remplacé par P — E, donne

$$\mathcal{G}_{P-E}(s, 1) = \prod_{p\in P-E}\left(1+\frac{1}{p^s}\right),$$

et le produit infini est uniformément convergent dans un demi-plan contenant le demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqq 1$.

est équivalent pour x infini à

$$\frac{K_E^*}{K_E}\,x = x\prod_{p\in E}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \quad (^{30}).$$

THÉORÈME 40. — *q étant un entier quelconque >1 et r un entier quelconque, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n) = \Omega_E(n) \qquad \textit{et} \qquad \omega_E(n) \equiv r \pmod{q}$$

est équivalent pour x infini à $\dfrac{x}{q}\displaystyle\prod_{p\in E}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$.

THÉORÈME 41. — *q étant un entier quelconque $\geqq 1$, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n) = \Omega_E(n) = q$$

est équivalent pour x infini à

$$K_{P-E}\frac{\alpha^q}{q!}\,\frac{x(\log\log x)^q}{(\log x)^\alpha} \qquad \textit{si} \quad \alpha<1,$$

et à

$$\left\{\prod_{p\notin E}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right\}\frac{x(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!\log x} \qquad \textit{si} \quad \alpha=1.$$

5.4.1. On pourrait donner des théorèmes concernant les entiers qui satisfont à

$$\omega_E(n) = q \quad \text{ou} \quad \Omega_E(n) = q, \qquad \text{avec} \quad \omega_E(n) < \Omega_E(n).$$

ou bien qui satisfont à

$$\omega_E(n) = q \qquad \text{et} \qquad \Omega_E(n) = q + r.$$

Nous laissons au lecteur le soin de les établir.

5.6. Ajoutons que tous les théorèmes énoncés, ou indiqués, jusqu'à présent dans ce chapitre sont des cas particuliers de théorèmes concernant les entiers assujettis aux mêmes conditions et, en outre, à ce que tous leurs diviseurs premiers appartiennent à un ensemble E′ contenant E, régulier lui aussi, et de densité α' supérieure ou égale à α.

Ici encore, nous laissons au lecteur le soin d'établir ces théorèmes.

5.6. *Dans tout ce qui suit,* E *et* E′ *sont deux ensembles de nombres premiers sans éléments communs, tous les deux réguliers, et de densités positives α et α'.*

5.6.1. En appliquant le lemme 3, avec $g(n) = u^{\omega_E(n)}v^{\omega_{E'}(n)}$ et $h(n) = 1$, et tenant compte de la formule (59), on voit que, si $|u| \leqq 1$ et $|v| \leqq 1$, on a pour

(30) Ce résultat est valable sans l'hypothèse que E est un ensemble régulier de densité positive et peut s'établir aisément de façon élémentaire.

$\mathcal{R}s > 1$

$$\sum \frac{u^{\omega_E(n)} v^{\omega_{E'}(n)}}{n^s} = \prod \left[1 + \frac{u^{\omega_E(p)} v^{\omega_{E'}(p)}}{p^s - 1} \right],$$

$$= \left\{ \prod_{p \in E} \left[1 + \frac{u}{p^s - 1} \right] \right\} \cdot \left\{ \prod_{p \in E'} \left[1 + \frac{v}{p^s - 1} \right] \right\} \cdot \left\{ \prod_{p \notin E \cup E'} \left[1 + \frac{1}{p^s - 1} \right] \right\},$$

$$= \mathcal{H}_E(s, u) \exp\left[\alpha u \log \frac{1}{s-1} \right] \mathcal{H}_{E'}(s, v) \exp\left[\alpha' v \log \frac{1}{s-1} \right]$$

$$\times \mathcal{H}_{P-E \cup E'}(s, 1) \exp\left[(1 - \alpha - \alpha') \log \frac{1}{s-1} \right],$$

ce qui donne

$$(74) \qquad \sum \frac{u^{\omega_E(n)} v^{\omega_{E'}(n)}}{n^s} = (s-1)^{\alpha+\alpha'-1} \mathcal{H}_E(s, u) \mathcal{H}_{E'}(s, v) \mathcal{H}_{P-E \cup E'}(s, 1) \times \exp\left[(\alpha u + \alpha' v) \log \frac{1}{s-1} \right].$$

5.6.2. En faisant $u = e^{\frac{2k\pi i}{q}}$, $v = e^{\frac{2k'\pi i}{q'}}$, avec q et $q' > 1$, multipliant par $e^{-\frac{2kr\pi i}{q} - \frac{2k'r'\pi i}{q'}}$, et ajoutant les formules obtenues en donnant à k et k' tous les systèmes de valeurs satisfaisant à $0 \leqq k \leqq q - 1$ et $0 \leqq k' \leqq q' - 1$, on trouve une formule pour

$$\sum_{\substack{\omega_E(n) \equiv r \pmod{q} \\ \omega_{E'}(n) \equiv r' \pmod{q'}}} \frac{1}{n^s},$$

qui permet d'appliquer le théorème *a*.

En tenant compte de la formule (62) et du fait que $\mathcal{H}_P(s, 1) = (s-1)\zeta(s)$, on arrive ainsi au résultat suivant :

THÉORÈME 42. — *q et q' étant deux entiers > 1 et r et r' deux entiers quelconques, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n) \equiv r \pmod{q} \qquad et \qquad \omega_{E'}(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

est équivalent pour x infini à $\frac{x}{qq'}$.

5.6.3. En identifiant les développements suivant les puissances de u et v des deux membres de (74), on voit que, si q et q' sont deux entiers quelconques $\geqq 0$, on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{\substack{\omega_E(n) = q \\ \omega_{E'}(n) = q'}} \frac{1}{n^s} = (s-1)^{\alpha+\alpha'-1} \mathcal{H}_{P-E \cup E'}(s, 1) \left\{ \sum_{j=0}^{q} B_{E,j}(s) \frac{\alpha^{q-j}}{(q-j)!} \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^{q-j} \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{j'=0}^{q'} B_{E',j'}(s) \frac{\alpha'^{q'-j'}}{(q'-j')!} \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^{q'-j'} \right\}.$$

Si $q+q'>0$, on peut appliquer le théorème b.

On obtient ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 43. — *q et q' étant deux entiers $\geqq 0$ et dont l'un au moins est >0, le nombre des n au plus égaux à x tels que*

$$\omega_E(n)=q \qquad et \qquad \omega_{E'}(n)=q'$$

est équivalent pour x infini à

$$K_{P-E\cup E'}\frac{\alpha^q\alpha'^{q'}}{q!\,q'!}\frac{x(\log\log x)^{q+q'}}{(\log x)^{\alpha+\alpha'}} \qquad si \quad \alpha+\alpha'<1,$$

et à

$$\left\{\prod_{p\notin E\cup E'}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right\}\frac{\alpha^q\alpha'^{q'}}{q!\,q'!}(q+q')\frac{x(\log\log x)^{q+q'-1}}{\log x} \qquad si \quad \alpha+\alpha'=1.$$

5.6.4. On pourrait établir des résultats semblables aux précédents avec $\Omega_E(n)$ et $\Omega_{E'}(n)$ au lieu de $\omega_E(n)$ et $\omega_{E'}(n)$.

Pour cela, on établirait d'abord une formule analogue à (74), en utilisant, au lieu du lemme 3, le lemme 2, avec $h(n)=u^{\Omega_E(n)}v^{\Omega_{E'}(n)}$.

On pourrait aussi remplacer, par exemple, seulement $\omega_E(n)$ par $\Omega_E(n)$.

Pour cela, on établirait encore une formule analogue à (74) en utilisant le lemme 3, avec

$$g(n)=u^{\omega_{E'}(n)} \qquad \text{et} \qquad h(n)=v^{\Omega_E(n)}.$$

5.6.5. En faisant $u=e^{\frac{2m\pi i}{q}}$ dans (74), multipliant par $e^{-\frac{2mr\pi i}{q}}$, puis ajoutant les formules ainsi obtenues pour $m=0, 1, 2, \ldots, q-1$, on obtiendrait une expression valable pour $|v|\leqq 1$ et $\mathcal{R}s>1$ de

$$\sum_{\omega_E(n)\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q)}\frac{v^{\omega_{E'}(n)}}{n^s}.$$

En prenant ensuite le coefficient de v^k dans le développement de cette expression suivant les puissances de v, on aurait une expression valable pour $\mathcal{R}s>1$ de

$$\sum_{\substack{\omega_E(n)\equiv r\,(\mathrm{mod}\, q)\\ \omega_{E'}(n)=k}}\frac{1}{n^s}.$$

De là, on pourrait déduire une expression équivalente pour x infini au nombre des n au plus égaux à x tels que

$$\omega_E(n)\equiv r \pmod q \qquad \text{et} \qquad \omega_{E'}(n)=k,$$

en utilisant un théorème taubérien un peu plus général que le théorème b, mais qui se déduit aussi très aisément du théorème principal de notre Mémoire cité dans l'Introduction [note (2)].

De la même manière, en partant des formules analogues à (74) mentionnées au paragraphe précédent, on obtiendrait des expressions équivalentes pour x infini au nombre des n au plus égaux à x et satisfaisant, suivant le cas, à l'un ou l'autre des systèmes de conditions suivants :

$$\begin{array}{lll}
\Omega_E(n) \equiv r \pmod q & \text{et} & \omega_{E'}(n) = k, \\
\Omega_E(n) \equiv r \pmod q & \text{et} & \Omega_{E'}(n) = k, \\
\omega_E(n) \equiv r \pmod q & \text{et} & \Omega_{E'}(n) = k.
\end{array}$$

5.7. Ajoutons enfin que tout ce qui a été dit aux paragraphes 5.6 à 5.6.5 pourrait être généralisé en considérant plus de deux ensembles de nombres premiers.