ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

KURT ENDL

Les polynomes de Laguerre et de Hermite comme cas particuliers d'une classe de polynomes orthogonaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 73, nº 1 (1956), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_1_1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LES POLYNOMES
DE LAGUERRE ET DE HERMITE
COMME CAS PARTICULIERS D'UNE CLASSE
DE POLYNOMES ORTHOGONAUX

PAR M. KURT ENDL.

PREMIÈRE PARTIE.

1. INTRODUCTION.

Nous démontrons ici l'existence d'un système de polynomes orthogonaux $\{P_{k,n}(z)\}$, dépendant d'un paramètre k entier, positif, qui contient comme cas particuliers ($k=1$ et $k=2$) les systèmes de polynomes de Laguerre $\{L_n(z)\}$ et de Hermite $\{H_n(z)\}$ (¹). Le point de départ de ce travail a été l'observation (²) d'une propriété particulière aux systèmes $\{L_n(z)\}$

(¹) *Voir* K. ENDL, *Sur une classe de polynomes orthogonaux généralisant ceux de Laguerre et Hermite* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 723).

(²) *Voir* K. ENDL, *Sur les systèmes de polynomes orthogonaux en involution* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 682).

et $\{H_n(z)\}$. Parmi tous les systèmes de polynomes orthogonaux classiques [3], seuls les polynomes de Laguerre

$$L_n(z) = n!\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-)^{n-\nu}}{\nu!}\binom{n}{\nu} z^\nu$$

et de Hermite

$$H_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^\nu}{4^\nu}\binom{n}{2\nu}\frac{(2\nu)!}{\nu!} z^{n-2\nu}$$

jouissent de la propriété suivante : On peut trouver des coefficients l_n et $h_n (l_n, h_n \neq 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ tels que les matrices de coefficients $\mathfrak{L}^\star$ et $\mathfrak{H}^\star$ des nouveaux systèmes

$$\{L^\star_n(z)\} = \{l_n L_n(z)\} \qquad \text{et} \qquad \{H^\star_n(z)\} = \{h_n H_n(z)\}$$

satisfassent à la relation

$$(1) \qquad \mathfrak{L}^\star = (\mathfrak{L}^\star)^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{H}^\star = (\mathfrak{H}^\star)^{-1}.$$

Nous disons que $\{L_n(z)\}$ et $\{H_n(z)\}$ sont des systèmes involutifs et que les systèmes $\{L^\star_n(z)\}$ et $\{H^\star_n(z)\}$ sont des formes involutives des systèmes $\{L_n(z)\}$ et $\{H_n(z)\}$ [4]. Les relations (1) signifient que le développement de z^n en série de $L^\star_\nu(z)$ et $H^\star_\nu(z)$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ possèdent les mêmes coefficients que les polynomes $L^\star_n(z)$ et $H^\star_n(z)$ eux-mêmes. Cette propriété particulière a conduit l'auteur à se demander si l'on ne pouvait pas déterminer un système plus général de polynomes orthogonaux dont les systèmes de Laguerre et de Hermite ne seraient que des cas particuliers, et qui jouirait aussi de cette propriété. Remarquant que les polynomes $L_n(z)$, orthogonaux sur la demi-droite $[0, \infty]$ contiennent effectivement des termes en $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots$, tandis que ceux de Hermite, orthogonaux sur $[-\infty, +\infty]$ ne contiennent que des termes de puissances paires ou de puissances impaires, on est amené à chercher un procédé d'orthogonalisation fournissant, pour k entier positif, des polynomes de la forme

$$(2) \qquad P_{k,n}(z) = p^{(n)}_{k,n} z^n + p^{(n)}_{k,n-k} z^{n-k} + p^{(n)}_{k,n-2k} z^{n-2k} + \ldots.$$

---

[3] Pour tout ce travail, *voir* par exemple, MAGNUS-OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik* (*Grundl. Math. Wissenschaften*, LII). Nous y écrivons chaque système de polynomes orthogonaux $\{P_n(z)\} = \left\{\sum_{\nu=0}^{n} p^{(n)}_\nu z^\nu\right\}$ sous la forme

$$\{P_n(z)\} = \left\{z^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} p^{(n)}_\nu z^\nu\right\}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad p^{(n)}_n = 1.$$

De plus, nous désignons par $\mathfrak{P}$ la matrice correspondante au système $\{P_n(z)\}$ des coefficients $\mathfrak{P} = (p^{(n)}_\nu)$.

[4] Il y a dans les deux cas plusieurs formes involutives possibles, deux dans le cas de Laguerre, quatre dans le cas de Hermite.

Ce problème, n'ayant jamais été traité pour $k \geqq 3$ (tous les polynomes orthogonaux classiques sont de la forme (2) avec $k=1$ et $k=2$), nous commençons par la simple question : Pourquoi les polynomes de Hermite $H_n(z)$ ne contiennent-ils pas de puissances z^{n-1}, z^{n-3}, ... Comme le montre tout de suite le procédé d'orthogonalisation de Erhard Schmidt, la raison en est que l'intervalle d'orthogonalisation $[-\infty, +\infty]$ de Hermite possède une symétrie pour la fonction de poids e^{-z^2}. Dans notre cas, il faudrait donc chercher un procédé d'orthogonalisation, dont « l'intervalle » d'orthogonalisation possède une symétrie pour la fonction de poids correspondante, cette symétrie contenant effectivement, d'une certaine manière, le paramètre k.

Nous envisageons pour cela dans le plan complexe une étoile symétrique à k rayons. Cette étoile $\mathfrak{S}$ est définie comme la réunion $\mathfrak{S} = \bigcup_{\lambda=0}^{k-1} \mathfrak{S}_\lambda$ de k rayons $\mathfrak{S}_\lambda$

$$\mathfrak{S}_\lambda = \left[r e^{\frac{2\pi i}{k}\lambda} \right]_{0 \leqq r \leqq R} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1).$$

En choisissant comme fonction de poids $p_k(z)$ une fonction invariante dans la rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{k}$

$$p_k(z) = p_k\left(z e^{\frac{2\pi i}{k}}\right) \tag{3}$$

et en définissant convenablement le produit scalaire appartenant à $\mathfrak{S}$ et $p_k(z)$, on a ainsi un procédé d'orthogonalisation muni d'une symétrie d' « ordre » k. Comme il a été démontré ailleurs ([5]), l'orthogonalisation sur une telle étoile symétrique à k rayons avec une fonction de poids satisfaisant à (3) fournit, en effet, un système de polynomes orthogonaux de la forme (2). Or, en posant $R = \infty$ et $p_k(z) = e^{-z^k}$, fonction de poids qui jouit évidemment de la propriété (3), on obtient ainsi une classe de systèmes de polynomes orthogonaux $\{P_{k,n}(z)\}$, contenant pour $k=1$ le système de Laguerre, pour $k=2$ le système de Hermite; car, d'après notre construction, le procédé d'orthogonalisation coïncide pour $k=1[p_1(z)=e^{-z}]$ avec celui de Laguerre, pour $k=2[p_2(z)=e^{-z^2}]$ avec celui de Hermite.

Dans cette première partie nous démontrons l'existence du système $\{P_{k,n}(z)\}$ et nous en donnons la forme explicite, De plus, nous établissons l'équation différentielle et la représentation des $P_{k,n}(z)$ par la série hypergéométrique généralisée. Ensuite nous montrons que la propriété d'involution, vérifiée pour les polynomes de Laguerre ($k=1$) et de Hermite ($k=2$) s'étend à toute la classe des systèmes de polynomes $\{P_{k,n}(z)\}$ ($k=1, 2, 3, \ldots$). Enfin, nous étudions le système limite $\lim\limits_{k \to \infty}\{P_{k,n}(z)\}$ et démontrons qu'il coïncide avec le système des puissances ordinaires $\{z^n\}$ tandis que le produit scalaire de notre

---

([5]) *Voir* ([1]).

procédé d'orthogonalisation se ramène à la simple intégration sur la circonférence de la sphère d'unité. Dans une deuxième partie [6] nous étudierons la fonction génératrice, des formules de récurrence et d'autres propriétés.

J'exprime ici à M. Robert Campbell, professeur à l'Université de Caen, mes remercîments les plus vifs, pour l'aide aimable et précieuse qu'il m'a apportée, tant directement, pendant mon séjour à Paris comme boursier du Gourvernement français, que par correspondance après mon retour en Allemagne.

2. Orthogonalisation sur une étoile symétrique a k rayons. — Nous donnons les résultats d'un travail précédent qui traite une nouvelle méthode d'orthogonalisation. En cherchant un procédé d'orthogonalisation qui fournit des polynomes $P_n(z)$ de la forme

$$(4)\qquad P_n(z) = p_n^{(n)} z^n + p_{n-k}^{(n)} z^{n-k} + p_{n-2k}^{(n)} z^{n-2k} + \ldots \qquad (k \text{ entier, positif}),$$

l'auteur a introduit une étoile d'intégration symétrique à k rayons

$$\mathfrak{S} = \bigcap_{\lambda=0}^{k-1} \mathfrak{S}_\lambda.$$

où $\mathfrak{S}_\lambda$ est l'ensemble des points

$$z = r\, e^{\frac{2\pi i}{k}\lambda} \qquad (0 \leqq r \leqq R).$$

Pour l'orthogonalisation sur une telle étoile on peut énoncer le

Théorème. — *Si la fonction de poids $p_k(z)$ est invariante par rapport à la rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{k}$ $\left[\text{soit}\, p_k(z) = p_k\left(z\, e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)\right]$, on obtient, en orthogonalisant les puissances z^n à l'aide du produit scalaire* [7],

$$(5)\qquad (P, Q)_{p_k(z)}^{(k)} = \int_{\mathfrak{S}} P\overline{Q}\, p_k(z)\, dr = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{\substack{0 \\ \mathfrak{S}_\lambda}}^{R} P(z)\, \overline{Q(z)}\, p_k(z)\, dr$$

un système de polynomes orthogonaux

$$P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{(n)} z^\nu$$

de la forme (4) : $p_\nu^{(n)} = 0$ *pour* $\nu \not\equiv n(k)$. *Si, de plus, $p_k(z)$ ne prend que des valeurs réelles sur un des rayons $\mathfrak{S}_\nu$, $P_n(z)$ est un polynome réel* ($n = 0, 1, \ldots$).

En posant $n = n_k^* + n_k k$, où $0 \leqq n_k^* < k$, nous pouvons écrire pour un tel

[6] Qui sera publiée ultérieurement.

[7] La fonction $p_k(z)$ et l'intervalle $[0, R]$ sont choisis de façon que le produit scalaire $(P, Q)_{p_k(z)}^{(k)}$ existe toujours pour les polynomes $P(z)$ et $Q(z)$ arbitraires.

système avec la normalisation $p_n^{(n)} = 1$

$$\mathrm{P}_n(z) = z^n + \sum_{\nu=0}^{n_k-1} p^{(n)}_{n_k^\star+\nu k} z^{n_k^\star+\nu k}.$$

Les coefficients du polynome $\mathrm{P}_n(z)$ s'expriment par les coefficients des polynomes $\mathrm{P}_\nu(z)\,(0 \leqq \nu < n)$ de la manière suivante :

$$(6) \qquad p^{(n)}_{n_k^\star+\nu k} = -\sum_{\varkappa=\nu}^{n_k-1} p^{(n_k^\star+\varkappa k)}_{n_k^\star+\nu k} \frac{(z^n, \mathrm{P}_{n_k^\star+\varkappa k})^{(k)}_{p_k(z)}}{(\mathrm{P}_{n_k^\star+\varkappa k}, \mathrm{P}_{n_k^\star+\varkappa k})^{(k)}_{p_k(z)}} \qquad (0 \leqq \nu \leqq n_k - 1).$$

3. La construction du système $\{\mathrm{P}_{k,n}(z)\}$. — Pour construire le système $\{\mathrm{P}_{k,n}(z)\}$ contenant les polynomes de Laguerre et de Hermite, nous posons $p_k(z) = e^{-z^k}$ et $\mathrm{R} = \infty$. Évidemment la fonction de poids $p_k(z)$ est invariante par rapport aux rotations d'amplitude $\frac{2\pi}{k}$:

$$p_k(z) = p_k\left(z\, e^{\frac{2\pi i}{k}}\right).$$

Le produit scalaire (5) s'écrit maintenant

$$(7) \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q})^{(k)}_{e^{-z^k}} = (\mathrm{P}, \mathrm{Q})_k = \int_{\mathfrak{S}} \mathrm{P}(z)\,\overline{\mathrm{Q}(z)}\, e^{-z^k}\, dr = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{\substack{0 \\ \mathfrak{S}_\lambda}}^{\infty} \mathrm{P}(z)\,\overline{\mathrm{Q}(z)}\, e^{-z^k}\, dr.$$

Ce procédé d'orthogonalisation coïncide pour $k = 1$ avec celui de Laguerre, pour $k = 2$ avec celui de Hermite. Par conséquent, les polynomes $\mathrm{P}_{k,n}(z)$, obtenus par l'orthogonalisation des puissances z^n à l'aide du procédé (7), sont identiques pour $k = 1$ aux polynomes de Laguerre, pour $k = 2$ à ceux de Hermite.

Nous calculons les premiers polynomes à l'aide du procédé de Erhard Schmidt. En désignant par λ un élément quelconque du système de classes de reste $\mathrm{mod}\, k\,(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{k,\lambda} &= z^\lambda,\\
\mathrm{P}_{k,\lambda+k} &= z^{\lambda+k} - \frac{2\lambda+1}{k} z^\lambda,\\
\mathrm{P}_{k,\lambda+2k} &= z^{\lambda+2k} - 2\,\frac{2\lambda+1+k}{k} z^{\lambda+k} + \frac{\overline{2\lambda+1}\;\overline{2\lambda+1+k}}{k^2} z^\lambda,\\
\mathrm{P}_{k,\lambda+3k} &= z^{\lambda+3k} - 3\,\frac{2\lambda+1+2k}{k} z^{\lambda+2k} + 3\,\frac{\overline{2\lambda+1+k}\,.\,\overline{2\lambda+1+2k}}{k^2} z^{\lambda+k}\\
&\quad - 1\,\frac{\overline{2\lambda+1}\,.\,\overline{2\lambda+1+k}\,.\,\overline{2\lambda+1+2k}}{k^3} z^\lambda
\end{aligned}$$

pour les produits scalaires, en posant $\Gamma_k(x) = \int_0^\infty r^{x-1} e^{-r^k}\, dr$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{P}_{k,\lambda}, \mathrm{P}_{k,\lambda})_k &= k^1\, \Gamma_k(2\lambda+1),\\
(\mathrm{P}_{k,\lambda+k}, \mathrm{P}_{k,\lambda+k})_k &= k^0\, \overline{2\lambda+1}\, \Gamma_k(2\lambda+1),\\
(\mathrm{P}_{k,\lambda+2k}, \mathrm{P}_{k,\lambda+2k})_k &= k^{-1}\, 2\, \overline{2\lambda+1}\,.\,\overline{2\lambda+1+k}\, \Gamma_k(2\lambda+1),\\
(\mathrm{P}_{k,\lambda+3k}, \mathrm{P}_{k,\lambda+3k})_k &= k^{-2}\, 2.3\, \overline{2\lambda+1}\,.\,\overline{2\lambda+1+k}\,.\,\overline{2\lambda+1+2k}\, \Gamma_k(2\lambda+1).
\end{aligned}$$

Ces formules nous suggèrent l'expression générale suivante :

$$(8)\qquad \mathrm{P}_{k,n}(z)=\sum_{\nu=0}^{n_k}(-)^{n_k-\nu}(n_k-\nu)!\binom{n_k}{\nu}\binom{n_k-1+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}}{n_k-\nu}z^{n_k^\star+\nu k}$$
$$=n_k!\sum_{\nu=0}^{n_k}\frac{(-)^{n_k-\nu}}{\nu!}\binom{n_k+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1}{n_k-\nu}z^{n_k^\star+\nu k},$$

avec les normes

$$(9)\qquad (\mathrm{P}_{k,n}(z),\ \mathrm{P}_{k,n}(z))_k=k(n_k!)^2\binom{n_k+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1}{n_k}\Gamma_k(2n_k^\star+1).$$

Nous allons montrer par induction que la formule (8) est vraie. Nous faisons l'hypothèse que (8) est vrai pour tout polynome $\mathrm{P}_{k,\nu}(z)$ si $0\leqq\nu\leqq n-1$. Pour conclure que l'expression (8) est encore valable pour $\mathrm{P}_{k,n}(z)$, nous rappelons d'abord le fait que les coefficients de $\mathrm{P}_{k,n}(z)$ s'expriment par les coefficients des polynomes $\mathrm{P}_{k,\nu}(z)$ précédents au moyen de la formule (6). Nous posons

$$\mathrm{S}_{n,\nu}^{(k)}=-\sum_{\varkappa=\nu}^{n_k-1}\varkappa!\frac{(-)^{\varkappa-\nu}}{\nu!}\binom{\varkappa+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1}{\varkappa-\nu}\frac{(z^n,\ \mathrm{P}_{k,n_k^\star+\varkappa k})_k}{k(\varkappa!)^2\dbinom{\varkappa+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1}{\varkappa}\Gamma_k(2n_k^\star+1)}$$

et nous devons ensuite vérifier la relation

$$\mathrm{S}_{n,\nu}^{(k)}=(-)^{n_k-\nu}\binom{n_k}{\nu}\binom{n_k+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1}{n_k-\nu}(n_k-\nu)!\qquad(0\leqq\nu\leqq n_k-1),$$

ce qui prouvera (8).

Or, on obtient pour le produit scalaire

$$(z^n,\ \mathrm{P}_{k,\nu}(z))_k=\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_0^\infty z^n\,\overline{\mathrm{P}_{k,\nu}(z)}\,e^{-r^k}\,dr$$
$$=\nu_k!\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\varkappa=0}^{\nu_k}\frac{(-)^{\nu_k-\varkappa}}{\varkappa!}\binom{\nu_k+\dfrac{2\nu_k^\star+1}{k}-1}{\nu_k-\varkappa}\int_0^\infty\left(re^{\frac{2\pi i}{k}\lambda}\right)^n\overline{\left(re^{\frac{2\pi i}{k}\lambda}\right)^{\nu_k^\star+\varkappa k}}\,e^{-r^k}\,dr$$
$$=\nu_k!\sum_{\varkappa=0}^{\nu_k}\frac{(-)^{\nu_k-\varkappa}}{\varkappa!}\binom{\nu_k+\dfrac{2\nu_k^\star+1}{k}-1}{\nu_k-\varkappa}\int_0^\infty r^{n+\nu_k^\star+\varkappa k}$$
$$\times\left\{\sum_{\lambda=0}^{k-1}\left[e^{\frac{2\pi i}{k}(n-\nu_k^\star-\varkappa k)}\right]^\lambda\right\}e^{-r^k}\,dr.$$

On calcule facilement la somme sous le signe intégral :

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1}\left[e^{\frac{2\pi i}{k}(n-\nu_k^\star-\varkappa k)}\right]^\lambda=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{k-1}1=k & \text{pour}\quad \nu\equiv n(k),\\[2ex] \dfrac{e^{\frac{2\pi i}{k}(n-\nu_k^\star-\varkappa k)k}-1}{e^{\frac{2\pi i}{k}(n-\nu_k^\star-\varkappa k)}-1}=0 & \text{pour}\quad \nu\not\equiv n(k).\end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$(10)\qquad (z^n, P_{k,\nu})_k = \begin{cases} k\nu_k!\displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{\nu_k}\frac{(-)^{\nu_k-\varkappa}}{\varkappa!} \\ \quad\times\begin{pmatrix}\nu_k+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1\\ \nu_k-\varkappa\end{pmatrix}\displaystyle\int_0^\infty r^{n+n_k^\star+\varkappa k}e^{-r^k}\,dr & \text{pour } \nu=n(k),\\ =0 & \text{pour } \nu\neq n(k)\end{cases}$$

et, en particulier,

$$(z^n, P_{k,n_k^\star+\varkappa k})_k = k\varkappa!\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\frac{(-)^{\varkappa-\mu}}{\mu!}\begin{pmatrix}\varkappa+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1\\ \varkappa-\mu\end{pmatrix}\int_0^\infty r^{n+n_k^\star+\mu k}e^{-r^k}\,dr.$$

La fonction $\Gamma_k(x)=\int_0^\infty r^{x-1}e^{-r^k}\,dr$ satisfait comme on s'en assure tout de suite, à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_k(x)=\frac{\overline{x-k}\,.\,\overline{x-2k}\ldots\overline{x-\lambda k}}{k^\lambda}\Gamma_k(x-\lambda k).$$

En appliquant cette formule à l'intégrale $\int_0^\infty r^{n+n_k^\star+\mu k}e^{-r^k}\,dr$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{n+n_k^\star+\mu k}e^{-r^k} &= \Gamma_k(2n_k^\star+1+(n_k+\mu)k)\\ &=\frac{(2n_k^\star+1+\overline{n_k+\mu-1}\,k)(2n_k^\star+1+\overline{n_k+\mu-2}\,k)\ldots(2n_k^\star+1)}{k^{n_k+\mu}}\Gamma_k(2n_k^\star+1)\\ &=(n_k+\mu)!\begin{pmatrix}n_k+\varkappa+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1\\ n_k+k\end{pmatrix}\int_0^\infty r^{2n_k^\star}e^{-r^k}\,dr\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}&(z^n, P_{k,n_k^\star+\varkappa k})_k\\ &\quad = k\Gamma_k(2n_k^\star+1)\varkappa!\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\frac{(-)^{\varkappa-\mu}}{\mu!}\begin{pmatrix}\varkappa+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1\\ \varkappa-\mu\end{pmatrix}(n_k+\mu)!\begin{pmatrix}n_k+\mu+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1\\ n_k+\nu\end{pmatrix}\\ &\quad = k\varkappa!\,\Gamma_k(2n_k^\star+1)n_k!(-)^k\\ &\qquad\times\begin{pmatrix}\varkappa+\dfrac{2n_k+1}{k}-1\\ \varkappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_k+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}-1\\ n_k\end{pmatrix}F\left(-\varkappa,\ n_k+\frac{2n_k^\star+1}{k},\ \frac{2n_k^\star+1}{k};\ 1\right),\end{aligned}$$

où $F(a, b, c; z)$ désigne la fonction hypergéométrique de Gauss. En employant la formule bien connue qui fournit la valeur $F(a, b, c; 1)$, on obtient

$$(11)\qquad (z^n, P_{k,n_k^\star+\varkappa k})_k = k\varkappa!\binom{n_k}{\varkappa}\frac{\Gamma\left(n_k+\dfrac{2n_k^\star+1}{k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2n_k^\star+1}{k}\right)}\Gamma_k(2n_k^\star+1).$$

Notre somme $S_{n,\nu}^{(k)}$ devient donc

$$S_{n,\nu}^{(k)} = -\sum_{\varkappa=\nu}^{n_k-1} \frac{(-)^{\varkappa-\nu}}{\nu\,!} \binom{\varkappa + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{\varkappa - \nu} \binom{n_k}{\varkappa} \frac{\Gamma\left(n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}\right) \binom{\varkappa + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{\varkappa}}$$

$$= -\frac{1}{\nu\,!} \binom{n_k}{\nu} \frac{\Gamma\left(n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}\right)} \frac{1}{\binom{\nu + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{\nu}} \sum_{\mu=0}^{n_k-\nu-1} (-)^{\mu} \binom{n_k-\nu}{\mu}$$

$$= -\frac{1}{\nu\,!} \binom{n_k}{\nu} \frac{\Gamma\left(n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}\right)} \frac{1}{\binom{\nu + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{\nu}} \left\{ \sum_{\mu=0}^{n_k-\nu} (-)^{\nu} \binom{n_k-\nu}{\mu} - (-)^{n_k-\nu} \right\}$$

$$= (-)^{n_k-\nu} \binom{n_k}{\nu} \binom{n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{n_k - \nu} (n_k - \nu)\,!.$$

Il en résulte donc que l'expression (8) est valable pour toute valeur du degré n.

Pour vérifier (9) nous remarquons maintenant qu'on a toujours pour un système de polynomes orthogonaux

$$\{P_n(z)\} = \left\{ z^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^{(n)} z^\nu \right\}$$

la relation

$$(P_n, P_n) = \left(z^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^{(n)} z^\nu,\ P_n \right) = (z^n, P_n) + \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu^{(n)} z^\nu,\ P_n \right) = (z^n, P_n).$$

on obtient donc avec (11) $(\varkappa = n_k)$

$$(P_{k,n}, P_{k,n})_k = (z^n, P_{k,n}) = kn_k\,! \frac{\Gamma\left(n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}\right)} \Gamma_k(2n_k^\star+1)$$

$$= k(n_k\,!)^2 \binom{n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{n_k} \Gamma_k(2n_k^\star+1),$$

ce qui prouve (9).

On s'assure tout de suite que (8) et (9) donnent pour $k=1$ $(n_1^\star = 0,\ n_1 = n;\ n = 0, 1, \ldots)$

$$P_{1,n}(z) = n\,! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-)^{n-\nu}}{\nu\,!} \binom{n}{n-\nu} z^\nu = L_n(z)$$

et

$$(P_{1,n}, P_{1,n})_1 = \int_0^\infty P_{1,n}(r)\, P_{1,n}(r)\, e^{-r}\, dr = (n\,!)^2 = (L_n, L_n)$$

et de même pour $k=2$ $\left(n_2^\star=0,\ n_2=\frac{n}{2}\right.$ pour n pair, $n_2^\star=1,\ n_2=\frac{n-1}{2}$ pour n impair$\Big)$ que

$$\mathrm{P}_{2,n}(z)=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-)^\nu}{4^\nu}\binom{n}{2\nu}\frac{(2\nu)!}{\nu!}z^{n-2\nu}=\mathrm{H}_n(z)$$

et

$$(\mathrm{P}_{2,n},\ \mathrm{P}_{2n})_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}_{2,n}(r)\,\mathrm{P}_{2,n}(r)\,e^{-r^2}\,dr=\frac{n!}{2^n}\sqrt{\pi}=(\mathrm{H}_n,\ \mathrm{H}_n).$$

Les systèmes $\{\mathrm{P}_{k,n}(z)\}$ contiennent donc comme cas particuliers les plus simples ceux de Laguerre et de Hermite.

4. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES POLYNOMES $\mathrm{P}_{k,n}(z)$, REPRÉSENTATION PAR LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALISÉE. — Remarquons que l'expression (8) obtenue pour $\mathrm{P}_{k,n}(z)$ permet d'en trouver une représentation simplifiée en introduisant le polynome généralisé de Laguerre

$$\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(z)=n!\sum_{\nu=0}^{n}(-)^{n-\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{z^\nu}{\nu!},$$

(8) fournit en effet aussitôt la représentation suivante :

$$\mathrm{P}_{k,n}(z)=z^{n_k^\star}\mathrm{L}_{n_k}^{\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}-1\right)}(z^k).$$

Comme l'équation différentielle des polynomes $\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(z)$ est

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha+1-z)\frac{dy}{dz}+ny=0,$$

les polynomes $\frac{\mathrm{P}_{k,n}(z)}{z^{n_k^\star}}=\mathrm{L}_{n_k}^{\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}-1\right)}(z^k)$ satisfont à l'équation

$$\mathrm{Z}\frac{d^2y}{d\mathrm{Z}^2}+\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}-\mathrm{Z}\right)\frac{dy}{d\mathrm{Z}}+n_ky=0\qquad(\mathrm{Z}=z^k),$$

d'où l'on tire par un simple calcul l'équation différentielle des polynomes $\mathrm{P}_{k,n}(z)z^{-n_k^\star}$

$$\frac{d^2y}{dz^2}\frac{z}{k^2}+\frac{dy}{dz}\frac{1}{k}\left(2\frac{n_k^\star+1}{k}-1-z^k\right)+z^{k-1}n_ky=0$$

et enfin l'équation différentielle des polynomes $\mathrm{P}_{k,n}(z)$

$$\frac{d^2y}{dz^2}\frac{z^2}{k}+\frac{dy}{dz}z\left(\frac{2}{k}-1-z^k\right)+y\left(n_k^\star-\frac{n_k^\star(n_k^\star+1)}{k}+nz^k\right)=0.$$

Pour $k=1$ $(n_1^\star=0)$, on retrouve

$$y''z^2+y'z(z-1)+nzy=0\qquad\text{ou}\qquad y''z+y'(1-z)+ny=0,$$

c'est-à-dire l'équation différentielle de Laguerre ; pour $k = 2$ ($n_2^\star = 0$ ou $n_2^\star = 1$)

$$y'' \frac{z^2}{2} - y' z^3 + n z^2 y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y'' - 2zy' + 2ny = 0,$$

l'équation différentielle de Hermite.

Pour obtenir la représentation à l'aide de la série hypergéométrique généralisée, nous employons cette série sous la forme de Pochhammer

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!},$$

où

$$(\alpha)_n = \alpha.\overline{\alpha+1} \ldots \overline{\alpha+n-1}, \qquad \alpha_0 = 1$$

et ainsi

$$(\beta)_n = \beta.\overline{\beta+1} \ldots \overline{\beta+n-1}, \qquad \beta_0 = 1.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_{k,n}(z) &= n_k! \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{(-)^{n_k-\nu}}{\nu!} \binom{n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{n_k - \nu} z^{n_k^\star + \nu k} \\
&= n_k!(-)^{n_k} z^{n_k^\star} \binom{n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{n_k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_k} (-)^\nu \frac{n_k \overline{n_k - 1} \ldots \overline{n_k - \nu + 1}}{\frac{2n_k^\star+1}{k} \ldots \overline{\frac{2n_k^\star+1}{k} + \nu - 1}} \frac{(z^k)^\nu}{\nu!} + 1 \right\} \\
&= n_k!(-)^{n_k} z^{n_k^\star} \binom{n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1}{n_k} \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{(-n_k)_\nu}{\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}\right)_\nu} \frac{(z^k)^\nu}{\nu!},
\end{aligned}$$

d'où la représentation

$$P_{k,n}(z) = (-)^{n_k} z^{n_k^\star} \frac{\Gamma\left(n_k + \frac{2n_k^\star+1}{k} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2n_k^\star+1}{k}\right)} {}_1F_1\left(-n_k, \frac{2n_k^\star+1}{k}; z^k\right).$$

5. La propriété involutive des systèmes $\{P_{k,n}(z)\}$. — Nous allons montrer maintenant que la propriété d'involution mentionnée au paragraphe 1 pour les polynomes de Laguerre et Hermite s'étend à toute la classe des systèmes de polynomes $P_{k,n}(z)$.

D'après le paragraphe 1 un système de polynomes orthogonaux

$$\{P_n(z)\} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{(n)} z^\nu \right\}$$

est dit involutif, s'il existe une suite de coefficients $\{c_n\}$ tels que la matrice $\mathfrak{P}^\star = (p_\nu^{\star(n)})$ correspondant au nouveau système

$$\{P_n^\star(z)\} = \{c_n P_n(z)\} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{\star(n)} z^\nu \right\}$$

jouisse de la propriété

$$\mathfrak{P}^{\star} = (\mathfrak{P}^{\star})^{-1} \qquad \text{ou} \qquad (\mathfrak{P}^{\star})^2 = \mathfrak{E}$$

($\mathfrak{E}$, matrice d'unité) ou encore si l'on a à la fois

$$P_n^{\star}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{\star(n)} z^\nu$$

et

$$z^n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{\star(n)} P_\nu^{\star}(z).$$

Nous avons, en effet, démontré ailleurs le théorème suivant [8] :

Théorème. — *Pour que le système de polynomes orthogonaux*

$$\{P_n(z)\} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{(n)} z^\nu \right\} \qquad (p_n^{(n)} = 1;\ n = 0, 1, \ldots)$$

soit involutif, il est nécessaire et suffisant qu'on puisse trouver une suite de nombres $\{c_n\}$ $(c_n = \pm 1)$, *tels qu'on ait pour chaque couple* (n, ν), *avec* $0 \leqq \nu \leqq n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *la relation* [9]

$$c_n c_\nu p_\nu^{(n)} = \frac{(z^n, P_\nu)}{(P_\nu, P_\nu)}. \tag{12}$$

La forme involutive $P_n^{\star}(z)$ appartenant aux nombres c_n est alors donnée par

$$P_n^{\star}(z) = c_n P_n(z).$$

Employons cette formule pour nos polynomes $P_{k,n}(z)$. D'après (8) et (10), on a toujours

$$p_\nu^{(n)} = (z^n, P_\nu) = 0 \qquad \text{si} \qquad \nu \equiv n(k),$$

c'est-à-dire (12) est toujours satisfait pour ces ν, indépendant des nombres c_n. Nous supposons donc $\nu \equiv n(k)$ et obtenons avec $\nu = n_k^{\star} + \varkappa k$ en vertu de (8), (10) et (9) l'équation suivante :

$$c_n c_{n_k^{\star} + \varkappa k} = (-)^{n_k} (-)^k \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq n_k;\ n = 0, 1, \ldots),$$

il s'ensuit pour $\varkappa = 0$

$$c_n = (-)^{n_k} c_{n_k^{\star}},$$

d'où l'on conclut que la suite des nombres c_n est définie par le choix des k signes $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}\}$.

---

(8) Voir (2).

(9) (P, Q) est le produit scalaire appartenant au système $\{P_n(z)\}$.

Les signes $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}\}$ peuvent être choisis de 2^k manières différentes. On a donc

Pour tout k le système $\{P_{k,n}(z)\}$ est involutif. Il possède 2^k formes involutives.

La forme involutive la plus simple s'obtient en choisissant

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 1,$$

c'est-à-dire $c_n = (-)^{n_k}$

$$P^{\star}_{k,n}(z) = n_k! \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{(-)^\nu}{\nu!} \binom{n_k + \frac{2n^{\star}_k + 1}{k} - 1}{n_k - \nu} z^{n^{\star}_k + \nu k}$$

et l'on a donc avec les mêmes coefficients

$$z^n = n_k! \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{(-)^\nu}{\nu!} \binom{n_k + \frac{2n^{\star}_k + 1}{k} - 1}{n_k - \nu} P^{\star}_{k, n^{\star}_k + \nu k}(z).$$

En particulier, on trouve pour $k = 1$ $(n_1 = n)$ la forme involutive suivante du système de Laguerre :

$$L^{\star}_n(z) = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-)^\nu}{\nu!} \binom{n}{\nu} z^\nu$$

et donc la relation

$$z^n = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-)^\nu}{\nu!} \binom{n}{\nu} L^{\star}_\nu(z)$$

ainsi que pour $k = 2 \left(n_2 = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, on obtient la forme involutive suivante du système de Hermite :

$$H^{\star}_n(z) = (-)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^\nu}{4^\nu} \binom{n}{2\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} z^{n-2\nu}$$

et la relation

$$z^n = (-)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^\nu}{4^\nu} \binom{n}{2\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} H^{\star}_{n-2\nu}(z).$$

6. Le système limite pour $k \to \infty$. — Qu'obtient-on, si l'on fait tendre k vers l'infini ? Nous savons d'après le paragraphe 3, que

$$P_{k,\lambda} = z^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1),$$

donc

$$\lim_{k \to \infty} \{P_{k,n}(z)\} = \{P_{\infty,n}(z)\} = \{z^n\}.$$

Le système limite est le système des puissances $\{z^n\}$.

Le procédé d'orthogonalisation est donné par le produit scalaire

$$(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})_k = \int_{\mathfrak{H}} \mathrm{P}(z)\,\overline{\mathrm{Q}(z)}\,e^{-r^k}\,dr = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_{\substack{0\\ \mathfrak{H}_\lambda}}^{\infty} \mathrm{P}(z)\,\overline{\mathrm{Q}(z)}\,e^{-r^k}\,dr.$$

Si nous écrivons pour les deux polynomes

$$\mathrm{P}(z) = \sum_{\nu=0}^{p} p_\nu z^\nu, \qquad \mathrm{Q}(z) = \sum_{\mu=0}^{q} q_\mu z^\mu,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})_k &= \lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{\substack{0\\ \mathfrak{H}_\lambda}}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{p} p_\nu z^\nu\right)\overline{\left(\sum_{\mu=0}^{q} q_\mu z^\mu\right)}\,e^{-r^k}\,dr\right\}\\ &= \sum_{\nu=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{q} p_\nu \overline{q}_\mu \lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_0^\infty r^{\nu+\mu}\,e^{\frac{2\pi i}{k}(\nu-\mu)\lambda}\,e^{-r^k}\,dr\right\}.\end{aligned}$$

Comme on a, par la substitution $r^k = \rho$,

$$\int_0^\infty r^{\nu+\mu}\,e^{-r^k}\,dr = \frac{1}{k}\int_0^\infty \rho^{\frac{\nu+\mu+1}{k}-1}\,e^{-\rho}\,d\rho = \frac{1}{k}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{k}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})_k &= \sum_{\nu=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{q} p_\nu \overline{q}_\mu \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=0}^{k-1} e^{i(\nu-\mu)\frac{2\pi}{k}\lambda}\,\frac{2\pi}{k}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{k}\right)\right\}\\ &= \sum_{\nu=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{q} p_\nu \overline{q}_\mu \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=0}^{k-1}\left[e^{i(\nu-\mu)}\right]^{\frac{2\pi}{k}\lambda}\frac{2\pi}{k}\right\}\lim_{k\to\infty}\left\{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{k}\right)\right\}\\ &= \sum_{\nu=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{q} p_\nu \overline{q}_\mu \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-\mu)\varphi}\,d\varphi,\end{aligned}$$

d'où

$$(13)\quad \lim_{k\to\infty}(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{p} p_\nu\,e^{i\nu\varphi}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{q}\overline{q}_\mu\,e^{-i\mu\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{P}(e^{i\varphi})\,\overline{\mathrm{Q}(e^{i\varphi})}\,d\varphi.$$

L'étoile d'intégration se ramène donc à la circonférence de la sphère d'unité, la fonction de poids e^{-z^k} à la constante $\frac{1}{2\pi}$. Comme on s'assure tout de suite, la propriété d'orthogonalité subsiste, c'est-à-dire le système limite $\{z^n\}$ est orthogonal par rapport au procédé limite donné par (13). De même, la propriété involutive subsiste pour $k\to\infty$; car, la matrice du système $\{z\}$ est la matrice d'unité $\mathfrak{E}$, et évidemment on a $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{-1}$.