PAUL MALLIAVIN

La quasi-analyticité généralisée sur un intervalle borné

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 72, nº 1 (1955), p. 93-110
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_1_93_0>

LA QUASI-ANALYTICITÉ GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE BORNÉ

PAR M. PAUL MALLIAVIN.

Une fonction indéfiniment dérivable, appartenant sur le segment $(0, R)$ à une classe quasi analytique et dont *toutes* les dérivées sont nulles en 0 est identiquement nulle. Ce théorème classique de Denjoy-Carleman a été généralisé par M. S. Mandelbrojt [4] dans le cas où $R = +\infty$; la même conclusion vaut alors en supposant seulement qu'il existe une suite « suffisamment dense » de dérivées nulles en 0.

Dans le cas où $R < +\infty$, il n'est plus possible d'obtenir la conclusion du théorème de Denjoy-Carleman lorsque l'on affaiblit les conditions aux limites. Notre but sera de montrer que des hypothèses de quasi-analyticité généralisée entraînent dans ce cas seulement l'analyticité au voisinage de 0. Notre résultat pourra être considéré comme une extension aux classes quasi analytiques du théorème d'Hadamard-Fabry sur le prolongement analytique des séries de Taylor lacunaires ainsi que d'un résultat de Carleman ([2], p. 75).

Nous établirons en premier lieu une inégalité majorant les coefficients de certains développements en série de Taylor asymptotique.

Cette inégalité sera obtenue par la méthode des séries adhérentes introduite par M. S. Mandelbrojt pour démontrer son inégalité fondamentale [4], méthode qui consistera dans le cas qui nous occupe à construire certains opérateurs différentiels commutables avec le groupe des homothéties.

Cette inégalité donnera le résultat de quasi-analyticité sur le segment $(0, 1)$ cherché.

On établira pour terminer un résultat réciproque permettant de discuter la condition obtenue ([1]).

([1]) Les résultats de ce travail ont été annoncés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 240, 1955, p. 41.

1. Une inégalité pour certains développements asymptotiques. — Rappelons au préalable les définitions et notations suivantes.

Étant donné une suite de nombres $M_n (M_n > 0)$, nous lui associerons ses *fonctions de traces* définies par

$$\log T(r) = \overline{\text{borne}}_n (n \log r - \log M_n) \qquad (r > 0),$$

$$\log S_\alpha(r) = \overline{\text{borne}}_{n < \alpha r} (n \log r - \log M_n) \qquad (r > 0),$$

α désignant une constante positive.

On a, pour r assez grand, si $\lim \frac{M_n^{\frac{1}{n}}}{n} = +\infty$,

$$T(r) = S_\alpha(r).$$

Étant donné une suite Λ d'entiers positifs, nous lui associerons sa *fonction de répartition* $N(t)$ égale au nombre d'éléments de la suite Λ inférieurs à t. Nous appellerons *fonction de répartition approximative* une fonction $N_\alpha(t)$ telle que

$$\int_0^{+\infty} |N(t) - N_\alpha(t)| \frac{dt}{t^2} < +\infty. \tag{1}$$

Étant donné une fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$, nous considérerons sa *régularisée concave* $N^*_\alpha(t)$, c'est-à-dire la plus petite fonction concave vérifiant $N^*_\alpha(t) \geq N_\alpha(t)$.

Si l'on pose

$$q(\varepsilon) = \overline{\text{borne}}_{t>0} (N_\alpha(t) - \varepsilon t) \qquad (\varepsilon > 0),$$

on aura également

$$q(\varepsilon) = \overline{\text{borne}}_{t>0} (N^*_\alpha(t) - \varepsilon t)$$

et, quel que soit $t > 0$, on pourra trouver ε_t tel que

$$q(\varepsilon_t) = N^*_\alpha(t) - \varepsilon_t t. \tag{2}$$

Ceci étant, on peut montrer la formule de réciprocité suivante (Mandelbrojt [4], p. 6)

$$N^*_\alpha(t) = \underline{\text{borne}}_{\varepsilon>0} [q(\varepsilon) + \varepsilon t]. \tag{3}$$

En effet, en tenant compte de (2), on a

$$\underline{\text{borne}}_{\varepsilon>0} (q(\varepsilon) + \varepsilon t) = \underline{\text{borne}}_{t'>0} (N^*_\alpha(t') - \varepsilon_{t'} t' + \varepsilon_{t'} t),$$

borne qui est atteinte pour $t = t'$, ce qui établit (3). On dira que la *densité* $D_{M_n}(\Lambda)$ de la *suite* Λ par *rapport* à $\{M_n\}$, est inférieure à ρ, s'il existe une fonction de répartition approximative $N_\rho(t)$ de Λ telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\, \pi \frac{N_\rho^\star(r)}{\log T(r)} < \rho.$$

Il résulte de cette définition que la densité de la suite Λ reste inchangée lorsque l'on ajoute à Λ une suite Λ' telle que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} \frac{1}{\lambda} < +\infty.$$

En particulier, si la suite Λ vérifie l'inégalité précédente, $D_{M_n}(\Lambda) = 0$ quelle que soit la suite $\{M_n\}(M_n < +\infty)$.

2. Énonçons maintenant l'inégalité à la démonstration de laquelle la plus grande partie de ce travail sera consacrée.

THÉORÈME I. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment* $(0, R)$, *vérifiant l'inégalité* $|f^{(n)}(t)| < M_n$,

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad n \notin \Lambda, \tag{4}$$

Λ *désignant une suite d'entiers positifs,* $N(t)$ *sa fonction de répartition.*

Supposons que l'on ait

$$\int^{+\infty} \log T(r) \frac{dr}{r^2} = +\infty, \qquad \lim \frac{N(t)}{t} = 0, \tag{5}$$

$$d = D_{M_n}(\Lambda) < +\infty. \tag{6}$$

Alors on a

$$\log \left| \frac{f^{(p)}(0)}{p\,!} \right| < -p \log xR + h_x(R) + o_x(p) \qquad \left(0 < x < \frac{4}{4 + R^2 d^2}\right), \tag{7}$$

où $h_x(R)$ *est une fonction de* R *déterminée dès que l'on connaît* M_n, Λ, *et* x, *où* $o_x(p)$ *est une fonction de* p *vérifiant* $\lim\limits_{p=+\infty} \frac{o_x(p)}{p} = 0$, *déterminée indépendamment de* R *dès que l'on connaît* M_n, Λ, x.

Démonstration. — Nous allons, en utilisant la transformation de Mellin-Polya appliquée à certaines fonctions holomorphes dans le demi-plan, construire des opérateurs intégrodifférentiels de projection.

Effectuons d'abord la construction des fonctions holomorphes dans le demi-plan qui seront ensuite transformées par la transformation Mellin-Polya.

3. LEMME. — *Soit* Λ *une suite d'entiers positifs telle que*

$$\lim \frac{N(t)}{t} = 0.$$

Alors, pour toute fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$ *de la suite* Λ, *il existe une fonction* $B_\alpha(z)$, *holomorphe dans le demi-plan* $x > 0$, *telle que*

$$B_\alpha(n) = 0 \qquad (n \in \Lambda), \tag{8}$$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \Omega_\Lambda}} \frac{\log B_\alpha(x)}{x} = 0 \tag{9}$$

$\left[\Omega_\Lambda\right.$ désignant le complémentaire de la réunion des cercles de centre n $(n \in \Lambda)$ et de rayon $\left.\frac{1}{4}\right]$;

$$\log|B_\alpha(iy)| = \pi N_\alpha(|y|) \quad \textit{presque partout} \qquad (\infty < y < +\infty), \tag{10}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log B'_\alpha(n)}{n} = 0 \qquad (n \in \Lambda). \tag{11}$$

Démonstration. — Soit $F_\alpha(z)$, $(z = x + iy)$ la fonction, holomorphe dans le demi-plan, définie par la relation

$$\log|F_\alpha(z)| = x\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+(y-t)^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)N(|t|)\,dt + x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_\alpha(|t|)-N(|t|)}{x^2+(y-t)^2}\,dt,$$

on a alors, presque partout sur l'axe imaginaire,

$$\lim_{x=0} \log|F_\alpha(x+iy)| = \pi N_\alpha(|y|).$$

D'autre part, lorsque x tend vers l'infini, on a

$$\log|F_\alpha(x)| = -x\int_{-x}^{+x}\frac{N(|t|)}{1+t^2}\,dt + I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

où en tenant compte de (1) et de $\lim \frac{N(t)}{t} = 0$,

$$I_1 = x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_\alpha(|t|)-N(|t|)}{x^2+(y-t)^2}\,dt = o(x),$$

$$I_2 = x\int_{-x}^{+x}\frac{N(|t|)}{x^2+t^2}\,dt = o\left(x\int_{-x}^{+x}\frac{|t|}{x^2+t^2}\,dt\right) = o(x),$$

$$I_3 = x\int_{x}^{+\infty}\frac{x^2 N(t)}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,dt = o(x),$$

de même, $I_4 = o(x)$, d'où

(12)
$$\log |F_\alpha(x)| = -2x\int_0^x \frac{N(t)}{1+t^2}\,dt + o(x).$$

Posons maintenant

$$G_\Lambda(z) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \frac{\lambda - z}{\lambda + z}\, e^{\frac{2z}{\lambda}},$$

suivant [4] (p. 127), nous allons montrer moyennant $\lim \frac{N(t)}{t} = 0$, que

(13)
$$\log |G(z)| = 2x\int_0^x \frac{N(t)}{t^2}\,dt + o(x) \qquad (z\in\Omega_\Lambda).$$

On a en effet

$$\log |G(z)| = S_1 + S_2 + S_3, \qquad \text{où} \quad |z| = r$$

$$S_1 = \sum_{\Lambda<2r} \frac{2x}{\lambda} = 2x\int_0^r \frac{N(t)}{t^2}\,dt + 2x\int_r^{2r} \frac{N(t)}{t^2}\,dt = 2x\int_0^r \frac{N(t)}{t^2}\,dt + o(x),$$

$$S_2 = \sum_{\Lambda>2r} \log \left|\frac{\lambda - z}{\lambda + z}\right| e^{\frac{2x}{\lambda}} = O\left(\sum_{\Lambda>2r} \frac{x}{\lambda}\frac{r}{\lambda}\right) = O\left(xr\int_{2r}^{+\infty} \frac{dN(t)}{t^2}\right) = o(x),$$

$$S_3 = \sum_{\Lambda<2r} \log \left|\frac{\lambda - z}{\lambda + z}\right| < 0.$$

Pour démontrer l'égalité (13), il suffit d'établir sur Ω_Λ une minoration de S_3 de la forme $S_3 > o(x)$. Nous distinguerons deux cas : si d'abord $r > 10x$, l'inégalité $\left|\frac{\lambda - z}{\lambda + z}\right|^2 > 1 - \frac{8x}{r}$ entraîne

$$S_3 > \sum_{\Lambda<2r} \log\left(1 - 8\frac{x}{r}\right) > N(2r)\log\left(1 - \frac{8x}{r}\right) > -O\left(\frac{N(2r)}{r}8x\right) = o(x).$$

Si enfin $r < 10x$, on a

$$|z+\lambda| < 4r, \qquad \sum_{\Lambda<2r} \log|z-\lambda| > 2\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}N(2r)} \log p = N(2r)\log\frac{N(2r)}{4e},$$

$$S_3 = \sum_{\Lambda<2r} \log|\lambda - z| - \sum_{\Lambda<2r} \log|\lambda + z| > N(2r)\log\frac{N(2r)}{4e} - N(2r)\log 4r,$$

$$S_3 > -10x\frac{N(2r)}{r}\log\frac{N(2r)}{16er} = o(x),$$

ce qui établit l'égalité (13).

Nous poserons

$$B_\alpha(z) = F_\alpha(z) G_\Lambda(z) e^{-\delta z}, \qquad \text{où} \quad \delta = \int_0^{+\infty} \frac{2N(t)}{t^2(1+t^2)} dt.$$

En tenant compte de (12) et (13), on a $x \in \Omega_\Lambda$:

$$\log|B_\alpha(x)| = o(x) + 2x \int_0^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) N(t)\, dt - 2x \int_0^{+\infty} N(t) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= o(x) - 2x \int_x^{+\infty} \frac{N(t)}{t^2(1+t^2)} dt = o(x).$$

(9) est ainsi satisfait; (8) et (10) se vérifient immédiatement.

Enfin, si $p \in \Lambda$, nous considérerons la suite Λ_p obtenue en retirant de la suite Λ l'élément p. Alors, (13) sera valable uniformément pour les fonctions $G_{\Lambda_p}(z)$ associées aux suites Λ_p et ainsi

$$\log|G_{\Lambda_p}(p)| = 2p \int_0^p \frac{N(t)}{t^2} dt + o(p),$$

et, comme

$$B'_\alpha(p) = F_\alpha(p) G_{\Lambda_p}(p) \frac{e^{-\delta p + 2}}{2p},$$

(11) se trouve ainsi établi. C. Q. F. D.

Le lemme suivant va permettre de construire, à partir de la fonction $B_\alpha(z)$, les opérateurs de projection désirés.

4. Lemme. — *Soit* Λ, *une suite d'entiers vérifiant* $\lim \frac{N(t)}{t} = 0$, $N_\alpha(t)$ *une fonction de répartition approximative de la suite* Λ, *alors il existe une suite d'opérateurs linéaires* $\{\beta_{\alpha,p}\}_{p\in\Lambda}$ *définis sur l'espace vectoriel des polynomes à coefficients complexes vérifiant*

$$\beta_{\alpha,p} t^n = 0 \qquad (n \in \Lambda,\ n \neq p), \tag{14}$$

$$\beta_{\alpha,p} t^p = \frac{t^p}{p+2} B'_\alpha(p+1), \tag{15}$$

$$\text{degré } (\beta_{\alpha,p} P) \leqq \text{degré } P(t). \tag{16}$$

Si l'on pose $\|P(t)\|_R = \max\limits_{0 \leqq t \leqq R} |P(t)|$ *pour tout* $x < 1$, *on peut trouver une fonction* $\Delta_x(n)$ *telle que*

$$\log\|\beta_{\alpha,p} P\|_{xR} < \log\|P\|_R + \Delta_x(n) \qquad [n = \text{degré de } P(t)], \tag{17}$$

$\Delta_x(n)$ *étant indépendant de p et vérifiant*

$$\overline{\lim_n} \frac{\Delta_x(n)}{\pi N_\alpha^*\left(n\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)} \leqq 1. \tag{18}$$

Démonstration. — Si $P(t)=\sum_0^n a_r t^r$, on posera $p \in \Lambda$:

$$\beta_{\alpha,p} P = \sum_0^n a_r \frac{B_\alpha(r+1)}{(r-p)(r+2)} t^r, \tag{19}$$

où $B_\alpha(z)$ est la fonction associée par le lemme du paragraphe 3, à la suite $\Lambda' = \Lambda + 1$, c'est-à-dire à la transformée de la suite Λ par la translation $(z, z+1)$. Les propriétés (14), (15) et (16) résultent immédiatement de cette définition.

Pour établir l'inégalité (17) nous allons représenter $\beta_{\alpha,p}$ à l'aide d'intégrales complexes. Posons

$$b(u) = \int_0^{+\infty e^{i\theta}} \frac{B_\alpha(z)}{(z-p-1)(z+1)} u^{-z}\, du; \qquad |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad |\arg u| < \frac{\pi}{2}, \qquad u = t + is.$$

alors, en vertu de (9) et (10), $b(u)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $t > 0$ privé du segment $0 \leq t \leq 1$. Étudions le comportement de $b(u)$ au voisinage de ce segment, on a, si $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\log|b(re^{i\varphi})| = \log \left| \int_0^{+\infty} \frac{B_\alpha(iy)}{(iy+1)(iy-p-1)} r^{-iy} e^{-\varphi y}\, dy \right| < \log \pi + q_\alpha(\varphi), \tag{20}$$

où, en tenant compte de (10),

$$q_\alpha(\varphi) = \overline{\text{borne}}_{y>0}(\log|B_\alpha(iy)| - \varphi y) = \overline{\text{borne}}_{y>0}(\pi N_\alpha(y) - \varphi y).$$

D'autre part, on aura pour $t_0 > 1$, d'après (9) et (11)

$$|b(t_0 + is)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{B_\alpha(x)}{(x+1)(x-p-1)} (t_0 + is)^{-x-1}\, dt \right| < C_{t_0},$$

C_{t_0} étant indépendante de p.

Considérons le triangle T_{φ,t_0} entourant le segment $(0, 1)$, défini par

$$T_{\varphi,t_0} = \left\{ u,\ u = re^{\pm i\varphi} \left(0 \leq r \leq \frac{t_0}{\cos\varphi} \right) \text{ ou } t = t_0 (\,|s| \leq t_0 \operatorname{tg}\varphi) \right\} \qquad (u = s + it).$$

La formule d'inversion de l'intégrale de Mellin-Polya donne

$$\frac{B_\alpha(z)}{(z+1)(z-p-1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{T_{\varphi,t_0}} b(u) u^{z-1}\, du;$$

on peut alors écrire (19) sous la forme

$$\beta_{\alpha,p} P(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{T_{\varphi,t_0}} P(tu) b(u)\, du. \tag{21}$$

Si t_0 vérifie $xt_0 = \gamma < 1$, on aura,

$$\| \beta_{\alpha,p} P \|_{xR} < 4 \max_{u \in T_{\varphi,\gamma R}} | P(u) | \max_{u \in T_{\varphi,t_0}} | b(u) | \qquad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\right). \tag{21'}$$

Le maximum de $P(u)$ dans le triangle $T_{\varphi,\gamma R}$ va être évalué en appliquant un théorème de M. Serge Bernstein ([1], p. 112). Si l'on désigne par Γ_δ l'ellipse

$$| z - R | + | z | \leq \frac{R}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) \qquad (\delta > 1),$$

on a

$$\max_{u \in \Gamma_\delta} | P(u) | < \delta^n \| P \|_R \qquad [n = \text{degré de } P(u)];$$

le triangle $T_{\varphi,\gamma R}$ sera contenu dans l'ellipse Γ_δ si

$$\frac{1}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) = \frac{\gamma}{\cos\varphi} + \sqrt{(1 - \gamma^2 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

ou

$$\delta = 1 + \psi_\gamma(\varphi), \qquad \text{avec} \quad \psi_\gamma(\varphi) = \varphi\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}(1 + O(\varphi^2)),$$

(21′) s'écrira alors, en tenant compte de (20),

$$\log \| \beta_{\alpha,p} P \|_{xR} < n\psi_\gamma(\varphi) + q_\alpha(\varphi) + O_\gamma(1) + \log \| P \|_R \qquad (1 > \gamma > x);$$

cette relation est vérifiée quel que soit $\varphi > 0$. En appliquant (3), γ étant fixé, on aura

$$\log \| \beta_{\alpha,p} P \|_{xR} \leq \pi N^\star_\alpha\left(n\sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right) + \log \| P \|_R + O_\gamma(1) \qquad (1 > \gamma > x),$$

ce qui établit (17) et (18).

Nous allons effectuer un prolongement « par continuité » de l'opérateur $\beta_{\alpha,p}$ à certaines classes quasi analytiques. Nous aurons besoin du lemme d'approximation suivant :

5. Lemme. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment* $(0, R)(R < +\infty)$, *satisfaisant à $|f^{(n)}(t)| < M_n$, il existe une suite de polynomes $Q_n(t)$, de degré n, telle que*

$$f(t) = \sum_0^\infty Q_n(t), \tag{22}$$

$$\| Q_n(t) \|_R < \frac{2}{S_\alpha\left(\dfrac{2n}{R}\right)} \qquad \left(\alpha = \frac{R}{2}\right), \tag{23}$$

$S_\alpha(r)$ ayant été défini au paragraphe 1.

Démonstration. — Rappelons brièvement la démonstration donnée dans [3] (p. 44).

$f^{(p)}\left(\frac{R}{2}(1+\cos\theta)\right)$ est une fonction périodique de période 2π. Écrivons son développement de Fourier

$$f^{(p)}\left(\frac{R}{2}(1+\cos\theta)\right)=\sum_{0}^{\infty} A_n^p \cos n\theta.$$

En dérivant par rapport à θ, on obtient les relations

$$A_n^p=\frac{A_{n-1}^{p+1}-A_{n+1}^{p+1}}{2n}\,\frac{R}{2}. \tag{24}$$

Les formules de Fourier, donnent après une intégration par parties,

$$|A_n^{p+1}|<\frac{2M_{p+2}}{n}\,\frac{R}{2}\qquad(n\geqq 1),$$

d'où, d'après (24),

$$|A_n^p|<2M_{p+2}\left(\frac{R}{2n}\right)^2\qquad(n\geqq 2).$$

En appliquant une nouvelle fois (24), on obtient

$$|A_n^{p-1}|=\left|\frac{A_{n-1}^p-A_{n+1}^p}{2n}\,\frac{R}{2}\right|<2M_{p+2}\left(\frac{R}{2n}\right)^3\qquad(n\geqq 3)$$

et, finalement,

$$|A_n^0|<2M_p\left(\frac{R}{2n}\right)^p\qquad(n\geqq p)$$

ou

$$|A_n^0|<\frac{2}{S_\alpha\left(\dfrac{2n}{R}\right)}\qquad\left(\alpha=\frac{R}{2}\right).$$

En prenant $Q_n(t)=A_n\cos n \arccos\left(\dfrac{2x-R}{R}\right)$ on satisfait à (22) et à (23).

C. Q. F. D.

6. Énonçons maintenant le lemme d'extension :

LEMME. — *Pour* $\rho>D_{M_n}(\Lambda)$, *on peut définir une suite d'applications linéaires* $\beta_{\rho,p}(p\in\Lambda)$ *de l'espace vectoriel* F *des fonctions indéfiniment différentiables définies sur* $(0, R)(R<+\infty)$ *vérifiant*

$$|f^{(n)}(t)|<M_n,$$

dans l'espace vectoriel Φ *des fonctions définies et continues sur tout inter-*

valle $\left(0, \frac{4Rh}{R^2\rho^2+4}\right)$ $(h<1)$ *et approchables uniformément sur ces intervalles par un polynome de degré n à moins de* $E_h(n)$ *où*

$$\varliminf_{n} \frac{-\log E_h(n)}{\log T(n)} > 0, \tag{25}$$

$$\beta_{\rho,p} \text{ vérifie (14) et (15),} \tag{26}$$

$$\|\beta_{\rho,p} f\|_{xR} < 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{\Delta_x(n)}}{S_{\frac{R}{2}}\left(\frac{2n}{R}\right)}, \qquad x < \frac{4}{R^2\rho^2+4}, \tag{27}$$

$$Si \quad f^{(m)}(0) = 0 \quad (m<n), \qquad alors \quad \beta_{\rho,p} f(t) = O(t^n). \tag{28}$$

Démonstration. — Sur l'espace vectoriel ε des polynomes à coefficients complexes, nous définirons une norme, en posant

$$|||P|||_{xR} = \inf \sum_0^N \|P_n\|_R\, e^{\Delta_x(n)}, \qquad \text{où} \quad P(t) = \sum_0^N P_n(t) \qquad [n = \text{degré de } P_n(t)],$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble de toutes les décompositions de $P(t)$ de cette forme, $\Delta_x(n)$ ayant été introduit dans le lemme du paragraphe 4.

D'après (17), on a

$$\|\beta_{\rho,p} P\|_{xR} \leq \sum \|\beta_{\rho,p} P_n\|_{xR} \leq |||P|||_{xR}, \tag{29}$$

les opérateurs $\beta_{\rho,p}$ définissent ainsi des applications linéaires, continues, de norme au plus égale à 1, de l'espace vectoriel ε muni de la norme $|||\ \ |||_{xR}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, xR)$ des fonctions définies et continues sur $(0, xR)$.

Soit $\bar{\varepsilon}$ le complété de ε par rapport à la norme $|||\ \ |||_{xR}$, $\bar{\beta}_{\rho,p}$ l'extension de $\beta_{\rho,p}$ à $\bar{\varepsilon}$.

Soit $\sum Q_n(t)$ la série de polynomes convergeant vers $f(t)$ construite en (22). On aura

$$|||Q_n(t)|||_{xR} < 2 \frac{e^{\Delta_x(n)}}{S_{\frac{R}{2}}\left(\frac{2n}{R}\right)} \tag{30}$$

qui, en tenant compte de (18) et de $\overline{\lim_r}\, \pi \frac{N^*_\rho(r)}{\log T(r)} < \rho$, pour n assez grand $(\eta > 0)$ et en supposant satisfaite l'égalité $T(r) = S_\alpha(r)$, donne

$$\log |||Q_n(t)|||_{xR} < N^*\left(n\sqrt{\frac{x}{1-x}} + n\eta\right) - \log T\left(\frac{2n}{R}\right). \tag{31}$$

Remarquons que si l'égalité $T(r) = S_\alpha(r)$ n'est pas satisfaite alors

$$\log M_n = O(n), \qquad \log S(r) = O(r) \qquad \text{et} \qquad \log |||Q_n(t)|||_{xR} < -an.$$

La série $|||\, Q_n(t)\, |||_{x\mathrm{R}}$ sera donc absolument convergente dès que $\frac{\rho \mathrm{R}}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}} < 1$ ou $x < \frac{4}{4+\mathrm{R}^2\rho^2}$, alors, la série $Q_n(t)$ sera absolument convergente dans $\bar{\varepsilon}$, ce qui permettra d'identifier f à un élément de $\bar{\varepsilon}$. On aura en vertu de (29) et (30),

$$\|\, \beta_{\rho,p} f\, \|_{x\mathrm{R}} < \sum_0^\infty |||\, Q_n\, |||_{x\mathrm{R}} < 2 \sum_0^\infty \frac{e^{\Delta_x(n)}}{S_{\frac{\mathrm{R}}{2}}\left(\frac{2n}{\mathrm{R}}\right)},$$

ce qui établit (27), d'autre part,

$$\|\, \beta_{\rho,p} f - \sum_0^{\mathrm{N}} \beta_{\rho,p} Q_n \|_{x\mathrm{R}} < \sum_{\mathrm{N}+1}^{+\infty} |||\, Q_n\, |||_{x\mathrm{R}} = 2 \sum_{\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{e^{\Delta_x(n)}}{S_{\frac{\mathrm{R}}{2}}\left(\frac{2n}{\mathrm{R}}\right)} = O\left(\frac{e^{\Delta_x(\mathrm{N})}}{S_{\frac{\mathrm{R}}{2}}\left(\frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{R}}\right)}\right),$$

ce qui établit (25), (26) résulte de la définition de $\bar{\beta}_{\rho,p}$ par prolongement de $\beta_{\rho,p}$.

Il reste à établir (28). Posons

$$g(t) = t^{-n} f(t)$$

alors on a

$$g^{(q)}(t) = \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \binom{r}{q} \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(n)} t^{-r-n} f^{(q-r)}(t).$$

Substituons à $f^{(q-r)}(t)$ son développement de Taylor arrêté à l'ordre $r+n$,

$$g^{(q)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{s=n-q}^{n-1} f^{(q+s)}(0)\, t^{-n+s} \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \binom{r}{q} \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r+s+1)} + \beta(t) \frac{\mathrm{M}_{n+q}}{\Gamma(n)} \sum_1^q \binom{r}{q} \frac{1}{r+n},$$

où

$$|\, \beta(t)\, | \leqq 1.$$

Les identités

$$\sum_{r=0}^{q} (-1)^r \binom{r}{q} \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r+s+1)} = \left[\frac{d^{n-s-1}}{du^{n-s-1}} u^n (1-u)^q\right]_{u=1} = 0 \qquad \text{si} \quad 0 \leqq n-s-1 < q$$

donnent

$$|\, g^{(q)}(t)\, | < \frac{2^q}{\Gamma(n+1)} \mathrm{M}_{n+q}. \tag{32}$$

Calculons $\bar{\beta}_{\rho,p} f(t) = \bar{\beta}_{\rho,p} t^n g(t)$ en appliquant (21), on a

$$\bar{\beta}_{\rho,p} t^n g(t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \int_{\mathrm{T}_{\varphi,t_0}} t^n u^n \mathrm{H}_m(tu)\, b(u)\, du = t^n \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{T}_{\varphi,t_0}} \mathrm{H}_m(tu)\, b^\star(u)\, du = t^n \bar{\beta}^\star g, \tag{33}$$

où $\mathrm{H}_m(t)$ désigne la série de polynomes construite par le lemme du paragraphe 5 et convergeant vers $g(t)$, où $b^\star(u) = u^n b(u)$ et où $\beta^\star$ désigne l'opérateur défini sur ε à partir de $b^\star(u)$ par (21). Justifions les égalités (33). Il résulte de l'inégalité $|b^\star(u)| < \frac{t_0^n}{(\cos\varphi)^n} |b(u)| (u \in T_{\varphi,t_0})$ que $\| \beta^\star H_m \|_{x\mathrm{R}} < \frac{t_0^m}{(\cos\varphi)^n} |||H_m|||_{x\mathrm{R}}$ il résulte de (32) et de (23) que $\sum \| \beta^\star H_m \|_{x\mathrm{R}} < +\infty$ si $x < \frac{2}{t_0(4+\mathrm{R}^2\rho^2)}$; $\overline{\beta}^\star g$ est ainsi une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left(0, \frac{2\mathrm{R}}{t_0(4+\mathrm{R}^2\rho^2)}\right)$, (33) vaut dans cet intervalle ce qui entraîne (28). C. Q. F. D.

Avant de démontrer l'inégalité du théorème I nous allons énoncer un lemme d'unicité qui s'obtient par un simple changement de variable de théorème de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman.

7. Lemme. — *Soit $g(t)$ une fonction définie sur le segment* (0, R) *par la série $g(t) = \sum_0^\infty Q_n(t)$, $Q_n(t)$ étant un polynome de degré n, $\| Q_n(t) \|_\mathrm{R} < e^{\varepsilon \log T(n)} (\varepsilon < 0)$, où $T(n)$ est défini au début du paragraphe 1. Supposons que (5) soit valable et que $g(t) = O(t^m)$ quel que soit $m > 0$, alors $g(t) \equiv 0$.*

Démonstration. — Considérons la fonction périodique $\varphi(\theta) = g\left[\frac{\mathrm{R}}{2}(1-\cos\theta)\right]$ et sa série de Fourier $\sum a_p \cos p\theta$.

En appliquant l'inégalité de Parseval, on obtient

$$\sum_{\mathrm{N}+1}^\infty |a_k|^2 < \int_0^{2\pi} \left| \varphi(0) - \sum_0^\mathrm{N} Q_n\left[\frac{\mathrm{R}}{2}(1-\cos\theta)\right] \right|^2 d\theta < 2\pi \sum_{q>\mathrm{N}} e^{\varepsilon \log T(q)} = O(e^{\varepsilon' \log T(\mathrm{N})}).$$

En particulier, $|a_\mathrm{N}| < \mathrm{B}\, e^{\varepsilon' \log T(\mathrm{N}-2)}$; $\varphi(\theta)$ est une fonction indéfiniment dérivable sur le segment (0, R), et l'on a

$$\varphi^{(n)}(\theta) < \mathrm{B} \max_\mathrm{N} \mathrm{N}^n e^{\varepsilon' \log T(\mathrm{N}-2)},$$

ce qui entraîne avec (5) que $\varphi(\theta)$ appartient à une classe quasi analytique. De plus l'hypothèse $g(t) = O(t^m)$ entraîne $\varphi(\theta) = O(\theta^m)$ $(m > 0)$.

$\varphi(\theta)$ a toutes ses dérivées nulles en 0 donc $\varphi(\theta) \equiv 0$. C. Q. F. D.

8. Démonstration de l'inégalité (7). — Soit $f(t)$, une fonction indéfiniment différentiable sur le segment (0, R), satisfaisant aux hypothèses du théorème, $\rho > \mathrm{D}_{\mathrm{M}_n}(\Lambda)$, $\overline{\beta}_{\rho,p}$ les opérateurs définis par le lemme du paragraphe 6. Posons

$$f_p(t) = f(t) - t^p \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \qquad (p \in \Lambda), \tag{34}$$

$$g_{\mathrm{N},p}(t) = f_p(t) - \sum_{\substack{q \leq \mathrm{N} \\ q \neq p}} t^q \frac{f^{(q)}(0)}{q!}.$$

Soit $\varphi(t) = \bar{\beta}_{\rho,p} f_p(t)$. Alors (14) et (4), entraînent $\varphi(t) = \bar{\beta}_{\rho,p} g_{N,p}(t)$. En appliquant (28), on obtient $\varphi(t) = O(t^N)$, quel que soit $N > 0$. Enfin (25) permet d'appliquer le lemme du paragraphe 7 et de conclure $\varphi(t) \equiv 0$ sur un voisinage de l'origine qui va être précisé.

En tenant compte de (34) et de (15) on obtient

$$\bar{\beta}_{\rho,p} f_p(t) = \bar{\beta}_{\rho,p} f - \frac{t^p}{p+1} \frac{f^{p)}(0)}{p!} B'_\rho(p+1) \equiv 0.$$

En appliquant à l'égalité précédente (27), on obtient

$$\frac{|f^{(p)}(0)|}{p!} < \frac{2(p+1)}{B'_\rho(p+1)\,(x\mathrm{R})^p} \sum_0^\infty \frac{e^{\Delta_x(n)}}{S_{\frac{\mathrm{R}}{2}}\left(\frac{2n}{\mathrm{R}}\right)}, \qquad x < \frac{4}{4+\mathrm{R}^2\rho^2},$$

ce qui, en appliquant (11) et en remarquant que ρ a été assujetti à la seule condition $\rho > D_{M_n}(\Lambda)$, entraîne (7). C. Q. F. D.

9. La quasi-analyticité sur un intervalle borné. — L'application de l'inégalité démontrée dans le paragraphe précédent donnera immédiatement le résultat de quasi-analyticité généralisée, objet de ce travail. Nous démontrerons ensuite en quelque sorte une réciproque qui nous permettra de discuter les hypothèses sous lesquelles aura été obtenu le résultat direct.

Théorème. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment* $(0, \mathrm{R})$, *vérifiant* $|f^{(n)}(t)| < M_n$, *où la suite* $\{M_n\}$ *vérifie la condition de quasi-analyticité de Denjoy-Carleman, soit* Λ *une suite d'entiers positifs telle que* $f^{(m)}(0) = 0$ *si* $m \notin \Lambda$. *Soit* $\dot{d} = D_{M_n}(\Lambda)$ *la densité de la suite* Λ *par rapport à* $\{M_n\}$ *définie au paragraphe* 1.

Alors $f(t)$ est une fonction analytique dans le cercle de centre 0 *et de rayon* $\dfrac{4\mathrm{R}}{4+\mathrm{R}^2\dot{d}^2}$.

Démonstration. — D'après l'inégalité (7), on a

$$\overline{\lim_p} \left|\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right|^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{x\mathrm{R}}, \qquad \text{où} \quad x < \frac{4}{4+\mathrm{R}^2 d^2},$$

ce qui démontre le théorème.

10. Corollaire. — *Soit $f(t)$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur le segment* $(0, \mathrm{R})$ *et appartenant à une classe quasi analytique. Supposons que* $f^{(m)}(0) = 0$, *sauf pour une suite* $\Lambda\{n_p\}$ *telle que* $\sum \frac{1}{n_p} < +\infty$. *Alors $f(t)$ est une fonction analytique holomorphe dans le cercle de centre* 0 *et de rayon* R.

Démonstration. — On peut prendre pour fonction approximative de répartition de la suite Λ la fonction identiquement nulle, alors $D_{M_n}(\Lambda) = d = 0$, l'application du théorème précédent permet de conclure.

Remarques. — La conclusion de ce théorème diffère de celle du théorème d'Hadamard-Fabry sur le prolongement analytique des séries de Taylor lacunaires en ce que l'on ne peut affirmer l'holomorphie de $f(t)$ que dans un cercle de rayon en général plus petit que l'intervalle où $f(t)$ est définie. Nous construirons au paragraphe suivant des exemples montrant que le rayon d'holomorphie peut être inférieur à l'intervalle de définition.

Le corollaire est directement inspiré de [4] (p. 153).

On pourrait montrer plus généralement, comme dans [4], que les propriétés de quasi-analyticité généralisée sur le segment $(0, R)$ ne se modifient pas lorsque l'on ajoute à la suite Λ une suite Λ' telle que $\sum_{p \in \Lambda'} \frac{1}{p} < +\infty$.

On peut enfin remarquer que si l'on avait désiré obtenir seulement le corollaire il aurait suffi de démontrer l'inégalité (7) sous l'hypothèse $\sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{p} < +\infty$, hypothèse qui permet de construire beaucoup plus facilement les opérateurs $\beta_{\rho,p}$ par de simples produits de composition avec des fonctions bornées, définies sur le segment $(0, 1)$.

Nous allons démontrer un résultat inverse de celui du théorème précédent.

11. Théorème. — *Soit* Λ *une suite d'entiers positifs*, $N_\alpha(t)$ *une fonction de répartition approximative de la suite* Λ, M_n *une suite de nombres positifs vérifiant* (5). *Supposons*

$$\lim \frac{M_n^{\frac{1}{n}}}{n} = +\infty \tag{35}$$

$$d_{\bullet} = \underline{\lim}\, \pi \frac{N_\alpha(t)}{\log T(t)} \qquad (0 < d_{\bullet} \leq +\infty), \tag{36}$$

alors il existe une fonction indéfiniment dérivable $f(t)$ *définie sur la droite* $(0, +\infty)$, *vérifiant*

$$|f^{(n)}(t)| < M_n, \qquad f^{(m)}(0) = 0 \qquad \text{si} \quad m \notin \Lambda \tag{37}$$

et holomorphe exactement dans le cercle de centre 0 *et de rayon* $\frac{1}{d_{\bullet}}$.

Démonstration. — Supposons d'abord $d_{\bullet} = 1$ et posons

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{iy}}{(1+iy)^2 B(iy)} dy, \tag{38}$$

où $B(z)$ désigne la fonction associée par le lemme du paragraphe 2, à la suite Λ et à la fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$. La formule de Cauchy donne

$$g(t) - \sum_{\lambda < N} \frac{t^\lambda}{(1+i\lambda)^2 B'(\lambda)} = O\left(\frac{t^N}{B(N)}\right),$$

ce qui montre, en appliquant (9) et (11), que $g(t)$ est holomorphe dans le cercle de centre o et de rayon 1 et exactement dans ce cercle. Dérivons l'égalité (38) par rapport à t, on obtient, en tenant compte de (10),

$$|g^{(p)}(t)| < \sup_{y>0} (y+p)^p t^{-p} e^{-\pi N_\alpha(y)}.$$

En tenant compte de (36), on a

$$\log|g^{(p)}(t)| < -p \log t + \sup_y (p \log(y+p) - d_\cdot \log T(y)) + o(p).$$

En tenant compte de (35) on a

$$\sup_y (p \log(y+p) - d_\cdot \log T(y)) = \log M_p + o(p).$$

D'où

$$\log|g^{(p)}(t)| < -p \log t + \log M_p + o(p).$$

D'autre part, lorsque t est situé sur l'intervalle (o, 1), on peut majorer $g^{(p)}(t)$ par la formule de Cauchy. Finalement, on obtiendra

$$\log|g^{(p)}(t)| < \inf_{0<\delta<1}\left(-p \log\delta + \log M_p + o(p),\ \log p! - p \log\frac{1-\delta}{2} + A_\delta\right)$$

en tenant compte de (35), on a, en fixant $\delta < 1$,

$$\log|g^{(p)}(t)| < \log M_p - p \log\delta + O_\delta(1).$$

En faisant tendre maintenant δ vers 1, on obtient

$$\log|g^{(p)}(t)| < \log M_n + o(p) \qquad (0 \leq t < +\infty).$$

Posons maintenant, η_n étant une suite donnée tendant vers 1, $\eta_n < 1$, ε_n étant une suite de nombres positifs qui sera fixée ultérieurement,

$$f(t) = \sum_0^\infty \varepsilon_n g(\eta_n t)$$

la dernière inégalité entraîne qu'il existe une constante B_n telle que

$$|g^{(p)}(\eta_n t)| < B_n M_p \qquad (0 \leq t < +\infty).$$

En choisissant la suite ε_n de telle sorte que $\sum \varepsilon_n B_n < 1$, $f(t)$ vérifiera (37) et sera holomorphe dans le cercle de centre o et de rayon 1, et non prolongeable analytiquement à l'extérieur de ce cercle. Ceci démontre si $d_\cdot = 1$, le théorème.

Envisageons maintenant le cas où $d_\cdot \neq 1$, $d_\cdot < +\infty$.

Nous poserons $M'_p = d^{-p}M$ et nous allons calculer la densité $d'_\cdot$ de la suite Λ par rapport à la suite $\{M'_p\}$. On a $T'(r) = T(rd_\cdot)$ et en tenant compte de (35),

$$\log T(rd_\cdot) \leqq d_\cdot \log T(r),$$

d'où

$$d'_\cdot = \underline{\lim} \frac{N(r)}{\log T'(r)} = \underline{\lim}_{r} \frac{N(r)}{\log T(rd_\cdot)} > \frac{1}{d_\cdot} \underline{\lim} \frac{N(r)}{\log T(r)} = 1.$$

Appliquons à la suite $\{M'_p\}$ le résultat démontré ci-dessus dans le cas où $d'_\cdot \geqq 1$. On peut construire une fonction holomorphe exactement dans le cercle de centre o et de rayon 1 vérifiant

$$|h^{(p)}(t)| < M'_p = d^{-p} M_p, \qquad h^{(m)}(0) = 0 \qquad \text{si} \quad m \notin \Lambda,$$

la fonction $f(t) = h(d_\cdot t)$ sera holomorphe strictement dans le cercle de rayon $\frac{1}{d_\cdot}$, vérifiera (37) et satisfera ainsi aux conditions de la proposition.

Pour terminer, examinons le cas où $d_\cdot = +\infty$; on peut construire, d'après ce qui précède, une suite de fonctions $f_n(t)$, holomorphes dans le cercle de rayon $\frac{1}{n}$, vérifiant

$$f_n^{(p)}(0) = n^p A_p \qquad (A_p = 0 \text{ si } p \in \Lambda), \qquad |f_n^{(p)}(t)| < B_n M_p.$$

En posant

$$f(t) = \sum_0^\infty \varepsilon_n f_n(t), \qquad \text{où} \quad \sum \varepsilon_n B_n < 1 \qquad (\varepsilon_n > 0),$$

on obtiendra une fonction $f(t)$ satisfaisant à (37) et non holomorphe au voisinage de o, ce qui achève la démonstration.

Pour comparer les deux derniers théorèmes, il nous faudra faire sur la suite les hypothèses de régularité suivantes.

Nous dirons que la suite Λ est *régulièrement* répartie si elle possède une fonction de répartition approximative $N_\alpha(t)$ telle que $\lim \frac{N^\star_\alpha(t)}{N(t)} = 1$, où $N^\star_\alpha(t)$ désigne la régularisée concave de $N_\alpha(t)$ introduite en (1). On a alors l'énoncé suivant, qui contient dans un cas particulier les théorèmes en question.

12. THÉORÈME. — *Soit* M_n *une suite de nombres positifs vérifiant* (5) *et* (35). *Soit* Λ *une suite d'entiers positifs régulièrement répartie, supposons l'existence de la limite*

$$d = \lim_{t=+\infty} \pi \frac{N(t)}{\log T(t)} \qquad (0 \leqq d \leqq +\infty).$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que les hypothèses

$$|f^n(t)| < M_n \quad (0 \leq t < +\infty), \qquad f^{(m)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad m \in \Lambda \tag{39}$$

entraînent que $f(t)$ soit holomorphe dans le cercle de centre o *et de rayon* R_1 *est que* $R_1 \leq \frac{1}{d}$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le théorème précédent. Soit maintenant une fonction $f(t)$ satisfaisant à (39) alors, elle satisfait sur tout intervalle borné (o, R) aux hypothèses de la proposition du paragraphe 9, donc $f(t)$ sera holomorphe d'après cette proposition dans les cercles de centre o et de rayon $\varphi(R) = \frac{4R}{4 + R^2 d^2}$. La fonction $\varphi(R)$ atteint son maximum pour $R = \frac{2}{d}$ et $\varphi\left(\frac{2}{d}\right) = \frac{1}{d}$, la fonction $f(t)$ sera ainsi holomorphe dans le cercle de centre o et de rayon $\frac{1}{d}$. C. Q. F. D.

13. Remarques sur l'inégalité (7). — On aurait pu construire d'une manière plus explicite des opérateurs de projection analogue aux $\bar{\beta}_{\alpha,p}$, introduits au paragraphe 6 en utilisant la méthode de M. S. Mandelbrojt [4]. On aurait déterminé une fonction entière $G(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ de type exponentiel d'ordre zéro, s'annulant sur la suite Λ et l'on aurait défini un opérateur γ en posant

$$\gamma f = \sum_0^\infty a_n f^{(n)}(t).$$

On peut montrer, sans développer explicitement ce procédé, que l'inégalité (7), s'applique sous des hypothèses où le calcul symbolique défini par $G(z)$ n'aurait pas permis de conclure.

En effet, l'inégalité obtenue par ce calcul symbolique serait de la forme

$$|f^{(p)}(0)| < p!\,\frac{A_p}{R^p}, \tag{40}$$

où A_p sera indépendant de la longueur R de l'intervalle sur lequel $f(t)$ est défini et quasi analytique. Si les hypothèses permettant d'appliquer (40) sont remplies pour une fonction $f(t)$ définie sur (o, $+\infty$), en faisant croître R indéfiniment, (40) montre que $f(t)$ est identiquement nulle.

Au contraire, l'inégalité (7) peut s'appliquer à des fonctions non identiquement nulles définies sur la demi-droite comme le montrent les fonctions construites dans la proposition du paragraphe 12.

Cette remarque peut montrer que ce ne serait pas entreprendre un travail sans objet que de démontrer pour les séries de Dirichlet, l'analogue de l'inégalité fondamentale de M. S. Mandelbrojt, en utilisant des opérateurs de projection définis, comme dans ce travail, à l'aide de la transformation de Pólya-Laplace au lieu de la transformation de Pólya-Fourier intervenant implicitement dans [4]. La technique à utiliser est assez différente de celle de ce travail : les opérateurs $\beta_{\alpha,p}$ étant alors définis facilement par une intégrale de Cauchy, la condition d'adhérence du paragraphe 7 et la démonstration de l'analogue de l'inégalité (11) représentent la principale difficulté.

Signalons pour terminer que l'inégalité (7) permet évidemment d'obtenir des résultats du type suivant dont voici le plus élémentaire : Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini, supposons que

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n \notin \Lambda), \qquad \sum_{\Lambda} \frac{1}{\lambda} < +\infty.$$

Posons

$$M(r) = \max |f(re^{i\theta})|, \qquad m(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t),$$

alors

$$\log M(r) = \log m(r) + O(\log r).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] SERGE BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales*, Paris, 1924.

[2] T. CARLEMAN, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.

[3] S. MANDELBROJT, *On the class of infinitely differentiable functions*. Rice Institute Pamphlet, 1942.

[4] S. MANDELBROJT, *Les séries adhérentes*, Paris, 1952.