ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL HERVÉ

Itération des transformations analytiques dans le bicercle-unité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 1 (1954), p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_1_1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ITÉRATION DES TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES DANS LE BICERCLE-UNITÉ

PAR M. MICHEL HERVÉ.

1. RAPPEL DES RÉSULTATS CLASSIQUES SUR L'ITÉRATION D'UNE TRANSFORMATION ANALYTIQUE DANS LE CERCLE-UNITÉ ([1]). — On peut itérer, dans le cercle-unité $|z| < 1$, une transformation analytique t de la forme $z_1 = f(z)$, où $f(z)$ est une fonction holomorphe, et de module inférieur à 1, pour $|z| < 1$: la $n^{\text{ième}}$ itérée t_n est la transformation $z_n = f_n(z)$, la fonction $f_n(z)$ étant définie par $f_1(z) \equiv f(z)$ et par la formule de récurrence

$$f_{n+1}(z) \equiv f[f_n(z)];$$

on a d'ailleurs plus généralement

$$f_{n+p}(z) \equiv f_n[f_p(z)]$$

quels que soient les entiers positifs n et p. Les t_n forment une famille normale pour $|z| < 1$.

La transformation t peut admettre un point double intérieur au cercle-unité : c'est un point z_0 tel que $|z_0| < 1$ et $f(z_0) = z_0$; si un tel point existe, on a nécessairement $|f'(z_0)| \leqq 1$; si $|f'(z_0)| = 1$, c'est-à-dire $f'(z_0) = e^{i\gamma}$, t est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même, définie par la formule

$$\frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} = e^{i\gamma} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

([1]) La bibliographie, à laquelle renvoient les chiffres entre crochets, est placée à la fin; les résultats rappelés ici sont principalement ceux des travaux numérotés [3] et [7].

et les transformations limites de suites partielles t_{n_k} (où les n_k croissent indéfiniment) sont de la même forme; si en particulier $f'(z_0) = 1$, t est la transformation identique. Si, au contraire, $|f'(z_0)| < 1$, $f_n(z) \to z_0$ uniformément sur tout compact : on dit alors que z_0 est point double attractif de t.

Si t n'admet pas de point double intérieur au cercle-unité, il existe un point $e^{i\alpha}$ de la circonférence tel que, pour tout z de module inférieur à 1, le point $f(z)$ soit intérieur, au sens large ([2]), au cercle passant par le point z et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité. La fonction $f(z)$ a en ce point une dérivée angulaire λ telle que $0 < \lambda \leqq 1$: cette dérivée est la limite, quand $z \to e^{i\alpha}$, avec $|\arg(1 - e^{-i\alpha}z)| \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, à la fois de $\frac{e^{i\alpha} - f(z)}{e^{i\alpha} - z}$ et de $\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|}$. Inversement, si cette condition est remplie, pourvu que t ne soit pas la transformation identique, $f_n(z) \to e^{i\alpha}$ uniformément sur tout compact : on dit encore que $e^{i\alpha}$ est point double attractif de t.

Ainsi, un point double attractif de t est, soit un point z_0 intérieur au cercle-unité tel que $f(z_0) = z_0$ et $|f'(z_0)| < 1$, soit un point $e^{i\alpha}$ de la circonférence tel que, pour tout z de module inférieur à 1, le point $f(z)$ soit distinct de z et intérieur, au sens large, au cercle passant par le point z et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité. La transformation identique mise à part, toute transformation t admet, ou bien un point double intérieur au cercle-unité et un seul, ou bien un point double attractif situé sur la circonférence et un seul, l'existence de l'un de ces points excluant celle de l'autre.

2. Itération, dans le cercle-unité, d'une transformation analytique dépendant d'un paramètre. — Soit, dans le cercle-unité $|x| < 1$, une transformation analytique $t^1(y)$ de la forme $x_1 = f(x, y)$, où $f(x, y)$ est une fonction holomorphe, et de module inférieur à 1, des deux variables x, y pour $|x| < 1$, $|y| < 1$; cette transformation porte seulement sur la variable x, y jouant le rôle d'un paramètre qui reste constant dans l'itération de $t^1(y)$, c'est-à-dire que, si la $n^{\text{ième}}$ itérée $t^1_n(y)$ est notée $x_n = f^1_n(x, y)$, on a entre les fonctions f^1_n la relation

$$f^1_{n+p}(x, y) \equiv f^1_n[f^1_p(x, y), y]$$

quels que soient les entiers positifs n et p. Les fonctions $f^1_n(x, y)$ forment une famille normale sur le bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Nous démontrerons simultanément les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Étant donné la transformation $t^1(y)$, il existe, ou bien un point $e^{i\alpha}$ tel que, pour tout x et tout y de modules inférieurs à 1, le point $f(x, y)$ soit intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité, ou bien une fonction $\xi(y)$, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|y| < 1$, telle que $f[\xi(y), y] \equiv \xi(y)$; pourvu que $t^1(y)$ ne soit pas la trans-*

([2]) Le point $f(z)$ peut être, en effet, non pas intérieur à ce cercle, mais situé sur sa circonférence.

formation identique quel que soit y, *les deux cas s'excluent mutuellement et, dans le second,* $f(x, y) = x$, *avec* $|x| < 1$, $|y| < 1$, *entraîne inversement* $x = \xi(y)$.

Théorème 2. — *Ou bien* $t^1(y)$ *est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même indépendante de* y, *ou bien* $t^1(y)$ *n'est, pour aucun* y, *une transformation homographique du cercle-unité en lui-même.*

Soit $\varphi(x, y)$ la limite d'une suite convergente $f^1_{n_k}(x, y)$ (les n_k croissant indéfiniment); comme $|\varphi(x, y)| \leqq 1$, ou bien φ est une constante de module 1, ou bien $|\varphi(x, y)| < 1$.

Supposons d'abord $\varphi(x, y) \equiv e^{i\alpha}$; en appliquant à $t^1(y)$ les résultats rappelés au n° 1, on voit que, quel que soit y, $e^{i\alpha}$ est point double attractif de $t^1(y)$: c'est le premier des deux cas prévus par le théorème 1. Pour étudier ce premier cas, chaque fois qu'il se présentera dans la suite, nous utiliserons une correspondance homographique entre le cercle $|x| < 1$ et le demi-plan $\operatorname{Re} X > 0$, correspondance choisie de manière que les points $x = e^{i\alpha}$ et $X = \infty$ soient homologues :

$$X = \frac{e^{i\alpha} + x}{e^{i\alpha} - x}, \qquad x = e^{i\alpha}\frac{X - 1}{X + 1};$$

en posant

$$F(X, y) \equiv \frac{e^{i\alpha} + f\left(e^{i\alpha}\dfrac{X-1}{X+1}, y\right)}{e^{i\alpha} - f\left(e^{i\alpha}\dfrac{X-1}{X+1}, y\right)},$$

et de même pour $F^1_n(X, y)$, on définit une transformation $T^1(y)$ et ses itérées $T^1_n(y)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re} X > 0$; le fait que le point $f(x, y)$ est intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité, se traduit simplement par $\operatorname{Re} F(X, y) \geqq \operatorname{Re} X$ quels que soient X et y ($\operatorname{Re} X > 0$, $|y| < 1$).

Dans ce premier cas, si $t^1(y_0)$ est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même, cette transformation admet le point double $e^{i\alpha}$, donc $T^1(y_0)$ est une transformation homographique du demi-plan $\operatorname{Re} X > 0$ en lui-même, admettant le point double ∞ : $F(X, y_0) \equiv aX + ib$, a et b étant réels, $a \geqq 1$ puisque

$$\operatorname{Re} F(X, y_0) \geqq \operatorname{Re} X.$$

Si X_p est une suite de points du demi-plan $\operatorname{Re} X > 0$ tendant vers un point ic à distance finie de la droite $\operatorname{Re} X = 0$, les $F(X_p, y)$, fonctions holomorphes de y dont les parties réelles sont positives, forment une famille normale pour $|y| < 1$, et toute suite convergente extraite de cette famille a pour limite une fonction de partie réelle $\geqq 0$, qui vaut $i(ac + b)$ pour $y = y_0$, donc est la constante imaginaire pure $i(ac + b)$; ainsi, pour y fixe,

$$F(X_p, y) \to i(ac + b);$$

cela étant vrai pour toute suite X_p,

$$F(X, y) - F(X, y_0) \to 0$$

pour y fixe, quand $\mathrm{Re}\, X \to 0$, $\mathrm{Im}\, X$ restant borné. Si maintenant l'on considère $F(X, y) - F(X, y_0)$ comme fonction de X, y restant fixe, cela exige

$$F(X, y) - F(X, y_0) \equiv 0, \qquad \text{donc} \quad F(X, y) \equiv aX + ib$$

quels que soient X et y, ce qui démontre le théorème 2 dans ce premier cas.

3. Supposons maintenant $|\varphi(x, y)| < 1$ et $f(x, y) \not\equiv x$; choisissons un nombre complexe y_0 ($|y_0| < 1$) tel que $f(x, y_0) \not\equiv x$; puisque $|\varphi(x, y_0)| < 1$, la transformation $t^1(y_0)$ ne peut avoir de point double attractif sur la circonférence-unité; d'après les résultats rappelés au nº 1, elle a un point double x_0 intérieur au cercle-unité et un seul; on a donc $f(x_0, y_0) = x_0$. *A priori*, puisque $f(x, y_0) - x \not\equiv 0$, les zéros de la fonction $f(x, y) - x$, dans un voisinage assez petit du point (x_0, y_0), sont ceux d'un polynome distingué en $(x - x_0)$:

$$(x - x_0)^n + a_1(y)(x - x_0)^{n-1} + \ldots + a_n(y),$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions de y holomorphes et nulles au point y_0; on peut, en outre, supposer que les facteurs irréductibles de ce polynome [dans l'anneau des polynomes en $(x - x_0)$ dont les coefficients sont des fonctions de y holomorphes au point y_0] sont deux à deux distincts; alors, pour y assez voisin de y_0 mais distinct de y_0, le polynome a n racines distinctes, c'est-à-dire que $t^1(y)$ a n points doubles distincts intérieurs au cercle-unité; si $n > 1$, nous avons donc $f(x, y) \equiv x$ pour y assez voisin de y_0 mais distinct de y_0, qui est incompatible avec l'hypothèse $f(x, y_0) \not\equiv x$.

Ainsi $n = 1$, c'est-à-dire (en changeant de notations) que les zéros de la fonction $f(x, y) - x$, dans un voisinage assez petit du point (x_0, y_0), sont ceux d'une fonction de la forme $x - \xi(y)$, $\xi(y)$ étant holomorphe pour $|y - y_0| < \rho$, $\xi(y_0) = x_0$; puisque $\xi(y)$ est point double de $t^1(y)$, on a (nº 1)

$$|f'_x[\xi(y), y]| \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \rho;$$

mais $f'_x[\xi(y), y]$ est fonction holomorphe de y pour $|y - y_0| < \rho$, donc, ou bien c'est une constante de module 1, ou bien

$$|f'_x[\xi(y), y]| < 1 \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \rho.$$

Si $f'_x[\xi(y), y] \equiv e^{i\gamma}$, on a (nº 1)

$$\frac{f(x, y) - \xi(y)}{1 - \overline{\xi(y)} f(x, y)} \equiv e^{i\gamma} \frac{x - \xi(y)}{1 - \overline{\xi(y)}\, x} \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \rho;$$

en particulier, en donnant à x une valeur numérique x_1 autre que x_0 :

$$\frac{1 - \overline{\xi(y)}\, x_1}{1 - \overline{\xi(y)} f(x_1, y)} \equiv e^{i\gamma} \frac{x_1 - \xi(y)}{f(x_1, y) - \xi(y)},$$

relation d'où l'on peut tirer $\overline{\xi(y)}$ pourvu que $f(x_1, y) \neq x_1$, c'est-à-dire pour y assez voisin de y_0 puisque $f(x_1, y_0) \neq x_1$; on trouve ainsi pour $\overline{\xi(y)}$ une fonction méromorphe de y, ce qui exige que $\xi(y)$ soit la constante x_0; on a $f(x_0, y) \equiv x_0$ pour y voisin de y_0, donc aussi pour $|y| < 1$, ce qui démontre le théorème 1 avec $\xi(y) \equiv x_0$; on a de plus

$$\frac{f(x, y) - x_0}{1 - \overline{x}_0 f(x, y)} \equiv e^{i\gamma} \frac{x - x_0}{1 - \overline{x}_0 x},$$

c'est-à-dire que $t^1(y)$ est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même indépendante de y.

Si, au contraire, $|f'_x[\xi(y), y]| < 1$ pour $|y - y_0| < \rho$, $\xi(y)$ est point double attractif de $t^1(y)$ pour $|y - y_0| < \rho$; toutes les fonctions limites de suites partielles $f^1_{n_k}(x, y)$ coïncident, pour $|y - y_0| < \rho$, avec $\xi(y)$; comme ces fonctions sont holomorphes pour $|x| < 1$, $|y| < 1$, elles sont identiques à une même fonction de y, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|y| < 1$, et qui peut être notée $\xi(y)$; l'identité $f[\xi(y), y] \equiv \xi(y)$ est donc étendue à $|y| < 1$, ainsi que l'inégalité $|f'_x[\xi(y), y]| < 1$, d'où résulte que $t^1(y)$ n'est, pour aucun y, une transformation homographique du cercle-unité en lui-même.

Si enfin $f(x_1, y_1) = x_1$, avec $x_1 \neq \xi(y_1)$, la transformation $t^1(y_1)$, qui admet deux points doubles distincts, x_1 et $\xi(y_1)$, intérieurs au cercle-unité, est la transformation identique, donc aussi $t^1(y)$ pour tout y.

4. Rappel de résultats antérieurs sur l'itération a deux variables (*cf.* [2], [4], [5]). — Dans un domaine D, borné, univalent, de l'espace rapporté à deux variables complexes x, y, on peut itérer une transformation analytique t de la forme

$$x_1 = f(x, y), \qquad y_1 = g(x, y),$$

où f et g sont deux fonctions holomorphes sur D et telles que $(x, y) \in D$ entraîne $(x_1, y_1) \in D$; la $n^{\text{ième}}$ itérée t_n (avec $t_1 \equiv t$) étant notée

$$x_n = f_n(x, y), \qquad y_n = g_n(x, y),$$

on a entre les fonctions f_n, g_n les relations

$$f_{n+p}(x, y) \equiv f_n[f_p(x, y), g_p(x, y)],$$
$$g_{n+p}(x, y) \equiv g_n[f_p(x, y), g_p(x, y)],$$

quels que soient les entiers positifs n et p. Les t_n forment une famille normale sur D.

La transformation t peut admettre un point double intérieur à D : c'est un point $(x_0, y_0) \in D$ tel que

$$f(x_0, y_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad g(x_0, y_0) = y_0;$$

en un tel point, les valeurs propres s_1, s_2 du déterminant fonctionnel de t sont nécessairement de modules au plus égaux à 1; si $|s_1| = |s_2| = 1$, t est une transformation biunivoque de D en lui-même [2] ainsi que les transformations limites de suites partielles t_{n_k} (où les n_k croissent indéfiniment). Si $|s_1| < 1$, $|s_2| < 1$, alors

$$f_n(x, y) \to x_0, \qquad g_n(x, y) \to y_0$$

uniformément sur tout compact [5], le point (x_0, y_0) est point double attractif de t. Si enfin $|s_1| = 1$, $|s_2| < 1$, il existe une variété analytique E dans D, irréductible globalement, passant par le point (x_0, y_0) mais non réduite à ce point, transformée biunivoquement en elle-même par t et aussi par toute transformation τ limite d'une suite partielle t_{n_k} [4].

Ce dernier résultat implique que τ transforme certains points de D (à savoir ceux de E) en des points de D; cela n'exclut pas que τ transforme d'autres points de D en des points de la frontière de D, du moins si D est quelconque. Il existe néanmoins des domaines bornés univalents, que nous noterons D_0, tels que, si τ est limite, uniforme sur tout compact, de transformations analytiques t_n changeant les points de D_0 en des points de D_0, ou bien τ change tout point de D_0 en un point de D_0, ou bien τ change tout point de D_0 en un point de la frontière de D_0; cette propriété s'applique en particulier aux transformations τ limites de suites partielles d'itérées t_{n_k}. Les domaines D_0 comprennent, d'une part les bicylindres $d_1 \times d_2$, d_1 et d_2 étant deux domaines plans bornés, d'autre part les domaines bornés limités par des hypersurfaces régulières vérifiant l'inégalité stricte de E. Levi [6].

Plaçons-nous désormais dans un domaine D_0 : revenant au cas d'un point double de t intérieur au domaine, avec $|s_1| = 1$, $|s_2| < 1$, on peut affirmer, outre les propriétés énoncées ci-dessus dans le cas général, que E est l'image de D_0 par toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k}. Si t n'admet pas de point double intérieur à D_0, ou bien la frontière de D_0 contient l'image de D_0 par toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k}, ou bien il existe une variété analytique E dans D_0, irréductible et non ponctuelle, transformée biunivoquement en elle-même par t et par les transformations limites de suites partielles t_{n_k}, et qui enfin est l'image de D_0 par chacune de ces transformations limites. A noter, en outre, que certaines de ces transformations limites conservent E point par point [4].

5. Théorème 3. — *Si l'on itère, dans un domaine D_0 linéairement simplement connexe, une transformation analytique t dépourvue de point double intérieur au domaine, toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k} change un point du domaine en un point de sa frontière.*

Précisions sur l'énoncé. — Les domaines D_0 ont été définis au n° 4; un domaine D_0 est linéairement simplement connexe si toute courbe fermée tracée dans D_0 est réductible à un point de D_0 par déformation continue dans D_0, c'est-à-dire si, étant donné deux fonctions continues $x(u)$, $y(u)$ de la variable réelle $u(0 \leqq u \leqq 1)$ telles que

$$[x(u), y(u)] \in D_0, \qquad x(1) = x(0), \qquad y(1) = y(0),$$

on peut trouver deux fonctions continues $x(u, v)$, $y(u, v)$ du couple de variables réelles (u, v) $(0 \leqq u, v \leqq 1)$ telles que

$$\begin{gathered}[x(u, v), y(u, v)] \in D_0, \qquad x(1, v) \equiv x(0, v), \qquad y(1, v) \equiv y(0, v), \\ x(u, 0) \equiv x(u), \qquad y(u, 0) \equiv y(u), \qquad x(u, 1) \equiv x_0, \qquad y(u, 1) \equiv y_0.\end{gathered}$$

Le théorème s'applique donc, entre autres, au bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$ ou à la boule $|x|^2 + |y|^2 < 1$; mais deux exemples simples montrent la nécessité des hypothèses faites sur le domaine.

Dans le domaine obtenu en retranchant l'origine du bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$, la transformation

$$(t) \qquad x_1 = e^{i\alpha} x \quad (e^{i\alpha} \neq 1), \qquad y_1 = sy \quad (0 < |s| < 1)$$

est dépourvue de point double intérieur au domaine; toutes les transformations limites de suites partielles t_{n_k} sont de la forme

$$(\tau) \qquad x_1 = e^{i\beta} x, \qquad y_1 = 0$$

et seuls les points du plan $x = 0$ sont changés par τ en points de la frontière du domaine; or ce domaine est linéairement simplement connexe, mais ce n'est pas un domaine D_0.

Le théorème ne s'applique pas non plus à la même transformation t dans le bicylindre $0 < |x| < 1$, $|y| < 1$; celui-ci est un domaine D_0, mais n'est pas linéairement simplement connexe.

Démonstration du théorème. — Dans un domaine D_0 linéairement simplement connexe, soit t une transformation analytique dépourvue de point double intérieur à D_0 et telle que toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k} change les points de D_0 en des points de D_0; il existe alors une variété analytique E dans D_0 possédant les propriétés rappelées à la fin du n° 4; je dis que cette variété est elle-même linéairement simplement connexe.

Soit, en effet, C une courbe fermée tracée sur E, lieu du point $[x(u), y(u)]$; par hypothèse elle est réductible à un point (x_0, y_0) de D_0 par une déformation continue dans D_0, définie par les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$; soit, d'autre part, τ une transformation, limite d'une suite partielle t_{n_k}, qui conserve E point par point :

$$(\tau) \qquad x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \psi(x, y);$$

les fonctions $\varphi[x(u, v), y(u, v)]$, $\psi[x(u, v), y(u, v)]$ définissent une nouvelle déformation continue, réduisant C à un point, non plus seulement dans D_0, mais sur E puisque E est l'image de D_0 par τ.

La variété analytique E est une surface de Riemann étalée sur le plan complexe x (ou sur le plan complexe y), qui ne peut être fermée, car E, considérée comme ensemble de points, a des points d'accumulation sur la frontière de D_0; cette surface de Riemann, étant simplement connexe et ouverte, est, d'après un théorème classique de Kœbe, isomorphe à un disque plan $|Z| < R$, dont le rayon R peut être ∞. La transformation t, considérée sur E, a pour image dans le plan Z une transformation biunivoque du disque en lui-même, telle qu'une suite d'itérées de cette transformation ait la transformation identique pour limite. Une telle transformation doit avoir un point double, donc t également.

6. Objet du présent travail; plan de l'étude; principaux résultats. — Nous nous proposons d'étudier, dans le bicercle-unité $|x| < 1$, $|y| < 1$, les transformations τ limites de suites partielles t_{n_k} d'itérées d'une transformation analytique

$$(t) \qquad x_1 = f(x, y), \qquad y_1 = g(x, y),$$

où $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions holomorphes, et de modules inférieurs à 1, pour $|x| < 1$, $|y| < 1$; le cas où t admet un point double intérieur au bicercle étant couvert par les résultats rappelés au n° 4, nous supposerons t *dépourvue de point double intérieur au bicercle*; le théorème 3 permet alors d'affirmer que les transformations τ présentent l'une des formes

$$(\tau) \qquad \begin{cases} x_1 = e^{i\alpha}, & y_1 = \psi(x, y), \quad \text{avec} \quad |\psi(x, y)| \leqq 1, \\ x_1 = \varphi(x, y), & y_1 = e^{i\beta}, \quad \text{avec} \quad |\varphi(x, y)| \leqq 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'étudier, t étant donnée, l'ensemble des transformations τ; comme on pouvait le prévoir, les faits sont beaucoup plus compliqués que dans le cas d'une variable z, où l'absence de point double intérieur (*cf.* n° 1) entraîne la convergence de la suite t_n, c'est-à-dire l'unicité de τ. Nous verrons qu'ici le seul théorème d'unicité que l'on puisse énoncer est celui-ci :

Théorème 4. — *Étant donné la transformation analytique t dépourvue de point double intérieur au bicercle, on peut lui faire correspondre, ou bien* un nombre $e^{i\alpha}$ *tel que* toutes *les transformations limites τ soient de la forme*

$$x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad \textit{avec} \quad |\psi(x, y)| \leqq 1,$$

ou bien un nombre $e^{i\beta}$ *tel que* toutes *les τ soient de la forme*

$$x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = e^{i\beta}, \qquad \textit{avec} \quad |\varphi(x, y)| \leqq 1.$$

Nous verrons, par contre, que la fonction ψ ou φ, suivant le cas, n'est pas unique; par exemple (*cf.* n^{os} 11 et 15) on peut choisir t de manière que les transformations τ comprennent, d'une part la transformation

$$x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = e^{i\beta},$$

d'autre part des transformations de la forme

$$x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad \text{avec } |\psi(x, y)| < 1.$$

A la transformation t, qui porte sur les deux variables x et y, nous associerons, d'une part une transformation $t^1(y)$ portant seulement sur la variable x, y jouant le rôle d'un paramètre, d'autre part une transformation $t^2(x)$ portant seulement sur la variable y, x jouant le rôle d'un paramètre :

$$[t^1(y)] \quad x_1 = f(x, y); \qquad [t^2(x)] \quad y_1 = g(x, y).$$

On traite immédiatement le cas où $t^2(x)$ est la transformation identique quel que soit x, car alors l'itération de t conserve y et, en ce qui concerne x, se ramène à l'itération de $t^1(y)$; comme, par hypothèse, t n'a pas de point double intérieur au bicercle, $t^1(y)$ n'a, pour aucun y, de point double intérieur au cercle $|x| < 1$; alors (*cf.* nos 1 et 2) $t^1(y)$ admet un point double attractif $e^{i\alpha}$ indépendant de y; la suite des itérées de t converge donc, uniformément sur tout compact, vers la transformation

$$x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = y.$$

7. *Nous écarterons désormais* le cas où $t^2(x)$ est la transformation identique pour tout x, et celui où $t^1(y)$ est la transformation identique pour tout y; le théorème 1 (n° 2) nous conduit alors à étudier successivement les trois cas suivants qui s'excluent mutuellement :

1er *cas*. — Il existe un point $e^{i\alpha}$ tel que, pour tout x et tout y de modules inférieurs à 1, le point $f(x, y)$ soit intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité et, d'autre part, une fonction $\eta(x)$, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|x| < 1$, telle que les relations

$$g(x, y) = y \qquad \text{et} \qquad y = \eta(x)$$

soient équivalentes pour $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Dans ce cas, nous verrons (nos 9 à 11) que toutes les transformations limites τ sont de la forme $x_1 = e^{i\alpha}$, $y_1 = \psi(x, y)$, la fonction ψ n'étant pas en général unique.

2e *cas*. — Il existe deux points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ tels que, pour tout x et tout y de modules inférieurs à 1, le point $f(x, y)$ soit intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité, et le point $g(x, y)$ au cercle passant par le point y et tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité.

Nous verrons alors (nos 12 à 15) que, ou bien toutes les transformations τ sont de la forme $x_1 = e^{i\alpha}$, $y_1 = \psi(x, y)$, ou bien toutes les τ sont de la forme $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = e^{i\beta}$, la fonction ψ ou φ n'étant pas en général unique.

3e *cas*. — Il existe deux fonctions $\xi(y)$ et $\eta(x)$, holomorphes et de modules inférieurs à 1, la première pour $|y|<1$, la seconde pour $|x|<1$, telles que les relations

$$f(x, y)=x \quad \text{et} \quad x=\xi(y), \quad \text{d'une part,}$$
$$g(x, y)=y \quad \text{et} \quad y=\eta(x), \quad \text{d'autre part,}$$

soient équivalentes pour $|x|<1$, $|y|<1$.

Compte tenu de l'hypothèse que t n'a pas de point double intérieur au bicercle, nous montrerons alors (n^{os} 16 à 20) l'existence de deux points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ tels que la suite de *toutes les itérées* t_n converge vers la transformation $x_1=e^{i\alpha}$, $y_1=e^{i\beta}$; ce 3^e cas est donc le seul où la convergence de la suite t_n, c'est-à-dire l'unicité de τ, soit générale.

8. Notations communes aux trois cas. — Nous considérerons un point particulier (u, v) du bicercle, qui sera en général l'origine, et noterons (u_n, v_n) son image par la $n^{\text{ième}}$ itérée t_n de la transformation t. Comme t est supposée sans point double intérieur au bicercle, d'après le théorème 3 la suite des points (u_n, v_n) a tous ses points d'accumulation sur la frontière du bicercle, c'est-à-dire que

$$(1-|u_n|)(1-|v_n|)\to 0.$$

$E(z_1, z_2)$ désignera la distance non euclidienne dans le cercle-unité $|z|<1$:

$$E(z_1, z_2)=\arg \operatorname{th}\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|;$$

dans plusieurs calculs, on posera

$$z_1=r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2=r_2 e^{i\theta_2},$$

et on utilisera la formule

$$1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2=\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{1-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(r_1r_2)^2}. \tag{8.1}$$

Le lieu des points z tels que $E(z_1, z)=\rho$ sera appelé cercle de pseudo-centre z_1 et de pseudo-rayon ρ; deux cercles de même pseudo-rayon seront dits pseudo-égaux.

D'après l'extension à deux variables du lemme de Schwarz [1], on a

$$E[f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)]\leqq \operatorname{Max}[E(x_1, x_2), E(y_1, y_2)] \tag{8.2}$$

pourvu que $|x_1|$, $|x_2|$, $|y_1|$, $|y_2|<1$, et de même pour g; en particulier, en posant

$$d=\operatorname{Max}[E(u_1, u), E(v_1, v)], \tag{8.3}$$

et appliquant (8.2) aux points (u_1, v_1) et (u, v) et à la fonction f_n ou g_n, on a $E(u_{n+1}, u_n)$ et $E(v_{n+1}, v_n)\leqq d$, *a fortiori*

$$\frac{1-\operatorname{th}d}{1+\operatorname{th}d}<\frac{1-|u_{n+1}|}{1-|u_n|} \quad \text{et} \quad \frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|}<\frac{1+\operatorname{th}d}{1-\operatorname{th}d}. \tag{8.4}$$

Lemme *commun aux deux cas* (1^{er} *et* 3^{e}) *où la fonction* $\eta(x)$ *existe. — Dans ces deux cas, on peut trouver deux nombres positifs* a *et* b, *dépendant de* u, v, *tels que les inégalités*

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}<a \qquad \text{et} \qquad \frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|}<1+b$$

soient incompatibles.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite d'entiers n_k, croissant indéfiniment, tels que

$$\lim \frac{1-|v_{n_k}|}{1-|u_{n_k}|}=0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\, \frac{1-|v_{n_k+1}|}{1-|v_{n_k}|}\leqq 1;$$

en se bornant au besoin à une suite partielle, on peut supposer en outre, d'une part que $\frac{1-|v_{n_k+1}|}{1-|v_{n_k}|}$ a une limite $\leqq 1$, d'autre part que la suite $g_{n_k}(x, y)$ converge; les hypothèses faites, jointes à $(1-|u_{n_k}|)(1-|v_{n_k}|)\to 0$, entraînent $|v_{n_k}|\to 1$, $|v_{n_k+1}|\to 1$; la limite de la suite $g_{n_k}(x, y)$ est alors une constante $e^{i\beta}$, et en particulier

$$v_{n_k}=g_{n_k}(u, v)\to e^{i\beta}, \qquad v_{n_k+1}=g_{n_k}(u_1, v_1)\to e^{i\beta}.$$

En appliquant (8.1) aux couples (x, u_{n_k}) et (y, v_{n_k}), on a

$$1-\left|\frac{x-u_{n_k}}{1-\bar{x}u_{n_k}}\right|^2\geqq(1-|u_{n_k}|)\frac{1-|x|}{1+|x|}, \qquad 1-\left|\frac{y-v_{n_k}}{1-\bar{y}v_{n_k}}\right|^2<2(1-|v_{n_k}|)\frac{1+|y|}{1-|y|};$$

puisque $\frac{1-|v_{n_k}|}{1-|u_{n_k}|}\to 0$, on peut écrire pour n_k assez grand, x et y étant donnés :

$$1-\left|\frac{x-u_{n_k}}{1-\bar{x}u_{n_k}}\right|^2>1-\left|\frac{y-v_{n_k}}{1-\bar{y}v_{n_k}}\right|^2,$$

c'est-à-dire $\mathrm{E}(x, u_{n_k})<\mathrm{E}(y, v_{n_k})$; la formule (8.2) donne alors

$$\mathrm{E}[g(x, y), v_{n_k+1}]\leqq \mathrm{E}(y, v_{n_k});$$

en utilisant à nouveau (8.1) et faisant croître n_k indéfiniment, il vient

$$\frac{|e^{i\beta}-g(x, y)|^2}{1-|g(x, y)|^2}\leqq\frac{|e^{i\beta}-y|^2}{1-|y|^2},$$

c'est-à-dire que, quels que soient x et y, $g(x, y)$ est intérieur, au sens large, au cercle passant par le point y et tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité; or (*cf.* th. 1, n° 2) ce résultat est incompatible avec les hypothèses faites : $t^2(x)$ n'est pas la transformation identique quel que soit x, et la fonction $\eta(x)$ existe.

9. Étude du premier cas. — Dans ce cas, comme au n° 2, nous posons

$$\mathrm{X}=\frac{e^{i\alpha}+x}{e^{i\alpha}-x}, \qquad x=e^{i\alpha}\frac{\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}+1},$$

et nous remplaçons la transformation

$$(t) \qquad x_1 = f(x, y), \qquad y_1 = g(x, y),$$

opérant dans le bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$, par la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad \mathrm{X}_1 = \mathrm{F}(\mathrm{X}, y), \qquad y_1 = \mathrm{G}(\mathrm{X}, y),$$

opérant dans le domaine D : $\mathrm{Re}\,\mathrm{X} > 0$, $|y| < 1$. Par hypothèse, $\mathrm{Re}\,\mathrm{F}(\mathrm{X}, y) \geqq \mathrm{Re}\,\mathrm{X}$, donc la suite des itérées T_n vérifie $\mathrm{Re}\,\mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{X}, y) \geqq \mathrm{Re}\,\mathrm{F}_n(\mathrm{X}, y)$; la suite non décroissante des fonctions harmoniques $\mathrm{Re}\,\mathrm{F}_n(\mathrm{X}, y)$ a pour limite, uniforme sur tout compact, soit la constante $+\infty$, soit une fonction harmonique $\delta(\mathrm{X}, y)$ positive et finie. Dans le 1^er cas, $\mathrm{F}_n(\mathrm{X}, y) \to \infty$, donc $f_n(x, y) \to e^{i\alpha}$ quels que soient x et y.

Supposons donc $\delta(\mathrm{X}, y) < +\infty$, et posons

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{X}, y) = \mathrm{A}_n(\mathrm{X}, y) + i\mathrm{B}_n(\mathrm{X}, y);$$

on a

$$\mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X}, y) = \mathrm{B}_n(\mathrm{X}_1, y_1);$$

si $c = a + ib$ est une variable complexe auxiliaire, on a

$$\mathrm{Re}[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1] > 0 \qquad \text{et} \qquad |(1-c)y + cy_1| < 1$$

pour c réel compris entre 0 et 1, donc, le point (X, y) étant pris dans un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}$ et $\varepsilon > 0$ convenablement choisi, pour $-\varepsilon \leqq a \leqq 1 + \varepsilon$, $|b| \leqq \varepsilon$, conditions qui définissent dans le plan complexe c un domaine (d); dans ce domaine,

$$\mathrm{A}_n[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1]$$

sont deux fonctions harmoniques associées de la variable complexe c; on a donc

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{X}_1, y_1) - \mathrm{B}_n(\mathrm{X}, y) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{A}_n[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1]\,dc,$$

intégrale prise le long du segment $(0, 1)$. Or,

$$\mathrm{A}_n[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1] \to \delta[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1]$$

uniformément pour $(\mathrm{X}, y) \in \mathrm{K}$, $c \in (d)$, donc

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{A}_n[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1] \to \frac{\partial}{\partial b}\delta[(1-c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}_1,\ (1-c)y + cy_1]$$

uniformément pour $(\mathrm{X}, y) \in \mathrm{K}$, c réel compris entre 0 et 1; de là résulte que

$$\mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X}, y) - \mathrm{B}_n(\mathrm{X}, y) = \mathrm{B}_n(\mathrm{X}_1, y_1) - \mathrm{B}_n(\mathrm{X}, y)$$

a une limite $\sigma(X, y)$ uniformément pour $(X, y) \in K$; alors

$$F_{n+1}(X, y) - F_n(X, y) \to i\sigma(X, y)$$

uniformément sur tout compact, donc $\sigma(X, y)$ est une constante σ (³).

Si $\sigma \neq 0$, le fait que $B_{n+1}(X, y) - B_n(X, y) \to \sigma$ entraîne $B_n(X, y)$ infiniment grand équivalent à $n\sigma$, donc de nouveau

$$F_n(X, y) \to \infty, \qquad f_n(x, y) \to e^{i\alpha}.$$

10. Soit donc à étudier le cas $\sigma = 0$; posons (*cf.* n° 8) $u = v = 0$ et, de même que

$$f_n(0, 0) = u_n, \qquad F_n(1, 0) = U_n = P_n + iQ_n;$$

alors

$$P_n \to \delta(1, 0), \qquad Q_{n+1} - Q_n \to 0.$$

D'autre part,

$$u_n = e^{i\alpha}\frac{U_n - 1}{U_n + 1} \qquad \text{entraîne} \quad 1 - |u_n|^2 = \frac{4P_n}{(P_n+1)^2 + Q_n^2};$$

pour toute suite d'entiers croissants n_k telle que Q_{n_k} ait une limite, ou bien elle est finie, alors c'est aussi la limite de Q_{n_k+1}, donc $|u_{n_k}|$ et $|u_{n_k+1}|$ ont la même limite inférieure à 1, ou bien elle est infinie, Q_{n_k} et Q_{n_k+1} sont infiniment grands asymptotes, $1 - |u_{n_k}|$ et $1 - |u_{n_k+1}|$ sont infiniment petits équivalents.

Ainsi $\dfrac{1 - |u_{n+1}|}{1 - |u_n|} \to 1$; considérons seulement les n assez grands pour que

$$\frac{1 - |u_{n+1}|}{1 - |u_n|} < 1 + b' < 1 + b,$$

a et b étant les deux nombres positifs qui vérifient le lemme du n° 8; d'après ce lemme,

$$\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} < a \qquad \text{entraîne} \quad \frac{1 - |v_{n+1}|}{1 - |u_{n+1}|} > \frac{1+b}{1+b'}\,\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|}$$

et, d'autre part, d'après (8.4),

$$\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} \geq a \qquad \text{entraîne} \quad \frac{1 - |v_{n+1}|}{1 - |u_{n+1}|} > a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^2;$$

ainsi, le rapport $\dfrac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|}$ croît, au moins en progression géométrique, tant qu'il n'a pas dépassé la valeur a et, s'il l'a dépassée, il ne peut retomber au-dessous de la valeur $a\left(\dfrac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^2$; celle-ci est donc une borne inférieure du rapport pour n assez grand.

Le résultat obtenu :

$$\varliminf \frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} > 0,$$

(³) Ce qui précède est l'extension d'un raisonnement employé par M. Wolff [8] pour l'itération dans un demi-plan; même remarque un peu plus loin (n° 13).

joint à

$$\lim[(1-|u_n|)(1-|v_n|)]=0,$$

entraîne $|u_n|\to 1$; comme tous les points u_n sont intérieurs, au sens large, au cercle dont un diamètre a pour extrémités 0 et $e^{i\alpha}$, on doit avoir $u_n\to e^{i\alpha}$, et toutes les transformations limites τ sont de la forme

$$x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi(x, y).$$

Remarque. — Dans le cas particulier où la fonction $\eta(x)$ est une constante y_0, c'est-à-dire $g(x, y_0)\equiv y_0$, on peut écrire

$$E[g_{n+1}(x, y), y_0]\leqq E[g_n(x, y), y_0]$$

en appliquant (8.2) aux points $[f_n(x, y), g_n(x, y)]$, $[f_n(x, y), y_0]$ et à la fonction g; ainsi $E[g_n(x, y), y_0]$ a une limite pour x, y donnés; si donc il existe deux transformations limites :

$$(\tau) \qquad x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi(x, y);$$

$$(\tau') \qquad x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi'(x, y),$$

on a

$$E[\psi'(x, y), y_0]=E[\psi(x, y), y_0]$$

et, par suite,

$$\frac{\psi'(x, y)-y_0}{1-\bar{y}_0\psi'(x, y)}\equiv e^{i\omega}\frac{\psi(x, y)-y_0}{1-\bar{y}_0\psi(x, y)}.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, les fonctions $\psi(x, y)$, $\psi'(x, y)$ qui définissent deux transformations limites τ, τ' se déduisent l'une de l'autre par une substitution homographique conservant le cercle-unité; le 2^e exemple ci-dessous va nous montrer qu'il n'en est plus ainsi dans le cas général.

11. Exemples du premier cas. — 1° Soit la transformation

$$(t) \qquad \frac{x_1-1}{x_1+1}=\lambda\frac{x-1}{x+1}\,(0<\lambda<1), \qquad y_1=e^{i\gamma}xy,$$

pour laquelle $e^{i\alpha}=1$, $\eta(x)\equiv 0$: c'est un exemple du cas particulier qui vient d'être étudié; on a, à la $n^{\text{ième}}$ itération :

$$y_n=e^{in\gamma}xx_1\ldots x_{n-1}y;$$

comme $\dfrac{x_{n+1}-1}{x_n-1}\to\lambda$, $xx_1\ldots x_n$ a pour limite une fonction $\pi(x)$ holomorphe et $\not\equiv 0$; si $\dfrac{\gamma}{\pi}$ est irrationnel, les transformations limites τ sont toutes les transformations

$$x_1=1, \qquad y_1=e^{i\omega}y\,\pi(x).$$

2° Soit, dans le plan de la variable y, un domaine univalent Δ, contenu dans le cercle $|y|<1$, admettant un bout premier E tel que, C étant un cercle plein fermé centré en un point quelconque de E, chaque composante connexe de l'ensemble ouvert $\Delta - C$ ait une frontière sans point commun avec E : un tel domaine Δ se construit aisément, en prenant pour E un segment de droite ou un arc de cercle par exemple, par pliage indéfini, le long de E, d'une bande en accordéon. Soit $y=\eta(x)$ une correspondance conforme entre le cercle $|x|<1$ et le domaine Δ, dans laquelle le point $x=1$ ait pour image E, et considérons la transformation

$$(t) \qquad \frac{x_1-1}{x_1+1}=\lambda\frac{x-1}{x+1}\ (0<\lambda<1), \qquad y_1=\frac{y+\eta(x)}{2},$$

pour laquelle $e^{i\alpha}=1$ et $\eta(x)$ a le sens donné à cette notation depuis le n° 7. u étant choisi arbitrairement dans le cercle $|x|<1$, soit A l'arc de cercle d'extrémités ± 1 qui passe par u.

D'après le théorème de Faber sur les fonctions univalentes, pour tout point x_0 du cercle $|x|<1$, le domaine Δ contient le cercle

$$|y-\eta(x_0)|<\frac{(1-|x_0|^2)\,|\eta'(x_0)|}{4};$$

par suite

$$(1-|x|)\,\eta'(x)\to 0 \qquad \text{quand} \quad x\to 1;$$

en particulier le maximum de $|\eta'(x)|$ sur l'arc u_nu_{n+1} de A est $o\left(\frac{1}{1-|u_{n+1}|}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{|u_{n+1}-u_n|}\right)$ puisque

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{1-u_{n+1}}\to\frac{1-\lambda}{\lambda};$$

ainsi l'arc tracé dans Δ qui est l'image, par la transformation $y=\eta(x)$, de l'arc de A d'extrémités u_n, u_{n+1} a une longueur infiniment petite quand $n\to+\infty$.

L'ensemble d'accumulation de la suite des points $\eta(u_n)$, qui *a priori* est une partie de E, est E lui-même : si, en effet, un point y_0 de E n'était pas point d'accumulation de cette suite, on aurait

$$|\eta(u_n)-y_0|>\varepsilon>0$$

quel que soit n, donc on pourrait choisir n_0 tel que l'arc image, par $y=\eta(x)$, de l'arc de A d'extrémités u_{n_0}, 1 soit disjoint au cercle C : $|y-y_0|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$, donc tracé dans l'une des composantes connexes de l'ensemble ouvert $\Delta - C$, ce qui est absurde puisque la frontière de cette composante est sans point commun avec E.

D'autre part, on peut écrire

$$v_{n+1}-\eta(u_{n+1})=\frac{v_n-\eta(u_n)}{2}+[\eta(u_n)-\eta(u_{n+1})];$$

comme le crochet est un infiniment petit, si la suite des nombres $v_n - \eta(u_n)$ admet w comme point d'accumulation, elle admet aussi comme points d'accumulation $\frac{w}{2}$, $2w$ et, en recommençant le même raisonnement, $2^k w$ quel que soit l'entier k; or elle est bornée, donc $w = 0$, c'est-à-dire que $v_n - \eta(u_n) \to 0$.

Ainsi la suite v_n a les mêmes points d'accumulation que la suite $\eta(u_n)$: ces points forment l'ensemble E; les transformations limites τ sont donc de la forme $x_1 = 1$, $y_1 = \psi(x, y)$, avec une infinité de fonctions ψ distinctes, E étant le lieu des points $\psi(u, v)$. Pour qu'une fonction ψ soit une constante de module 1, il faut et il suffit que $|\psi(u, v)| = 1$; or on peut choisir pour E un arc de la circonférence $|y| = 1$, ou une corde de cette circonférence, etc.

On peut ajouter que, dans cet exemple, toutes les fonctions ψ sont des constantes, car l'ensemble E n'a pas de point intérieur.

12. Étude du second cas. — Dans ce cas, nous posons, non seulement

$$X = \frac{e^{i\alpha} + x}{e^{i\alpha} - x}, \qquad x = e^{i\alpha}\frac{X - 1}{X + 1},$$

mais aussi

$$Y = \frac{e^{i\beta} + y}{e^{i\beta} - y}, \qquad y = e^{i\beta}\frac{Y - 1}{Y + 1},$$

et nous remplaçons la transformation t, opérant dans le bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$, par la transformation

$$\text{(T)} \qquad X_1 = F(X, Y), \qquad Y_1 = G(X, Y),$$

opérant dans le domaine D : $\operatorname{Re} X > 0$, $\operatorname{Re} Y > 0$. Par hypothèse

$$\operatorname{Re} F(X, Y) \geqq \operatorname{Re} X \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} G(X, Y) \geqq \operatorname{Re} Y,$$

donc $\operatorname{Re} F_n(X, Y)$ et $\operatorname{Re} G_n(X, Y)$ forment deux suites non décroissantes de fonctions harmoniques; si l'une ou l'autre a pour limite $+\infty$,

$$f_n(x, y) \to e^{i\alpha} \qquad \text{ou} \qquad g_n(x, y) \to e^{i\beta}.$$

Supposons donc que les deux suites aient pour limites deux fonctions harmoniques $\delta(X, Y)$, $\delta'(X, Y)$ positives et finies; le raisonnement du n° 9 montre que

$$F_{n+1}(X, Y) - F_n(X, Y) \to i\sigma, \qquad G_{n+1}(X, Y) - G_n(X, Y) \to i\sigma',$$

σ et σ' étant deux constantes, et que, si l'une d'elles n'est pas nulle, on a de nouveau

$$f_n(x, y) \to e^{i\alpha} \qquad \text{ou} \qquad g_n(x, y) \to e^{i\beta}.$$

Montrons par l'absurde que l'une de ces conclusions est valable.

Sinon, il existerait deux suites partielles d'entiers croissants n_k, p_k telles que

$$f_{n_k}(x, y) \to \varphi(x, y), \qquad g_{p_k}(x, y) \to \psi(x, y),$$

avec

$$|\varphi(x, y)| < 1, \qquad |\psi(x, y)| < 1,$$

ou, en passant dans le domaine D :

$$F_{n_k}(X, Y) \to \Phi(X, Y), \qquad G_{p_k}(X, Y) \to \Psi(X, Y),$$

les fonctions Φ et Ψ étant finies; cela exige, d'une part, que

$$\delta(X, Y) = \mathrm{Re}\,\Phi(X, Y) \quad \text{et} \quad \delta'(X, Y) = \mathrm{Re}\,\Psi(X, Y)$$

soient finies, d'autre part, que $\sigma = \sigma' = 0$ et, par conséquent,

$$\Phi[F(X, Y), G(X, Y)] \equiv \Phi(X, Y), \qquad \Psi[F(X, Y), G(X, Y)] \equiv \Psi(X, Y).$$

13. Cela étant, posons $u = v = 0$ et, en conséquence,

$$F_n(1, 1) = U_n, \qquad G_n(1, 1) = V_n;$$

soit S_n le « segment de droite » qui joint, dans le domaine D, les points de coordonnées (U_n, V_n) et (U_{n+1}, V_{n+1}), c'est-à-dire le lieu, pour $0 \leqq t \leqq 1$, du point de coordonnées $(1-t)U_n + tU_{n+1}$, $(1-t)V_n + tV_{n+1}$, et soit

$$M_n = \sup_{S_n} \delta(X, Y).$$

Si $\Omega(X, Y)$ est holomorphe sur D et $\mathrm{Re}\,\Omega(X, Y) > 0$, on a

$$\left|\frac{\Omega(X', Y) - \Omega(X, Y)}{\Omega(X', Y) + \overline{\Omega(X, Y)}}\right| \leqq \left|\frac{X' - X}{X' + \overline{X}}\right|$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{\Omega(X', Y) - \Omega(X, Y)}{X' - X}\right| \leqq \left|\frac{\Omega(X', Y) + \overline{\Omega(X, Y)}}{X' + \overline{X}}\right|,$$

d'où, en faisant tendre X′ vers X :

$$|\Omega'_X| \leqq \frac{\mathrm{Re}\,\Omega}{\mathrm{Re}\,X} \quad \text{et, de même,} \quad |\Omega'_Y| \leqq \frac{\mathrm{Re}\,\Omega}{\mathrm{Re}\,Y}.$$

Dans ces inégalités, on peut poser $\Omega = \Phi$, d'où

$$(13.1) \qquad |\Phi'_X(X, Y)| \leqq \frac{M_n}{\mathrm{Re}\,U_n}, \qquad |\Phi'_Y(X, Y)| \leqq \frac{M_n}{\mathrm{Re}\,V_n} \qquad \text{pour} \quad (X, Y) \in S_n;$$

on peut aussi poser $\Omega = \Phi - F$, d'où

$$(13.2) \qquad \left|\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial X}(X, Y)\right| \leqq \frac{\delta(X, Y) - \mathrm{Re}\,X}{\mathrm{Re}\,X}, \qquad \left|\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial Y}(X, Y)\right| \leqq \frac{\delta(X, Y) - \mathrm{Re}\,X}{\mathrm{Re}\,Y}.$$

De (13.1) résulte que

$$\left|\frac{d}{dt}\Phi[(1-t)U_n + tU_{n+1}, (1-t)V_n + tV_{n+1}]\right| \leqq M_n\left(\frac{|U_{n+1} - U_n|}{\mathrm{Re}\,U_n} + \frac{|V_{n+1} - V_n|}{\mathrm{Re}\,V_n}\right)$$

et, par suite, pour $(X, Y) \in S_n$:

$$\delta(X, Y) - \delta(U_n, V_n) \leqq |\Phi(X, Y) - \Phi(U_n, V_n)| \leqq M_n\left(\frac{|U_{n+1} - U_n|}{\operatorname{Re} U_n} + \frac{|V_{n+1} - V_n|}{\operatorname{Re} V_n}\right);$$

comme

$$\delta(U_n, V_n) = \lim_{p=+\infty} \operatorname{Re} F_{n+p}(U, V) = \delta(U, V),$$

comme d'autre part

$$U_{n+1} - U_n \to 0, \qquad V_{n+1} - V_n \to 0,$$

tandis que $\operatorname{Re} U_n \geqq 1$, $\operatorname{Re} V_n \geqq 1$, on a

$$\delta(U, V) \leqq M_n \leqq \frac{\delta(U, V)}{1 - \dfrac{|U_{n+1} - U_n|}{\operatorname{Re} U_n} - \dfrac{|V_{n+1} - V_n|}{\operatorname{Re} V_n}}, \qquad \text{donc} \quad M_n \to \delta(U, V).$$

On a ensuite, pour $(X, Y) \in S_n$:

$$\delta(X, Y) - \operatorname{Re} X \leqq M_n - \operatorname{Re} U_n = \varepsilon_n$$

[différence de deux quantités dont $\delta(U, V)$ est la limite commune]; de (13.2) résulte que

$$\left|\frac{d}{dt}(\Phi - F)[(1-t)U_n + tU_{n+1}, (1-t)V_n + tV_{n+1}]\right|$$
$$\leqq (M_n - \operatorname{Re} U_n)\left(\frac{|U_{n+1} - U_n|}{\operatorname{Re} U_n} + \frac{|V_{n+1} - V_n|}{\operatorname{Re} V_n}\right);$$

enfin

$$U_{n+2} - U_{n+1} = F(U_{n+1}, V_{n+1}) - F(U_n, V_n) = -(\Phi - F)(U_{n+1}, V_{n+1}) + (\Phi - F)(U_n, V_n)$$

donc

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| \leqq \varepsilon_n(|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|);$$

un raisonnement analogue, où Φ est remplacé par Ψ et F par G, donne

$$|V_{n+2} - V_{n+1}| \leqq \varepsilon'_n(|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|),$$

d'où

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| + |V_{n+2} - V_{n+1}| \leqq (\varepsilon_n + \varepsilon'_n)(|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|);$$

ainsi $|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|$ est le terme général d'une série convergente, donc U_n et V_n ont des limites finies, c'est-à-dire que le point (u_n, v_n) a pour limite un point intérieur au bicercle ([3]); ce résultat est en contradiction avec le théorème 3 (n° 5) et l'hypothèse, faite depuis le n° 6, que t est dépourvue de point double intérieur au bicercle. La propriété annoncée au n° 7 est donc établie.

14. Remarques sur le second cas. — 1° Pour chaque y, $f(x, y)$, considérée comme fonction de x seul, a au point $e^{i\alpha}$ une dérivée angulaire $\lambda(y)$ comprise entre 0 et 1 (*cf.* n° 1); comme le point $f(re^{i\alpha}, y)$ $(0 < r < 1)$ est intérieur, au

sens large, au cercle qui a pour extrémités d'un diamètre les points $re^{i\alpha}$ et $e^{i\alpha}$, on a

$$|e^{i\alpha} - f(re^{i\alpha}, y)| \leqq 1 - r \quad \text{quel que soit } y;$$

ainsi les fonctions $\dfrac{e^{i\alpha} - f(re^{i\alpha}, y)}{e^{i\alpha}(1-r)}$, holomorphes pour $|y| < 1$, sont bornées dans leur ensemble et $\lambda(y)$, limite de ces fonctions pour $r \to 1$, est holomorphe pour $|y| < 1$; c'est donc une constante λ. On montrerait de même que $g(x, y)$, considérée comme fonction de y seul, a pour dérivée angulaire au point $e^{i\beta}$ une constante μ comprise entre 0 et 1.

En passant dans le domaine D, on a

$$\operatorname{Re} F(X, Y) \geqq \frac{\operatorname{Re} X}{\lambda}, \qquad \operatorname{Re} G(X, Y) \geqq \frac{\operatorname{Re} Y}{\mu};$$

si donc $\lambda < 1$ et $\mu < 1$, on peut affirmer plus qu'il n'a été dit au n° 7 pour ce 2^e cas, à savoir que

$$f_n(x, y) \to e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad g_n(x, y) \to e^{i\beta}.$$

Mais il n'en est plus toujours ainsi (contrairement au cas d'une variable z) si l'une au moins des dérivées angulaires λ, μ est égale à 1, comme le montrent les exemples ci-dessous (n° 15).

2° Si une suite d'itérées de t a pour limite

$$(\tau) \qquad x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad \text{avec } |\psi(x, y)| < 1,$$

on a

$$\delta'(X, Y) = \operatorname{Re} \Psi(X, Y) < +\infty;$$

même conclusion avec une autre transformation limite :

$$(\tau') \qquad x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi'(x, y), \qquad |\psi'(x, y)| < 1,$$

donc $\Psi'(X, Y) - \Psi(X, Y)$ est une constante imaginaire pure, τ et τ' se déduisent l'une de l'autre par une substitution homographique conservant le cercle-unité, à savoir une substitution parabolique dont $e^{i\beta}$ est le point double. L'ensemble d'accumulation de la suite v_n, c'est-à-dire le lieu des points $\psi(u, v)$, est donc porté par une circonférence tangente en $e^{i\beta}$ au cercle-unité.

On a, d'autre part, dans le cas qui nous occupe, $\sigma' = 0$, c'est-à-dire

$$V_{n+1} - V_n \to 0, \qquad \text{d'où} \qquad v_{n+1} - v_n \to 0;$$

l'ensemble d'accumulation de la suite v_n est un continu, donc un arc (extrémités comprises) d'un cercle tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité; cet arc ne peut admettre $e^{i\beta}$ comme point intérieur à moins d'être le cercle tout entier. Le deuxième des exemples ci-dessous montre qu'à part cette restriction il est quelconque.

15. Exemples du second cas. — 1° Soit la transformation t qui a pour image dans le domaine D :

$$\text{(T)}\qquad X_1 = X + 2\sqrt{XY} + 1, \qquad Y_1 = Y + \frac{1}{X},$$

où $\left|\arg\sqrt{XY}\right| < \frac{\pi}{2}$, ce qui définit une fonction holomorphe sur D puisque l'on a toujours $|\arg(XY)| < \pi$. Considérons alors les nombres réels

$$U_n = F_n(1, 1), \qquad V_n = G_n(1, 1),$$

qui forment deux suites croissantes, et montrons par récurrence que $U_n \geqq (n+1)^2$: c'est vrai pour $U_1 = 4$ et, si c'est vrai pour U_n, comme $V_n > 1$, on a

$$U_{n+1} > (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2; \qquad \text{alors } V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_n} \leqq \frac{1}{(n+1)^2},$$

la suite V_n converge. Grâce à la 2° remarque ci-dessus, on peut affirmer que $G_n(X, Y)$ a une limite finie, tandis que $F_n(X, Y) \to \infty$.

Sur cet exemple, les deux dérivées angulaires λ, μ sont égales à 1 ; en effet, on a, quel que soit Y,

$$\frac{1}{\lambda} = \inf_{\operatorname{Re} X > 0} \frac{\operatorname{Re} X_1}{\operatorname{Re} X}$$

et, quel que soit X,

$$\frac{1}{\mu} = \inf_{\operatorname{Re} Y > 0} \frac{\operatorname{Re} Y_1}{\operatorname{Re} Y};$$

dans l'exemple qui suit, au contraire, $\lambda < 1$ et $\mu = 1$.

2° Soit, dans le plan de la variable Y, un domaine univalent Δ, contenu dans la bande $0 < \operatorname{Re} Y < a$, admettant un bout premier E tel que, C étant un cercle plein fermé centré en un point quelconque de E, chaque composante connexe de l'ensemble ouvert $\Delta - C$ ait une frontière sans point commun avec E; on suppose, en outre, d'une part, que E est un segment (dont une extrémité, ou les deux, peuvent être rejetées à l'infini) de la droite $\operatorname{Re} Y = a$, d'autre part que la frontière de Δ se compose de E et d'un arc simple de Jordan Γ, lieu du point $Y = H(t)$ ($|t| < 1$), la fonction $\operatorname{Re} H(t)$ étant décroissante pour $t < 0$, croissante pour $t > 0$ et tendant vers a quand $t \to \pm 1$. Soit $Y = \Theta(X)$ une correspondance conforme entre le demi-plan $\operatorname{Re} X > 0$ et le domaine Δ, dans laquelle le point $X = \infty$ ait pour image E et le point $X = 0$ pour image $Y = H(0)$, et considérons la transformation t qui a pour image dans D :

$$\text{(T)}\qquad X_1 = \frac{X}{\lambda}\,(0 < \lambda < 1), \qquad Y_1 = Y + \Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right) - \Theta(X).$$

Le point iw (w réel fini) a pour image, par $Y = \Theta(X)$, un point de Γ dont le paramètre $t = h(w)$ est fonction croissante de w, $h(0) = 0$; quand $X \to iw$,

$$\Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right) - \Theta(X) \to H\left[h\left(\frac{w}{\lambda}\right)\right] - H[h(w)],$$

dont la partie réelle est positive pour $w \neq 0$, nulle pour $w = 0$; si $X \to \infty$, $\mathrm{Re}\,\Theta(X) \to a$, ainsi que $\mathrm{Re}\,\Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right)$; on a donc

$$\mathrm{Re}\left[\Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right) - \Theta(X)\right] > 0 \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}\,X > 0,$$

et la transformation t relève de notre second cas. Pour la $n^{\text{ième}}$ itérée, on a

$$X_n = \frac{X}{\lambda^n}, \qquad Y_n = Y + \Theta\left(\frac{X}{\lambda^n}\right) - \Theta(X);$$

le raisonnement fait au n° 11 (ex. 2) montre que E est, pour X donné, l'ensemble d'accumulation de la suite des points $\Theta\left(\frac{X}{\lambda^n}\right)$; X et Y étant donnés, l'ensemble d'accumulation de la suite Y_n se déduit de E par la translation $Y - \Theta(X)$; avec les notations du n° 7, les fonctions $\psi(x, y)$ ne sont pas des constantes, $e^{i\beta}$ exceptée.

16. Étude du troisième cas.

Lemme 1. — *Il existe deux nombres $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ de module* 1 *et deux nombres positifs λ, μ possédant la propriété suivante : quels que soient les nombres ρ, ρ' compris entre ± 1 et tels que $\lambda \frac{1+\rho}{1-\rho} = \mu \frac{1+\rho'}{1-\rho'}$, si le point x est intérieur, au sens large, au cercle qui a pour extrémités d'un diamètre les points $e^{i\alpha}$, $\rho\, e^{i\alpha}$, et si le point y est intérieur, au sens large, au cercle qui a pour extrémités d'un diamètre les points $e^{i\beta}$, $\rho' e^{i\beta}$, alors les points $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont respectivement intérieurs, au sens large, à ces deux cercles.*

Considérons, dans le cercle-unité $|x| < 1$, la transformation analytique $x_1 = \xi[\eta(x)]$: si elle admettait un point double x_0 intérieur au cercle-unité, le point $[x_0, \eta(x_0)]$ serait un point double de t intérieur au bicercle, hypothèse écartée depuis le n° 6; dans ces conditions (*cf.* n° 1), la fonction $\xi[\eta(x)]$ admet, en un point $e^{i\alpha}$ de la circonférence-unité, une dérivée angulaire λ telle que $0 < \lambda \leqq 1$: quand $x \to e^{i\alpha}$, avec

$$|\arg(1 - e^{-i\alpha}x)| \leqq \theta < \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\frac{1 - |\xi[\eta(x)]|}{1 - |x|} \to \lambda, \quad \xi[\eta(x)] \to e^{i\alpha}.$$

D'autre part, les inégalités

$$\left|\frac{\eta(x) - \eta(0)}{1 - \overline{\eta(0)}\,\eta(x)}\right| \leqq |x|, \qquad \left|\frac{\xi(y) - \xi(0)}{1 - \overline{\xi(0)}\,\xi(y)}\right| \leqq |y|$$

entraînent

$$1 - |\eta(x)| \geqq \frac{1 - |\eta(0)|}{1 + |\eta(0)|}(1 - |x|), \qquad 1 - |\xi[\eta(x)]| \geqq \frac{1 - |\xi(0)|}{1 + |\xi(0)|}[1 - |\eta(x)|],$$

donc $\frac{1-|\eta(x)|}{1-|x|}$ a des limites d'indétermination positives et finies quand $x \to e^{i\alpha}$ dans l'angle $|\arg(1-e^{-i\alpha}x)| \leqq \theta$; choisissons dans cet angle une suite de points $x_k \to e^{i\alpha}$ tels que

$$\frac{1-|\xi[\eta(x_k)]|}{1-|x_k|} \to \lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{1-|\eta(x_k)|}{1-|x_k|} \to \mu,$$

μ étant positif et fini;

$$\xi[\eta(x_k)] \to e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad |\eta(x_k)| \to 1;$$

en nous bornant à une suite partielle (notée encore x_k), nous pouvons supposer que $\eta(x_k) \to e^{i\beta}$.

$e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, λ, μ étant ainsi définis, soient C et C' deux cercles répondant à l'énoncé du lemme, x et y deux points respectivement intérieurs, strictement, à ces deux cercles; pour k assez grand, x est intérieur au cercle de pseudo-centre $\xi[\eta(x_k)]$ passant par le point $\rho\xi[\eta(x_k)]$, y est intérieur au cercle de pseudo-centre $\eta(x_k)$ passant par le point $\rho'\eta(x_k)$; si l'on pose

$$\rho_k = \frac{(1-\rho)|\xi[\eta(x_k)]|}{1-\rho|\xi[\eta(x_k)]|^2}, \qquad \rho'_k = \frac{(1-\rho')|\eta(x_k)|}{1-\rho'|\eta(x_k)|^2},$$

les pseudo-rayons de ces deux cercles sont respectivement $\arg\operatorname{th}\rho_k$, $\arg\operatorname{th}\rho'_k$; soit encore

$$\delta_k = \operatorname{Max}(\arg\operatorname{th}\rho_k, \arg\operatorname{th}\rho'_k);$$

les inégalités

$$\mathrm{E}\{x, \xi[\eta(x_k)]\} < \delta_k, \qquad \mathrm{E}[y, \eta(x_k)] < \delta_k$$

entraînent, d'après (8.2),

$$\mathrm{E}\{f(x, y), \xi[\eta(x_k)]\} < \delta_k.$$

Or, quand $k \to +\infty$, on a

$$1-\rho_k \sim \frac{1+\rho}{1-\rho}\{1-|\xi[\eta(x_k)]|\} \sim \lambda\frac{1+\rho}{1-\rho}(1-|x_k|),$$

$$1-\rho'_k \sim \frac{1+\rho'}{1-\rho'}[1-|\eta(x_k)|] \sim \mu\frac{1+\rho'}{1-\rho'}(1-|x_k|);$$

ainsi $1-\rho'_k \backsim 1-\rho_k$, donc aussi $1-\operatorname{th}\delta_k \backsim 1-\rho_k$, d'où résulte que le cercle de pseudo-centre $\xi[\eta(x_k)]$, pseudo-rayon δ_k, cercle auquel le point $f(x, y)$ est intérieur, a pour limite C; ainsi le point $f(x, y)$ est intérieur, au sens large, à C.

D'autre part, pour k assez grand, x est aussi intérieur au cercle de pseudo-centre x_k passant par le point ρx_k; le pseudo-rayon de ce cercle est $\arg\operatorname{th}\rho''_k$, en posant

$$\rho''_k = \frac{(1-\rho)|x_k|}{1-\rho|x_k|^2},$$

d'où résulte

$$1-\rho''_k \sim \frac{1+\rho}{1-\rho}(1-|x_k|) \sim \frac{1-\rho'_k}{\lambda};$$

comme $\lambda \leqq 1$, si $\delta'_k = \operatorname{Max}(\operatorname{arg\,th}\rho''_k, \operatorname{arg\,th}\rho'_k)$, on a

$$1-\operatorname{th}\delta'_k \sim 1-\rho'_k.$$

Or les inégalités

$$\mathrm{E}(x, x_k) < \delta'_k, \qquad \mathrm{E}[y, \eta(x_k)] < \delta'_k$$

entraînent, d'après (8.2),

$$\mathrm{E}[g(x, y), \eta(x_k)] < \delta'_k;$$

le point $g(x, y)$, étant intérieur au cercle de pseudo-centre $\eta(x_k)$, pseudo-rayon δ'_k, qui a pour limite C′, est intérieur, au sens large, à C′.

17. Les points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ étant ainsi choisis, effectuons le même changement de variables qu'au 2^e cas (n° 12) et considérons la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad \mathrm{X}_1 = \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \qquad \mathrm{Y}_1 = \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

opérant dans le domaine D : $\operatorname{Re}\mathrm{X} > 0$, $\operatorname{Re}\mathrm{Y} > 0$. Les cercles dont parle l'énoncé du lemme 1 ont pour images, dans les demi-plans $\operatorname{Re}\mathrm{X} > 0$ et $\operatorname{Re}\mathrm{Y} > 0$ respectivement, deux droites

$$\operatorname{Re}\mathrm{X} = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{Y} = \text{const.},$$

ces deux constantes étant inversement proportionnelles à λ et μ; le lemme 1 se traduit donc par l'inégalité

$$\min[\lambda \operatorname{Re}\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mu \operatorname{Re}\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})] \geqq \min(\lambda \operatorname{Re}\mathrm{X}, \mu \operatorname{Re}\mathrm{Y}),$$

d'où résulte par itération que la suite $\min[\lambda \operatorname{Re}\mathrm{F}_n(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mu \operatorname{Re}\mathrm{G}_n(\mathrm{X}, \mathrm{Y})]$ est non décroissante; soit $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ sa limite.

Lemme 2. — *A tout point (u, v) du bicercle on peut associer un nombre $c(u, v) > 0$ tel que, pour les m vérifiant la condition $\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c$, on ait*

$$\lambda \operatorname{Re}\mathrm{F}_m(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \to \delta(\mathrm{U}, \mathrm{V}).$$

[(U, V) est l'image dans D du point (u, v); le lemme est vide, d'une part si la condition $\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c$ n'est remplie que pour un nombre fini de m, d'autre part si $\delta(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = +\infty$].

D'après le lemme du n° 8, il existe deux nombres positifs $a(u, v)$, $b(u, v)$ tels que

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|} < a \quad \text{entraîne} \quad \frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|} \geqq 1+b\,;$$

si l'on pose $c = a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2$, d étant défini par (8.3), alors, d'après (8.4),

$$\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c \quad \text{entraîne} \quad \frac{1-|v_{m-1}|}{1-|u_{m-1}|} < a,$$

donc

$$\frac{1-|v_m|}{1-|v_{m-1}|} \geqq 1+b.$$

D'autre part,

$$(1-|u_m|)(1-|v_m|) \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c \quad \text{entraînent} \quad |v_m| \to 1\,;$$

de même $|v_{m-1}| \to 1$. Nous supposons désormais la condition $\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c$ remplie pour une infinité de m et nous considérons seulement, parmi ces m, ceux qui sont assez grands pour que $\frac{1-|v_m|^2}{1-|v_{m-1}|^2} \geqq 1+b'$, $b' > 0$; soit $\delta(U, V)$ fini.

Si l'on pose $G_m(U, V) = V_m = P'_m + iQ'_m$, on a donc

$$\frac{P'_m}{(P'_m+1)^2+Q'^2_m}\,\frac{(P'_{m-1}+1)^2+Q'^2_{m-1}}{P'_{m-1}} \geqq 1+b'\,;$$

d'autre part, l'inégalité $E(v_m, v_{m-1}) \leqq d$ se traduit dans le demi-plan $\operatorname{Re} Y > 0$ par

$$\left|\frac{V_m - V_{m-1}}{V_m + \overline{V_{m-1}}}\right| \leqq \operatorname{th} d,$$

d'où résulte

$$\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d} P'_{m-1} \leqq P'_m \leqq \frac{1+\operatorname{th} d}{1-\operatorname{th} d} P'_{m-1}, \qquad |Q'_m - Q'_{m-1}| \leqq \frac{2\operatorname{th} d}{1-\operatorname{th}^2 d} P'_{m-1}.$$

Enfin, puisque tous les v_n sont intérieurs, au sens large, à un même cercle tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité,

$$|v_m| \to 1, \quad |v_{m-1}| \to 1 \quad \text{entraîne} \quad v_m \to e^{i\beta}, \quad v_{m-1} \to e^{i\beta},$$

c'est-à-dire

$$V_m \to \infty, \qquad V_{m-1} \to \infty.$$

Cela étant, supposons que, pour les m considérés ici, on ait

$$\underline{\lim}\, P'_m = \frac{\delta(U, V)}{\mu}\,;$$

pour une suite partielle m_k,

$$P'_{m_k} \to \frac{\delta(U, V)}{\mu}\,;$$

P'_{m_k} étant borné, P'_{m_k-1} l'est aussi, Q'_{m_k} et Q'_{m_k-1} sont infiniment grands, mais leur différence est bornée; alors

$$\frac{(P'_{m_k-1}+1)^2+Q'^2_{m_k-1}}{(P'_{m_k}+1)^2+Q'^2_{m_k}} \to 1, \qquad \underline{\lim}\, \frac{P'_{m_k}}{P'_{m_k-1}} \geqq 1+b', \qquad \overline{\lim}\, P'_{m_k-1} < \frac{\delta(U, V)}{\mu},$$

ce qui est contraire à la définition de $\delta(U, V)$. Ainsi, pour les m considérés ici,

$$\underline{\lim}[\mu \operatorname{Re} G_m(U, V)] > \delta(U, V),$$

ce qui entraîne

$$\lim[\lambda \operatorname{Re} F_m(U, V)] = \delta(U, V).$$

18. Supposons désormais qu'une suite partielle $f_{n_k}(x, y)$ a une limite de module < 1 : quel que soit le choix du point (u, v), u_{n_k} a une limite de module < 1; comme

$$(1-|u_{n_k}|)(1-|v_{n_k}|) \to 0, \qquad |v_{n_k}| \to 1,$$

donc, pour k assez grand $[k \geqq k_0(u, v)]$, $\dfrac{1-|v_{n_k}|}{1-|u_{n_k}|}$ est inférieur au nombre $c(u, v)$ fourni par le lemme 2; d'après ce lemme

$$\lambda \operatorname{Re} F_{n_k}(X, Y) \to \delta(X, Y)$$

quels que soient X et Y; comme la famille de fonctions harmoniques $\operatorname{Re} F_n(X, Y)$ est normale, cette convergence est uniforme sur tout compact et $\delta(X, Y)$ est harmonique. On a aussi

$$\lambda \operatorname{Re} F_{n_k+1}(X, Y) \to \delta(X, Y), \qquad \text{car} \quad \delta[F(X, Y), G(X, Y)] = \delta(X, Y).$$

Le point (u, v) étant choisi une fois pour toutes, reprenons les nombres a et b fournis par le lemme du n° 8; le nombre c du lemme 2 (n° 17) est, on l'a vu,

$$c = a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2 < a;$$

considérons donc, en supposant qu'il y en ait une infinité, les m vérifiant

$$(18.1) \qquad a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^4 \leqq \frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2.$$

Soit m_k une suite de tels m pour laquelle la suite de fonctions harmoniques $\operatorname{Re} F_{m_k}(X, Y)$ converge uniformément sur tout compact; la limite de cette suite est une fonction harmonique (ou $\equiv +\infty$)

$$\gamma(X, Y) \geqq \frac{\delta(X, Y)}{\lambda};$$

mais, d'après le lemme 2,

$$\gamma(U, V) = \frac{\delta(U, V)}{\lambda};$$

alors, d'après le principe du maximum, la fonction harmonique

$$\gamma(X, Y) - \frac{\delta(X, Y)}{\lambda} \equiv 0.$$

Comme la famille des fonctions harmoniques $\operatorname{Re} F_m(X, Y)$ est normale, pour les m considérés

$$\lambda \operatorname{Re} F_m(X, Y) \to \delta(X, Y)$$

uniformément sur tout compact, donc aussi

$$\lambda \operatorname{Re} F_{m+1}(X, Y) \to \delta(X, Y).$$

Le raisonnement du n° 9 montre alors que $F_{m+1}(X, Y) - F_m(X, Y)$ a une limite constante imaginaire pure $i\sigma$.

En particulier, en posant

$$F_m(U, V) = U_m = P_m + iQ_m,$$

on a

$$P_m \to \frac{\delta(U, V)}{\lambda}, \qquad P_{m+1} \to \frac{\delta(U, V)}{\lambda}, \qquad Q_{m+1} - Q_m \to \sigma;$$

(18.1) et $(1 - |u_m|)(1 - |v_m|) \to 0$ entraînent $|u_m| \to 1$, donc

$$u_m \to e^{i\alpha}, \qquad U_m \to \infty, \qquad |Q_m| \to +\infty;$$

$$1 - |u_m|^2 = \frac{4P_m}{(P_m + 1)^2 + Q_m^2} \qquad \text{et} \qquad 1 - |u_{m+1}|^2$$

sont infiniment petits équivalents, $\dfrac{1 - |u_{m+1}|}{1 - |u_m|} \to 1$; considérons seulement, parmi les m vérifiant (18.1), ceux qui sont assez grands pour que

$$\frac{1 - |u_{m+1}|}{1 - |u_m|} < 1 + b.$$

Comme, d'autre part, d'après le lemme du n° 8,

$$\frac{1 - |v_{m+1}|}{1 - |v_m|} \geqq 1 + b,$$

on a

$$\frac{1 - |v_{m+1}|}{1 - |u_{m+1}|} > \frac{1 - |v_m|}{1 - |u_m|};$$

ainsi, à partir d'une valeur m considérée ici, le rapport $\dfrac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|}$ croît tant qu'il vérifie (18.1), c'est-à-dire tant qu'il n'a pas dépassé la valeur $a\left(\dfrac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^2$; et, s'il l'a dépassée, d'après (8.4) il ne peut retomber au-dessous de la valeur $a\left(\dfrac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^4$; on a donc

$$\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} \geqq a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^4 \qquad \text{pour } n \geqq m;$$

ce résultat, joint à $(1-|u_n|)(1-|v_n|)\to 0$, entraîne $|u_n|\to 1$, alors que, depuis le n° 18, nous supposons qu'une suite partielle $f_{n_k}(x, y)$ a une limite de module < 1.

19. Il était donc absurde de supposer la condition (18.1) remplie pour une infinité de m : pour n assez grand, le rapport $\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}$ ne vérifie pas (18.1), mais, d'après (8.4), deux valeurs consécutives de ce rapport ne peuvent être, l'une inférieure à $a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^4$, l'autre au moins égale à $a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2$; on a donc, ou bien

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}\geqq a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2$$

pour n assez grand, ce qui est impossible pour la raison donnée à la fin du n° 18, ou bien, pour n assez grand,

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}< a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^4 < a,$$

donc, d'après le lemme du n° 8,

$$\frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|}\geqq 1+b, \qquad \text{d'où} \qquad 1-|v_n|\to+\infty,$$

ce qui est absurde. C'est donc l'hypothèse faite au début du n° 18 qui est absurde : $f_n(x, y)\to e^{i\alpha}$, et de même $g_n(x, y)\to e^{i\beta}$. La propriété annoncée au n° 7 est donc établie, et du même coup le théorème 4 (n° 6).

Remarque. — De là résulte l'unicité des nombres $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ répondant au lemme 1 : on a vu (n° 16) que $e^{i\alpha}$ est le point double attractif de la transformation $x_1=\xi[\eta(x)]$; $e^{i\beta}$ est donc le point double attractif de la transformation $y_1=\eta[\xi(y)]$. Par contre, λ et μ ne jouent pas le même rôle : d'après la définition de λ et μ au n° 16 et les théorèmes classiques sur la dérivée angulaire,

$$\frac{e^{i\beta}-\eta(x)}{e^{i\alpha}-x}\to e^{i(\beta-\alpha)}\mu \qquad \text{quand} \quad x\to e^{i\alpha}, \qquad |\arg(1-e^{-i\alpha}x)|\leqq\theta<\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{e^{i\alpha}-\xi(y)}{e^{i\beta}-y}\to e^{i(\alpha-\beta)}\frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{quand} \quad y\to e^{i\beta}, \qquad |\arg(1-e^{-i\beta}y)|\leqq\theta'<\frac{\pi}{2}.$$

λ est donc aussi la dérivée angulaire de la fonction $\eta[\xi(y)]$ au point $e^{i\beta}$.

20. Exemples du troisième cas. — 1° Soit la transformation t qui a pour image dans D :

$$\text{(T)} \qquad X_1=Y+\frac{1}{X}, \qquad Y_1=X+\frac{1}{Y}.$$

T n'a pas de point double dans D, car un tel point vérifierait

$$X-Y=\frac{1}{X}=-\frac{1}{Y};$$

la transformation $T^1(Y)$ (pour cette notation, *cf.* n° 2) admet le point double

$$\Xi(Y) = \frac{Y + \sqrt{Y^2+4}}{2},$$

le radical étant positif pour Y réel positif, $T^2(X)$ admet le point double

$$H(X) = \frac{X + \sqrt{X^2+4}}{2};$$

la définition de λ et μ donnée dans la remarque ci-dessus montre que $\lambda = \mu = 1$. Pour $X = Y$, on a, quel que soit n, $X_n = Y_n$ obtenu par itération, dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,X > 0$, de la transformation $X_1 = X + \frac{1}{X}$; dans cette itération, $\mathrm{Re}\,X_n \to +\infty$ [8]. Nous avons donc ici $\mathrm{Re}\,F_n(X, Y) \to +\infty$ pour $X = Y$, donc quels que soient X et Y puisque les $\mathrm{Re}\,F_n(X, Y)$ forment une famille normale : $\delta(X, Y)$ est la constante $+\infty$.

2° Posons, au contraire,

$$(T) \qquad X_1 = Y + \frac{1}{X} + i, \qquad Y_1 = X + \frac{1}{Y} + i.$$

Si l'on itère, dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,X > 0$, la transformation

$$X_1 = X + \frac{1}{X} + i,$$

$\mathrm{Re}\,X_n$ a une limite finie [8]; ici

$$\delta(X, Y) < +\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. Caratheodory, *Math. Ann.*, t. **97**, 1927, p. 76.
[2] H. Cartan, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. **10**, 1931, p. 1 et *Math. Zeit.*, t. **35**, 1932, p. 760.
[3] A. Denjoy, *C. R. Acad. Sc.*, t. **182**, 1926, p. 255.
[4] M. Hervé, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, t. **68**, 1951, p. 125, chap. IV.
[5] S. Lattès, *Bull. Soc. math. France*, t. **39**, 1911, p. 309.
[6] E. Lévi, *Annali di Mat.*, 3e série, t. **17**, 1909, p. 61 et **18**, 1911, p. 69.
[7] G. Valiron, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. **55**, 1931, p. 105.
[8] J. Wolff, *Bull. Soc. math. France*, t. **57**, 1929, p. 195.