Annales scientifiques de l'É.N.S.

R. Pallu de la Barrière

Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 4 (1953), p. 381-401
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_4_381_0>

ALGÈBRES UNITAIRES ET ESPACES D'AMBROSE

PAR R. PALLU DE LA BARRIÈRE.

Introduction.

Le présent travail répond à différentes préoccupations :

A. Montrer les rapports entre la théorie des « L^2 system » de W. Ambrose [1] (1) et celle des algèbres unitaires de R. Godement et Nakano [8] et [11].

B. Montrer que les axiomes des « L^2 system » sont surabondants et donner des axiomes indépendants dont les axiomes de W. Ambrose non conservés se déduisent. Il y a ainsi identité entre « L^2 system » et « espaces d'Ambrose ».

C. Profiter des notions introduites en vue de l'étude précédente pour donner des démonstrations simplifiées de certains résultats connus tels que le théorème de commutation (th. 2).

D. Montrer que dans le cas de l'espace d'Ambrose défini sur l'espace des fonctions de carré intégrable sur un groupe localement compact unimodulaire par l'involution $f \to f^\star [f^\star(x) = \overline{f(x^{-1})}]$ et le produit de composition, la définition abstraite et opérationnelle de l'espace d'Ambrose coïncide avec la définition naturelle (th. 6).

E. Donner quelques compléments relatifs aux produits tensoriels d'algèbres unitaires et d'espaces d'Ambrose (§ 3).

F. Donner dans le cas général une rapide discussion des propriétés centrales des espaces d'Ambrose permettant une classification (§ 4). Cette étude est directement inspirée du cas particulier traité dans [7].

La lecture de ce Mémoire ne suppose pas celle préalable des Mémoires de W. Ambrose, R. Godement et Nakano sur le sujet, mais par contre la connaissance des résultats fondamentaux sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens; en particulier ceux relatifs à leur classification. Les notations sont conformes à celles de [14].

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

La démonstration de l'un de nos résultats a été publiée dans une précédente Note [15]. On trouvera ici une démonstration sensiblement simplifiée grâce aux judicieuses remarques de J. Dixmier dont les conseils nous ont permis par ailleurs d'importantes améliorations dans l'exposé de nos résultats.

1. Définitions et propriétés générales.

Définition 1. — *Une algèbre unitaire est une ★-algèbre* $\mathbf{A}$ *munie d'une structure d'espace préhilbertien au moyen d'un produit scalaire* $\langle u, v \rangle$ *et vérifiant les axiomes suivants :*

(AU 1) $\langle u, v \rangle = \langle v^\star, u^\star \rangle$;
(AU 2) $\langle uv, w \rangle = \langle v, u^\star w \rangle$;
(AU 3) *Pour tout* $u \in \mathbf{A}$ *l'opérateur* $v \to vu$ *est continu pour la topologie forte définie par la structure préhilbertienne ;*
(AU 4) *Les éléments de la forme* uv *sont denses dans* $\mathbf{A}$.

Remarque 1. — Étant donné une algèbre unitaire $\mathbf{A}$, la relation $uv = (v^\star u^\star)^\star$ montre que l'opérateur $v \to uv$ est pour tout $u \in \mathbf{A}$ un opérateur borné pour la topologie forte. On a, d'autre part, pour $u, v, w \in \mathbf{A}$:

$$\langle uv, w \rangle = \langle w^\star, v^\star u^\star \rangle = \langle vw^\star, u^\star \rangle = \langle u, wv^\star \rangle$$

et par suite la relation :

$$\langle uv, w \rangle = \langle u, wv^\star \rangle.$$

Ces deux remarques rétablissent la symétrie entre les propriétés de la multiplication à gauche et de la multiplication à droite dans les algèbres unitaires.

Donnons maintenant quelques définitions et notations nécessaires à l'introduction de la notion d'espace d'Ambrose.

Étant donné un espace hilbertien H, nous appellerons multiplication partiellement définie sur H, toute application d'une partie de $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ dans H notée $(x, y) \to xy$. Pour tout $x \in \mathrm{H}$, nous noterons L_x et R_x, les applications partielles $y \to xy$ et $y \to yx$. Aucune hypothèse même de linéarité n'est faite *a priori* sur ces applications.

Définition 2. — *Étant donné un espace hilbertien* H *muni d'une involution* $x \to x^\star$ *et d'une multiplication partiellement définie* $(x, y) \to xy$, *on appelle algèbre unitaire sous-jacente à* H, *tout sous-espace vectoriel* $\mathbf{A}$, *dense dans* H *tel que l'involution, la multiplication et la structure hilbertienne de* H *induisent sur* $\mathbf{A}$ *une structure d'algèbre unitaire (ceci suppose en particulier que* $\mathbf{A}$ *soit stable pour l'involution et que le produit de deux éléments de* $\mathbf{A}$ *soit toujours défini et soit élément de* $\mathbf{A}$).

Remarque 2. — Si $\mathbf{A}$ est une algèbre unitaire sous-jacente à H, la restriction de R_u (et de L_u) à $\mathbf{A}$ est pour $u \in \mathbf{A}$ un opérateur linéaire et continu.

DÉFINITION 3. — *Étant donné un espace hilbertien* H *possédant une involution et une multiplication partiellement définie, une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$, *sous-jacente à* H *sera dite régulière si :*

(i) R_u *est continu et partout défini pour* $u \in \mathbf{A}$ [2];

(ii) *Si* l_x *est la restriction de* L_x *à* $\mathbf{A}$, *on a pour tout* $x \in H$, $L_x = l_{x^*}^*$.

DÉFINITION 4. — *Un espace hilbertien* H *possédant une involution et une multiplication partiellement définie est dit espace d'Ambrose s'il vérifie l'axiome suivant :*

(EA) *Il existe une algèbre unitaire sous-jacente à* H *et régulière.*

Par la suite H étant un espace d'Ambrose, nous désignerons toujours par $\mathbf{A}$ une algèbre unitaire sous-jacente à H et régulière. Nous montrerons plus tard que toute algèbre unitaire sous-jacente à H est régulière.

Remarque 3. — D'après les définitions, L_x est pour tout $x \in H$ un opérateur linéaire fermé dont l'ensemble de définition est dense dans H. Pour tout $u \in \mathbf{A}$, l'opérateur l_u est borné (rem. 1). Il en est de même de L_u qui est donc le plus petit prolongement fermé de l_u. L'opérateur L_{u^*} est également borné (comme $u^* \in \mathbf{A}$.) On a alors

$$L_u^* = (l_{u^*}^*)^* = l_{u^*}^{**} = L_{u^*}.$$

On démontrera plus loin que pour tout $x \in H$, on a $L_x^* = L_{x^*}$.

Remarque 4. — Le produit xy est toujours défini si l'un des facteurs est élément de $\mathbf{A}$.

LEMME 1. — *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \langle ux, y\rangle = \langle x, u^*y\rangle & \multirow{2}{*}{} \\
\text{(ii)} & \langle xu, y\rangle = \langle x, yu^*\rangle & \Big\} \ \textit{pour} \quad x, y \in H \quad \textit{et} \quad u \in \mathbf{A}; \\
\text{(iii)} & \langle xu, v\rangle = \langle u, x^*v\rangle & \\
\text{(iv)} & \langle ux, v\rangle = \langle u, vx^*\rangle & \Big\} \ \textit{pour} \quad x \in H \quad \textit{et} \quad u, v \in \mathbf{A}; \\
\text{(v)} & (ux)^* = x^*u^* & \textit{pour} \quad x \in H \quad \textit{et} \quad u \in \mathbf{A}; \\
\text{(vi)} & \langle x, y^*u\rangle = \langle y, ux^*\rangle & \textit{pour} \quad x, y \in H \quad \textit{et} \quad u \in \mathbf{A}.
\end{array}$$

Demonstration. — La première égalité découle de la relation $L_u^* = L_{u^*}$ pour $u \in \mathbf{A}$. Pour la deuxième, on remarquera que les deux membres sont continus par rapport à x et y et que l'égalité est vérifiée pour $x, y \in \mathbf{A}$. La troisième égalité découle de la relation $l_x \subset l_{x^*}^*$. Pour la quatrième et la cinquième, on

---

[2] Ceci entraîne $\mathbf{A} \subset D_{L_x}$ pour tout $x \in H$.

remarquera que les deux membres sont continus par rapport à x et que l'égalité est vérifiée pour $x \in \mathbf{A}$. Enfin on vérifiera tout d'abord l'égalité (vi) pour $x, y \in \mathbf{A}$, ce qui donne

$$\langle x, y^\star u \rangle = \langle yx, u \rangle = \langle y, ux^\star \rangle$$

et l'on remarquera que les deux membres sont continus par rapport à x et y.

Notation. — Pour tout $x \in \mathrm{H}$, nous noterons r_x la restriction de R_x à $\mathbf{A}$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a $\mathrm{R}_x = r^\star_{x^\star}$.*

Démonstration. — La relation $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{R}_x}$ est équivalente à $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{L}_y} = \mathrm{D}_{l^\star_{y^\star}}$, c'est-à-dire à « $\langle x, y^\star u \rangle$ est pour $u \in \mathbf{A}$, une forme semi-linéaire continue en u » ou bien d'après la relation (vi) du lemme 1 à « $\langle y, ux^\star \rangle$ est pour $u \in \mathbf{A}$ une forme semi-linéaire continue en u », c'est-à-dire à $y \in \mathrm{D}_{r^\star_{x^\star}}$. On a donc $\mathrm{D}_{\mathrm{R}_x} = \mathrm{D}_{r^\star_{x^\star}}$. Soit alors $y \in \mathrm{D}_{r^\star_{x^\star}}$. On a $\mathrm{R}_x y = \mathrm{L}_y x = l^\star_{y^\star} x$, c'est-à-dire pour tout $u \in \mathbf{A}$:

$$\langle \mathrm{R}_x y, u \rangle = \langle x, y^\star u \rangle.$$

D'autre part :

$$\langle r^\star_{x^\star} y, u \rangle = \langle y, r_{x^\star} u \rangle = \langle y, ux^\star \rangle.$$

La relation (vi) du lemme 1 entraîne alors que

$$r^\star_{x^\star} y = \mathrm{R}_x y.$$

COROLLAIRE. — *L'opérateur R_x est pour tout $x \in \mathrm{H}$, linéaire fermé et son ensemble de définition est partout dense.*

Remarque 5. — Les propriétés démontrées ont rétabli la symétrie entre la propriété de la multiplication à gauche et de la multiplication à droite dans les espaces d'Ambrose. L'absence de symétrie dans les axiomes est dû au souci d'utiliser des axiomes indépendants. En réalité sur les exemples les axiomes se vérifient aussi bien sur l'une ou l'autre des multiplications. Nous démontrerons plus tard des propriétés dont la vérification directe serait au contraire laborieuse.

Par la suite toute propriété sur la multiplication à gauche se transposera immédiatement à la multiplication à droite et nous ne ferons les démonstrations que dans le premier cas.

LEMME 2. — *Pour tout $x \in \mathrm{H}$ on a $\mathrm{R}_x = \mathrm{S}\mathrm{L}_{x^\star}\mathrm{S}$ (et $\mathrm{L}_x = \mathrm{S}\mathrm{R}_{x^\star}\mathrm{S}$), S étant l'involution sur H.*

Démonstration. — La relation $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{R}_x} = \mathrm{D}_{r^\star_{x^\star}}$ est équivalente à

$$\text{« } \langle y, r_{x^\star} u \rangle = \langle y, ux^\star \rangle = \langle xu^\star, y^\star \rangle$$

est une forme semi-linéaire continue par rapport à u pour $u \in \mathbf{A}$ », c'est-à-dire à « $\langle xu, y^\star \rangle$ est pour $u \in \mathbf{A}$ une forme linéaire continue par rapport à u », c'est-à-dire à $y^\star \in D_{l_x^\star} = D_{L_{x^\star}}$. Les deux opérateurs R_x et $SL_{x^\star}S$ ont donc même ensemble de définition. Soit alors $y \in D_{R_x}$. On a pour tout $u \in \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\langle R_x y, u \rangle = \langle yx, u \rangle = \langle y, ux^\star \rangle &= \langle xu^\star, y^\star \rangle \\ &= \langle u^\star, x^\star y^\star \rangle = \langle (x^\star y^\star)^\star, u \rangle = \langle SL_{x^\star}Sy, u \rangle\end{aligned}$$

et par suite :

$$R_x y = SL_{x^\star}Sy.$$

Corollaire. — *Si xy est défini, $y^\star x^\star$ est défini et l'on a $(xy)^\star = y^\star x^\star$.*

Supposons que L_x soit continu. Il en est de même de l_x et, par suite, de $L_{x^\star} = l_x^\star$ et de R_x. Inversement si R_x est continu, il en est de même de L_x. Cette remarque conduit à la définition suivante :

Définition 5. — *Un élément $a \in$ H est dit borné si L_a ou R_a est continu.*

Comme L_x est fermé, on peut encore dire qu'un élément a est borné si et seulement si L_a (ou R_a) est partout défini.

Théorème 1. — *L'ensemble $\mathbf{B}$ des éléments bornés est une algèbre unitaire sous-jacente à* H.

Démonstration. — Le produit xy étant linéaire en x et y, $\mathbf{B}$ est un sous-espace vectoriel de H. On a $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Par suite, $\mathbf{B}$ est dense dans H. La relation $R_x = SL_{x^\star}S$ montre que $\mathbf{B}$ est stable pour l'involution. Si $a \in \mathbf{B}$, L_a est partout défini. Le produit de deux éléments de $\mathbf{B}$ est ainsi toujours défini. On démontre alors la relation

$$a(bc) = (ab)c \qquad \text{pour} \quad a, b, c \in \mathbf{B}$$

en remarquant que la relation est vérifiée pour a, b, $c \in \mathbf{A}$ et que les deux membres sont continus par rapport à chaque variable. Cette relation entraîne que le produit de deux éléments de $\mathbf{B}$ est un élément de $\mathbf{B}$ et que la multiplication dans $\mathbf{B}$ est associative. Les autres axiomes des $\star$-algèbres

$$(a+b)c = ac + bc, \qquad a(b+c) = ab + ac,$$
$$(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b) \quad (\text{pour } \alpha \text{ complexe}) \qquad \text{et} \qquad (ab)^\star = b^\star a^\star$$

se démontrent en remarquant que les deux membres sont toujours séparément continus par rapport aux variables qui y figurent et que les relations sont vérifiées pour a, b, $c \in \mathbf{A}$. L'ensemble $\mathbf{B}$ est donc une $\star$-algèbre. Muni du produit scalaire défini par H, $\mathbf{B}$ est une algèbre unitaire. L'axiome (AU 2), c'est-à-dire la relation $\langle ab, c \rangle = \langle b, a^\star c \rangle$ se démontre en remarquant que l'égalité est valable pour a, b, $c \in \mathbf{A}$ et que les deux membres sont séparément continus par rapport à a, b, c. Les axiomes (AU 1) et (AU 3) sont vérifiés trivialement et (AU 4) découle de l'inclusion $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Lemme 3. — *Si $x \in$ H et si $xu = 0$ pour tout $u \in \mathbf{A}$, on a $x = 0$.*

Démonstration. — Soit x tel que $xu = 0$ pour $u \in \mathbf{A}$. On aura pour u, $v \in$ A :

$$\langle xu, v \rangle = \langle x, vu^* \rangle = 0.$$

Les éléments vu^* étant denses dans H, on a $x = 0$.

Notation. — Nous désignerons par $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ les $\star$-algèbres faiblement fermées (avec unité) engendrées par les opérateurs L_u et R_u pour $u \in \mathbf{A}$ et par $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{R}'$ les $\star$-algèbres commutantes.

Lemme 4. — *Les $\star$-algèbres $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont respectivement les adhérences faibles de l'ensemble des opérateurs L_u et de l'ensemble des opérateurs R_u pour $u \in \mathbf{A}$.*

Démonstration. — L'adhérence faible de l'ensemble des opérateurs L_u étant une $\star$-algèbre, il suffit de démontrer que son plus grand projecteur E est égal à 1. Soit $\mathcal{M}$ le sous-espace final de E. Pour tout $u \in \mathbf{A}$ et tout $x \in$ H on a $L_u x \in \mathcal{M}$. En particulier, on a $uv \in \mathcal{M}$ pour u, $v \in \mathbf{A}$. Ceci entraîne $\mathcal{M} =$ H en raison de (AU 4). On a donc E $= 1$.

Remarque 6. — L'axiome (AU 4) est essentiel pour l'exactitude du lemme 4 et, par suite, du théorème 2. Inversement l'axiome (AU 4) des algèbres unitaires peut souvent se vérifier plus facilement après complétion de l'espace. Supposons, par exemple, qu'une $\star$-algèbre soit munie d'une structure d'espace préhilbertien à l'aide d'un produit scalaire vérifiant les axiomes (AU 1), (AU 2) et (AU 3) des algèbres unitaires. Sur l'espace complété H on peut définir l'opérateur R_u linéaire partout défini et continu tel que $R_u v = vu$ pour $v \in \mathbf{A}$. Si 1 est faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs R_u, on peut affirmer que l'axiome (AU 4) est vérifié, c'est-à-dire que $\mathbf{A}$ est une algèbre unitaire. Soit, en effet, $x \in$ H tel que $\langle x, uv \rangle = 0$. Ceci peut s'écrire $\langle R_v x, u \rangle = 0$ pour tout u, $v \in \mathbf{A}$. L'opérateur 1 étant faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs R_v, ceci entraîne $\langle x, u \rangle = 0$ et, par suite, $x = 0$.

Lemme 5. — *Pour tout* $T \in \mathbf{R}'$ *et tout* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $Ta \in$ B et $TL_a = L_{Ta}$ (*et pour tout* $T \in \mathbf{L}'$, $TR_a = R_{Ta}$).

Démonstration. — Soit $T \in \mathbf{R}'$, $a \in \mathbf{B}$ et $u \in \mathbf{A}$. On a :

$$TL_a u = TR_u a = R_u T a = L_{Ta} u.$$

L'opérateur TL_a étant borné, il en est de même de l_{Ta}, donc de L_{Ta} (Ta est donc borné) et l'on a (L_{Ta} étant fermé) : $TL_a = L_T$.

Lemme 6. — *Pour tout $a \in \mathbf{B}$, on a $L_a \in \mathbf{L}$ et $R_a \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. — Nous devons montrer que si $T \in \mathbf{L}'$, T permute à L_a pour

$a \in \mathbf{B}$, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{T}L_a b = L_a \mathrm{T}b$ pour a, $b \in \mathbf{B}$. L'égalité est vérifiée pour $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$. Or les relations

$$\mathrm{T}L_a b = \mathrm{T}R_b a \qquad \text{et} \qquad L_a \mathrm{T} b = R_{\mathrm{T}b} a$$

montrent ($\mathrm{T}b$ étant borné) que les deux membres sont continus par rapport à a. L'égalité est donc vérifiée pour $a \in \mathbf{B}$.

Remarque 7. — Le lemme montre que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ peuvent être considérées comme les adhérences faibles de l'ensemble des opérateurs L_a et R_a pour $a \in \mathbf{B}$ et que, par suite, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont indépendants de $\mathbf{A}$.

THÉORÈME 2 (3). — *On a* $\mathbf{L} = \mathbf{R}'$ (*et* $\mathbf{R} = \mathbf{L}'$).

Démonstration. — On a naturellement $\mathbf{L} \subset \mathbf{R}'$ (4). Soit $\mathrm{T} \in \mathbf{R}'$ et $\mathfrak{T}$ l'application $\mathrm{A} \to \mathrm{TA}$ définie pour tout opérateur A borné. On a $\mathfrak{T}(L_a) \in \mathbf{L}$ pour tout $a \in \mathbf{B}$ (d'après le lemme 5) et, par suite, $\mathfrak{T}$ étant faiblement continue et $\mathbf{L}$ faiblement fermée,

$$\mathfrak{T}(1) = \mathrm{T} \in \mathbf{L}.$$

Remarque 8. — Les relations

$$R_a = \mathrm{S} L_{a^*} \mathrm{S} \qquad \text{et} \qquad L_a = \mathrm{S} R_{a^*} \mathrm{S} \qquad \text{pour} \quad a \in \mathbf{B}$$

montrent par un passage à la limite évident que $\mathrm{S}\mathbf{L}\mathrm{S} = \mathbf{R}$.

LEMME 7. — *Pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *on a* $L_x \eta \mathbf{L}$ *et* $R_x \eta \mathbf{R}$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $l_x R_u \supset R_u l_x$ pour $u \in \mathbf{A}$. On a, en effet, pour tout $v \in D_{l_x} = \mathbf{A}$:

$$R_u v = v u \in \mathbf{A} = D_{l_x}, \qquad l_x R_u v = l_x(vu) = x(vu) \qquad \text{et} \qquad R_u l_x v = (xv)u = x(vu)$$

L'opérateur l_x^{**}, prolongement fermé minimum de l_x permute également aux opérateurs R_u pour $u \in \mathbf{A}$. Étant fermé, il permute donc à tout opérateur appartenant à l'adhérence faible de l'ensemble des opérateurs R_u, c'est-à-dire à tout opérateur de $\mathbf{R}$. On a donc $l_x^{**} \eta \mathbf{L}$. Pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a $L_x = l_{x^*}^{*} = (l_{x^*}^{**})^*$. Comme $l_{x^*}^{**} \eta \mathbf{L}$, on a $L_x \eta \mathbf{L}$.

Remarque 9. — En général, on n'a pas $l_x \eta \mathbf{L}$, $\mathbf{A}$ n'étant pas nécessairement stable par $\mathbf{R}$.

LEMME 8. — *Pour tout* $\mathrm{A} \in \mathbf{L}$ *et tout* $x \in \mathrm{H}$, *on a* $\mathrm{A}L_x \subset L_{\mathrm{A}x}$ (*et pour tout* $\mathrm{A} \in \mathbf{R}$, $\mathrm{A}R_x \subset R_{\mathrm{A}x}$).

---

(3) Ce théorème démontré par F. J. Murray et J. von Neumann dans certains cas particuliers [10] a été généralisé par Segal [16], Takenouchi [17] et Godement [7].

(4) Cette relation traduit l'associativité de la multiplication dans $\mathbf{A}$.

Démonstration. — Soit $y \in D_{L_x}$. On a

$$AL_x y = AR_y x = R_y Ax = L_{Ax} y.$$

THÉORÈME 3. — *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L_x^\star = L_{x^\star}$ (*et* $R_x^\star = R_{x^\star}$).

Démonstration. — Pour tout $x \in H$, posons $L'_x = l_x^{\star\star} = \bar{l}_x$. On a $L'_x \subset L_x$ et $L_x^\star = L'_{x^\star}$. Nous devons donc démontrer que $L_x = L'_x$ pour tout $x \in H$. Remarquons tout d'abord que pour $A \in \mathbf{L}$, la relation $AL_x \subset L_{Ax}$ donne en prenant les restrictions des deux membres à $\mathbf{A}$: $Al_x = l_{Ax}$. On a donc

$$L'_{Ax} = \bar{l}_{Ax} = \overline{Al_x} = \overline{AL'_x} \quad (5).$$

D'autre part, $L'_x \eta \mathbf{L}$. Posons $L'_x = VA$, avec $V \in \mathbf{L}_{\text{p.i.}}$ et $A \eta \mathbf{L}$, $A = A^\star \geqq 0$. On a alors

$$A = V^\star L'_x = \overline{V^\star L'_x} = L'_{V^\star x} \geqq 0.$$

Or $L'_{V^\star x} = L'^{\star}_{V^\star x} = L_{(V^\star x)^\star}$. Par suite (6)

$$V^\star x = (V^\star x)^\star \qquad \text{et} \qquad L_{V^\star x} = L'_{V^\star x}.$$

On peut donc écrire

$$A = L'_{V^\star x} = L_{V^\star x} \supset V^\star L_x,$$

ce qui entraîne $D_A \supset D_{L_x}$, c'est-à-dire $D_{L'_x} \supset D_{L_x}$. On a donc bien $L'_x = L_x$.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L_x = l_x^{\star\star}$ (*et* $R_x = r_x^{\star\star}$).

THÉORÈME 4. — *Étant donné une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$, *on peut définir sur l'espace complété* H *une structure d'espace d'Ambrose notée* $H(\mathbf{A})$ *et une seule telle que* $\mathbf{A}$ *soit une algèbre unitaire sous-jacente à* H *et régulière.*

Pour $u \in \mathbf{A}$, R_u *est donc continu, partout défini et tel que* $R_u v = vu$ *pour* $v \in \mathbf{A}$. *Si l'on pose, pour* $x \in H$, $l_x u = R_u x$ *pour tout* $u \in \mathbf{A}$, L_x *est caractérisé par l'une des propriétés suivantes équivalentes :*

(i) $$L_x = l_{x^\star}^\star,$$

(ii) $$L_x = l_x^{\star\star}.$$

Démonstration. — Pour tout $u \in \mathbf{A}$, on a $\|u^\star\| = \|u\|$. L'involution $u \to u^\star$ sur $\mathbf{A}$ se prolonge donc d'une façon unique en une involution $x \to x^\star$ sur H. Soit $u \in \mathbf{A}$. L'opérateur r_u défini pour tout $v \in \mathbf{A}$ par $r_u v = vu$ étant continu, se prolonge d'une façon unique en un opérateur R_u continu et partout défini sur H. En raison de la propriété (i) de la définition 3, R_u est nécessairement

---

(5) Pour A borné et B quelconque, on a en effet

$$A\bar{B} \subset \overline{AB} \subset \overline{(A\bar{B})},$$

(6) La relation $L_y = L'_z$ entraîne $yu = zu$ pour $u \in \mathbf{A}$ soit $(y - z)u = 0$ ou enfin $y = z$.

l'opérateur de multiplication à droite par u. La multiplication sur H sera déterminée par la donnée de L_x pour tout $x \in H$. Soit l_x l'opérateur $u \to xu$ défini pour $u \in \mathbf{A}$. On doit avoir $L_x \supset l_x$ et, d'autre part, d'après la propriété (ii) de la définition 3, $L_x = l^*_{x^*}$. On doit donc prendre $L_x = l^*_{x^*}$, ce qui est légitime sous réserve que $l^*_{x^*} \supset l_x$. Or cette relation s'écrit

$$\langle xu, v \rangle = \langle u, x^* v \rangle$$

pour tous u, $v \in \mathbf{A}$ et tout $x \in H$. Les deux membres de cette égalité étant continus par rapport à x et l'égalité étant vérifiée pour $x \in \mathbf{A}$, l'égalité est vérifiée pour tout $x \in H$. On peut donc poser $L_x = l^*_{x^*}$ et cette relation détermine la structure d'espace d'Ambrose unique $H(\mathbf{A})$ telle que $\mathbf{A}$ soit une algèbre unitaire sous-jacente à H et régulière.

D'après le corollaire du théorème 3, il est équivalent de poser $L_x = l^{**}_x$.

Compte tenu du théorème 4, le théorème 3 peut s'énoncer sous une forme ne faisant intervenir que les algèbres unitaires.

Corollaire des théorèmes 3 et 4. — *Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre unitaire et* H *l'espace complété. Pour tout* $u \in \mathbf{A}$, *prolongeons les opérateurs* $v \to uv$ *et* $v \to vu$ *en des opérateurs continus partout définis sur* H : L_u *et* R_u. *Pour tout* $x \in H$, *posons* $l_x u = R_u x$ *et* $r_x u = L_u x$ *pour* $u \in \mathbf{A}$. *On a* $l^{**}_x = l^*_{x^*}$ *et* $r^{**}_x = r^*_{x^*}$. *En appelant* L_x *et* R_x *ces deux opérateurs, on a*

$$L^*_x = L_{x^*} \quad \text{et} \quad R^*_x = R_{x^*}.$$

Lemme 9. — *Soit* H *un espace hilbertien muni d'une involution* $x \to x^*$ *et d'une multiplication partiellement définie. Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre unitaire sous-jacente à* H. *Si les deux propriétés suivantes sont réalisées :*

(i) *Pour tout* $u \in \mathbf{A}$, R_u *est partout défini et continu;*
(ii) *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L^*_x = L_{x^*}$,

alors H *est un espace d'Ambrose.*

Démonstration. — Soit l_x la restriction de L_x à $\mathbf{A}$. On a $l_x u = L_x u = R_u x$ pour $u \in \mathbf{A}$. D'après le corollaire des théorèmes 3 et 4, on a donc $l^{**}_x = l^*_{x^*}$ pour tout $x \in H$. Or L_x étant fermé, on a $L_x \supset l^{**}_x$ et de même $L_{x^*} \supset l^{**}_{x^*}$, ce qui entraine en prenant les adjoints : $L^*_{x^*} \subset l^*_{x^*}$, c'est-à-dire $L_x \subset l^{**}_x$. On a donc $L_x = l^{**}_x$, ce qui démontre que H est l'espace d'Ambrose $H(\mathbf{A})$.

Proposition 2. — *L'ensemble des algèbres unitaires sous-jacentes à* H *est identique à l'ensemble des sous-$\star$-algèbres de* $\mathbf{B}$ *denses dans* H.

Démonstration. — Soit $\mathbf{A}_1$ une sous-$\star$-algèbre de $\mathbf{B}$. Munie de la structure préhilbertienne induite par celle de H, $\mathbf{A}_1$ vérifie visiblement les axiomes (AU 1), (AU 2) et (AU 3). Pour démontrer (AU 4), considérons l'$\star$-algèbre $\mathbf{L}_1$, adhérence faible de l'ensemble des opérateurs L_u pour $u \in \mathbf{A}_1$. Soit E le plus grand projecteur de $\mathbf{L}_1$. On a pour tout $u \in \mathbf{A}_1$, $EL_u = L_u$ et comme $E \in \mathbf{L}$, cette relation devient en vertu du lemme 5 : $Eu = u$. Si $\mathbf{A}_1$ est dense dans H, on a $E = 1$. Si l'on a

$$\langle x, uv \rangle = \langle x, L_u v \rangle = 0$$

pour tous u, $v \in \mathbf{A}_1$, on a alors (1 étant faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs L_u) $\langle x, v \rangle = 0$ et, par suite, $x = 0$. Inversement toute algèbre unitaire sous-jacente à H est visiblement contenue dans $\mathbf{B}$ et en est une sous-$\star$-algèbre.

Théorème 5. — *Soit* H *un espace d'Ambrose. Toute algèbre unitaire sous-jacente à* H *est régulière.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{A}$ une algèbre unitaire sous-jacente à H, l_x la restriction de L_x à $\mathbf{A}$. On a $L_x \supset l_x$ et $L_x^\star = L_{x^\star}$. Par suite, d'après le lemme 9, H est identique à l'espace d'Ambrose $H(\mathbf{A})$. L'algèbre unitaire $\mathbf{A}$ est donc régulière.

Corollaire 1. — *Étant donné une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$, *il existe sur l'espace complété* H *une structure d'espace d'Ambrose et une seule* $H(\mathbf{A})$ *telle que* $\mathbf{A}$ *soit une algèbre unitaire sous-jacente à* $H(\mathbf{A})$.

Corollaire 2. — *Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre unitaire et* $\mathbf{A}_1$ *une sous-$\star$-algèbre de* $\mathbf{A}$, *dense dans* $\mathbf{A}$. *L'algèbre* $\mathbf{A}_1$ *est une algèbre unitaire et les espaces d'Ambrose* $H(\mathbf{A})$ *et* $H(\mathbf{A}_1)$ *définis par* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *sont identiques.*

Démonstration. — Soit $H(\mathbf{A})$ l'espace d'Ambrose défini par $\mathbf{A}$. L'$\star$-algèbre $\mathbf{A}_1$ est une sous-$\star$-algèbre de $\mathbf{A}$, donc de l'algèbre unitaire des éléments bornés. Par suite, $\mathbf{A}_1$ est une algèbre unitaire (prop. 2). On a, de plus,

$$H(\mathbf{A}) = H(\mathbf{A}_1).$$

2. Un exemple.

Étant donné un ensemble localement compact Z muni d'une mesure de Radon, nous aurons à considérer les espaces vectoriels suivants :

L, espace des fonctions continues complexes à support compact;

L^p, espace des fonctions complexes de $p^{\text{ième}}$ puissance intégrable muni de la norme

$$\| f \|_p = \left[\int | f(x) |^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}};$$

L^∞, espace des fonctions complexes mesurables et essentiellement bornées, muni de la norme

$$\| f \|_\infty = \operatorname*{vrai\,max}_{x \in Z} | f(x) |;$$

L_∞, espace des fonctions complexes continues telles que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des éléments x pour lesquels $|f(x)| \geqq \varepsilon$ soit compact.

Soit G un groupe localement compact unimodulaire et dx la mesure de Haar sur G; pour f, $g \in L^2$, on peut définir le produit de composition $f \star g$. On a

$$f \star g(x) = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy \qquad \text{et} \qquad f \star g \in L_\infty.$$

Par suite $f \star g \in L^\infty$ et l'application $(f, g) \to f \star g$ est continue de $L^2 \times L^2$ dans L^∞.

Il est possible d'une façon naturelle de définir partiellement une multiplication sur L^2 : le produit de f et g sera défini si $f \star g \in L^2$ et sera égal dans ce cas à $f \star g$. Il existe, d'autre part, sur L^2 une involution $f \to f^\star$ définie par

$$f^\star(x) = \overline{f(x^{-1})}.$$

Théorème 6. — *L'espace hilbertien* L^2 *muni de la multiplication partiellement définie et de l'involution introduites précédemment est un espace d'Ambrose appelé espace d'Ambrose défini par* G *ou espace d'Ambrose* $L^2(G)$. *Les sous-espaces vectoriels* $L^1 \cap L^2$ *et* L *sont des algèbres unitaires sous-jacentes à* $L^2(G)$ (7).

Avant d'exposer la démonstration de ce théorème, démontrons le lemme suivant :

Lemme 10. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f \in L^\infty$ *soit élément de* L^2 *est que la forme semi-linéaire*

$$g \to \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

définie sur $L^1 \cap L^2$ *soit continue pour la topologie induite sur* $L^1 \cap L^2$ *par la topologie de* L^2.

Démonstration. — La condition est visiblement nécessaire. Inversement, si elle est réalisée, on a pour tout $g \in L^1 \cap L^2$

$$\left| \int f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqq k \left[\int |g(x)|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

k étant un nombre réel positif. Pour tout ensemble compact K, on aura en

(7) Ambrose ([1], th. 2) a énoncé le premier ce théorème. Outre que certains points de sa démonstration nous ont paru obscurs, cet auteur fait jouer dans ses démonstrations à l'algèbre unitaire L un rôle tel que le caractère naturel de la définition de la multiplication dans $L^2(G)$ n'y apparaît nullement. Ce dernier inconvénient se retrouve chez Mautner [9] qui a esquissé une construction à l'aide d'une autre algèbre unitaire sous-jacente à $L^2(G)$.

prenant $g(x) = f(x)$ pour $x \in K$ et $g(x) = 0$ pour $x \notin K$

$$\int_K f(x)\overline{f(x)}\, dx \leq k \left[\int_K |f(x)|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire

$$\int_K |f(x)|^2\, dx \leq k^2.$$

Par suite, K étant arbitraire :

$$\int |f(x)|^2\, dx \leq k^2.$$

On a donc bien $f \in L^2$.

Démonstration du théorème 6. — Les propriétés classiques du produit de composition montrent immédiatement que $L^1 \cap L^2$, muni du produit scalaire de L^2, du produit de composition et de l'involution considérée, est une algèbre unitaire. Soit H l'espace d'Ambrose défini par cette algèbre unitaire. Nous avons à montrer que la multiplication sur H (notée $f,\ g \to fg$) coïncide (tant au point de vue de l'ensemble de définition qu'au point de vue de la valeur du produit) avec la multiplication naturelle considérée.

Remarquons tout d'abord que si $f \in L^1 \cap L^2$ et $g \in L^2$, fg est défini, $f \star g \in L^2$ et $fg = f \star g$, l'égalité étant vraie pour $g \in L_1 \cap L_2$ et les deux membres étant continus par rapport à g : le premier membre d'après la définition de l'espace d'Ambrose associé à une algèbre unitaire, le deuxième d'après la relation

$$\| f \star g \| \leq \| f \|_1 \| g \|.$$

Remarquons ensuite que pour $f,\ g \in L^2$ et $h \in L^1 \cap L^2$, on a :

$$\int f \star g(x)\, \overline{h(x)}\, dx = \langle g, f^\star h \rangle.$$

En effet, l'égalité a lieu pour $f,\ g \in L^1 \cap L^2$ et les deux membres sont continus par rapport au couple (f, g) (le premier membre en raison de la continuité de l'application $f,\ g \to f \star g$ de $L^2 \times L^2$ dans L^∞).

La condition nécessaire et suffisante pour que fg soit défini est alors que la forme semilinéaire $h \to \langle g, f^\star h \rangle$, c'est-à-dire $h \to \int f \star g(x) \bar{h}(x)\, dx$ définie pour $h \in L^1 \cap L^2$ soit continue (pour la topologie induite par L^2), autrement dit que $f \star g \in L^2$ (d'après le lemme 10). On a alors

$$\langle fg, h \rangle = \langle g, f^\star h \rangle = \int f \star g(x)\, \bar{h}(x)\, dx$$

et, par suite, $fg = f \star g$.

L'espace d'Ambrose $L^2(G)$ est donc l'espace d'Ambrose défini par l'algèbre unitaire $L^1 \cap L^2$. L'$\star$-algèbre L étant une sous-$\star$-algèbre de $L^1 \cap L^2$ dense dans H est donc une algèbre unitaire sous-jacente à $L^2(G)$.

3. Produits tensoriels (8).

Soit H et H_1 deux espaces préhilbertiens. Soit u, $u' \in H$ et v, $v' \in H_1$. Les applications

$$(u, u') \to \langle u, v \rangle \langle u', v' \rangle \quad \text{et} \quad (v, v') \to \langle u, v \rangle \langle u', v' \rangle$$

sont respectivement bilinéaire et bisemilinéaire (9) dans $H \times H_1$. Il existe donc une forme sesquilinéaire et une seule, $\langle U, V \rangle$, sur le produit tensoriel algébrique $H \otimes H_1$, telle que

$$\langle u \otimes v, u' \otimes v' \rangle = \langle u, u' \rangle \langle v, v' \rangle.$$

Cette forme sesquilinéaire est positive et $\langle U, U \rangle = 0$ entraîne $U = 0$. Elle définit donc sur l'espace vectoriel $H \otimes H_1$ une structure d'espace préhilbertien appelée produit tensoriel des espaces préhilbertiens H et H_1 ou, en abrégé, espace préhilbertien $H \otimes H_1$ (10).

Étant donné deux espaces préhilbertiens H et H_1 et deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ de H et H_1, il est aisé de vérifier que l'identification canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ avec un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $H \otimes H_1$ est compatible avec les structures préhilbertiennes introduites sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ et $H \otimes H_1$. Donc l'espace préhilbertien $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien $H \otimes H_1$ et il est facile de voir que si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont respectivement denses dans H et H_1, il en est de même de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ dans $H \otimes H_1$.

Si H et H_1 sont deux espaces hilbertiens, nous noterons $H \hat{\otimes} H_1$ le complété de l'espace préhilbertien $H \otimes H_1$, c'est-à-dire l'espace hilbertien produit tensoriel des espaces hilbertiens H et H_1.

Si A et B sont deux opérateurs continus opérant dans deux espaces préhilbertiens H et H_1, $A \otimes B$ (qui opère dans l'espace préhilbertien $H \otimes H_1$) est continu. Si H et H_1 sont hilbertiens, $A \otimes B$ se prolonge donc à $H \hat{\otimes} H_1$. Nous noterons $A \hat{\otimes} B$ ce prolongement.

Les applications $A \to A \hat{\otimes} 1$ et $B \to 1 \hat{\otimes} B$ sont des isomorphismes d'$\star$-algèbres faiblement fermées d'opérateurs et sont donc ultrafortement continues (11).

---

(8) Pour les définitions et notations utilisées dans ce paragraphe, *cf.* [2], chapitre III.

(9) La considération de l'espace « conjugué » $\overline{V}$ d'un espace vectoriel complexe V [$\overline{V}$ a même loi de groupe que V, mais les scalaires y opèrent suivant l'application $(\lambda, x) \to \overline{\lambda} x$ de $C \times V$ sur V] permet de ramener la considération des applications semilinéaires à celles d'applications linéaires et, par suite, d'appliquer les méthodes habituelles en matière de produits tensoriels.

(10) Toute indication de structure devant un symbole $A \otimes B$ implique que des structures homologues sont considérées sur A et B. Cette indication pourra être sous-entendue tant que les structures considérées sur A et B restent inchangées.

(11) *Cf.* [6], th. 3, cor. 2. On trouvera du reste une démonstration particulière au cas présent dans [12].

Comme on a $A \hat{\otimes} B = (A \hat{\otimes} 1)(1 \hat{\otimes} B)$, l'application bilinéaire $(A, B) \to A \hat{\otimes} B$ est séparément ultrafortement continue.

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *deux* $\star$*-algèbres. Il existe sur l'algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$, *une involution* $U \to U^\star$ *définie par*

$$U^\star = \sum_i u_i^\star \otimes u_i'^\star \qquad \textit{pour} \quad U = \sum_i u_i \otimes u_i'.$$

Démonstration. — L'application à définir n'est autre que le produit tensoriel des involutions sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_1$, ce qui assure son existence. On a visiblement $U^{\star\star} = U$ pour tout $U = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$. Pour

$$U = \sum_j u_i \otimes u_i' \qquad \text{et} \qquad V = \sum_j v_j \otimes v_j',$$

on a

$$(UV)^\star = \sum_{i,j} (u_i v_j')^\star \otimes (u_i' v_j')^\star = \sum_{i,j} v_j^\star u_i^\star \otimes v_j'^\star u_i' = V^\star U^\star.$$

L'application $U \to U^\star$ est donc bien une involution sur l'algèbre $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$.

DÉFINITION 6. — *Étant donné deux* $\star$*-algèbres* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$, *l'algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ *munie de l'involution définie par la proposition 3 est appelée produit tensoriel des* $\star$*-algèbres* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ (*ou en abrégé* $\star$*-algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$).

PROPOSITION 4. — *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *deux algèbres unitaires. L'*$\star$*-algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ *munie de la structure d'espace préhilbertien* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ *est une algèbre unitaire.*

Démonstration. — Pour $U = \sum_i u_i \otimes u_i'$ et $V = \sum_j v_j' \otimes v_j'$, on a :

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i,j} \langle u_i, v_j \rangle \langle u_i', v_j' \rangle = \sum_{i,j} \langle v_j^\star, u_i^\star \rangle \langle v_j'^\star, u_i'^\star \rangle = \langle V^\star, U^\star \rangle.$$

Ceci démontre (AU 1). On a, d'autre part, pour $W = \sum_k w_k \otimes w_k'$:

$$\begin{aligned}\langle UV, W \rangle &= \sum_{i,j,k} \langle u_i v_j, w_k \rangle \langle u_i' v_j', w_k' \rangle \\ &= \sum_{i,j,k} \langle v_j, u_i^\star w_k \rangle \langle v_j', u_i'^\star w_k' \rangle = \langle V, U^\star W \rangle.\end{aligned}$$

Ceci démontre (AU 2).

Soit $u \in \mathbf{A}$, $u' \in \mathbf{A}_1$, $U \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ et l_u, $l_{u'}$, l_U les opérateurs de multiplication à gauche par u, u' et U dans $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$. On a $l_{u \otimes u'} = l_u \otimes l_{u'}$ et, par suite, $l_{u \otimes u'}$ est continu. Il en sera de même de l_U, ce qui démontre (AU 3).

Pour démontrer (AU 4), considérons les espaces hilbertiens H, H_1 et $H \hat{\otimes} H_1$

complétés des espaces préhilbertiens $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$. Soit L_u, $L_{u'}$, L_U les prolongements continus de l_u, $l_{u'}$, l_U à H, H_1, $H\hat{\otimes}H_1$. On a

$$L_{u\otimes u'}=L_u\hat{\otimes}L_{u'}=(L_u\hat{\otimes}1)(1\hat{\otimes}L_{u'}).$$

Les opérateurs unités dans H et H_1 sont respectivement adhérents à l'ensemble des opérateurs L_u et $L_{u'}$. L'application bilinéaire $(L_u, L_{u'})\to L_u\otimes L_{u'}$ étant séparément ultrafortement continue, l'opérateur unité dans $H\hat{\otimes}H_1$ est ultrafortement adhérent à l'ensemble des opérateurs $L_{u\otimes u'}$, ce qui démontre (AU 4).

DÉFINITION 7. — *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *deux algèbres unitaires. L'*$\star$*-algèbre* $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$ *munie de la structure d'espace préhilbertien* $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$ *est appelée produit tensoriel des algèbres unitaires* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *(ou en abrégé algèbre unitaire* $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$*).*

PROPOSITION 5. — *Soit* H *et* H_1 *deux espaces d'Ambrose et* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ *deux algèbres unitaires sous-jacentes à* H *et* H_1. *L'espace d'Ambrose défini par l'algèbre unitaire* $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$ *est indépendant de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$.

Démonstration. — Soit $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_1$ les algèbres des éléments bornés de H et H_1. L'algèbre unitaire $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$ est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire $\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}_1$, dense dans $\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}_1$. Les espaces d'Ambrose définis par $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}_1$ sont donc identiques (cor. 2 du théorème 5).

DÉFINITION 8. — *On appelle produit tensoriel de deux espaces d'Ambrose* H *et* H_1 *(ou en abrégé espace d'Ambrose* $H\hat{\otimes}H_1$*) l'espace d'Ambrose défini par le produit tensoriel de deux algèbres unitaires sous-jacentes à* H *et* H_1.

Remarque. — Si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_1$ sont les algèbres unitaires des éléments bornés de H et H_1, $\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}_1$ n'est en général pas l'algèbre unitaire des éléments bornés de $H\hat{\otimes}H_1$.

PROPOSITION 6. — *Soit* G *et* G_1 *deux groupes localement compacts unimodulaires. L'espace d'Ambrose défini par* $G\times G_1$ *est le produit tensoriel des espaces d'Ambrose définis par* G *et* G_1.

Démonstration. — Notons dy la mesure de Haar sur G, dy' la mesure de Haar sur G_1, $dY=dy\,dy'$ la mesure de Haar sur $G\times G_1$. L'espace hilbertien $L^2(G\times G_1)$ s'identifie d'une manière canonique bien connue au produit tensoriel des espaces hilbertiens $L^2(G)$ et $L^2(G_1)$. Nous avons simplement à vérifier que sur l'algèbre unitaire $L(G)\otimes L(G_1)$ qui est dense dans $L^2(G\times G_1)$, l'involution $F\to F^\star$ vérifie $F^\star(X)=\bar{F}(X^{-1})$ et que la multiplication est le produit de composition. Or pour tout

$$F(X)=\sum_i f_i(x)f_i'(x') \qquad [f_i\in L(G),\ f_i'\in L(G_1),\ X=(x,x')],$$

on a

$$F^\star(X) = \sum_i \bar{f}_i(x^{-1})\bar{f}'_i(x'^{-1}) = \bar{F}(X^{-1})$$

et si $G(x) = \sum_j g_j(x) g'_j(x')$:

$$\begin{aligned}
FG(X) &= \sum_{i,j} [f_i \star g_j(x)](f'_i \star g'_i(x')) \\
&= \sum_{i,j} \int f_i(y) g_j(y^{-1}x)\,dy \int f'_i(y) g'_j(y'^{-1}x')\,dy' \\
&= \sum_{i,j} \iint f_i(y) f'_i(y') g_j(y^{-1}x) g'_j(y'^{-1}x')\,dy\,dy' \\
&= \int F(Y) G(Y^{-1}X)\,dY = F \star G(X) \qquad [Y = (y, y')].
\end{aligned}$$

4. Centre d'un espace d'Ambrose.

Définition 9. — *Un espace d'Ambrose* H *est dit commutatif s'il existe une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$ *commutative sous-jacente à* H.

Dans ce cas, on a $L_u = R_u$ pour $u \in \mathbf{A}$, donc $l_x = r_x$ pour $x \in H$ et, par suite, $L_x = R_x$. Si le produit xy est défini, il en est de même du produit yx et l'on a $yx = xy$. On a naturellement $\mathbf{R} = \mathbf{L}$. Toute algèbre unitaire sous-jacente à H est alors commutative.

Définition 10. — *On appelle* centre *d'un espace d'Ambrose* H *et l'on note* $H_\natural$ *l'ensemble des éléments* $x \in H$ *vérifiant l'une des propriétés suivantes équivalentes :*

(i) $xa = ax$ *pour tout* $a \in \mathbf{B}$;
(ii) $l_x = r_x$;
(iii) $L_x = R_x$.

Le centre $H_\natural$ est un sous-espace linéaire fermé [d'après la condition (i)] stable pour l'involution [d'après la condition (iii)].

Remarque 10. — Si $x \in H_\natural$, on a $L_x \eta \mathbf{L}^\natural$. En effet, on a $L_x \eta \mathbf{L}$ et $L_x \eta \mathbf{R}$. Comme L_x est fermé, ceci entraîne $L_x \eta \mathbf{L}^\natural$.

Notation. — Nous noterons P le projecteur sur $H_\natural$ et poserons $Px = x^\natural$ pour tout $x \in H$.

Proposition 7. — *Tout* $u \in H^\natural$ *est élément-trace pour* $\mathbf{L}$ (*et pour* $\mathbf{R}$).

Démonstration. — On a, en effet, pour $a, b \in \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}
\langle L_a L_b u, u \rangle &= \langle abu, u \rangle = \langle bu, a^\star u \rangle = \langle ub, ua^\star \rangle \\
&= \langle uba, u \rangle = \langle bau, u \rangle = \langle L_b L_a u, u \rangle.
\end{aligned}$$

LEMME 11. — *Soit* H_1 *un idéal bilatère* [12] *de* H. *On a*

$$(H_1)_\natural = H_\natural \cap H_1.$$

Démonstration. — On a visiblement $(H_1)_\natural \supset H_\natural \cap H_1$. Soit $x \in (H_1)_\natural$. On a $xa = ax$ pour $a \in \mathbf{B} \cap H_1$. Soit P_1 le projecteur sur H_1. Pour $a \in \mathbf{B}$, on a

$$xa = L_x P_1 a = R_x P_1 a = R_x a = ax.$$

Par suite, $x \in H_\natural$.

COROLLAIRE 1. — *On a* $P \in \mathbf{L} \smile \mathbf{R}$.

COROLLAIRE 2. — *Si* H_1 *et* H_2 *sont deux idéaux bilatères orthogonaux complémentaires de* H, *on a*

$$H_\natural = (H_1)_\natural \oplus (H_2)_\natural.$$

Notation. — Soit $H_f = \mathbf{L}(H_\natural) = \mathbf{R}(H_\natural)$ et $H_i = H \ominus H_f$. Les sous-espaces H_f et H_i sont deux idéaux bilatères orthogonaux complémentaires de H et l'on a $(H_f)_\natural = H_\natural$ et $(H_i)_\natural = 0$.

LEMME 12. — *Si* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $PL_a P = L_{a^\natural} P$.

Démonstration. — Le premier membre étant borné et le second fermé, il suffit de démontrer que $PL_a Pb = L_{a^\natural} Pb$ pour $b \in \mathbf{B}$. Or on a :

$$PL_a P b = PR_{Pb} a = R_{Pb} P a = R_{Pb} a^\natural = L_{a^\natural} P b.$$

LEMME 13. — *Si* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $a^\natural \in \mathbf{B}$.

Démonstration. — Si $a \in B$, $L_{a^\natural} P$ est borné d'après le lemme 12. Autrement dit, l'opérateur induit par $L_{a^\natural}$ sur $H_\natural$ est borné. Par suite, $L_{a^\natural}$ est borné sur H_f et comme $L_{a^\natural}$ est nul sur H_i, $L_{a^\natural}$ est borné. Par suite, $a^\natural \in \mathbf{B}$.

COROLLAIRE. — *Le sous-espace* $\mathbf{B} \cap H_\natural$ *est dense dans* $H_\natural$.

PROPOSITION 8. — *Le centre* $H_\natural$ *est un espace d'Ambrose commutatif.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $H_\natural$ est stable par tout opérateur R_x pour $x \in H_\natural$ puisque $R_x \eta \mathbf{L}^\natural$. Par suite, si $x, y \in H_\natural$ et si xy est défini, on a $xy \in H_\natural$. Il existe donc sur $H_\natural$ une multiplication partiellement définie. Il existe de plus sur $H_\natural$ une involution puisque $H_\natural$ est stable pour l'involution.

---

(12) Nous appellerons (conformément à la terminologie d'Ambrose) idéal bilatère d'un espace d'Ambrose H, tout sous-espace $H_1 \eta L^\natural$ muni de la structure d'espace d'Ambrose induite par H sur H_1. Cette définition se justifie par le fait que H_1 est stable par l'involution et par la multiplication à gauche et à droite par un élément borné quelconque.

L'ensemble $\mathbf{B} \cap H_\natural$ est une sous-algèbre de $\mathbf{B}$. Montrons que c'est une algèbre unitaire. Seul (AU 4) n'est pas immédiat à démontrer. Soit $\mathbf{M}$ l'adhérence faible de l'ensemble des opérateurs L_u pour $u \in \mathbf{B} \cap H_\natural$ et E le plus grand projecteur de $\mathbf{M}$. On a $E \in \mathbf{L}^\natural$. Pour tout $u \in \mathbf{B} \cap H_\natural$, on a $EL_u = L_u$, c'est-à-dire :

$$L_{Eu} = L_u, \qquad \text{d'où} \qquad Eu = u.$$

Soit $x \in H_\natural$ tel que $\langle x, uv \rangle = 0$ pour $u, v \in \mathbf{B} \cap H_\natural$. Ceci s'écrit $\langle x, L_u v \rangle = 0$. Comme E est faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs L_u, ceci entraîne $\langle x, Ev \rangle = 0$, c'est-à-dire $\langle x, v \rangle = 0$ et, par suite, $x = 0$. Donc $\mathbf{B} \cap H_\natural$ est une algèbre unitaire sous-jacente à $H_\natural$. Soit $\check{L}_x$ et $\check{R}_x$ les opérateurs de multiplication par x dans $H_\natural$ pour $x \in H_\natural$. L'opérateur $\check{L}_x$ n'est autre que l'opérateur induit par L_x sur $H_\natural$. Par suite, pour tout $a \in \mathbf{B} \cap H_\natural$, $\check{R}_a$ est borné et partout défini. De plus on a $\check{L}_x^\star = \check{L}_{x^\star}$ pour tout $x \in H_\natural$. Par suite (lemme 9), $H_\natural$ est un espace d'Ambrose et $\mathbf{B} \cap H_\natural$ étant commutative, $H_\natural$ est commutatif.

Proposition 9. — (i) *Si $x, y \in H$ et si xy et yx sont définis, on a $(xy)^\natural = (yx)^\natural$;*
(ii) *Si $x \in H$, on a $(x^\star)^\natural = (x^\natural)^\star$;*
(iii) *Si $x \in H^\natural$ et $y \in H$, on a $(xy)^\natural = xy^\natural$.*

Démonstration. — Pour démontrer (i), considérons $z \in \mathbf{B}$. On a :

$$\langle (xy)^\natural, z \rangle = \langle xy, z^\natural \rangle = \langle y, x^\star z^\natural \rangle = \langle y, z^\natural x^\natural \rangle = \langle yx, z^\natural \rangle = \langle (yx)^\natural, z \rangle.$$

Pour démontrer (ii), considérons $y \in H_\natural$. On a :

$$\langle (x^\star)^\natural, y \rangle = \langle x^\star, y \rangle = \langle y^\star, x \rangle = \langle y^\star, x^\natural \rangle = \langle (x^\natural)^\star, y \rangle.$$

Pour démontrer (iii), considérons $z \in H_\natural \cap \mathbf{B}$. On a :

$$\langle (xy)^\natural, z \rangle = \langle xy, z \rangle = \langle y, x^\star z \rangle = \langle y^\natural, x^\star z \rangle = \langle xy^\natural, z \rangle.$$

Lemme 14. — *Le sous-espace $H \ominus H_\natural$ est engendré par les éléments $uv - vu$ pour $u, v \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ étant une algèbre unitaire sous-jacente à H.*

Démonstration. — Pour $u, v \in \mathbf{A}$, on a $(uv)^\natural = (vu)^\natural$ et, par suite, $(uv - vu)^\natural = 0$, c'est-à-dire $uv - vu \in H \ominus H_\natural$. Inversement, soit x orthogonal aux éléments $uv - vu$ pour $u, v \in \mathbf{A}$. On a alors $\langle uv, x \rangle = \langle vu, x \rangle$, c'est-à-dire $\langle v, u^\star x \rangle = \langle v, xu^\star \rangle$ ou $l_x = r_x$, ou enfin $x \in H_\natural$.

Proposition 10. — *Les sous-espaces H_f et H_i sont respectivement fini et proprement infini pour $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$.*

Démonstration. — Il faut montrer que si $H = H_f$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont de classe finie et, d'autre part, que si $H = H_i$, aucun sous-espace $\eta \, \mathbf{L}^\natural$ n'est fini pour $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{R}$, autrement dit que si $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{R}$ est de classe finie, $H_\natural$ n'est pas réduit à 0.

Supposons donc $H = H_f$. Le sous-espace $H_\natural$ est séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. C'est du reste un sous-espace simple, car l'$\star$-algèbre faiblement fermée induite par $\mathbf{L}^\natural$ sur $H_\natural$ est l'$\star$-algèbre faiblement fermée engendrée par les opérateurs de multiplication dans $H_\natural$. Or $H_\natural$ étant un espace d'Ambrose commutatif, cette $\star$-algèbre coïncide avec son algèbre commutante. D'autre part, $H_\natural$ est un sous-espace-trace d'après la proposition 7. Donc $H_\natural$ est un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}$ est de classe finie.

Supposons maintenant $\mathbf{L}$ de classe finie. Nous devons montrer que le centre $H_\natural$ n'est pas réduit à o. Soit $\mathbf{I}$ l'idéal bilatère de $\mathbf{L}$ formé des éléments L_a pour $a \in \mathbf{B}$. Comme $\mathbf{L}$ est de classe finie, tout idéal bilatère de $\mathbf{L}$ contient un opérateur du centre de $\mathbf{L}$. Il existe donc u tel que $L_u \in \mathbf{L}^\natural$ et l'on a $u \in H_\natural$.

DÉFINITION 11. — *Un espace d'Ambrose* H *est dit de classe finie si* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{R}$ *sont de classe finie.*

Remarque 11. — La proposition précédente montre que la condition nécessaire et suffisante pour que H soit de classe finie est que $H_\natural$ soit un sous-espace générateur pour $\mathbf{L}$ et pour $\mathbf{R}$ ou encore que $H_\natural$ soit un sous-espace séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. Le centre $H_\natural$ est alors un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{L}$ et pour $\mathbf{R}$. L'invariant $C(\chi)$ est égal à 1 (13). Si l'on considère l'isomorphisme $A \to A'$ de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{R}$ défini à l'aide du sous-espace-$\natural$ $H_\natural$ par la relation $Ax = A'x$ pour tout $x \in H_\natural$ (14), on a ici $(L_a)' = R_a$.

PROPOSITION 11. — *Soit* H *un espace d'Ambrose de classe finie. Pour tout* $a \in \mathbf{A}$, *on a* $L_a^\natural = L_{a^\natural}$.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du lemme 12 puisque $H_\natural$ est un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{L}$.

DÉFINITION 12. — *Un élément e est dit élément unité d'un espace d'Ambrose si l'on a* $ea = ae = a$ *pour tout* $a \in \mathbf{B}$.

On a alors $L_e = R_e = 1$ et, par suite, $e \in \mathbf{B}$. De $L_e = L_{e^\star}$ on déduit $e = e^\star$. On a, d'autre part, $e \in H_\natural$.

PROPOSITION 12. — *Tout espace d'Ambrose possédant un élément unité est de classe finie. Le centre* $H_\natural$ *est alors le sous-espace* $\mathbf{L}^\natural(e)$.

Démonstration. — L'élément e est élément-trace séparateur pour $\mathbf{L}$, donc $\mathbf{L}$ est de classe finie. De plus e est élément séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. Le sous-espace $\mathbf{L}^\natural(e)$ est donc séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. Comme on a visiblement $\mathbf{L}^\natural(e) \subset H_\natural$ et que $H_\natural$ est simple pour $\mathbf{L}^\natural$, on en déduit que $H_\natural = \mathbf{L}^\natural(e)$.

---

(13) On en déduit que $C(\chi) = 1$ pour un espace d'Ambrose quelconque du fait que $C(\chi) = 1$ pour $H = H_i$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ étant alors algébriquement isomorphes.

(14) *Cf.* [14], chap. I, th. 1.

Remarque 12. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace d'Ambrose de classe finie possède un élément unité est que $H_\natural$ en possède un. En effet, si e est un élément unité de $H_\natural$, on a $L_e^\natural = 1$ et, par suite,

$$L_e = L_{e^\natural} = L_e^\natural = 1.$$

Proposition 13. — *Soit* H *un espace d'Ambrose de classe finie. Tout idéal bilatère* H_1 *de* H *contient un idéal bilatère* H_2 *à élément unité.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $H = H_1$. Soit $\mathfrak{l}$ l'idéal de $\mathbf{L}$ formé des opérateurs L_a pour $a \in \mathbf{B}$. Il suffit de considérer le sous-espace final d'un projecteur $E_2 \neq 0$, $\in \mathfrak{l} \cap \mathbf{L}^\natural$ (cet idéal de $\mathbf{L}$ étant différent de 0, puisque $\mathbf{L}$ est de classe finie).

Si nous appelons irréductible un espace d'Ambrose tel que $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{R}$ soit un facteur, c'est-à-dire ne contenant aucun idéal bilatère autre que 0 ou lui-même, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace d'Ambrose irréductible soit de classe finie est qu'il possède un élément unité.*

Pour terminer, rappelons que pour l'exemple du paragraphe 2, on a les résultats suivants [7]. Les éléments centraux de $L^2(G)$ sont les fonctions centrales de carré intégrable. La condition nécessaire et suffisante pour que $L^2(G)$ soit de classe finie, est qu'il existe sur un système fondamental de voisinages de l'unité invariants par les automorphismes intérieurs de G. La condition nécessaire et suffisante pour que $L^2(G)$ ait un élément unité est que G soit discret.

Bibliographie.

[1] W. Ambrose, *The* L^2 *system of a unimodular locally compact group* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 65, 1949, p. 26-48).
[2] N. Bourbaki, *Algèbre* (*Act. Sc. Ind.*, Paris).
[3] J. Dixmier, *Les Anneaux d'opérateurs de classe finie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).
[4] J. Dixmier, *Sur la réduction des anneaux d'opérateurs* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 185-202).
[5] J. Dixmier, *Algèbres quasi-unitaires* (*Com. Math. Helv.*, t. 26, 1952, p. 275-322).
[6] J. Dixmier, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1933, p. 9-39).
[7] R. Godement, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 68-124).
[8] R. Godement, *Deuxième mémoire sur la Théorie des caractères* (à paraître).
[9] F. I. Mautner, *Unitary representations of locally compact groups* (*Ann. Math.*, t. 51, 1950, p. 1-25).

[10] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On Rings of Operators* (*Ann. Math.*, t. **37**, 1936, p. 116-229).

[11] NAKANO, *Hilbert Algebras* (*Tohoku Math. J.*, 2e série, t. **2**, 1950).

[12] J. VON NEUMANN, *On a certain topology for rings of operators* (*Ann. Math.*, t. **37**, 1936, p. 111-115).

[13] M. ORIHARA et T. TSUDA, *The two sided regular representation of a unimodular locally compact group* (*Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Univ.*, A, vol. VI, nº **1**, 1951, p. 21-29).

[14] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens* (*Bull. Soc. Math. F.*, à paraître).

[15] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **233**, 1951, p. 997-999).

[16] I. E. SEGAL, *The two sided regular representation of a unimodular locally compact group* (*Ann. Math.*, t. **51**, 1950, p. 293-298).

[17] O. TAKENOUCHI, *On the maximal Hilbert algebras* (*Tohoku Math. J.*, 2e série, t. **3**, 1951).