ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ARRIGO FINZI

Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 371-430

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__371_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LE PROBLÈME DE LA GÉNÉRATION

D'UNE

TRANSFORMATION DONNÉE D'UNE COURBE FERMÉE

PAR UNE TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE

PAR M. ARRIGO FINZI.

CHAPITRE I.

1. Dans un Mémoire précédent [1] j'ai considéré, sur une courbe fermée C, une transformation T, dépourvue de points invariants, d'équation

$$x_1 = g(x), \qquad \left[\frac{d\,g(x)}{dx} > 0\right],$$

et j'ai étudié la question de savoir s'il existe une transformation infinitésimale $\xi(x)\frac{df}{dx}$, qui engendre la transformation T. Dans le cas où le module [2] k de la transformation T est irrationnel (l'étude du cas où le module est rationnel peut se faire par des considérations tout à fait élémentaires), j'ai donné, au chapitre III du premier Mémoire, une première réponse à la question par le théorème A :

---

(1) Voir *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 67, 1950, p. 273. Ce Mémoire sera parfois indiqué brièvement par la lettre G.

(2) Le *module* est un invariant, qu'on peut attacher à toute transformation T de C dépourvue de points invariants : considérons T comme engendrée par un mouvement continu, qui porte chaque point dans son transformé, on pourra considérer, pour une puissance T^n, le rapport $\frac{m}{n}$ du nombre m des tours de C, que ce point accomplit par T^n à l'exposant n. On définit le module comme la limite (qui existe toujours) de $\frac{m}{n}$ pour $n \to \infty$. Pour des considérations plus précises, *voir* G, § 6. On peut concevoir trois cas :

La transformation T *admet une transformation infinitésimale génératrice* (et une seulement) *si* $g(x)$ *possède une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz et si, en indiquant par* $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$ *les réduites du développement du module k en fraction continue et par* a_α *les quotients incomplets, on peut donner un nombre positif* $\lambda < 1$, *de façon que*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0.$$

Il importe de rappeler (G, § 36) que, lorsqu'on ne fait aucune hypothèse sur la croissance des entiers a_α pour $\alpha \to \infty$, il peut arriver que T ne possède pas une transformation infinitésimale génératrice, quelles que soient les hypothèses qualitatives (même l'analyticité) que l'on fait concernant $g(x)$.

Dans ce Mémoire je me propose de donner une deuxième solution du problème, qui est fondée sur le théorème suivant :

Considérons une famille ∞^1 *de transformations régulières* (³) $T(\theta)$, *dépendant du paramètre* θ, *d'équation*

$$x_1 = g(x, \theta). \tag{1}$$

Supposons que $g(x, \theta)$ *possède des dérivées* $\frac{\partial g(x, \theta)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g(x, \theta)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial g(x, \theta)}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g(x, \theta)}{\partial x \partial \theta}$, *et que ces dérivées satisfassent à la condition de Lipschitz par rapport à* x *et à* θ. *Supposons encore* $\frac{\partial g(x, \theta)}{\partial \theta} > 0$. *Il existe alors une famille* ∞^1 *de transformations infinitésimales*

$$\xi(x, \theta) \frac{df}{dx}, \tag{2}$$

telle qu'on obtient la famille donnée $T(\theta)$ *en considérant les* ∞^1 *groupes* g_1 *engendrés par la famille* (2) *et en choisissant dans chaque groupe la transformation de paramètre* $t = 1$. *On démontre que la fonction* $\xi(x, \theta)$ *est continue par rapport à* θ [et, naturellement, par rapport à x (⁴)].

En vertu de ce théorème, une transformation T possède certainement une

---

1. Il y a une puissance T^n, qui laisse tous les points de C invariants; T est donc cyclique. On verra au paragraphe 4 qu'une telle transformation possède une infinité de transformations infinitésimales génératrices.

2. Il y a une puissance T^n, qui laisse invariants certains points de C. Le module de T est, dans ce cas aussi, rationnel. On démontre immédiatement (G, § 1) que T n'admet aucune transformation génératrice.

3. Il n'y a pas de points invariants pour une puissance quelconque de T. Le module est irrationnel. On démontre facilement (G, § 5) que T admet une transformation infinitésimale génératrice au plus.

Nous dirons que les transformations 1 et 3 sont *régulières* et que les transformations 2 sont *irrégulières*.

(³) Pour la définition d'une transformation régulière, *voir* note (²), p. 1.

(⁴) $\xi(x, \theta)$ est même continue par rapport au couple des variables x et θ.

transformation infinitésimale génératrice si elle fait partie d'une famille ∞^1 satisfaisant aux conditions indiquées. On doit remarquer que la condition qualitative concernant $g(x)$ est la même dans les deux solutions du problème, tandis que la condition arithmétique qui paraît dans le théorème A est remplacée ici par une condition d'une nature complètement différente.

Il y a tout de même un caractère commun aux deux solutions : La difficulté du problème revient à ce que $\xi(x)$, considérée comme fonction de $g(x)$, n'est pas continue d'ordre fini, au sens du calcul fonctionnel. On surmonte cette difficulté en se plaçant dans un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions $g(x)$, dans lequel il y a au contraire une continuité d'ordre fini : dans le premier cas l'ensemble des fonctions $g(x)$, qui correspondent aux transformations ayant un même module satisfaisant à la condition arithmétique indiquée, dans le second cas la famille (1) de fonctions dépendant du paramètre θ.

Nous allons indiquer rapidement méthode de démonstration du théorème; il sera possible d'en donner une idée plus précise au commencement du chapitre II.

$\frac{\partial g(x, \theta)}{\partial x}$ étant positive, le module $k(\theta)$ des transformations de la famille (1) est une fonction croissante du paramètre θ; il y a donc une correspondance biunivoque entre les valeurs du module et les valeurs du paramètre. Indiquons par $\mathbf{k}$ une valeur irrationnelle du module et par Θ la valeur du paramètre telle que $\mathbf{k} = k(\Theta)$. Indiquons ensuite par $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \ldots$, les réduites du développement de $\mathbf{k}$ en fraction continue et par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$, les valeurs correspondantes du paramètre.

Considérons la transformation $T(\theta_\alpha)$ d'équation

$$x_1 = g(x, \theta_\alpha),$$

qui est régulière et qui a un module rationnel; il y a une infinité de transformations infinitésimales, qui engendrent $T(\theta_\alpha)$ [5]; on peut toutefois choisir une transformation particulière, $\xi(x \mid \theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ par un procédé général. On démontre ensuite (et c'est là le point le plus difficile) que la succession des fonctions

$$\xi(x \mid \theta_1) \quad \xi(x \mid \theta_2), \quad \ldots, \quad \xi(x \mid \theta_\alpha), \quad \ldots,$$

obtenues de la sorte converge d'une façon uniforme vers une fonction continue et positive $\xi(x \mid \Theta)$. On reconnaît alors facilement que la transformation infinitésimale $\xi(x \mid \Theta)\frac{df}{dx}$ engendre $T(\Theta)$. En considérant ensuite θ comme une variable et en démontrant que la fonction $\xi(x, \theta)$ obtenue de la sorte est continue par rapport à θ, on trouve la famille (2) de transformations infinitésimales.

(5) *Voir* la note (2), p. 371.

2. Le théorème énoncé au paragraphe précédent suggère certaines questions, desquelles je vais parler ici rapidement. Je dois dire toutefois que la démonstration du théorème, bien qu'elle soit fondée sur une idée relativement simple, nous amène malheureusement à des considérations extrêmement complexes; il serait du plus grand intérêt, pour un avancement ultérieur dans ces recherches, de pouvoir introduire des simplifications dans les méthodes (6). Il me semble toutefois que certaines des considérations développées dans ce Mémoire peuvent présenter l'intérêt, même indépendamment de la démonstration du théorème : peut-être elles pourraient trouver d'autres applications dans une étude ultérieure des transformations d'une courbe fermée.

Un des problèmes qu'on pourrait se poser serait de démontrer à nouveau le théorème A en montrant, *a priori*, qu'une transformation qui satisfait aux conditions de ce théorème fait toujours partie d'une famille ∞^1 satisfaisant aux conditions du théorème énoncé dans le paragraphe précédent. Je pense qu'une telle démonstration pourrait nous rapprocher de la solution de la question suivante : quelles conclusions ultérieures peut-on tirer concernant $\xi(x)$ lorsqu'on sait que $g(x)$ possède des dérivées d'ordre supérieur au second ? Tandis qu'il semble difficile d'étudier cette question par la méthode employée dans la démonstration du théorème A, il semble au contraire que le théorème donné dans ce Mémoire représente le premier cas d'une proposition plus générale, dans laquelle on supposerait l'existence de certaines dérivées d'ordre supérieur pour $g(x, \theta)$ et l'on démontrerait l'existence de certaines dérivées de $\xi(x, \theta)$. J'ai pu, dans cet ordre d'idées, donner une généralisation convenable du lemme démontré ici au paragraphe 6, et qui est la base de la démonstration de notre théorème.

Une deuxième généralisation du théorème, qui aurait, à mon avis, un intérêt remarquable, reviendrait à substituer, à la condition $\dfrac{\partial g(x, \theta)}{\partial\theta} > 0$, la condition que le rapport $\dfrac{k(\theta_1) - k(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}$ soit toujours supérieur à une quantité positive donnée; on démontre facilement que cette condition est plus générale que la précédente (7).

On peut enfin poser la question suivante, qu'on pourrait rapprocher d'une autre déjà posée dans mon premier Mémoire : la fonction $\xi(x, \theta)$ est dérivable par rapport à x pour toute valeur de θ qui correspond à une valeur irrationnelle du paramètre. Est-elle dérivable par rapport à x pour toute autre valeur de θ ? Si la réponse à cette question était négative, on aurait le fait assez singulier

(6) J'ai obtenu récemment une méthode plus directe pour arriver à $\xi(x, \theta)$. La méthode donnée ici reste cependant nécessaire pour établir la continuité de $\xi(x, \theta)$.

(7) Dans une Note préliminaire, publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 228, 1949, p. 631, j'avais cru pouvoir énoncer le théorème dans cette hypothèse plus générale. Je ne suis toutefois pas arrivé jusqu'ici à surmonter les difficultés connexes à la démonstration.

qu'à la fonction $g(x, \theta)$, satisfaisant aux conditions du théorème, mais par ailleurs choisie *d'une façon arbitraire*, il devrait correspondre une fonction $\xi(x, \theta)$, jouissant de la propriété d'être dérivable par rapport à x seulement en correspondance d'une infinité dénombrable de valeurs de θ.

3. Comme dans le Mémoire précédent, nous supposerons qu'à un tour complet sur la courbe C il corresponde un intervalle unitaire pour l'abscisse x : à deux valeurs x et $x+1$ de l'abscisse il correspond alors le même point géométrique sur C. La fonction $g(x, \theta)$ satisfait à la relation

$$g(x+1, \theta) = g(x, \theta) + 1.$$

Posons

$$g(g(x, \theta), \theta) = g_2(x, \theta),$$
$$g(g(g(x, \theta), \theta), \theta) = g_3(x, \theta),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et indiquons par $g_0(x, \theta) \equiv x$ la fonction, qui correspond à l'identité. On aura aussi à considérer les fonctions d'indice négatif, qui correspondent aux puissances négatives des transformations $T(\theta)$.

En indiquant par $k(\theta)$ le module de $T(\theta)$, le module de $T^n(\theta)$ sera donné par $nk(\theta)$; il pourra être plus grand que 1. D'ailleurs, si l'on regarde essentiellement la transformation *géométrique* $T^n(\theta)$, le module n'est défini au fond qu'à un entier près.

Nous dirons que, lorsque l'abscisse x croît, le point correspondant se déplace vers la droite : nous supposerons toujours $g(x, \theta) > x$ et, par conséquent, le point transformé $g(x, \theta)$ à droite de x.

Nous indiquerons les dérivées des fonctions $\bar{g}(x, \theta)$ et $\xi(x, \theta)$ de la façon suivante :

$$\frac{\partial^{h+k}\xi(x, \theta)}{\partial x^h \partial\theta^k} \equiv \xi^{h,k}(x, \theta), \qquad \frac{\partial^{h+k} g(x, \theta)}{\partial x^h \partial\theta^k} \equiv g^{h,k}(x, \theta).$$

Enfin nous poserons

$$\frac{\partial^{h+k} g_i(x, \theta)}{\partial x^h \partial\theta^k} \equiv g_i^{h,k}(x, \theta).$$

Nous devrons, dans la suite, introduire certaines fonctions $g(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ des deux variables x et θ; pour représenter leur dérivées nous utiliserons des notations analogues,

$$\frac{\partial^{h+k}\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}{\partial x^h \partial\theta^k} = \bar{g}^{h,k}(x, \theta \mid \theta_\alpha).$$

Au paragraphe 7 du premier Mémoire j'ai défini les transformations très petites et développé à leur égard certaines considérations générales. Il me semble inutile de répéter ici exactement ces mêmes considérations et je me permets de renvoyer le lecteur au paragraphe indiqué.

4. Nous allons exposer dans ce paragraphe certaines considérations élémentaires concernant les transformations cycliques (régulières, de module rationnel). La plupart de ces considérations ont été déjà exposées dans le premier Mémoire; il m'a paru toutefois préférable de les réunir ici, dans la forme la plus convenable pour les applications que nous en devrons faire.

Indiquons par $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ le module rationnel de la transformation cyclique T, d'équation

$$x_1 = g(x),$$

et par $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$ les réduites de son développement en fraction continue limitée; indiquons ensuite par $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ les quotients incomplets. On a

$$T^{n_\alpha} = I;$$

T^{n_α} ramène donc chaque point x à sa position initiale; x possède alors en tout $n_\alpha - 1$ homologues par rapport à T : $g(x), g_2(x), \ldots, g_{n_{\alpha-1}}(x)$.

Nous allons voir de quelle façon ces points sont disposés sur la courbe. Les points

$$x, \quad g(x), \quad g_2(x), \quad \ldots, \quad g_{n_1}(x)$$

se suivent de gauche à droite; T^{n_1} est la plus grande puissance de T pour laquelle x n'arrive pas à accomplir un tour complet de C; $g_{n_1}(x)$ est donc placé immédiatement à gauche de x. Les points

$$g(x), \quad g_{n_1+1}(x), \quad g_{2n_1+1}(x), \quad \ldots, \quad g_{a_1 n_1+1}(x) \equiv g_{n_2}(x)$$

se suivent de droite à gauche; T^{n_2} est la plus petite puissance de T pour laquelle le point x accomplit m_2 tours complets de C et le point $g_{n_2}(x)$ est donc placé immédiatement à droite de x. De même, les points

$$g_{n_1}(x), \quad g_{n_2+n_1}(x). \quad g_{2n_2+n_1}(x), \quad \ldots, \quad g_{a_2 n_2+n_1}(x) \equiv g_{n_3}(x)$$

se suivent de droite à gauche; T^{n_3} est la plus petite puissance de T pour laquelle le point x n'arrive pas à accomplir m_3 tours complets de C, et le point $g_{n_3}(x)$ se trouve immédiatement à gauche de x. En continuant de la sorte, si α est pair (impair), on arrivera finalement à un point $g_{n_{\alpha-1}}(x)$ placé à gauche (à droite) de x, qui est, de plus, le plus proche à gauche (à droite) parmi tous les $n_{\alpha-1}$ conséquents. Les points

$$g_{n_{\alpha-2}}(x), \quad g_{n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}}(x), \quad g_{2n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}}(x), \quad \ldots, \quad g_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+n_{\alpha-2}}(x) \equiv g_{n_\alpha}(x)$$

se suivent de droite à gauche (de gauche à droite) et le point $g_{n_\alpha}(x)$ coïncide avec le point initial x.

Considérons l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x))$; il importe pour la suite de faire la remarque que, en transformant cet intervalle par $T, T^2, T^3, \ldots, T^{n_{\alpha-1}}$, on recouvre la courbe C complètement et simplement.

Une transformation cyclique admet une infinité de transformations infinitésimales génératrices. Pour le démontrer rappelons d'abord que, d'après la théorie des groupes continus et finis, l'équation du groupe g_1 engendré par $\xi(x)\frac{df}{dx}$ est donnée par

$$\int_x^{x_1} \frac{dx}{\xi(x)} = t,$$

t étant le paramètre du groupe; si donc on admet que T est engendré par $\xi(x)\frac{df}{dx}$ lorsqu'on fait $t = 1$, on doit avoir

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1. \tag{3}$$

Pour résoudre cette équation, posons

$$\xi(x) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{p[g_{s-1}(x)]}{g_s^{1,0}(x)} \qquad (d_\alpha = \text{const.}), \tag{4}$$

$p(x)$ étant une fonction continue, positive, de période 1, et par ailleurs arbitraire. On a

$$\xi[g(x)] = \xi(x)\, g^{1,0}(x);$$

de cette relation on déduit

$$\frac{d}{dx}\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = g^{1,0}(x)\frac{1}{\xi[g(x)]} - \frac{1}{\xi(x)} = 0.$$

L'intégrale $\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)}$ ne dépend donc pas de x; en disposant de la constante d_α on peut alors satisfaire à (3). La transformation infinitésimale $\xi(x)\frac{df}{dx}$ engendre donc T.

Il est bon de remarquer, en terminant, que pour obtenir la transformation infinitésimale la plus générale, qui engendre T, on aurait dû partir, non pas nécessairement d'une fonction $p(x)$ positive, mais simplement d'une fonction telle que $\xi(x)$, définie par (4), soit partout positive [7].

5. Considérons une famille ∞^1 de transformations infinitésimales

$$\xi(x, \theta)\frac{df}{dx} \tag{2}$$

et la famille ∞^2 des transformations finies

$$x_1 = g(x, t, \theta),$$

[7] La démonstration donnée ici pourrait se substituer à celle qui est donnée dans G, au paragraphe 4.

qui font partie des ∞^1 groupes g_1 engendrés par (2). Si, pour une valeur donnée θ du paramètre, $\xi(x, \theta)$ est dérivable par rapport à θ, on a, dans un voisinage de θ_α,

$$\xi(x, \theta) = \xi(x, \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)\xi^{0,1}(x, \theta_\alpha) + \ldots;$$

d'une façon analogue on a

$$g(x, t, \theta) = g(x, t, \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha) g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha) + \ldots,$$

$g(x, t, \theta_\alpha)$ est déterminée lorsqu'on a donné $\xi(x, \theta_\alpha)$; on voit ensuite facilement que $g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha)$ est déterminée à son tour par la connaissance de $\xi^{0,1}(x, \theta_\alpha)$; on peut d'ailleurs donner l'expression de cette dépendance fonctionnelle; on a

$$g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha) = \mathrm{L}[\xi^{0,1}(x, \theta_\alpha), x, t] = \int_0^t \xi^{0,1}[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \frac{\xi[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{\xi[g(x, \tau, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} d\tau.$$

Pour établir cette relation, appliquons la formule de Taylor à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t, \theta) = \xi[g(x, t, \theta), \theta],$$

nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g(x, t, \theta_\alpha)}{\partial t} + (\theta - \theta_\alpha)\frac{\partial g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha)}{\partial t} + \ldots \\ &\quad = \xi[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha] + (\theta - \theta_\alpha) \\ &\qquad \times \{\xi^{1,0}[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha] g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha) + \xi^{0,1}[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\} + \ldots. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $(\theta - \theta_\alpha)$ dans le premier et dans le second membre nous trouvons, pour $g^{0,1}(x, t, \theta)$, l'équation différentielle

$$\frac{\partial g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha)}{\partial t} = \xi^{1,0}[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha] g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha) + \xi^{0,1}[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha].$$

$g^{0,1}(x, t, \theta)$ doit d'autre part être identiquement nulle pour $t = 0$, étant donné que pour $t = 0$ toute transformation de la famille considérée se réduit à l'identité. Ces conditions, qui suffisent évidemment pour déterminer $g^{0,1}(x, t, \theta)$, sont d'autre part satisfaites par l'expression intégrale donnée.

6. Partons maintenant d'une famille ∞^1 de transformations régulières $\mathrm{T}(\theta)$, qui dépend du paramètre θ, d'équation

$$x_1 = g(x, \theta). \tag{1}$$

Nous posons la question de savoir s'il est possible de trouver deux fonctions $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ et $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ telles que, en indiquant par

$$x_1 = g(x, t \mid \theta_\alpha)$$

l'équation du groupe g_1 engendré par $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ on ait

$$g(x,\,\theta_\alpha) = g(x,\,1\,|\,\theta_\alpha), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} g^{0,1}(x,\,\theta_\alpha) &= \mathrm{L}[\xi(x,\,\theta_\alpha),\,\xi^{0,1}(x,\,\theta_\alpha),\,x,\,1] \\ &= \int_0^1 \xi^{0,1}[g(x,\,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,\,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

On peut présenter la même question d'une façon quelque peu différente : considérons les ∞^1 groupes g_1 engendrés par les transformations infinitésimales de la famille

$$\bar{\xi}(x,\,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{1-\dfrac{\xi^{0,1}(x,\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\frac{df}{dx} \equiv \{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\,\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)+\ldots\}\frac{df}{dx};$$

indiquons par

$$x_1 = \bar{g}(x,\,\theta\,|\,\theta_\alpha)$$

l'équation de la famille ∞^1 formée par les transformations de paramètre $t=1$ appartenant à ces groupes. Est-il possible de choisir $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ et $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de façon qu'on ait

$$\begin{aligned} \bar{g}(x,\,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha) &= g(x,\,\theta_\alpha), \\ \bar{g}^{l,1}(x,\,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha) &= g^{0,1}(x,\,\theta_\alpha). \end{aligned}$$

Il nous suffira d'avoir considéré le problème sous des conditions particulières ; nous supposerons que la transformation de la famille (1) de paramètre θ_α possède un module rationnel $k(\theta_\alpha) = \dfrac{m_\alpha}{n_\alpha}$; nous supposerons en outre que $g(x,\theta)$ possède des dérivées $g^{1,0}(x,\theta)$, $g^{2,0}(x,\theta)$, $g^{0,1}(x,\theta)$, $g^{1,1}(x,\theta)$ et que ces dérivées soient continues; nous supposerons enfin que $g^{0,1}(x,\theta)$ soit positive. *Dans ces conditions on peut répondre par l'affirmative à la question posée.*

Remarquons d'abord que, d'après l'équation (5), le groupe g_1 engendré par $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\dfrac{df}{dx}$ doit donner $\mathrm{T}(\theta_\alpha)$ pour $t=1$; d'après ce qu'on a vu au paragraphe 4 on pourra résoudre (5) en posant

$$\xi(x\,|\,(\theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{s\,0}^{n_\alpha-1}\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{x_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)}, \tag{7}$$

la constante d_α étant déterminée par la condition

$$\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1. \tag{3'}$$

Considérons ensuite l'équation (6). Cette équation est linéaire en $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; si donc nous posons

$$\left\{\begin{aligned} g^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha) &= \frac{1}{n_\alpha}\sum_{s\,0}^{n_\alpha-1}\frac{g^{0,1}[g_s(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} = \frac{1}{d_\alpha}\xi[g(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha], \\ g^{0,1**}(x\,|\,\theta_\alpha) &= g^{0,1}(x,\,\theta_\alpha) - g^{0,1*}(x\,|\,\theta_\alpha), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

et nous déterminons deux solutions $\xi^{0,1\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$ et $\xi^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$ des deux équations

$$(6') \qquad L[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1\star}(x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1]$$
$$=\int_0^1 \xi^{0,1\star}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = g^{0,1\star}(x\,|\,\theta_\alpha),$$

$$(6'') \qquad L[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1\star\star}x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1]$$
$$=\int_0^1 \xi^{0,1\star\star}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = g^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha),$$

la fonction

$$\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)=\xi^{0,1\star}(x\,|\,\theta_\alpha)+\xi^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$$

nous donnera une solution de l'équation (6).

Remarquons que l'on a

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s\,\frac{g^{0,1\star\star}[g_s(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_s(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}=0,$$

remarquons aussi que $g^{0,1\star}(x,|\,\theta_\alpha)$ et $g^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$ possèdent des dérivées premières continues.

On reconnaît immédiatement que l'on peut satisfaire à (6′) en posant

$$\xi^{0,1\star}(x\,|\,\theta_\alpha)=\frac{1}{d_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha);$$

il nous reste donc seulemen} à considérer (6″). En dérivant cette équation par rapport à x, nous trouvons

$$=\frac{d}{dx}\int_0^1 \xi^{0,1\star\star}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha[}\,d\tau,$$
$$=\frac{dt}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{1+t}\xi^{0,1\star\star}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,1+t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau\right]_{t=0};$$
$$=\frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\Big\{\xi^{0,1\star\star}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]-\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$$
$$+\xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha]\,L[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1]\Big\}=\frac{d\,g^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)}{dx}.$$

Égalons le dernier membre de cette équation à l'avant-dernier, après avoir remplacé dans celui-ci $L[\xi(x\,|\,\theta_\alpha),\ \xi^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha),\ x,\ 1]$ par sa valeur $g^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$ donnée par (6″), et tâchons de déterminer une solution $\xi^{0,1\star\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de l'équation

$$(9) \qquad \frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\Big\{\xi^{0,1\star\star\star}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]-\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1\star\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)$$
$$+\xi^{1,0}[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,g^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)\Big\}=\frac{d\,g^{0,1\star\star}(x\,|\,\theta_\alpha)}{dx},$$

obtenue de la sorte. En résolvant par rapport à $g^{0,1***}[g(x,\theta_\alpha)]$ et en remarquant que l'on a

$$g^{0,1**}(x \mid \theta_\alpha) = g^{0,1}(x, \theta_\alpha) - d_\alpha \xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha],$$

on déduit de l'équation (9),

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi^{0,1***}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] &= \frac{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha) \\ &\quad + \xi(x \mid \theta_\alpha) \frac{d g^{0,1**}(x \mid \theta_\alpha)}{dx} - \xi^{1,0}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha \mid g^{0,1**}(x \mid \theta_\alpha) \\ &= \frac{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha) + \xi(x \mid \theta_\alpha)\, g^{1,1}(x, \theta_\alpha) \\ &\quad - \xi^{1,0}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\, g^{0,1}(x, \theta_\alpha), \end{aligned}$$

et de celle-ci, plus en général,

$$\begin{aligned} \xi^{0,1***}[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] &= \frac{\xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g_{r-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} \xi^{0,1***}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + \xi[g_{r-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \\ &\quad \times g^{1,1}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] - \xi^{1,0}[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \\ &= \frac{\xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g_{n-1}(x, \theta_\alpha] \mid \theta_\alpha]} \xi^{0,1***}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + [g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \\ &\quad \times \frac{g^{1,1}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} - \xi^{1,0}[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \\ &= \frac{\xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha) \\ &\quad + \xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \sum_{1}^{r}{}_j \frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \\ &\quad - \sum_{1}^{r}{}_j \xi^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] g^{01}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{1,0}_{r-j}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]. \end{aligned}$$

En employant l'identité

$$g^{1,0}_{r-j}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{1,0}_{n_\alpha - r + j}[g_r(x, \theta_\alpha)\theta_\alpha] = g^{1,0}_{n_\alpha}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] = 1,$$

on trouve enfin

$$(11) \quad \begin{aligned} \xi^{0,1***}[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] &= \frac{\xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha) \\ &\quad + \xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \sum_{1}^{r}{}_j \frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \\ &\quad - \sum_{1}^{r}{}_j \xi^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \frac{g^{1,0}_{n_\alpha - r + j}[g_r(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}. \end{aligned}$$

Choisissons un point $\mathbf{x}$ sur C et définissons, d'abord d'une façon arbitraire, la fonction continue $\xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha)$ dans l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_\alpha - 1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha, \theta))$; la relation (11) définit alors la fonction dans chacun des $n_\alpha - 1$ intervalles homologues de $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$, qui recouvrent C. On a $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha) = 1$; chaque point revient donc pour $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ à sa position initiale, il est donc nécessaire de montrer que la valeur $\xi^{0,1***}[g_{n_\alpha}(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$, donnée par (11) lorsqu'on fait $r = n_\alpha$ coïncide avec $\xi^{0,1***}(x|\theta_\alpha)$. En substituant, comme il est évidemment permis, les sommations de 1 à n_α par des sommations de 0 à $n_\alpha - 1$, nous sommes amenés de la sorte à vérifier l'identité

$$(12)\quad \xi(x|\theta_\alpha)\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} - \sum_{0}^{n_\alpha-1}\xi^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]\frac{g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_j^{1,0}(x, \theta_\alpha)} \equiv 0.$$

En dérivant (7) nous trouvons

$$(13)\quad \xi^{1,0}(x|\theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$
$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}\sum_{0}^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} g_l^{1,0}(x, \theta_\alpha),$$

et de là, de façon plus générale,

$$\xi^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha] = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$
$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$
$$\times \sum_{0}^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} g_l^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha].$$

Si nous introduisons dans (12) cette expression pour $\xi^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha)|\theta_\alpha]$, nous trouvons

$$(12')\quad \xi(x|\theta_\alpha)\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$
$$- \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_j^{1,0}(x, \theta_\alpha)}\sum^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$
$$+ \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{01}[g_{j+s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_{j+s}^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$
$$\times \sum_{0}^{s-1}{}_l g_l^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \equiv 0.$$

En rappelant l'expression (7) de la fonction $\xi(x|\theta_\alpha)$ on reconnaît immédiatement que le premier et le deuxième terme de (12') sont égaux, de signe opposé; il nous reste alors à démontrer qu'on a

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \left\{ \frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{j+s}(x, \theta_\alpha)} \times \sum_{0}^{s-1}{}_l\, g_l^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \right\} \equiv 0.$$

Pour démontrer cette dernière identité il faut associer au terme entre accolades, qui correspond aux valeurs j, s des indices, le terme qui correspond aux valeurs

$$\bar{j} = j + s, \qquad \bar{s} = n - s.$$

On trouve facilement

$$\equiv \frac{g^{0,1}[g_{\bar{j}+\bar{s}-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{\bar{j}-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{\bar{j}+\bar{s}}(x, \theta_\alpha)} \sum_{0}^{\bar{s}-1}{}_l\, g_l^{1,0}[g_{\bar{j}}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \frac{g^{2,0}[g_{l+\bar{j}}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+\bar{j}}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$$

$$\equiv \frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{j+s}(x, \theta_\alpha)} \sum_{s}^{n_\alpha-1}{}_l\, g_l^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]};$$

par conséquent, en associant le terme j, s avec le terme $\bar{j}, \bar{s}$ on a

$$\frac{g^{0,1}[g_{j+s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]\, g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{j+s}(x, \theta_\alpha)} \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_l\, g_l^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \frac{g^{2,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{l+j}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}.$$

On reconnaît que cette expression est identiquement nulle en remarquant que la sommation par rapport à l représente la dérivée par rapport à x de la fonction $g_{n_\alpha}^{1,0}[g_j(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \equiv 1$. *L'identité* (12) *est donc vérifiée.*

La solution $\xi^{0,1***}(x, \theta_\alpha)$ de l'équation (9), que nous avons ainsi déterminée, aura en général des discontinuités en $\mathbf{x}$ et dans ses $n_\alpha - 1$ homologues. Il est toutefois facile d'éliminer ces discontinuités : $\xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha)$ avait été définie d'une façon arbitraire dans l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$; il suffit d'attribuer au contraire à la fonction dans le point $g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$ la valeur $\xi^{0,1***}[g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ donnée par (11) lorsqu'on fait $x = \mathbf{x}$ et $r = n_{\alpha-1}$.

Nous allons maintenant déduire, de la solution $\xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha)$ de l'équation (9), une solution $\xi^{0,1**}(x \mid \theta_\alpha)$ de l'équation (6''). On reconnaît d'abord que la fonction

$$\xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha) + A_\alpha \xi(x \mid \theta_\alpha) \qquad (A_\alpha = \text{const.})$$

représente aussi, quel que soit A_α, une solution de (9).

Soustrayons d'autre part de (9) l'identité

$$\frac{1}{\xi(x\mid\theta_\alpha)}\Big\{\xi^{0,1***}[g(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha] \quad -\frac{\xi[g(x,\,\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi(x\mid\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha)$$

$$+\xi^{1,0}[g(x,\,\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]\,\mathrm{L}[\xi(x),\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha),\,x\,,1]\Big\}$$

$$=\frac{d}{dx}\mathrm{L}[\xi(x),\,\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha),\,x,\,1];$$

nous obtenons de la sorte, pour $g^{0,1**}(x\mid\theta_\alpha)-\mathrm{L}[\xi(x\mid\theta_\alpha),\,\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha),\,x,\,1]$, l'équation linéaire et homogène

$$\frac{d}{dx}\{g^{0,1**}(x\mid\theta_\alpha)-\mathrm{L}[\xi(x\mid\theta_\alpha),\,\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha),\,x,\,1]\}$$

$$=\frac{\xi^{1,0}[g(x,\,\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi(x\mid\theta_\alpha)}\{g^{0,1**}(x\mid\theta_\alpha)-\mathrm{L}[\xi(x\mid\theta_\alpha),\,\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha),\,x,\,1]\};$$

cette équation démontre que si une solution de (9) vérifie (6″) pour une valeur particulière $\mathbf{x}$ de x, elle vérifie (6″) pour toute autre valeur de x et représente alors une solution de cette équation.

Attribuons donc à A_α la valeur

$$\frac{g^{0,1**}(\mathbf{x}\mid\theta_\alpha)-\displaystyle\int_0^1\xi^{0,1***}[g(\mathbf{x},\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]\frac{\xi[g(\mathbf{x},\,1\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[g(\mathbf{x},\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}d\tau}{\xi[g(\mathbf{x},\,\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]},$$

on trouve alors

$$\int_0^1\{\xi^{0,1***}[g(\mathbf{x},\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]+\mathrm{A}_\alpha\xi[g(\mathbf{x},\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]\}\frac{\xi[g(\mathbf{x},\,1\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[g(\mathbf{x},\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}d\tau=g^{0,1**}(\mathbf{x}\mid\theta_\alpha).$$

Cette relation nous montre que la fonction

$$\xi^{0,1**}(x\mid\theta_\alpha)=\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha)+\mathrm{A}_\alpha\xi(x\mid\theta_\alpha)$$

vérifie (6″) pour $\mathbf{x}=x$; d'après la remarque que nous venons de faire cette fonction représente donc une solution de (6″). Enfin la fonction

$$\xi^{0,1}(x\mid\theta_\alpha)=\frac{1}{d_\alpha}\xi(x\mid\theta_\alpha)+\xi^{0,1**}(x\mid\theta_\alpha)=\left(\frac{1}{d_\alpha}+\mathrm{A}_\alpha\right)\xi(x\mid\theta_\alpha)+\xi^{0,1***}(x\mid\theta_\alpha)\tag{14}$$

nous donne la solution de l'équation (6).

Il importe de remarquer, en terminant, que *la fonction* $\xi(x\mid\theta_\alpha)$ *est complètement déterminée; on peut au contraire ajouter à* $\xi^{0,1}(x\mid\theta_\alpha)$ *une solution arbitraire* $\xi^{0,1****}(x\mid\theta_\alpha)$ *de l'équation*

$$\mathrm{L}[\xi(x\mid\theta_\alpha),\xi^{0,1****}(x\mid\theta_\alpha),\,x,\,1]\equiv\int_0^1\xi^{0,1****}[g(x,\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,\,1\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\,\tau\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}d\tau=0;$$

cette remarque nous sera nécessaire au chapitre IV.

CHAPITRE II.

7. Nous sommes maintenant en état de donner une idée plus précise de la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1.

Indiquons encore par $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \ldots$ les réduites du développement en fraction continue du module rationnel $\mathbf{k}$; par $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$ et par Θ les valeurs correspondantes du paramètre. D'après ce qu'on a démontré au paragraphe 6, on peut construire, pour chaque valeur de l'index α, deux fonctions $\xi(x|\theta_\alpha)$, $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$, telles que, si l'on considère les ∞^1 groupes g_1 engendrés par les transformations infinitésimales

$$\bar{\xi}(x, \theta|\theta_\alpha)\frac{df}{dx} \equiv \frac{\xi(x|\theta_\alpha)}{1-\frac{\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)}{\xi(x|\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\frac{df}{dx} \equiv \{\xi(x|\theta_\alpha)+\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)(\theta-\theta_\alpha)+\ldots\}\frac{df}{dx},$$

et si l'on représente par

$$(1^\alpha) \qquad x_1 = \bar{g}(x, \theta|\theta_\alpha)$$

l'équation de la famille $\bar{T}_0(\theta|\theta_\alpha)$ formée par les ∞^1 transformations de paramètre $t=1$ appartenant à ces groupes, on a

$$\bar{g}(x, \theta_\alpha|\theta_\alpha) = g(x, \theta_\alpha), \qquad \bar{g}^{0,1}(x, \theta_\alpha|\theta_\alpha) = g^{0,1}(x, \theta_\alpha).$$

Nous dirons que la famille $\bar{T}(\theta|\theta_\alpha)$ *est tangente en* θ_α *à la famille* $T(\theta)$. Rappelons toutefois que $\xi^{0,1}(x|\theta_\alpha)$ n'est pas définie d'une façon univoque.

Nous démontrerons que la succession des fonctions

$$(15) \qquad \xi(x|\theta_1), \quad \xi(x|\theta_2), \quad \ldots, \quad \xi(x|\theta_\alpha), \quad \ldots$$

converge d'une façon uniforme vers une fonction positive $\xi(x|\Theta)$. Alors, des relations

$$\int_x^{g(x,\theta_1)}\frac{dx}{\xi(x|\theta_1)} = 1, \qquad \int_x^{g(x,\theta_2)}\frac{dx}{\xi(x|\theta_2)} = 1, \qquad \ldots, \qquad \int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\frac{dx}{\xi(x|\theta_\alpha)} = 1, \qquad \ldots,$$

et de la convergence de la succession (15) vers $\xi(x|\Theta)$ et de la succession

$$g(x, \theta_1), \quad g(x, \theta_2), \quad \ldots, \quad g(x, \theta_\alpha), \quad \ldots$$

vers $g(x, \Theta)$, il s'ensuit l'équation

$$\int_x^{g(x,\Theta)}\frac{dx}{\xi(x|\Theta)} = 1,$$

qui démontre que le groupe g_1 engendré par $\xi(x|\Theta)\frac{df}{dx}$ donne $T(\Theta)$ pour $t=1$.

Pour démontrer que la succession (15) converge d'une façon uniforme, nous devrons comparer deux termes successifs $\xi(x \mid \theta_\alpha)$, $\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})$ et montrer que, pour $\alpha \to \infty$, leur rapport tend vers 1 d'une façon convenable. *Indiquons par* $\overline{\theta}_{\alpha+1}$ *le paramètre de la transformation de module* $\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$ *appartenant à la famille* $\overline{\mathrm{T}}(\theta \mid \overline{\theta}_\alpha)$; l'étude du rapport $\frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}$ sera ramené à celui des deux rapports $\frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\overline{\xi}(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)}$ et $\frac{\overline{\xi}(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}$. Pour étudier le deuxième de ces deux rapports nous devrons avoir recours à l'expression (7) de $\overline{\xi}(x, \theta_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$ et de $\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})$ en fonction de $\overline{g}(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, $\overline{g}^{1,0}(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, $\overline{g}^{0,1}(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$ et de $g(x, \theta_{\alpha+1})$, $g^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})$, $g^{0,1}(x, \theta_{\alpha+1})$ respectivement.

Cette recherche sera faite au chapitre III; dans ce chapitre II nous devrons étudier préalablement les fonctions $\overline{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$, $\overline{g}^{1,0}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ et $\overline{g}^{0,1}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ pour évaluer les erreurs qu'on commet lorsqu'on substitue à ces fonctions les fonctions $g(x, \theta)$, $g^{1,0}(x, \theta)$ et $g^{0,1}(x, \theta)$ respectivement. Cette étude demande, à son tour, qu'on donne des bornes pour $\xi(x \mid \theta_\alpha)$, pour $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$, pour la constante de Lipschitz de cette fonction et enfin pour $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$.

Au chapitre IV on démontrera enfin que la fonction $\xi(x, \theta)$ est continue par rapport à θ.

8. *Nous désignons par* $\mathrm{M}^{1,0}$ *et par* $\underline{\mathrm{M}}^{1,0}$ *respectivement le maximum et le minimum de la fonction positive* $g^{1,0}(x, \theta)$, *par* $\mathrm{M}^{2,0}$ *le maximum de la valeur absolue de* $g^{2,0}(x, \theta)$, *par* $\mathrm{M}^{3,0}$ *la constante de Lipschitz de cette même fonction par rapport à la variable* x. *Nous indiquons ensuite par* $\mathrm{M}^{0,1}$ *et par* $\underline{\mathrm{M}}^{0,1}$ *respectivement le maximum et le minimum de* $g^{0,1}(x, \theta)$, *par* $\mathrm{M}^{0,2}$ *la constante de Lipschitz de cette fonction par rapport à* θ. *Nous indiquerons enfin par* $\mathrm{M}^{1,1}$ *le maximum de* $g^{1,1}(x, \theta)$ *et par* $\mathrm{M}^{2,1}$ *et* $\mathrm{M}^{1,2}$ *respectivement la constante de Lipschitz de cette fonction par rapport à* x *et par rapport à* θ.

Nous utiliserons certaines locutions analogues à celles introduites dans le Mémoire précédent. Soit P′ et P″ deux quantités dépendant d'un nombre quelconque d'indices et de variables : en disant que « P″ *est de l'ordre* de P′ » nous indiquerons qu'on a deux inégalités

$$p\,|\mathrm{P}'| < |\mathrm{P}''| < q\,|\mathrm{P}'|,$$

p et q étant deux constantes positives, qui dépendent seulement de la fonction $g(x, \theta)$, qui définit $\mathrm{T}(\theta)$ (d'une façon plus précise, des constantes $\mathrm{M}^{i,j}$ introduites précédemment). En disant que « P″ *est au plus de l'ordre de* P′ » nous indiquerons le fait que la deuxième des deux inégalités précédentes est valable; en disant que « P″ *est de l'ordre de* P′ *au moins* » on indiquera que la première des deux inégalités est valable.

Nous dirons en particulier qu'une quantité P *reste finie* si elle est de l'ordre d'un nombre donné différent de zéro, ou, en d'autres termes, si elle est bornée de même que son inverse.

9. Nous allons indiquer ici certains résultats, qu'on peut déduire immédiatement des considérations développées dans le deuxième et dans le troisième chapitre du premier Mémoire, et qui nous seront nécessaires dans la suite.

k étant le module, rationnel ou irrationnel, qui correspond à la valeur θ du paramètre, $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ étant ensuite une des réduites du développement de k en fraction continue, nous indiquerons par

$$x' = x + \gamma_\alpha(x \mid \theta)$$

l'équation de la transformation très petite, qui transforme les points de C de la même façon que $T^{n_\alpha}(\theta)$. D'après ce qu'on a vu dans G, au paragraphe 12, la fonction $\gamma_\alpha(x \mid \theta)$ *est de l'ordre de* p^α *au plus,* p étant un nombre plus petit que 1, qui dépend des constantes $M^{i,j}$ seulement.

Considérons le rapport $\frac{\gamma_\alpha[g_i(x,\,\theta) \mid \theta]}{\gamma_\alpha(x \mid \theta)}$ valeurs de cette fonction au point x et transformé par $T^i(\theta)$. On a, comme on a vu au paragraphe 11 du premier mémoire,

$$\frac{\gamma_\alpha[g_i(x,\,\theta) \mid \theta]}{\gamma_\alpha(x \mid \theta)} = g_i^{1,0}(x^\star,\,\theta), \tag{16}$$

$x^\star$ étant un point convenable de l'intervalle $(x,\, g_{n_\alpha}(x,\,\theta))$ d'ampleur $|\gamma_\alpha(x \mid \theta)|$. x' et x'' étant deux points de l'intervalle $(x,\, g_{n_{\alpha-1}}(x,\,\theta))$ considérons le rapport $\frac{g_{n_\alpha}^{1,0}(x',\,\theta)}{g_{n_\alpha}^{1,0}(x'',\,\theta)}$; ce rapport est égal à 1 (G, § 19), à une quantité près, qui est plus petite que $\left|\frac{x' - x''}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta)}\right| \varepsilon_\alpha$, ε_α étant de l'ordre de $\frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}$ au plus. Plus généralement le rapport $\frac{g_i^{1,0}(x',\,\theta)}{g_i^{1,0}(x'',\,\theta)}$ $(i \leqq n_\alpha)$ est égal à 1 (G, § 20), à une quantité près, qui est plus petite que $\left|\frac{x' - x''}{\gamma_{\alpha-1}(x,\,\theta)}\right| \varepsilon_\alpha^\star$, $\varepsilon_\alpha^\star$ étant également de l'ordre de $\frac{\alpha}{2} p^{\frac{\alpha}{2}}$ au plus.

10. Considérons l'allure de la fonction

$$\xi(x \mid \theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_{0}^{n_\alpha - 1} {}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} \tag{7}$$

dans l'intervalle $(x,\, g_{n_{\alpha-1}}(x,\,\theta_\alpha))$ défini par deux points contigus homologues par rapport au groupe cyclique d'ordre n_α engendré par $T(\theta_\alpha)$. Soient x' et x'' deux points de l'intervalle : nous voulons montrer que *le rapport* $\frac{\xi(x' \mid \theta_\alpha)}{\xi(x'' \mid \theta_\alpha)}$ *est égal à* 1, *à une quantité près de* l'ordre de $\varepsilon_\alpha^\star$ au plus. Ayons recours pour cela à l'expression (7) de $\xi(x|\theta_\alpha)$; étant donné que les termes de la sommation sont tous du même signe (positif) il suffira d'avoir montré la même chose pour chacun des produits $\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x'', \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{0,1}[g_{s-1}(x', \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \frac{g_s^{1,0}(x', \theta_\alpha)}{g_s^{1,0}(x'', \theta_\alpha)}$. $g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$ reste supérieur au nombre positif donné $\underline{M}^{0,1}$ et satisfait à la condition de Lipschitz; l'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x|\theta_\alpha)|$ de l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha))$, qui contient x' et x'', est infiniment petite d'un ordre supérieur par rapport à $\varepsilon_\alpha^\star$, comme on l'a dit au paragraphe précédent. Il s'ensuit que la première fraction dans le rapport précédent est égal à 1, à une quantité près infiniment petite d'ordre supérieur à $\varepsilon_\alpha^\star$. D'autre part, d'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, la deuxième fraction est égale à 1, à une quantité près de l'ordre de $\varepsilon_\alpha^\star$ au plus.

Nous pouvons déduire, du résultat précédent, un lemme qui nous sera souvent nécessaire dans la suite :

La somme

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_i\, \xi[g_i(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] \tag{17}$$

des valeurs, que la fonction $\xi(x|\theta_\alpha)$ *prend en* x *et dans ses* $n_\alpha - 1$ *homologues par rapport à* $T(\theta_\alpha)$ *est de l'ordre de* n_α.

Remarquons d'abord que chacun des modules

$$0, \quad \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \quad 2\frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \quad \ldots, \quad (n_\alpha - 1)\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$$

des transformations

$$T^0(\theta_\alpha), \quad T(\theta_\alpha), \quad T^2(\theta_\alpha), \quad \ldots, \quad T^{n_\alpha-1}(\theta_\alpha),$$

engendrées par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ est congru (mod 1) à l'un des nombres

$$0, \quad \frac{1}{n_\alpha}, \quad \frac{2}{n_\alpha}, \quad \ldots, \quad \frac{n_\alpha - 1}{n_\alpha}.$$

Nous avons déjà (§ 6) représenté par

$$x_1 = g(x, t\,|\,\theta_\alpha)$$

l'équation du groupe g_1 engendré par la transformation infinitésimale $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$, qui donne pour $t=1$ la transformation $T(\theta_\alpha)$ de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; pour t égal à $0, \frac{1}{m_\alpha}, \frac{2}{m_\alpha}, \cdots ; \frac{n_\alpha - 1}{m_\alpha}$ cette équation donnera donc des transformations qui coïncident, au point de vue géométrique, avec les transformations $T^0(\theta_\alpha)$, $T(\theta_\alpha)$, $T^2(\theta_\alpha)$, ..., $T^{n_\alpha-1}(\theta_\alpha)$, ordonnées d'une façon convenable. La somme (17) est alors également donnée par

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_i\, \xi\left[g\left(x, \frac{i}{m}\,\middle|\,\theta_\alpha\right)\,\middle|\,\theta_\alpha\right]. \tag{17'}$$

Deux points $g\left(x, \frac{i}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$, $g\left(x, \frac{i+1}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$ sont contigus homologues par rapport au groupe cyclique engendré par $T(\theta_\alpha)$; d'après le résultat précédemment établi dans ce paragraphe, le rapport entre les valeurs que $\xi(x|\theta_\alpha)$ prend en deux points quelconques de l'intervalle $\left(g\left(x, \frac{i}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right), g\left(x, \frac{i+1}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\right)$ est infiniment proche de l'unité. On peut alors regarder l'expression

$$\frac{1}{m_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_i\,\xi\left[g\left(x, \frac{i}{m_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]$$

comme une somme de Riemann relative à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{n_\alpha}{m_\alpha}} \xi[g(x, t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,dt = \int_x^{x+1} \xi(x\,|\,\theta_\alpha)\frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1;$$

la valeur de la somme (17′) ou (17) est sensiblement égale à m_α, c'est-à-dire, comme nous l'avions annoncé, de l'ordre de n_α.

Nous terminerons ce paragraphe par une application du résultat obtenu au commencement, qui nous sera nécessaire dans la suite.

Le module de la transformation très petite

$$x' = x + \gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha),$$

qui transforme les points de C comme $T^{n_{\alpha-1}}(\theta_\alpha)$, est donné par

$$n_{\alpha-1}\frac{m_\alpha}{n_\alpha} - m_{\alpha-1} = \frac{(-1)^\alpha}{n_\alpha}.$$

Cette même transformation appartient au groupe g_1 engendré par $\xi(x|\theta_\alpha)\frac{df}{dx}$, qui donne pour $t=1$ la transformation $T(\theta_\alpha)$, de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; on obtiendra donc la transformation très petite en question, en faisant $t = \frac{1}{m_\alpha}$; l'équation de la transformation sera alors

$$\int_x^{x'} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = \int_x^{x+\gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}.$$

Étant donné que $\xi(x|\theta_\alpha)$ a sensiblement la même valeur en tout point de l'intervalle $(x, g_{n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha))$, la valeur de l'intégrale précédente est sensiblement donnée par $\frac{\gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$ et l'on aura donc

$$\frac{\gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}.$$

On peut conclure que $\gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{m_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$.

11. Nous voulons montrer que, pour toute valeur θ_α du paramètre, qui

correspond à une valeur rationnelle $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ du module, *la dérivée* $k'(\theta_\alpha)$ *de* $k(\theta)$ *est au moins égale* au nombre positif $\underline{M}^{0,1}$.

En indiquant par $d\theta$ une quantité infiniment petite, partons de l'identité

$$\mathrm{T}^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)\equiv\prod_{n_\alpha}^{1}{}_s\,\mathrm{T}^{-s}(\theta_\alpha)[\mathrm{T}(\theta_\alpha+d\theta)\mathrm{T}^{-1}(\theta_\alpha)]\mathrm{T}^{s}(\theta_\alpha). \tag{18}$$

Au deuxième membre, on reconnait les transformations transformées de $\mathrm{T}(\theta_\alpha+d\theta)\mathrm{T}^{-1}(\theta_\alpha)$, qui ont toutes évidemment le même module. $\mathrm{T}(\theta_\alpha+d\theta)\mathrm{T}^{-1}(\theta_\alpha)$ induit sur un point de C un déplacement, qui est au moins égal à $\underline{M}^{0,1}\,d\theta$, son module est donc au moins égal à $\underline{M}^{0,1}\,d\theta$. De (18), et du lemme donné au paragraphe 7 du premier Mémoire, on déduit que le module de $\mathrm{T}^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ est au moins égal à $n_\alpha\underline{M}^{0,1}\,d\theta$.

$\mathrm{T}^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)$ étant évidemment permutable avec toute autre transformation, et donc en particulier avec $\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$, le module de $\mathrm{T}^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ est égal à la différence entre le module de $\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ et celui de $\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$. Cette différence est donc au moins égale à $n_\alpha\underline{M}^{0,1}\,d\theta$; la différence entre le module de $\mathrm{T}(\theta_\alpha+d\theta)$ et celui de $\mathrm{T}(\theta_\alpha)$ est alors au moins égale à $\underline{M}^{0,1}\,d\theta$, et la dérivée $k'(\theta_\alpha)$ est au moins égale à $\underline{M}^{0,1}$.

12. Nous voulons montrer d'autre part que $k'(\theta_\alpha)$ *reste borné*. Considérons pour cela de nouveau la transformation

$$\mathrm{T}^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)\equiv\prod_{n_\alpha}^{1}{}_s\,\mathrm{T}^{-s}(\theta_\alpha)[\mathrm{T}(\theta_\alpha+d\theta)\mathrm{T}^{-1}(\theta_\alpha)]\mathrm{T}^{s}(\theta_\alpha); \tag{18}$$

comme on l'a remarqué au paragraphe précédent, on a, au deuxième membre, le produit des transformations transformées de la transformation très petite $\mathrm{T}(\theta_\alpha+d\theta)\mathrm{T}^{-1}(\theta_\alpha)$ par les puissances négatives de $\mathrm{T}(\theta_\alpha)$; pour $d\theta$ infiniment petit, cette transformation très petite est caractérisée par la fonction $g^{0,1}[g_{-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,d\theta$. En ayant alors recours aux formules données au paragraphe 7 du premier Mémoire, on trouve que la transformation $\mathrm{T}^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\mathrm{T}^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$ est caractérisée par la fonction

$$\sum_{1}^{n_\alpha}{}_s\,\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}\,d\theta.$$

D'après une formule donnée dans le même paragraphe le module de la transformation est alors donné par

$$\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dx}{\displaystyle\sum_{1}^{n_\alpha}{}_s\,\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}\,d\theta}}.$$

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on obtient $k'(\theta_\alpha)$ en divisant cette expression par $n_\alpha d\theta$; pour démontrer que $k'(\theta_\alpha)$ reste bornée il suffit alors de démontrer la même chose pour la fonction

$$\frac{1}{n_\alpha}\sum_{s=1}^{n_\alpha}\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}.$$

Si, pour chaque entier $\alpha' \leqq \alpha$, nous posons

$$\chi_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha) = \frac{1}{n_{\alpha'}}\sum_{s=1}^{n_{\alpha'}}\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)},$$

nous avons, pour la fonction $\chi_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$, la relation récurrente

$$(19) \qquad \chi_{\alpha'+1}(x \mid \theta_\alpha) = \frac{1}{n_{\alpha'+1}}\left\{\sum_{l=0}^{a^{\alpha'}-1}\frac{n_{\alpha'}}{g_{ln_{\alpha'}}^{1,0}(x, \theta_\alpha)}\chi[g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + \frac{n_{\alpha'-1}}{g_{a_\alpha n_{\alpha'}}^{1,0}(x, \theta_\alpha)}\chi_{\alpha'-1}[g_{a_\alpha n_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\right\}.$$

la considération de cette relation nous permettra de démontrer que la fonction

$$\frac{1}{n_\alpha}\sum_{s=1}^{n_\alpha}\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

reste bornée; il est toutefois nécessaire d'interrompre le cours de la déduction pour étudier la fonction

$$\gamma_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha) = g_{n_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) - x - m_{\alpha'},$$

déjà considérée au paragraphe 9, et qui représente la transformation très petite $T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$; en désignant par $\mathbf{x}$ un point déterminé de C nous étudions l'allure de cette fonction dans l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$.

Divisons l'intervalle $(\theta_{\alpha'}, \theta_\alpha)$ en un nombre infiniment grand de parties d'ampleur $d\theta$. Nous avons

$$(20) \quad T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha) \equiv [T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})T^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'} + d\theta)][T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'} + d\theta)T^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'} + 2d\theta)]\ldots[T^{-n_{\alpha'}}(\theta_\alpha - d\theta)T^{a_{\alpha'}}(\theta^n)].$$

Toutes les transformations $[T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})T^{n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+d\theta)]$, $[T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+d\theta)T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha'+2d\theta)]\ldots$, déplacent les points de C dans le même sens, qui est celui de la transformation $T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$. Cette dernière transformation porte l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ dans l'intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), g_{n_{\alpha'}+n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$; alors le produit des l premiers facteurs $\left(l < \dfrac{\theta_\alpha - \theta_{\alpha'}}{d\theta}\right)$ du deuxième membre de (20) transforme chaque point de l'intervalle $(\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ en un point intérieur à l'intervalle [1]. La transformation très petite représentée symboliquement par le $(l+1)^{\text{ième}}$ facteur

$$T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'}+l\,d\theta)\,T^{n_{\alpha'}}[\theta_{\alpha'}+(l+1)\,d\theta]$$

est caractérisée par la fonction

$$(21)\qquad \sum_{1}^{n_{\alpha'}}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha'}+l\,d\theta),\,\theta_{\alpha'}+l\,d\theta]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_{\alpha'}+l\,d\theta)}\,d\theta \quad (^1).$$

Indiquons par x' et x'' deux points quelconques de l'intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha),\ g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha))$; on démontre $\left[\text{par un raisonnement tout à fait analogue à celui qu'on a employé au paragraphe 10 pour le rapport } \frac{\xi(x'|\theta_\alpha)}{\xi(x''|\theta_\alpha)}\right]$ que le rapport entre les valeurs que la fonction (21) prend en x' et x'' est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\varepsilon^{\star}_{\alpha'}$ au plus. En d'autres termes, le rapport entre l'ampleur des déplacements induits par le $(l+1)^{\text{ième}}$ facteur du deuxième membre de (20) sur les points x' et x'' est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^{\star}_{\alpha'}$ au plus.

Considérons maintenant deux points de l'intervalle $(\mathbf{x},\ g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha))$ et les deux points transformés de ces points $T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\,T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$. On obtient les points transformés par $\left|\frac{\theta_\alpha-\theta_{\alpha'}}{d\theta}\right|$ déplacements élémentaires successifs, tous dans un même sens, appliqués aux points donnés, ces déplacements correspondant aux $\left|\frac{\theta_\alpha-\theta_{\alpha'}}{d\theta}\right|$ facteurs du deuxième membre de (20). Nous venons de voir, d'autre part, que le rapport entre les déplacements que chacun de ces facteurs induit sur les deux points est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^{\star}_{\alpha'}$ au plus; nous arrivons alors à la même conclusion pour ce qui concerne le déplacement total induit par $T^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\,T^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$. Cela signifie que le rapport des valeurs que $\gamma_{\alpha'}(x|\theta_\alpha)$ prend en ces deux points est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^{\star}_{\alpha'}$ au plus.

Nous allons dès maintenant désigner par $(g_{-n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha),\ \mathbf{x})$ l'intervalle indiqué jusqu'ici par $(\mathbf{x},\ g_{n_{\alpha'-1}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha))$; appliquons le résultat que nous venons d'établir à l'étude des fonctions $g_{ln_{\alpha'}}(x,\,\theta_\alpha)$ qui paraissent dans (19). Nous avons, en rappelant (16),

$$\frac{\gamma_{\alpha'}[g_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha'}(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)} = g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x^\star,\,\theta_\alpha) \qquad (l=1,\,2,\,\ldots,\,a_\alpha),$$

$x^\star$ étant un point convenable de l'intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha),\ \mathbf{x})$, dont le choix dépend aussi de l'index l. D'après le résultat que nous venons d'établir on a

---

[1] On peut le voir par un raisonnement semblable à celui du début du paragraphe pour la transformation $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)\,T^{n_\alpha}(\theta_\alpha+d\theta)$. $[\mathbf{x},\ g_{n_{\alpha'}}+n_{\alpha'-1}(\mathbf{x},\,\theta_\alpha)]$.

alors que $g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x^\star, \theta_\alpha)$ est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^\star_{\alpha'}$ au plus.

Il s'agit maintenant de montrer qu'une telle conclusion est également valable pour $g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$, c'est-à-dire lorsqu'on substitue au point $x^\star$ le point $\mathbf{x}$, qui est un point arbitraire de C. On a

$$(22)\qquad \frac{g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x^\star, \theta_\alpha)}{g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)} = \prod_{0}^{l-1}{}_t \frac{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{tn_{\alpha'}}(x^\star, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{tn_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), \theta_\alpha]},$$

$\dfrac{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{tn_{\alpha'}}(x^\star, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_{\alpha'}}[g_{tn_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$ est égal à 1 (§ 9), à une quantité près, de l'ordre de $\left|\dfrac{g_{tn_{\alpha'}}(x^\star, \theta_\alpha) - g_{tn_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha'-1}[g_{-n_{\alpha'-1}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}\right| \varepsilon_\alpha$ au plus. En remarquant que les intervalles $(g_{tn_{\alpha'}}(x^\star, \theta_\alpha), g_{tn_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ ont, tout au plus, les points extrêmes en commun et qu'ils sont tous compris dans l'intervalle $(x, g_{-n_{\alpha'-1}}(x, \theta_\alpha))$, on trouve alors que le premier membre de (21) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^\star_{\alpha'}$ au plus; finalement *on trouve que*

$$g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \qquad (l = 1, 2, \ldots, a_{\alpha'})$$

est égal à 1, *à une quantité près, de l'ordre de* $\varepsilon^\star_{\alpha'}$ *au plus.*

Revenons à l'étude de (19). Par un raisonnement semblable à celui développé au commencement du paragraphe 10 pour la fonction $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ on trouve que $\chi_{\alpha'}[g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ est égale à $\chi_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$, à un facteur près, qui diffère de 1 d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon^\star_{\alpha'}$ au plus. Dans la même approximation on peut substituer dans (19) $\chi_{\alpha'-1}[g_{a_\alpha n_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ par $\chi_{\alpha'-1}(x \mid \theta_\alpha)$. On tire alors de (19) que $\chi_{\alpha'+1}(x \mid \theta_\alpha)$ est donnée par

$$\frac{1}{n_{\alpha'+1}} \{ a_{\alpha'} n_{\alpha'} \chi_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha) + n_{\alpha'-1} \chi(x \mid \theta_\alpha) \}$$

à un facteur près, qui diffère de 1 d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon^\star_{\alpha'}$ au plus. En remarquant que

$$a_{\alpha'} n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1} = n_{\alpha'+1},$$

on déduit d'ici que $\chi_{\alpha'+1}(x \mid \theta_\alpha)$ ne peut pas dépasser le plus grand des deux nombres $\chi_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$, $\chi_{\alpha'-1}(x \mid \theta_\alpha)$, multiplié par un facteur, qui dépasse 1 d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon^\star_{\alpha'}$ au plus.

Remarquons maintenant que, d'après ce qu'on a dit au paragraphe 9 concernant l'ordre de grandeur des nombres $\varepsilon^x_{\alpha'}$, la série $\varepsilon^\star_1 + \varepsilon^\star_2 + \varepsilon^\star_3 + \ldots$ converge; on déduit alors du résultat précédent que $\chi_{\alpha'}(x \mid \theta_\alpha)$ reste bornée lorsque θ_α et α' varient. En faisant $\alpha' = \alpha$ on trouve enfin que la fonction

$$\frac{1}{n_\alpha} \sum_{1}^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_s(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_s(x, \theta_\alpha)}$$

reste bornée, et de là, comme on a dit au commencement du paragraphe, on conclut que $k'(\theta_\alpha)$ reste bornée.

13. D'après les résultats des deux derniers paragraphes nous pouvons dire que $k'(\theta_\alpha)$ reste finie. D'ailleurs, comme on l'a vu au paragraphe 12, $k'(\theta_\alpha)$ est donnée par l'intégrale

$$(23) \qquad \int_x^{x+1} \frac{dx}{\dfrac{1}{n_\alpha}\displaystyle\sum_1^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)}};$$

on peut donc affirmer que l'intégrale en question reste finie.

On a d'autre part, en rappelant (7),

$$\frac{1}{n_\alpha}\sum_1^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)} = \frac{1}{n_\alpha}\sum_0^{n_\alpha-1} \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha)} = \frac{1}{d_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha),$$

d_α étant déterminée par la condition

$$(3') \qquad \int_x^{g(x,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1.$$

De cette même condition (3') on déduit d'autre part que l'intégrale

$$(24) \qquad \int_x^{x+1} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$$

reste finie. De la considération des deux intégrales (23) et (24) on déduit que *le nombre d_α reste fini* lorsque θ_α varie.

On peut déduire de ce résultat un lemme, qui est à rapprocher de celui donné au paragraphe 10 : *La somme des inverses des valeurs de la fonction $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ en un point x et dans ses $n_\alpha - 1$ homologues par rapport à* $T(\theta_\alpha)$,

$$\sum_0^{n_\alpha-1}{}_s \frac{1}{\xi[g_s(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]},$$

est de l'ordre de n_α.

Pour la démonstration, remarquons que, en dérivant par rapport à x l'équation

$$(3') \qquad \int_x^{g(x,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = 1,$$

on trouve

$$(25) \qquad g^{1,0}(x,\theta_\alpha) = \frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)};$$

de cette relation on déduit, plus en général,

$$(26) \qquad g_s^{1,0}(x,\theta_\alpha) = \frac{\xi[g_s(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}.$$

On a alors

$$(7') \quad \xi(x\,|\,\theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{\xi[g_s(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]},$$

et de là

$$\frac{n_\alpha}{d_\alpha} = \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{\xi[g_s(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}.$$

En rappelant que $g^{0,1}(x,\,\theta_\alpha)$ reste comprise entre les deux nombres positifs $\underline{M}^{0,1}$ et $M^{0,1}$, on reconnaît que cette relation démontre le lemme énoncé.

14. Nous devons donner, dans ce paragraphe, une borne pour la valeur absolue de la fonction $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$. Pour cela il faut évaluer, d'une façon préliminaire, l'ordre de grandeur de la somme

$$(27) \qquad \sum_{0}^{i}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}\gamma_{\alpha-1}[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] \qquad (i < n_\alpha).$$

Nous allons voir que, à une quantité près que nous pouvons négliger, cette somme est donnée par

$$(28) \qquad \frac{g_i^{1,0}[g_{n_{\alpha-1}}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_i^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} - 1;$$

en effet (par un raisonnement tout à fait semblable à celui développé dans la note de la page 267 du premier Mémoire), on trouve d'abord qu'on peut remplacer l'expression (28) par la somme

$$\sum_{0}^{i}{}_l \frac{g^{1,0}[g_{l+n_{\alpha-1}}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha] - g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}.$$

Appliquons ensuite le théorème de la moyenne aux numérateurs des termes de cette somme et substituons, dans chaque numérateur, à la valeur de la fonction $g^{2,0}(x,\,\theta_\alpha)$, calculée en un point intérieur de l'intervalle $(g_l(x,\,\theta_\alpha),\, g_{l+n_{\alpha-1}}(x,\,\theta_\alpha))$ la valeur $g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]$, que cette même fonction prend à l'extrémité de l'intervalle. Nous faisons de la sorte, une erreur totale, au plus de l'ordre du maximum de l'ampleur de l'intervalle $(x,\, g_{n_{\alpha-1}}(x,\,\theta_\alpha))$ [1]; nous arrivons ainsi à la somme (27).

D'après le résultat du paragraphe 20 du premier Mémoire l'expression (28) est de l'ordre de ε_α^* au plus, il en est alors de même de la sommation (27), que nous devions évaluer.

---

[1] On peut le reconnaître par un raisonnement analogue à celui fait à la page 266 du premier Mémoire.

Après ces considérations préliminaires venons à l'étude de $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$; en utilisant pour cette fonction son expression (13) et en rappelant (26), on a

$$
\begin{aligned}
(13')\quad \xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha) &= \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]} \\
&\quad - \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} \sum_{0}^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]} g_l^{1,0}(x,\,\theta_\alpha) \\
&= \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]} - \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\,\frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} \\
&\quad \times\left\{\sum_{0}^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}\,\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\right\}.
\end{aligned}
$$

On voit que $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$ nous est donnée par la différence entre deux expressions, que nous allons considérer séparément.

La première expression consiste dans la somme de n_α termes qui sont bornés, multipliée par le facteur d_α, qui reste fini, et divisée par n_α; la valeur de cette expression est évidemment bornée.

Pour évaluer la deuxième expression, supposons avoir démontré, d'une façon préliminaire, que les sommes entre accolades sont toutes au plus de l'ordre d'une certaine quantité $N_\alpha^{1,0}$; il en résultera alors que l'expression à considérer est elle-même au plus de l'ordre de

$$\frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\,\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)} N_\alpha^{1,0},$$

par conséquent [d'après (7)] au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Il s'agit donc d'évaluer les sommations

$$(29)\qquad \sum_{0}^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}\,\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha] \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n_\alpha-1).$$

En indiquant par x_l^* des points convenables de l'intervalle $(x,\,g_{n_{\alpha-1}}(x,\,\theta_\alpha))$ et par ρ_l des nombres (fonctions de x) plus petits que 1 en valeur absolue, nous avons

$$(30)\qquad \frac{\dfrac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha-1}[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}}{\dfrac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha)}} = \frac{\dfrac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}}{\dfrac{\gamma_{\alpha-1}[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha-1}(x\,|\,\theta_\alpha)}} = \frac{g_l^{1,0}(x,\,\theta_\alpha)}{g_l^{1,0}(x_l^*,\,\theta_\alpha)} = 1+\rho_l\varepsilon_\alpha^*.$$

Ces équations nous montrent avant tout que les fractions

$$(31)\qquad \frac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\gamma_{\alpha-1}[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]} \qquad (l=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n_\alpha-1)$$

sont égales entre elles, à des quantités près qui, pour $\alpha \to \infty$, sont négligeables par rapport à ces mêmes fractions; en remarquant alors que la somme

$$\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_{l}\, \xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$$

est (§ 10) de l'ordre de n_α et que la somme

$$\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_{l}\, |\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]|$$

est égale à 1 [1], on conclut que les fractions (31) sont toutes de l'ordre de n_α.

De (30) on tire ensuite

$$\xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] = \frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha](1 + \rho_l \varepsilon_\alpha^\star);$$

en introduisant ces expressions dans (29) on obtient

$$(29') \qquad \frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)} \left\{ \sum_{0}^{s-1}{}_{l}\, \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \right\}$$
$$+ \frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\gamma_{\alpha-1}(x \mid \theta_\alpha)} \varepsilon_\alpha^\star \sum_{0}^{s-1}{}_{l}\, \rho_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha].$$

La fraction qui multiplie l'expression entre accolades dans le premier des deux termes de (29′) est de l'ordre de n_α, d'après ce que nous venons de voir; nous avons démontré d'autre part dans ce même paragraphe que l'expression entre accolades est de l'ordre de $\varepsilon_\alpha^\star$ au plus, alors le premier terme de (29′) est de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^\star$ au plus. On reconnaît facilement qu'une même conclusion est valable pour le second terme, en effet, en remarquant que

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{l}\, |\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]| < 1$$

et que les facteurs $\rho_l \dfrac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$ sont bornés, on voit que la sommation par rapport à l dans le deuxième terme reste bornée; le deuxième terme est donc de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^\star$ au plus.

On peut enfin conclure, de l'étude faite dans ce paragraphe, que $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$ est de l'ordre de $n_\alpha \varepsilon_\alpha^\star$ au plus; en précisant davantage la définition des

---

[1] En effet, les intervalles

$$(g_{l+n_{\alpha-1}}(x, \theta_\alpha), g_l(x, \theta_\alpha)) \qquad (l = 0, 1, \ldots, n_{\alpha-1}),$$

d'ampleur $\gamma_{\alpha-1}[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$, recouvrent la courbe C complètement et simplement.

nombres $N_\alpha^{1,0}$ nous pouvons affirmer qu'*on peut donner, pour la valeur absolue de la fonction* $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$, *une borne* $N_\alpha^{1,0}$ *de l'ordre de* $n_\alpha \varepsilon_\alpha^*$ *au plus.*

15. Des résultats établis au paragraphe précédent on déduit facilement que les valeurs de la fonction $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ sont au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Indiquons en effet par $\mathbf{x}$ le point où $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ est maximum; du fait que $\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)$ ne dépasse $N_\alpha^{1,0}$ on déduit que la fonction $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ reste comprise entre $\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)$ et $\frac{\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)}{2}$ dans tout intervalle de centre $\mathbf{x}$ et d'ampleur non supérieur à $\frac{\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$. Si l'on avait alors $\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha) > N_\alpha^{1,0}$, la fonction serait partout sur la courbe de l'ordre de $\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)$; d'autre part, d'après (3′), $\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)$ ne peut pas, pour $\alpha \to \infty$, devenir partout infiniment grande.

Nous voulons montrer d'autre part que le *minimum de* $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ *est de l'ordre de* $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ *au moins*. Indiquons maintenant par $\mathbf{x}$ le point où $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ est minimun. Dans un intervalle de centre $\mathbf{x}$ et ampleur $2\frac{\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$ les valeurs de la fonction seront comprises entre $\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)$ et $2\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)$. Nous voulons voir combien des intervalles contigus

$$(32) \quad \ldots, \quad (g_{-n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), \mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)), \quad (g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), g_{2n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)), \quad \ldots$$

d'ampleur

$$\ldots, \quad \gamma_{\alpha-1}[g_{-n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \mid, \quad \mid \gamma_{\alpha-1}(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha) \mid, \quad \mid \gamma_{\alpha-1}[g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \mid, \quad \ldots$$

appartiennent à l'intervalle considéré d'ampleur $2\frac{\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent concernant les fractions (30), $\mid \gamma_{\alpha-1}[g_{ln_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \mid$ est de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha}\xi[g_{ln_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$; d'autre part, si l'intervalle $(g_{ln_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$, $g_{(l+)n_{\alpha-1})}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ appartient à l'intervalle considéré d'ampleur $2\frac{\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)}{N_\alpha^{1,0}}$, on a

$$\frac{1}{n_\alpha}\xi[g_{ln_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta) \mid \theta_\alpha] < \frac{2}{n}\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha);$$

par conséquent le nombre des intervalles (31), qui appartiennent à l'intervalle considéré, est de l'ordre de $\frac{n_\alpha}{N_\alpha^{1,0}}$.

Pour une valeur l de l'indice, qui correspond à l'un de ces intervalles, on aura

$$g^{1,0}_{ln_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) = \frac{\xi[g_{ln_{\alpha-1}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)} < 2.$$

On a, d'autre part,

$$\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha) = \frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)};$$

dans la somme, d'après ce qu'on a dit, on aura un nombre de termes, de l'ordre de $\frac{n_\alpha}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins, qui sont plus grands que $\frac{M^{0,1}}{2}$; alors $\xi(\mathbf{x}\,|\,\theta_\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins.

16. Nous allons maintenant évaluer, dans ce paragraphe, l'ordre de grandeur des valeurs de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$. Rappelons que l'on a

$$(14')\qquad \xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)=\left(\frac{1}{d_\alpha}+A_\alpha\right)\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha);$$

rappelons aussi (§ 6) que $\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$ peut être définie d'une façon arbitraire en chaque point x d'un intervalle $(\mathbf{x},\ g_{n_{\alpha-1}}(\mathbf{x},\ \theta_\alpha))$ et qu'elle est alors donnée, au le point d'abscisse $g_r(x,\ \theta_\alpha)$, par l'équation

$$(11)\quad \xi^{0,1***}[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]=\frac{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$$
$$+\left\{\xi[g_r(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\sum_1^r{}_j\frac{g^{0,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\right.$$
$$\left.-\sum_1^r{}_j\xi^{1,0}[g_j(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{g^{1,1}[g_{j-1}(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_\alpha-r+j}[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\right\}.$$

Évaluons d'abord l'ordre de grandeur de $\xi^{0,1***}[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$. Au deuxième membre de (11), dans la première des deux expressions entre accolades, nous avons $\xi[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$, qui multiplie la somme de $r(r<n_\alpha)$ termes qui restent bornés $\left(\text{qui ne dépassent } \frac{M^{1,1}}{M^{1,0}}\right)$; la valeur de cette expression est donc au plus de l'ordre de $n_\alpha\xi[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$. D'autre part, la deuxième des deux expressions entre accolades est plus petite que

$$M^{1,1}N_\alpha^{1,0}\sum_1^r{}_j\frac{1}{g^{1,0}_{n_\alpha-r+j}[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\equiv M^{1,1}N_\alpha^{1,0}\sum_{n_\alpha-r+1}^{n_\alpha}{}_j\frac{1}{g_j^{1,0}[g_r(x,\theta_\alpha),\theta_\alpha]};$$

l'équation (7), lorsqu'on y introduit $g_r(x,\ \theta_\alpha)$ à la place de x nous montre que la sommation par rapport à j est au plus de l'ordre de $n_\alpha\xi[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$; l'expression considérée est donc au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$. La même conclusion est alors évidemment valable pour la somme des deux expressions entre accolades dans (11).

Considérons ensuite le terme $\frac{\xi[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,\theta_\alpha)}\xi^{0,1***}(x\,|\,\theta_\alpha)$; on pourra affirmer que ce terme est lui-même au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi[g_r(x,\ \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ si l'on a montré que, en tout point x de l'intervalle $(\mathbf{x},\ g_{\ _{\alpha-1}}(\mathbf{x},\ \theta_\alpha))$, la fonction $\xi^{0,1***}(x,\ \theta_\alpha)$ est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ au plus. Pour cela rappelons (§ 6) que, dans ce même intervalle, la fonction est seulement assujettie aux conditions d'être continue et de prendre au point $g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$ la valeur $\xi^{0,1***}[g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]$ donnée par (11) lorsqu'on pose $x = \mathbf{x}$ et $r = n_{\alpha-1}$. Attribuons, par exemple, la valeur zéro à la fonction au point $\mathbf{x}$; la valeur au point $g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)$ est alors donnée par la somme des deux expressions entre accolades dans (11) lorsqu'on fait $x = \mathbf{x}$ et $r = n_{\alpha-1}$; cette somme, d'après ce que nous avons vu, est de l'ordre $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi[g_{n_\alpha-1}(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]$ au plus. La condition précédente, concernant l'ordre de grandeur de $\xi^{0,1***}(x | \theta_\alpha)$ dans $(\mathbf{x}, g_{n_\alpha-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$ sera donc certainement satisfaite si nous supposons attribueés à la fonction, dans ce même intervalle, des valeurs comprises entre celles qu'elle prend aux extrêmes.

En conclusion on peut donc supposer que le terme $\dfrac{\xi[g_r(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{(x | \theta_\alpha)} \xi^{0,1***}(x | \theta_\alpha)$ est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi[g_r(x, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]$. *$x$ étant maintenant un point quelconque de* C, on pourra affirmer, d'après ce qu'on vient de voir, que la valeur $\xi^{0,1***}(x | \theta_\alpha)$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi(x | \theta_\alpha)$. Il nous reste à considérer, dans (14), le terme $\left(\dfrac{1}{d_\alpha} + A_\alpha\right) \xi(x | \theta_\alpha)$. Rappelons (§ 6) que A_α est donné par

$$\frac{g^{0,1**}(\mathbf{x} | \theta_\alpha) - \displaystyle\int_0^1 \xi^{0,1***}[g(\mathbf{x}, \tau | \theta_\alpha) | \theta_\alpha] \frac{\xi[g(\mathbf{x}, 1 | \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}{\xi[g(\mathbf{x}, \tau | \theta_\alpha) | \theta_\alpha]} d\tau}{\xi[g(\mathbf{x}, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]}.$$

La fonction sous le signe somme, d'après ce qu'on a vu dans ce même paragraphe, est au plus de l'ordre de

$$n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi[g(\mathbf{x}, 1 | \theta_\alpha) | \theta_\alpha] \equiv n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi[g(\mathbf{x}, \theta_\alpha) | \theta_\alpha],$$

il en est alors de même pour l'intégrale; $g^{0,1**}(\mathbf{x} | \theta_\alpha)$ est d'autre part, d'après (8), de l'ordre de $\xi[g(\mathbf{x}, \theta_\alpha) | \theta_\alpha]$ au plus; la constante A_α est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}$ au plus et le terme $\left(\dfrac{1}{d_\alpha} + A_\alpha\right) \xi(x | \theta_\alpha)$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi(x | \theta_\alpha)$.

Nous pouvons enfin conclure que la fonction $\xi^{0,1}(x | \theta_\alpha)$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi(x | \theta_\alpha)$; *on pourra donc donner, pour le rapport* $\left|\dfrac{\xi^{0,1}(x | \theta_\alpha)}{\xi(x | \theta_\alpha)}\right|$, *une borne* $N_\alpha^{0,1}$ *de l'ordre de* $n_\alpha N_\alpha^{1,0}$ *et l'on aura alors*

$$|\xi^{0,1}(x | \theta_\alpha)| < N_\alpha^{1,0}\, \xi(x | \theta_\alpha).$$

17. Il nous reste à évaluer la constante de Lipschitz de la fonction $\xi^{1,0}(x | \theta_\alpha)$. Utilisons encore l'expression (13′) de cette fonction. Considérons d'abord le premier terme du troisième membre de (13′)

$$\frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_s^{n_\alpha - 1} \frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}.$$

A la fonction

$$\frac{g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]} \qquad (s=0, 1, \ldots, n_\alpha - 1),$$

de la variable x, nous voulons faire correspondre une nouvelle fonction, qui, en chaque point x, est au moins égale au plus grand, en valeur absolue, parmi les nombres dérivés de la fonction donnée. Pour cela nous pouvons d'abord faire correspondre, dans ce même sens, au numérateur $g^{1,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$ la fonction

$$M^{2,1} g_{s-1}^{1,0}(x, \theta_\alpha) = M^{2,1}\frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)},$$

et au dénominateur (qui est d'ailleurs dérivable) la fonction

$$M^{2,0} g_{s-1}^{1,0}(x, \theta_\alpha) = M^{2,0}\frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}.$$

A la fraction considérée nous pourrons faire correspondre la fonction

$$\left(\frac{M^{2,1}}{\underline{M}^{1,0}} + \frac{M^{2,0} M^{1,1}}{[\underline{M}^{1,0}]^2}\right)\frac{\xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}.$$

Enfin, au premier terme de l'expression (13′), nous pourrons faire correspondre la fonction

$$\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\left(\frac{M^{2,1}}{\underline{M}^{1,0}} + \frac{M^{2,0} M^{1,1}}{[\underline{M}^{1,0}]^2}\right)\frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_s\, \xi[g_{s-1}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha];$$

la somme par rapport à s est de l'ordre de n_α (§ 10), la fonction est alors de l'ordre de $\frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}$. Considérons ensuite le deuxième terme du troisième membre de (13′),

$$(33) \quad \frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}\left\{\sum_{0}^{s-1}{}_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}\xi[g_l(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\right\}.$$

Remarquons d'abord, en rappelant (7), que l'expression

$$\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

est de l'ordre de $\xi(x \mid \theta_\alpha)$ et sa dérivée de l'ordre de $\xi^{1,0}(x/\theta_\alpha)$, par conséquent, au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Alors l'expression

$$\frac{1}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\sum_{1}^{n_\alpha - 1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)}$$

reste finie (elle est d'ailleurs très proche de 1) et l'on peut lui faire correspondre, dans le sens précédemment indiqué, une fonction de l'ordre de

$$\frac{N_\alpha^{1,0}}{[\xi(x\,|\,\theta_\alpha)]^2}\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+\frac{1}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}N_\alpha^{1,0},$$

c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Nous devons déterminer ensuite une borne pour l'expression entre accolades dans (33), et une fonction qui corresponde, dans le sens indiqué précédemment, à la même expression, qui soient toutes les deux indépendantes de l'indice s.

Par un raisonnement semblable à celui fait au commencement du paragraphe on reconnaît qu'aux fractions $\frac{g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha),\,\theta_\alpha]}$ on peut faire correspondre les fonctions

$$\left(\frac{\underline{M}^{3,0}}{\underline{M}^{1,0}}+\frac{[\underline{M}^{2,0}]^2}{[\underline{M}^{1,0}]^2}\right)\frac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)},$$

qui sont, respectivement, de l'ordre de $\frac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$; à $\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ on peut faire correspondre sa dérivée par rapport à x, qui ne dépasse pas $N_\alpha^{1,0}\frac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Les fractions $\frac{g^{2,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$ restent bornées; d'autre part, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 15, $\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]$ est de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$ au plus. On reconnaît alors qu'au terme d'indice l de la sommation dans le troisième facteur entre accolades on peut faire correspondre une fraction de l'ordre de $\frac{\xi[g_l(x,\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}N_\alpha^{1,0}$; en faisant ensuite la somme par rapport à l nous trouvons une fonction qui, d'après le lemme du paragraphe 10, est de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}n_\alpha}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. De ce qu'on a vu on peut facilement conclure qu'on peut faire correspondre à l'expression (33), toujours dans le même sens, une fonction de l'ordre de $\frac{n_\alpha N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Finalement à la fonction $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$ on pourra également faire correspondre une fonction de l'ordre de $\frac{n_\alpha N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$. Le minimum de $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ est (§ 15) de l'ordre de $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins; *on peut* alors *supposer la constante de Lipschitz* $N_\alpha^{2,0}$ *de* $\xi^{1,0}(x\,|\,\theta_\alpha)$ *de l'ordre de* $n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2$.

Nous éviterons de considérer la constante de Lipschitz de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$.

18. Pour terminer ce chapitre, nous devons évaluer l'ordre de grandeur des erreurs qu'on commet lorsqu'on remplace les fonctions

$$\bar{g}(x,\,\theta\,|\,\theta_\alpha),\quad \bar{g}^{1,0}(x,\,\theta\,|\,\theta_\alpha),\quad \bar{g}^{0,1}(x,\,\theta\,|\,\theta_\alpha)$$

par les fonctions

$$g(x,\,\theta),\quad g^{1,0}(x,\,\theta),\quad g^{0,1}(x,\,\theta)$$

respectivement. Dans cette recherche nous allons toujours supposer que les quantités $(\theta-\theta_\alpha)N_\alpha^{1,0}$, $(\theta-\theta_\alpha)^2 N_\alpha^{2,0}$ soient petites et nous admettrons que leurs carrés soient négligeables par rapport aux quantités elles-mêmes, ce qui équivaut à supposer qu'on reste dans un voisinage assez restreint de θ_α. Nous allons également supposer le voisinage de θ_α suffisamment restreint, pour que l'expression

$$|\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-\bar{g}(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha)| \equiv |\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g(x,\theta_\alpha)|$$

ne dépasse jamais sensiblement $M^{0,1}|\theta-\theta_\alpha|$; nous pourrons alors supposer, dans une première approximation, qu'on ait

$$g(x,\theta_\alpha)-|\theta-\theta_\alpha|M^{0,1}<\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)<g(x,\theta_\alpha)+|\theta-\theta_\alpha|M^{0,1}; \tag{34}$$

on verra d'ailleurs que cette nouvelle condition est comprise dans la précédente (¹).

Nous supposons enfin qu'on ait

$$\frac{N_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}<N_\alpha^{0,1};$$

$\xi(x|\theta_\alpha)$ étant de l'ordre $\frac{1}{N_\alpha^{1,0}}$ au moins (§ 15) et $N_\alpha^{0,1}$ de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{0,1}$, l'hypothèse sera certainement vérifiée pourvu qu'on choisisse α suffisamment grand.

Considérons les ∞^1 groupes g_t engendrés par les transformations infinitésimales

$$\bar{\xi}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{df}{dx}\equiv\frac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{1-\dfrac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\frac{df}{dx}$$

et indiquons par

$$x_1=\bar{g}(x,t,\theta\,|\,\theta_\alpha)$$

l'équation de la famille ∞^2 composée des transformations appartenant à ces groupes. On aura

$$\bar{g}(x,1,\theta\,|\,\theta_\alpha)=\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha).$$

Comparons d'abord $\bar{g}^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$ et $g^{0,1}(x,\theta_\alpha)$. On a

$$\begin{aligned}g^{0,1}(x,\theta_\alpha)&=\int_0^1\xi^{0,1}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}d\tau\\&=\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\xi^{0,1}(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{[\xi(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)]^2}d\varkappa;\end{aligned} \tag{6'}$$

(¹) La signification exacte des hypothèses précédentes est la suivante : nous devrons considérer des voisinages des valeurs θ_α, $\theta_{\alpha+1}$, ... tels que, pour $\alpha\to\infty$, les quantités $(\theta-\theta_\alpha)N_\alpha^{0,1}$ et $(\theta-\theta_\alpha)^2N_\alpha^{2,0}$ soient infiniment petites et que l'erreur éventuelle, qu'on commet en supposant (34) vérifiée, soit infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $|\bar{g}(x,\theta|\theta_\alpha)-g(x,\theta_\alpha)|$.

on a ensuite

$$(35)\quad \bar{g}^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)=\int_x^{\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}\bar{\xi}^{0,1}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{[\bar{\xi}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)]^2}d\varkappa$$

$$=\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\bar{\xi}^{0,1}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{[\bar{\xi}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)]^2}d\varkappa$$

$$+\int_{g(x,\theta)}^{\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}\bar{\xi}^{0,1}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{[\bar{\xi}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)]^2}d\varkappa.$$

On a

$$\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}=\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\left\{1+\frac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)+\ldots\right\}.$$

La valeur de l'expression entre accolades reste comprise entre le couple de valeurs correspondant aux deux choix du signe, supérieur ou inférieur,

$$1\mp N_\alpha^{0,1}(\theta-\theta_\alpha);$$

on trouve d'autre part, en vertu de (34), que la valeur de

$$\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}=1+\frac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]-\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$$

reste comprise entre chacun des deux couples

$$1\mp M^{0,1}\frac{N_\alpha^{1,0}}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha),\qquad 1\mp M^{0,1}N_\alpha^{0,1}(\theta-\theta_\alpha);$$

alors la valeur de $\dfrac{\xi[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$ reste comprise entre le couple

$$1\mp(1+M^{0,1})N_\alpha^{0,1}(\theta-\theta_\alpha).$$

On a ensuite, pour la première des deux intégrales du troisième membre de (35), en rappelant (6′),

$$\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\bar{\xi}^{0,1}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)\frac{\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{[\bar{\xi}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)]^2}d\varkappa$$

$$=\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\frac{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{\xi(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}{1-\dfrac{\xi^{0,1}(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\right]_{\theta=\theta_\alpha}}{\left[\dfrac{\xi(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}{1-\dfrac{\xi^{0,1}(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}(\theta-\theta_\alpha)}\right]^2}\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,d\varkappa$$

$$=\int_x^{g(x,\theta_\alpha)}\frac{\xi^{0,1}(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)}{[\xi(\varkappa\,|\,\theta_\alpha)]^2}\xi[g(x,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,d\varkappa=g^{0,1}(x,\theta_\alpha).$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$\int_{g(x,\theta_\alpha)}^{\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}\frac{\bar{\xi}^{0,1}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)}{\bar{\xi}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)}\frac{\xi[\bar{g}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{\bar{\xi}(\varkappa,\theta\,|\,\theta_\alpha)}d\varkappa.$$

En ce qui concerne l'ampleur de l'intervalle d'intégration, on a

$$|\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g(x,\theta_\alpha)|<|\theta-\theta_\alpha|\,\mathrm{M}^{0,1}.$$

La fraction

$$\frac{\bar{\xi}^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}=\frac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\dfrac{[\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)]^2}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}+\ldots}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)+\ldots}$$

ne dépasse pas $\mathrm{N}_\alpha^{0,1}$. Enfin la fraction $\dfrac{\bar{\xi}[\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha),\theta\,|\,\theta_\alpha]}{\bar{\xi}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)}$, du fait que x est dans l'intervalle $\big(g(x,\theta_\alpha),\ \bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)\big)$, reste comprise entre le couple de valeurs

$$1\mp(\theta-\theta_\alpha)(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{N}_\alpha^{0,1}.$$

On voit ainsi que l'intégrale considérée est plus petite que $|\theta-\theta_\alpha|\,\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}$. D'après les résultats établis jusqu'ici, on déduit de (35) que $\bar{g}^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$ reste comprise entre le couple de valeurs

$$g^{0,1}(x,\theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}. \tag{36}$$

Du fait que $g^{0,1}(x,\theta_\alpha)$ est compris entre le couple

$$g^{0,1}(x,\theta_\alpha)\mp\mathrm{M}^{0,2}(\theta-\theta_\alpha)$$

on déduit alors

$$|\bar{g}^{0,1}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g^{0,1}(x,\theta)|<|\theta-\theta_\alpha)|\{(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}+\mathrm{M}^{0,2}\}; \tag{37}$$

le deuxième membre de cette inégalité est de l'ordre de $(\theta-\theta_\alpha)\mathrm{N}_\alpha^{0,1}$.

Il est facile maintenant de comparer les deux fonctions $\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$ et $g(x,\theta_\alpha)$. D'après le théorème de la moyenne on a en effet

$$\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)=\bar{g}(x,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\bar{g}^{0,1}(x,\theta'\,|\,\theta_\alpha)\equiv g(x,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)\bar{g}^{0,1}(x,\theta'\,|\,\theta_\alpha),$$

θ' étant une valeur comprise entre θ_α et θ. En substituant dans cette formule, pour $\bar{g}^{0,1}(x,\theta'\,|\,\theta_\alpha)$, l'une et l'autre des deux expressions approchées (36) on trouve que $\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)$ reste compris entre le couple

$$g(x,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)g^{0,1}(x,\theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)^2(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}. \tag{38}$$

La fonction $g(x,\theta)$ reste comprise d'autre part entre le couple

$$g(x,\theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)g^{0,1}(x,\theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)^2\frac{\mathrm{M}^{0,2}}{2};$$

on a donc alors

$$|\bar{g}(x,\theta\,|\,\theta_\alpha)-g(x,\theta)|<(\theta-\theta_\alpha)^2\left\{(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}+\frac{\mathrm{M}^{0,2}}{2}\right\}. \tag{39}$$

Cette relation nous montre que la distance entre un point de C *et son transformé par* $\bar{\mathrm{T}}(\theta\,|\,\theta_\alpha)\mathrm{T}^{-1}(\theta)$ *est de l'ordre de* $(\theta-\theta_\alpha)^2\mathrm{N}_\alpha^{0,1}$ *au plus.*

19. Nous allons établir, dans ce paragraphe, des formules analogues pour la fonction $\bar{g}^{0,1}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$.

Remarquons, d'une façon préliminaire, que, en dérivant par rapport à x, l'équation

$$(6') \qquad g^{0,1}(x, \theta_\alpha) = \int_0^1 \xi^{0,1}[g(x, \tau \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \frac{\xi[g(x, \text{I} \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, \tau \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} d\tau,$$

on obtient, par un calcul virtuellement déjà exécuté au paragraphe 6,

$$(40) \quad g^{1,1}(x, \theta_\alpha) = \frac{\text{I}}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \Big\{ \xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] - \frac{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} \xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + \xi^{1,0}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] g^{0,1}(x, \theta_\alpha) \Big\}.$$

Partons maintenant de l'équation

$$(24^\alpha) \quad \bar{g}^{1,0}(x, \theta \mid \theta_\alpha) = \frac{\bar{\xi}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha), \theta \mid \theta_\alpha]}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}$$

$$= \frac{\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + \dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{\text{I} - \dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}(\theta - \theta_\alpha)}(\theta - \theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{aligned} &[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + (\theta - \theta_\alpha) \xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] \\ &\qquad + (\theta - \theta_\alpha)^2 \frac{\{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]\}^2}{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} + \ldots \end{aligned} \right\}}{\xi(x \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha) \xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + (\theta - \theta_\alpha)^2 \dfrac{\{\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)\}^2}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} + \ldots}$$

$$+ (\theta - \theta_\alpha) \frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\text{I} - \dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}(\theta - \theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\text{I} - \dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}(\theta - \theta_\alpha)}}{\bar{\xi}(x, \theta \mid \theta_\alpha)}.$$

En rappelant que $\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$ reste comprise entre le couple de valeurs (38) et en considérant aussi (34), on trouve facilement que $\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ reste comprise entre le couple

$$\xi[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] + (\theta - \theta_\alpha) \xi^{1,0}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha] g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$$
$$\mp (\theta - \theta_\alpha)^2 \mathrm{M}^{0,1} \left[\frac{\text{I}}{2} \mathrm{M}^{0,1} \mathrm{N}_\alpha^{2,0} + (3 + \mathrm{M}^{0,1}) \mathrm{N}_\alpha^{0,1} \mathrm{N}_\alpha^{1,0} \right].$$

Après avoir substitué à $\xi[\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$ le couple de valeurs approchées que nous venons de déterminer, développons la première fraction du dernier membre de (24^α) selon les puissances de $(\theta - \theta_\alpha)$, en nous arrêtant au terme de deuxième degré. En tenant compte de (40), on trouve que le coefficient de $(\theta - \theta_\alpha)$ est donné par $g^{1,1}(x, \theta_\alpha)$. On peut simplifier le coefficient de $(\theta-\theta_\alpha)^2$ en considérant (14) et (10) d'un côté et (40) de l'autre côté. En conclusion on arrive au résultat que la fonction $\bar{g}^{1,0}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)$ reste comprise entre le couple

$$g^{1,0}(x, \theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)g^{1,1}(x, \theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)^2$$
$$\times\frac{\mathrm{M}^{0,1}\left[\frac{1}{2}\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{2,0}+(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{N}_\alpha^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{1,0}\right]+2(\mathrm{M}^{1,1}+1)\mathrm{N}_\alpha^{1,0}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}+2(\mathrm{M}^{0,1}+\mathrm{M}^{1,1})\mathrm{N}_\alpha^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{1,0}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$$
$$+(\theta-\theta_\alpha)\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}}{\bar{\xi}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)}.$$

$g^{1,0}(x, \theta)$ est d'autre part comprise entre le couple

$$g^{1,0}(x, \theta_\alpha)+(\theta-\theta_\alpha)g^{1,1}(x, \theta_\alpha)\mp(\theta-\theta_\alpha)^2\,\frac{\mathrm{M}^{1,2}}{2},$$

on en déduit

$$(41)\quad |\bar{g}^{1,0}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)-g^{1,0}(x, \theta)|$$
$$<(\theta-\theta_\alpha)^2\left\{\frac{\mathrm{M}^{1,2}}{2}+\frac{\left\{\begin{array}{l}\mathrm{M}^{0,1}\left[\frac{1}{2}\mathrm{M}^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{2,0}+(2+\mathrm{M}^{0,1})\mathrm{N}_\alpha^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{1,0}\right]\\ \quad+2(\mathrm{M}^{1,1}+1)\mathrm{N}_\alpha^{1,0}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}+2(\mathrm{M}^{0,1}+\mathrm{M}^{1,1})\mathrm{N}_\alpha^{0,1}\mathrm{N}_\alpha^{1,0}\end{array}\right\}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\right\}$$
$$+(\theta-\theta_\alpha)\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar{g}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar{g}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x, \theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\theta-\theta_\alpha)}}{\bar{\xi}(x, \theta\,|\,\theta_\alpha)};$$

l'expression entre accolades est de l'ordre de $\dfrac{\mathrm{N}_\alpha^{1,0}\mathrm{N}_\alpha^{0,1}}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}$ au plus.

CHAPITRE III.

20. Considérons la succession des fonctions

$$(15)\qquad \xi(x\,|\,\theta_1),\quad \xi(x\,|\,\theta_2),\quad \ldots,\quad \xi(x\,|\,\theta_\alpha),\quad \ldots;$$

nous voulons montrer dans ce chapitre qu'on a

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}=1,$$

et que la succession (15) *converge vers une fonction continue et positive.*

Nous allons considérer, dans ce paragraphe, quelques questions préliminaires.

Évaluons d'abord l'ordre de grandeur de $(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$. Supposons, $\theta_{\alpha+1}>\theta_\alpha$; considérons l'identité

$$(42)\qquad T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\,T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)=\prod_{0}^{n_\alpha-1}{}_s\,T^s(\theta_\alpha)\,[T(\theta_{\alpha+1})\,T^{-1}(\theta_\alpha)]\,T^{-s}(\theta_\alpha).$$

Le module de $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\,T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)$ est égal à la différence

$$n_\alpha\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}-n_\alpha\frac{m_\alpha}{n_\alpha}=\frac{1}{n_{\alpha+1}}$$

entre le module de $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et celui de $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ [1]. Les transformations indiquées symboliquement par les facteurs du second membre de (42) ont toutes d'autre part un module égal à celui de $T(\theta_{\alpha+1})T^{-1}(\theta_\alpha)$. Cette transformation imprime à tout point un déplacement vers la droite, qui est au moins égal à $(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\underline{M}^{0,1}$; le module de cette transformation est donc égal au moins à $(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\underline{M}^{0,1}$. Alors, d'après le lemme du paragraphe 7 du premier Mémoire, le module du produit est de l'ordre de $\underline{M}^{0,1}\,n_\alpha(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$ au moins, on a donc que $\frac{1}{n_{\alpha+1}}$ est de l'ordre de $\underline{M}^{0,1}\,n_\alpha(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$ au moins, alors $(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$ *est de l'ordre de* $\frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$ *au plus.*

Comme nous l'avons déjà fait au paragraphe 7, nous indiquons par $\overline{\theta}_{\alpha+1}$ le paramètre de la transformation de module $\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$ appartenant à la famille $\overline{T}(\theta\,|\,\theta_\alpha)$. Nous voulons évaluer l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha+1}}{\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_\alpha}$. Considérons pour cela les deux transformations très petites

$$(\star)\qquad T(\theta_{\alpha+1})\,T^{-1}(\overline{\theta}_{\alpha+1}),\qquad \overline{T}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,T^{-1}(\overline{\theta}_{\alpha+1}).$$

La première de ces deux transformations transforme le point

$$g(x,\overline{\theta}_{\alpha+1})=g(x,\theta_{\alpha+1})+g^{0,1}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1})(\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha+1})+\ldots$$

dans le point $g(x,\theta_{\alpha+1})$, à des quantités infiniment petites d'ordre supérieur près, elle est donc représentée par la fonction

$$g^{0,1}[g_{-1}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}),\overline{\theta}_{\alpha+1}](\theta_{\alpha+1}-\overline{\theta}_{\alpha+1}).$$

La deuxième transformation d'autre part, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe 18, est caractérisée par une fonction dont les valeurs sont au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2$. On a, évidemment,

$$T^{n_{\alpha+1}}(\theta_{\alpha+1})=\overline{T}^{n_{\alpha+1}}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha).$$

---

[1] Du fait que $T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ est évidemment permutable avec tout autre transformation.

Alors, des identités

$$\prod_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} T^{s}(\overline{\theta}_{\alpha+1})\left[T(\theta_{\alpha+1})\,T^{-1}(\overline{\theta}_{\alpha+1})\right]T^{-s}(\overline{\theta}_{\alpha+1}) = T^{n_{\alpha+1}}(\theta_{\alpha+1})\,T^{-n_{\alpha+1}}(\overline{\theta}_{\alpha+1}),$$

$$\prod_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} T^{s}(\overline{\theta}_{\alpha+1})\left[\overline{T}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-1}(\overline{\theta}_{\alpha+1})\right]T^{s}\;(\overline{\theta}_{\alpha+1}) = \overline{T}^{n_{\alpha+1}}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-n_{\alpha+1}}(\overline{\theta}_{\alpha+1}),$$

on déduit qu'on peut égaler entre elles les fonctions, qui représentent les premiers membres. Ces premiers membres sont donnés d'autre part respectivement par les produits des transformations

$$(\bigstar)\qquad T(\theta_{\alpha+1})\,T^{-1}(\overline{\theta}_{\alpha+1}),\quad \overline{T}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-1}(\overline{\theta}_{\alpha+1}),$$

transformées par les puissances de $\overline{T}(\theta_{\alpha+1})$. En utilisant les formules données au paragraphe 7 du premier Mémoire on trouve alors, pour la première des deux fonctions, l'expression

$$(\theta_{\alpha+1}-\overline{\theta}_{\alpha+1})\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} g^{0,1}[g_{-s-1}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}),\overline{\theta}_{\alpha+1}]\,g_{s}^{1,0}[g_{-s}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}),\overline{\theta}_{\alpha+1}]$$

$$> (\theta_{\alpha+1}-\overline{\theta}_{\alpha+1})\,\underline{M}^{0,1}\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} g_{s}^{1,0}[g_{-s}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}),\overline{\theta}_{\alpha+1}],$$

et l'on reconnaît d'autre part que la deuxième fonction est au plus de l'ordre de

$$n_{\alpha}N_{\alpha}^{1,0}(\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})^{2}\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_{s} g_{s}^{1,0}[g_{-s}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}),\overline{\theta}_{\alpha+1}].$$

On peut conclure de là que $(\theta_{\alpha+1}-\overline{\theta}_{\alpha+1})$ est au plus de l'ordre de $n_{\alpha}N_{\alpha}^{1,0}(\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})^{2}$. On a d'autre part que $(\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})$ est, de même que $(\theta_{\alpha+1}-\theta_{\alpha})$, de l'ordre de $\frac{1}{n_{\alpha}n_{\alpha+1}}$, alors *le rapport* $\frac{\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha+1}}{\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha}}$ *est de l'ordre de* $\frac{N_{\alpha}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ *au plus*. Le rapport $\frac{\overline{\theta}_{\alpha+1}-\theta_{\alpha}}{\theta_{\alpha+1}-\theta_{\alpha}}$ est donc égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\frac{N_{\alpha}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ au plus.

Évaluons enfin l'ordre de grandeur du déplacement

$$(43)\qquad |\overline{g}_{l}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})-g_{l}(x,\theta_{\alpha+1})|\qquad (l<n_{\alpha+1}),$$

que $\overline{T}^{l}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ induit sur le point $g_{l}(x,\theta_{\alpha+1})$. D'une façon préliminaire évaluons le déplacement

$$\begin{aligned}&|\overline{g}(x,\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})-g(x,\theta_{\alpha+1})|\\ &\quad\leq|\overline{g}(x,\overline{\theta}_{\alpha-1}\,|\,\theta_{\alpha})-g(x,\overline{\theta}_{\alpha+1})|+|g(x,\overline{\theta}_{\alpha+1})-g(x,\theta_{\alpha+1})|,\end{aligned}$$

que $\overline{T}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_{\alpha})\,T^{-1}(\theta_{\alpha+1})$ induit sur le point $g(x,\theta_{\alpha+1})$. D'après le résultat du paragraphe 18, que nous avons utilisé tout à l'heure, $|\bar{g}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) - g(x, \bar{\theta}_{\alpha+1})|$ est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$. D'autre part $|g(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}) - g(x, \theta_{\alpha+1})|$ est de l'ordre de $(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_{\alpha+1})M^{0,1}$ au plus, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$ au plus. Nous pouvons en conclure que le premier membre de la dernière inégalité est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$ au plus.

On a ensuite

$$\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) T^{-l}(\theta_{\alpha+1}) = \prod_{0}^{l-1}{}_r T^r(\theta_{\alpha+1}) [\bar{T}(\bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) T^{-1}(\theta_{\alpha+1})] T^{-r}(\theta_{\alpha+1});$$

de l'évaluation précédente, en rappelant encore une fois les résultats du paragraphe 7 du premier Mémoire, on déduit alors que le déplacement induit par $\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ sur le point x est au plus de l'ordre de

$$\begin{aligned}
&n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_{0}^{l-1}{}_r g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}] \\
&= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_{0}^{l-1}{}_r \frac{1}{g_{-r}^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} < n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_r \frac{1}{g_{-r}^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} \\
&= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_r \frac{1}{g_r^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} \\
&< n_\alpha n_{\alpha+1} N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{1}{d_{\alpha+1}\underline{M}^{0,1}} \frac{d_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} \sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_r \frac{g^{0,1}|g_{r-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}|}{g_r^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} \\
&= n_\alpha n_{\alpha+1} N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - {}_\alpha\theta)^2 \frac{\xi(x | \theta_{\alpha+1})}{d_{\alpha+1}\underline{M}^{0,1}}.
\end{aligned}$$

On tire de là que *le déplacement* $|\bar{g}_l(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) - g_l(x, \theta_{\alpha+1})|$, *que la transformation* $\bar{T}^l(\bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ *induit sur le point* $g_l(x, \theta_{\alpha+1})$, *est de l'ordre de* $n_\alpha n_{\alpha+1} N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) | \theta_{\alpha+1}]$, *ou encore* [d'après l'évaluation précédente de $(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$] *de l'ordre de* $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}} \xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) | \theta_{\alpha+1}]$ *au plus*.

21. *Nous allons ramener l'étude du rapport*

$$\frac{\xi(x | \theta_\alpha)}{\xi(x | \theta_{\alpha+1})} \tag{44}$$

à celui des deux rapports

$$\frac{\xi(x | \theta_\alpha)}{\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha)}, \tag{44'}$$

$$\frac{\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha)}{\xi(x | \theta_{\alpha+1})}. \tag{44''}$$

On a

$$\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1} | \theta_\alpha) = \xi(x | \theta_\alpha) + (\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha) \xi^{0,1}(x | \theta_\alpha) + \ldots,$$

en remarquant que $(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$ au plus et que $\left|\frac{\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}\right|$ est plus petit que $N_\alpha^{0,1}$, par conséquent de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}$ au plus, on trouve que le rapport (44′) est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ au plus.

Nous devons maintenant considérer le rapport (44″); nous utiliserons pour cela, pour $\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})$ et $\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$, les expressions

$$\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1}) \equiv \frac{d_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} \sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g_s^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} \tag{7'}$$

et

$$\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha) \equiv \frac{\bar{d}_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} \sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_s \frac{\bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\bar{g}_s^{1,0}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)}. \tag{7''}$$

Les constantes $d_{\alpha+1}$ et $\bar{d}_{\alpha+1}$ sont déterminées, respectivement, par les conditions

$$\int_x^{g(x,\theta_{\alpha+1})} \frac{dx}{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})} = 1, \qquad \int_x^{\bar{g}(x,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} \frac{dx}{\bar{\xi}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} = 1;$$

les deux limites supérieures d'intégration $g(x, \theta_{\alpha+1})$ et $\bar{g}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$ coïncident, d'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, à une quantité près, qui est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$, c'est-à-dire de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}^2}$; *il suffira* donc *d'avoir démontré que le rapport entre les deux sommes*

$$\sum_{0}^{n_{\alpha+1}-1}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g_s^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} \tag{45'}$$

et

$$\sum_{0}^{N_{\alpha+1}-1}{}_s \frac{\bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\bar{g}_s^{1,0}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} \tag{45''}$$

est infiniment proche de 1 *pour* $\alpha \to \infty$, il s'ensuivra immédiatement la même chose pour le rapport $\frac{d_\alpha}{\bar{d}_{\alpha+1}}$ et enfin pour le rapport (44″).

Remarquons maintenant que les termes des deux sommes (45′) et (45″) sont tous positifs, il suffira alors de démontrer que le rapport entre deux termes correspondant est infiniment proche de 1 pour $\alpha \to \infty$, ou encore de démontrer que cela arrive pour les rapports

$$\frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{\bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x, \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha), \bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n_{\alpha+1} - 1),$$

entre les numérateurs et pour les rapports

$$(46)\qquad \frac{g_s^{1,0}(x,\,\theta_{\alpha+1})}{\bar{g}_s^{1,0}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} \qquad (s=0,\,1,\,\ldots,\,n_{\alpha+1}-1),$$

entre les dénominateurs des termes correspondant. En ce qui concerne les numérateurs, étant donné qu'on a

$$g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] > \underline{\mathrm{M}}^{0,1},$$

$\underline{\mathrm{M}}^{0,1}$ étant un nombre positif fixé à l'avance, il suffira de démontrer que, pour $\alpha \to \infty$, les quantités

$$(47)\qquad \begin{gathered} \left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - \bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha] \right| \\ (s=0,\,1,\,\ldots,\,n_{\alpha+1}-1) \end{gathered}$$

sont infiniment petites.

Étudions d'abord ces dernières expressions. On a

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - \bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha] \right| \\ &\quad \leq \left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] \right| \\ &\qquad + \left| g^{0,1}[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] - g^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] \right| \\ &\qquad + \left| g^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}] - \bar{g}^{0,1}[\bar{g}_{s-1}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha] \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de l'inégalité précédente est au plus égal à $\mathrm{M}^{0,2}\,|\theta_{\alpha+1} - \bar{\theta}_{\alpha+1}|$. En rappelant le dernier résultat du paragraphe précédent on reconnaît ensuite que le deuxième terme est au plus de l'ordre de

$$\mathrm{M}^{1,1}\,\frac{\mathrm{N}_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}\,\frac{\xi[g_{s-1}(x,\,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}]}{n_{\alpha+1}}.$$

Enfin le troisième terme est, d'après (37), au plus de l'ordre de $|\bar{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha|\,\mathrm{N}_\alpha^{0,1}$, c'est-à-dire au plus de l'ordre de $\frac{\mathrm{N}_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$. Nous pouvons conclure finalement que le premier membre de (48) est au plus de l'ordre de $\frac{\mathrm{N}_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$.

22. Considérons ensuite le rapport (46) entre deux dénominateurs correspondant à une même valeur de l'index : nous serons amenés à des considérations un peu plus compliquées que celles du paragraphe précédent. On a

$$(49)\qquad \begin{aligned} \frac{g_s^{1,0}(x,\,\theta_{\alpha+1})}{\bar{g}_s^{1,0}(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)} &= \prod_{l=0}^{s-1} \frac{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}]}{\bar{g}^{1,0}[\bar{g}_l(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \\ &= \prod_{l=0}^{s-1}\left[1 + \frac{g^{1,0}[g_l(x,\,\theta_{\alpha+1}),\,\theta_{\alpha+1}] - \bar{g}^{1,0}[\bar{g}_l(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\bar{g}^{1,0}[\bar{g}_l(x,\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\,\bar{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}\right]; \end{aligned}$$

en rappelant (24^α) on trouve, pour les numérateurs des fractions du deuxième membre,

$$
\begin{aligned}
&= g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}] - g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha],\\
&= \{g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}] - g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}]\}\\
&\quad + \{g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}] - g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}]\}\\
&\quad + \left(g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}] - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \xi[\bar g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha] \\ \quad - (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha] + (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\dfrac{\{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]\}^2}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]} + \dots \end{array} \right\}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \right)\\
&\quad - (\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}.
\end{aligned}
$$

Pour démontrer que, pour $\alpha\to\infty$, le produit (49) est infiniment proche de 1, il suffira alors d'avoir démontré que les trois sommes

$$
(50)\qquad \sum_0^{s-1}{}_l \left| \frac{g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}] - g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \right|,
$$

$$
(51)\qquad \sum_0^{s-1}{}_l \left| \frac{g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}] - g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \right|,
$$

$$
(52)\qquad \sum_0^{s-1}{}_l \left| \frac{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}] - \dfrac{\left\{ \begin{array}{l} \xi[\bar g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha] \\ \quad -(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha] \\ \quad +(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\dfrac{\{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]\}^2}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]} + \dots \end{array} \right\}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]} \right|
$$

sont infiniment petites pour $\alpha\to\infty$, et que le produit

$$
\begin{aligned}
(53)\qquad &= \prod_0^{s-1}{}_l\, 1-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}\\
&= \prod_0^{s-1}{}_l\, 1-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)} - \dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}
\end{aligned}
$$

$$=\prod_{0}^{s-1}{}_l\, 1-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]+\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}$$

$$=\prod_{0}^{s-1}{}_l\, 1-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\,\frac{\dfrac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}-\dfrac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{1+\dfrac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)\mid\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}$$

est infiniment proche de 1.

Considérons d'abord la somme (50). Étant donné que les dénominateurs sont au moins égaux au nombre positif donné $\underline{M}^{0,1}$, nous sommes ramenés à la considération de la somme

$$(50')\qquad \sum_{0}^{s-1}{}_l \left| g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\theta_{\alpha+1}]-g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}]\right|.$$

Cette dernière somme ne peut pas dépasser $n_{\alpha+1}M^{1,1}\left|\theta_{\alpha+1}-\bar\theta_{\alpha+1}\right|$; en rappelant l'évaluation de $\left|\theta_{\alpha+1}-\bar\theta_{\alpha+1}\right|$ faite au paragraphe 20, on trouve que la somme est donc au plus de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$. De la même façon, de la somme (51) on est ramené à la somme

$$(51')\qquad \sum_{0}^{s-1}{}_l \left| g^{1,0}[g_l(x,\theta_{\alpha+1}),\bar\theta_{\alpha+1}]-g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}]\right| \qquad (s<n_{\alpha+1});$$

de celle-ci, en rappelant l'évaluation de $\left|\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha)-g_l(x,\theta_{\alpha+1})\right|$ faite au paragraphe 20, on est ramené ensuite a la somme

$$M^{2,0}\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha n_{\alpha+1}}\sum_{0}^{s-1}{}_l\,\xi[g_l(x,\theta_{\alpha+1})\mid\theta_{\alpha+1}] \qquad (s<n_{\alpha+1}),$$

dont la valeur de, d'après le lemme du paragraphe 10, est au plus de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$. De la somme (52) on est ramené à la somme

$$(52')\qquad \sum_{0}^{s-1}{}_l\left| g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}]-\frac{\left\{\begin{array}{l}\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha]]\mid\theta_\alpha]\\ \quad-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]\\ \quad+(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\dfrac{\{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]\}^2}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\theta_\alpha]\mid\theta_\alpha]}+\ldots\end{array}\right\}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\mid\theta_\alpha]}\right|.$$

En tenant compte de (24^α) et de (41) on trouve que les termes de cette somme sont plus petits que ceux de

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{l}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\left\{\frac{M^{1,2}}{2}+\frac{\left\{\begin{array}{c}M^{0,1}\left[\frac{1}{2}M^{0,1}N_\alpha^{2,0}+(2+M^{0,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\right]\\ +2(M^{1,1}+1)N_\alpha^{1,0}N_\alpha^{0,1}+2(M^{0,1}+M^{1,1})N_\alpha^{0,1}N_\alpha^{1,0}\end{array}\right\}}{\xi[\bar g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\right\},$$

qui, à leur tour, sont au plus de l'ordre des termes de la somme

$$=\sum_{0}^{s-1}{}_{l}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\frac{n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$$

$$=\sum_{0}^{s-1}{}_{l}\frac{(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]-(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]+\ldots}$$

$$<\frac{(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 n_\alpha[N_\alpha^{1,0}]^2}{1-|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|\,N_\alpha^{0,1}}\sum_{0}^{s-1}{}_{s}\frac{1}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}.$$

Dans le dernier membre, la première fraction est de l'ordre de $\frac{[N_\alpha^{1,0}]^2}{n_{\alpha+1}^2 n_\alpha}$ et la somme, d'après le lemme du paragraphe 13, est au plus de l'ordre de $n_{\alpha+1}$. La somme $(52')$ est donc au plus de l'ordre de $\frac{[N_\alpha^{1,0}]^2}{n_{\alpha+1}n_\alpha}$. En ce qui concerne enfin le produit (53), on est ramené à démontrer que la somme

$$(54)\qquad \sum_{1}^{s-1}{}_{l}|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|\left|\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}-\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}\right|$$

est infiniment petite pour $\alpha\to\infty$ (¹). Pour démontrer cela remarquons d'abord que la somme (54) à considérer est inférieure où égale à

$$(54')\qquad \sum_{1}^{s-1}{}_{l}|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|\left|\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}-\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}\right|$$

$$+\sum_{1}^{s-1}{}_{l}|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|\left|\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}\;\frac{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}\{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]-\xi[\bar g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\}\right|.$$

Développons la première des deux sommes de $(54')$ selon les puissances de $|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|$. Le terme du premier degré est donné par

$$\sum_{l}^{s-1}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\left\{\frac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}-\frac{\xi^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\right\}.$$

En rappelant (40), où l'on aura substitué x par $\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$, on trouve que l'expression entre accolades est égale à

$$\begin{aligned}
&= g^{1,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\frac{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}\\
&\quad-\xi^{1,0}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]\frac{g^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}\\
&=\frac{g^{1,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}-\xi^{1,0}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]\\
&\quad\times\frac{g^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}\,\frac{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,\frac{1}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}.
\end{aligned}$$

Dans le deuxième membre de l'inégalité précédente les fractions

$\dfrac{g^{1,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$ et $\dfrac{g^{0,1}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}{g^{1,0}[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]}$ sont bornées. $\dfrac{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$ est sensiblement égal à 1, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 21 concernant le rapport $(44')$. L'expression entre accolades est donc de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}$. Le terme du premier degré est donc au plus de l'ordre de

$$|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|\,N_\alpha^{1,0}\sum_{l}^{s-1}\frac{1}{\xi[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}.$$

En appliquant à $\xi(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$ le lemme du paragraphe 13, on déduit que la sommation par rapport à l est de l'ordre de $n_{\alpha+1}$ au plus, $|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|$ étant d'autre part de l'ordre de $\dfrac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}}$ au plus; on peut en conclure que le terme de degré 1 est au plus de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$.

En ce qui concerne les termes de degré supérieur du développement de la première somme de $(54')$, on trouve, en utilisant encore (40), qu'ils sont infiniment petits d'ordre supérieur par rapport au premier.

---

(1) Le produit (53) est en effet de la forme

$$\prod_{l}^{s-1}{}_{0}\,1-\frac{\varepsilon_l'-\varepsilon_l''}{1+\varepsilon_l'}=\prod_{l}^{s-1}{}_{0}\,\frac{1+\varepsilon_l''}{1+\varepsilon_l'}=\frac{1+\varepsilon_0''}{1+\varepsilon_{s-1}'}\prod_{l}^{s-1}{}_{1}\,\frac{1+\varepsilon_0''}{1+\varepsilon_{l-1}'}=\frac{1+\varepsilon_l''}{1+\varepsilon_{s-1}'}\prod_{l}^{s-1}{}_{1}\,1+\varepsilon_l''-\varepsilon_{l-1}'+\ldots.$$

Considérons maintenant la deuxième des sommes de $(54')$. On a

$$\left|\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}\right| < \frac{N_\alpha^{0,1}}{1-N_\alpha^{0,1}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)},$$

le premier membre de cette inégalité est donc (§ 16) de l'ordre $N_\alpha^{1,0}n_\alpha$ au plus. $\dfrac{\xi[g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$ est sensiblement égal à 1, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 21 concernant le rapport $(44')$. En remarquant enfin que, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 20, l'expression

$$\begin{aligned}&|g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]-g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)|\\&\quad\equiv|g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]-g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]|\end{aligned}$$

est de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2$ au plus, on trouve que

$$|\xi[g[g_l(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]-\xi[g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]|$$

est au plus de l'ordre de $\dfrac{(N_\alpha^{1,0})^2}{n_\alpha n_{\alpha+1}^2}$. La deuxième somme de $(54')$ est en conclusion au plus de l'ordre de

$$(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\frac{[N_\alpha^{1,0}]^3}{n_{\alpha+1}^2}\sum_1^{s-1}{}_l\,\frac{1}{\xi[g_{l+1}(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]},$$

ou encore (en appliquant à la fonction $\xi(x,\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$ le lemme du paragraphe 13), au plus de l'ordre de $\dfrac{[N_\alpha^{1,0}]^3}{n_{\alpha+1}^2 n_\alpha}$. Il en est alors certainement de même de la somme (51).

On peut conclure finalement que le rapport (46) entre les dénominateurs de même indice est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$ au plus.

De ce qu'on a démontré dans ces deux derniers paragraphes concernant les différences (48) et les rapports (46) on peut conclure, d'après ce qu'on a dit au paragraphe précédent, que le *rapport* (44) *est égal à* 1, *à une quantité près, de l'ordre de* $\dfrac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}$ *au plus.*

23. Nous avons vu (§ 14) qu'on peut choisir $N_\alpha^{1,0}$ de l'ordre de $n_\alpha\varepsilon_\alpha^\star$; nous avons vu d'autre part (§ 9) qu'on peut choisir $\varepsilon_\alpha^\star$ de l'ordre de $\frac{\alpha}{2}p^{\frac{\alpha}{2}}$. Du résultat énoncé à la fin du paragraphe précédent on déduit alors qu'on a deux inégalités

$$\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\left(1-a\varepsilon_\alpha^\star\frac{\alpha}{2}p^{\frac{\alpha}{2}}\right)<\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})<\xi(x\,|\,\theta_\alpha)\left(1+a\varepsilon_\alpha^\star\frac{\alpha}{2}p^{\frac{\alpha}{2}}\right),\tag{55}$$

a étant une constante, qu'on peut choisir indépendamment de α.

On tire immédiatement de (55) que *la succession*

(15) $$\xi(x \mid \theta_1),\quad \xi(x \mid \theta_2),\quad \ldots,\quad \xi(x \mid \theta_\alpha);\quad \ldots$$

converge vers une fonction continue et positive $\xi(x \mid \Theta)$. *La transformation infinitésimale* $\xi(x \mid \Theta)\dfrac{df}{dx}$ *engendre alors*, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 7, *la transformation* $\mathrm{T}(\Theta)$, *d'équation*

$$x_1 = g(x \mid \Theta).$$

En considérant maintenant θ comme une variable, nous avons une fonction $\xi(x, \theta)$ des deux variables x et θ; *la famille* ∞^1 *de transformations infinitésimales* $\xi(x, \theta)\dfrac{df}{dx}$ *nous donne la solution du problème traité dans ce Mémoire.*

CHAPITRE IV.

24. Pour compléter la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1, nous devons démontrer que la fonction $\xi(x, \theta)$ est continue par rapport à θ.

Pour toute valeur de θ, qui correspond à une transformation de module irrationnel, la continuité résulte immédiatement de la démonstration donnée au paragraphe précédent. *Il nous reste donc à démontrer que* $\xi(x, \theta)$ *est continue pour toute valeur de* θ *qui correspond à une transformation de module rationnel* $\dfrac{m_\alpha}{n_\alpha}$.

Comme nous avons fait au paragraphe 4, nous indiquons par $\dfrac{m_0}{n_0}, \dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, \ldots, \dfrac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$ les réduites du développement de $\dfrac{m_\alpha}{n_\alpha}$. Si k est le module d'une transformation de la famille de paramètre θ infiniment proche de θ_α, les $\alpha + 1$ premières réduites de k sont données par les α premières réduites de $\dfrac{m_\alpha}{n_\alpha}$ et par $\dfrac{m_\alpha}{n_\alpha}$ elle-même; la $(\alpha + 2)^{\text{ième}}$ réduite sera donnée par

$$\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} = \frac{m_{\alpha-1} + a_\alpha m_\alpha}{n_{\alpha-1} + a_\alpha n_\alpha},$$

où l'entier a_α *doit être considéré comme infiniment grand.* Indiquons par $\dfrac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}}, \dfrac{m_{\alpha+3}}{n_{\alpha+3}}, \ldots$ les réduites successives (éventuelles) de k et par $\theta_{\alpha+1}, \theta_{\alpha+2}, \theta_{\alpha+3}, \ldots$ les valeurs du paramètre, qui correspondent, respectivement, aux valeurs $\dfrac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}, \dfrac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}}, \dfrac{m_{\alpha+3}}{n_{\alpha+3}}, \ldots$ du module.

Démontrons d'abord qu'on a

(56) $$\lim_{a_\alpha \succ \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1;$$

il est à peine nécessaire de remarquer que, contrairement à ce que nous faisions aux chapitres II et III, nous considérons ici l'indice α comme fixe. D'autre part, $(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$ sera infiniment petite, de l'ordre de $\frac{1}{a_\alpha}$.

Pour établir (56), nous allons reprendre les considérations du chapitre précédent et démontrer que, pour $a_\alpha \to \infty$, l'expression (47) devient infiniment petite, et que d'autre part, le rapport (46) tend vers 1.

Considérons d'abord l'expression (47), en utilisant encore l'inégalité (48). Nous trouvons d'abord que le premier et le troisième terme du deuxième membre de cette inégalité sont infiniment petits pour $\alpha \to \infty$. En ce qui concerne le deuxième terme du deuxième membre, on a d'abord que ce terme est au plus de l'ordre de

$$M^{1,1}\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}\frac{\xi[g_{s-1}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}]}{n_{\alpha+1}};$$

$\xi[g_{s-1}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}]$ est d'autre part de l'ordre de $\xi[g_{s-1}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_\alpha]$, d'après les résultats du chapitre précédent, et $\xi[g_{s-1}(x,\theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_\alpha]$ est (§ 15) au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0}$. Le terme considéré est donc au plus de l'ordre de $M^{1,1}\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_\alpha}\frac{N_\alpha^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$; il est donc lui aussi infiniment petit pour $\alpha \to \infty$. Nous pouvons alors conclure que l'expression (47) est infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$.

Pour démontrer que le rapport (46) tend vers 1 pour $a_\alpha \to \infty$, nous devrons faire voir que les sommes (50′), (51′) et (52′) deviennent infiniment petites et que le produit (53) tend vers 1. En ce qui concerne les sommes (50′) et (52′), cela résulte déjà des évaluations faites au paragraphe 22. En ce qui concerne d'autre part le produit (53), nous sommes ramenés à démontrer que la somme

$$\sum_{1}^{s-1}{}_{l}\,|\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha|\times\left|\frac{\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{1-\dfrac{\xi^{0,1}[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]\,|\,\theta_\alpha]}(\bar\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}}{\xi[\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha]}\right|$$

devient infiniment petite.

Pour $a_\alpha \to \infty$, $\bar g_{l+1}(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)$ et $g[\bar g_l(x,\bar\theta_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha),\theta_\alpha]$ sont infiniment proches; chaque fraction dans la somme précédente est donc infiniment petite; chaque terme de la somme est par conséquent infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $|\bar\theta_{\alpha-1}-\theta_\alpha|\left(\text{à } \frac{1}{n_{\alpha+1}}\right)$. En remarquant que le nombre s des termes est plus petit que $n_\alpha+1$, on conclut que la somme est infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$.

25. Pour démontrer l'affirmation contenue dans (56), il nous reste à étudier

la somme (51'). Cette étude occupera ce paragraphe et les deux suivants. La somme en question est plus petite que

$$M^{2,0}\sum_{l}^{s-1}{}_{0}\left|\overline{g}_l(x,\ \overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)-g_l(x,\ \theta_{\alpha+1})\right|\qquad(s\leqq n_{\alpha+1});$$

pour $a_\alpha\to\infty$ le nombre des termes, $s\leqq n_{\alpha+1}=a_\alpha n_\alpha+n_{\alpha-1}$, est infiniment grand de l'ordre de a_α au plus; pour démontrer que la somme est infiniment petite il s'agit alors de montrer que l'expression

$$(43)\qquad \left|\overline{g}_l(x,\ \overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)-g_l(x,\ \theta_{\alpha+1})\right|\qquad(l=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

est infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$, ce qui revient à dire que la fonction, qui caractérise la transformation très petite $\overline{T}^l(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$, est infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$. Nous allons déduire ici ce dernier résultat d'un lemme, que nous démontrerons dans les deux paragraphes suivants, d'après lequel on peut supposer que la fonction, qui caractérise la transformation très petite $\overline{T}^{-n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, est, pour $a_\alpha\to\infty$, infiniment petite d'ordre supérieur à $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$. Remarquons que, d'après l'évaluation faite au paragraphe 20, la fonction qui caractérise $\overline{T}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-1}(\theta_{\alpha+1})$ est, pour $a_\alpha\to\infty$, de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$ au plus et que, t étant un entier donné, il en est *a priori* de même, d'après l'évaluation faite au paragraphe 20, de la fonction, qui caractérise $\overline{T}^t(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-t}(\theta_{\alpha+1})$.

Ayant posé

$$l=bn_\alpha+t\qquad(t\leqq n_{\alpha-1}),$$

on a

$$(57)\quad \overline{T}^l(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})=\left\{\prod_{r}^{b-1}{}_{0}\,T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\right\}$$
$$\times\, T^{n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1})\left[\overline{T}_t(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-t}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1}).$$

$T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$ étant engendrée par la transformation infinitésimale $\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})\frac{df}{dx}$, on a, en rappelant (25),

$$g^{1,0}_{n_\alpha r}[g_{-n_\alpha r}(x,\ \theta_{\alpha+1}),\ \theta_{\alpha+1}]=\frac{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}{\xi[g_{-n_\alpha r}(x,\ \theta_{\alpha+1})\,|\,\theta_{\alpha+1}]};$$

$g^{1,0}_{n_\alpha r}[g_{-n_\alpha r}(x,\ \theta_{\alpha+1}),\ \theta_{\alpha+1}]$ est donc au plus égal au rapport entre le maximum et le minimum de la fonction $\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})$. D'après les résultats du chapitre précédent $\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})$ est, quel que soit x, de l'ordre de $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$, le rapport en question est alors de l'ordre du rapport entre le maximum et le minimum de $\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$; ce dernier rapport est évidemment indépendant de a_α. On voit alors, en rappelant la formule donnée au paragraphe 7 du premier Mémoire, que la fonction qui caractérise

$$T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$$

est infiniment petite, pour $a_\alpha \to \infty$, d'ordre supérieur à $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$, si tel est le cas pour la fonction qui caractérise $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$. Au produit entre accolades, de $b \leqq a_\alpha$ facteurs, il correspond alors une fonction infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$.

A la transformation

$$T^{n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1})\left[\overline{T}^{l}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha b}(\theta_{\alpha+1}),$$

il doit correspondre d'autre part, d'après ce que nous venons de dire, une fonction infiniment petite de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$. On peut donc conclure finalement qu'à la transformation $\overline{T}^{l}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-l}(\theta_{\alpha+1})$ correspond une fonction infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$.

26. Nous devons maintenant combler la lacune dans la déduction du paragraphe précédent.

La famille $\overline{T}^{n_\alpha}(\theta\,|\,\theta_\alpha)$, de même que la famille $T(\theta\,|\,\theta_\alpha)$, n'est pas complètement déterminée, du fait de l'indétermination, qui intervient dans le choix de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; nous voulons montrer maintenant que, *pour a_α infiniment grand, on peut choisir $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de façon que la fonction, qui caractérise $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1}\,|\,\theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, soit infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$.*

Nous allons d'abord reconnaître d'une façon plus précise quelle est l'indétermination, qui intervient dans le choix de $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$; d'après ce qu'on a vu au paragraphe 6, on peut ajouter à cette fonction une solution $\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha)$ de l'équation

$$(58)\qquad \int_0^1 \frac{\xi^{0,1****}[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,\tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}\,d\tau = 0.$$

De cette équation, en dérivant par rapport à x, on tire

$$\frac{\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha)}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)} = \frac{\xi^{0,1****}[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,1\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]};$$

cette relation nous montre que $\frac{\xi^{0,1****}[g(x,t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}{\xi[g(x,t\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}$, considérée comme une fonction de t, est périodique de période 1.

Il est facile de reconnaître que cette fonction possède une deuxième période.

Lorsque t varie, le point $g(x, t \mid \theta_\alpha)$ parcourt la courbe fermée C; la fonction $\frac{\xi^{0,1****}[g(x, t \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, t \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}$ prend donc la même valeur pour deux valeurs différentes de t qui correspondent à un même point de la courbe. Pour déterminer la période en question, il suffit alors de remarquer que la transformation $T(\theta_\alpha)$, qui a un module égal à $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$, transforme le point x dans le point $g(x, 1 \mid \theta_\alpha) \equiv g(x, \theta_\alpha)$; à cette transformation correspond donc un intervalle unitaire pour la variable t; à un tour complet de C il doit correspondre alors l'intervalle $\frac{1}{\frac{m_\alpha}{n_\alpha}} = \frac{n_\alpha}{m_\alpha}$ pour la variable t.

La fonction $\frac{\xi^{0,1****}[g(x, t \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, t \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}$ a donc les deux périodes 1 et $\frac{n_\alpha}{m_\alpha}$; elle a alors la période $\frac{1}{m_\alpha}$. Par conséquent, l'équation (58) équivaut à

$$(58') \qquad \int_0^{\frac{1}{m_\alpha}} \frac{\xi^{0,1****}[g(x, \tau \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]}{\xi[g(x, \tau \mid \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]} d\tau = 0.$$

En rappelant d'autre part que les valeurs de $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ doivent être de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi(x \mid \theta_\alpha)$ au plus, on arrive à conclure que *l'indétermination dans le choix de la fonction* $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ *consiste en ce qu'on peut lui ajouter une solution arbitraire* $\xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha)$ *de* (58'), *qui soit toutefois de l'ordre de* $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\, \xi(x \mid \theta_\alpha)$ *au plus.*

Pour arriver à démontrer le résultat énoncé en italique au commencement de ce paragraphe nous devons étudier aussi, d'une façon préliminaire, les deux transformations très petites, qui transforment les points de la courbe de la même façon, respectivement, que $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, et que nous allons appeler les *transformations géométriques* $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$. La transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ coïncide avec la transformation $T^{-n_\alpha}(\theta_\alpha)T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$; pour $a_\alpha \to \infty$ son équation est donnée, d'après ce qu'on a montré au commencement du paragraphe 12, par

$$(59) \quad x' = x + \sum_{1}^{n_\alpha}{}_s \frac{g^{0,1}[g_{s-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g_s^{1,0}(x, \theta_\alpha)} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha) + \ldots = x + \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha) + \ldots.$$

Considérons ensuite la transformation géométrique $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$. Cette transformation est donnée par le groupe g_1 engendré par

$$\xi(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) \frac{dt}{dx} = \{ \xi(x \mid \theta_\alpha) + (\overline{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + \ldots \} \frac{dt}{dx}$$

lorsque, dans g_1, on donne au paramètre t une valeur convenable infiniment petite. De l'équation (59) de la transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ et de ce que $T^{n_\alpha}(\theta)$ et $\overline{T}^{n_\alpha}(\theta \mid \theta_\alpha)$ sont tangentes on déduit que, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, dt est donné par $\frac{n_\alpha}{d_\alpha}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$. La valeur que la fonction, qui caractérise $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, prend en un point $\mathbf{x}$ est donné par dt, qui multiplie la valeur de l'expression

$$\xi(x, \overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) = \xi(x \mid \theta_\alpha) + (\overline{\theta}_{\alpha+1} - \theta_\alpha)\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + \ldots$$

en un point convenable compris entre $\mathbf{x}$ et son transformé par la transformation géométrique $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$; la distance entre ce point et le point $\mathbf{x}$ est évidemment au plus de l'ordre de $\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)$. La valeur en question est donc exprimée par

$$\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha) + (\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)\left[\xi^{0,1}(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha) + \rho\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi^{1,0}(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha)\xi(\mathbf{x} \mid \theta_\alpha) + \ldots\right],$$

dans cette expression ρ représente un coefficient borné, qui ne dépend évidemment pas du choix de la fonction $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$; les termes négligés sont infiniment petits pour $a_\alpha \to \infty$.

L'équation de la transformation géométrique $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$ est donc donnée par

$$x' = x + \frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(x \mid \theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha) + \frac{n_\alpha}{d_\alpha}\left[\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha) + \rho\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)\xi(x \mid \theta_\alpha) + \frac{dt - \frac{n_\alpha}{d_\alpha}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)}{\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha}\xi(x \mid \theta_\alpha) + \ldots\right](\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2. \tag{60}$$

Considérons enfin la transformation $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$; indiquons par

$$x' = x + \mu(x \mid \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1})(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2 \tag{61}$$

l'équation de cette transformation; nous allons évaluer l'ordre de $\mu(x \mid \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1})$. On a vu au paragraphe 20 que la fonction, qui caractérise $\overline{T}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-1}(\theta_{\alpha+1})$, est au plus de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2$; d'après les résultats du paragraphe 7 du premier Mémoire, la fonction, qui caractérise $\overline{T}^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, est alors au plus de l'ordre de

$$n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1}-\theta_\alpha)^2\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_r\, g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}].$$

Lorsque $a_\alpha \to \infty$, $g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]$ tend vers $g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$; l'expression précédente tend donc vers

$$\begin{aligned}
& n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r\, g_r^{1,0}[g_{-r}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha] \\
&= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r \frac{1}{g_{-r}^{1,0}(x, \theta_\alpha)} \\
&= n_\alpha N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r \frac{1}{g_r^{1,0}(x, \theta_\alpha)} \\
&< n_\alpha^2 N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{1}{d_\alpha \underline{M}^{0,1}} \frac{d_\alpha}{n_\alpha} \sum_0^{n_\alpha - 1} {}_r \frac{g^{0,1}[g_{r-1}(x, \theta_\alpha, \theta_\alpha)]}{g_r^{1,0}(x, \theta_\alpha)} \\
&= n_\alpha^2 N_\alpha^{1,0}(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2 \frac{\xi(x \mid \theta_2)}{d_\alpha \underline{M}^{0,1}}.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure que $\mu(x \mid \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\alpha+1})$ est au plus de l'ordre de $n_\alpha^2 N_\alpha^{1,0} \xi(x \mid \theta_\alpha)$.

Supposons maintenant qu'on ajoute à $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ une solution $\xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha)$ de l'équation (58'); d'après (60), on devra alors ajouter, à la fonction qui représente la transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)$, la fonction

$$\left\{ \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha) + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha) \right\} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2, \tag{62}$$

σ étant un coefficient convenable, qui dépend de θ_α et de $a_{\alpha+1}$ [1]. A la fonction $\mu(x \mid \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\alpha+1})(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2$, qui représente $T^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha) T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, on devra par conséquent ajouter la valeur

$$\left\{ \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}[g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha] + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi[g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha] \right\} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2,$$

que la fonction (62) prend, au point $g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1})$, transformé de x par $T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$.

Lorsque $a_\alpha \to \infty$, $g_{-n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1})$ tend vers x; la valeur considérée tend vers

$$\left\{ \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha) + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha) \right\} (\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)^2.$$

Nous pouvons alors conclure que, à l'indétermination dans le choix de $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$ correspond une indétermination pour $\mu(x \mid \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\alpha+1})$; on peut ajouter à cette fonction une expression de la forme

$$\frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi^{0,1****}(x \mid \theta_\alpha) + \sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha),$$

---

[1] On doit considérer le terme $\sigma \frac{n_\alpha}{d_\alpha} \xi(x \mid \theta_\alpha)$ du fait qu'on ne peut pas exclure, *a priori*, que *dt* dépende du choix de $\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha)$.

$\xi^{0,1***}(x \mid \theta_\alpha)$ étant une solution de (58'), dont les valeurs sont de l'ordre de $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\xi(x \mid \theta_\alpha)$ au plus.

27. Nous allons donner une équation symbolique, qui doit être satisfaite, pour $a_\alpha \to \infty$, par la transformation très petite $\bar{T}^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$. De (57), en faisant $l = n_{\alpha+1}$, on tire

$$(63)\quad \left\{ \prod_{0}^{a_\alpha - 1}{}_r\, T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[\bar{T}^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1}) \right\} T^{n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$$
$$\times\left[\bar{T}^{n_{\alpha-1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_{\alpha-1}}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1}) = \bar{T}^{n_{\alpha+1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_{\alpha+1}}(\theta_{\alpha+1}) = 1.$$

A priori, pour $\alpha_\alpha \to \infty$, la fonction, qui caractérise $T^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$ est infiniment petite, de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$ au plus; en répétant le raisonnement développé au paragraphe 25 on trouve par conséquent que la fonction, qui caractérise la transformation indiquée symboliquement par l'expression entre accolades dans (63), doit être infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{a_\alpha}$ au plus. La fonction, qui caractérise

$$T^{n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\left[\bar{T}^{n_{\alpha-1}}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_{\alpha-1}}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha a_\alpha}(\theta_{\alpha+1}),$$

sera infiniment petite de l'ordre de $\left(\frac{1}{a_\alpha}\right)^2$. On peut alors négliger cette transformation et l'on trouve de la sorte

$$(63')\quad \prod_{0}^{a_\alpha - 1}{}_r\, T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})\left[T^{n_\alpha}(\bar{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})\right]T^{-n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1}) = 1.$$

Il est nécessaire de transformer ultérieurement l'équation, que nous venons d'obtenir. Remarquons d'abord que les deux fonctions, qui caractérisent respectivement la transformation géométrique $T^{n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, dont le module est égal à $n_\alpha \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} - m_\alpha = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$, et la transformation de même module engendrée par $\xi(x \mid \theta_\alpha)\frac{df}{dx}$, se réduisent, pour $a_\alpha \to \infty$, à une même fonction,

$$\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi(x \mid \theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha),$$

à des quantités près, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$. De même, les dérivées premières de ces deux fonctions se réduisent à $\frac{n_\alpha}{d_\alpha}\xi^{1,0}(x \mid \theta_\alpha)(\theta_{\alpha+1} - \theta_\alpha)$, à des quantités près, infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{a_\alpha}$.

On déduit de cette remarque que, pour $r < a_\alpha$, les deux fonctions, qui caractérisent respectivement la transformation géométrique très petite $T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$, de module $r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$, et la transformation de même module engendré par $\xi(x \mid \theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ coïncident, à des quantités près qui sont infiniment petites pour $a_\alpha \to \infty$. Les dérivées premières de ces deux fonctions coïncident de même.

On voit alors qu'on peut substituer, dans (63′), à la transformation $T^{n_\alpha r}(\theta_{\alpha+1})$, la transformation de module $r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$, engendrée par $\xi(x \mid \theta_\alpha)\frac{df}{dx}$; on obtient ainsi, pour $T^{n_\alpha}(\overline{\theta}_{\alpha+1} \mid \theta_\alpha)T^{-n_\alpha}(\theta_{\alpha+1})$, l'équation symbolique dont nous avons parlé au commencement du paragraphe (équation que d'ailleurs nous renonçons à donner explicitement, pour ne pas introduire de nouveaux symboles). Ce qui nous intéresse, c'est de donner l'équation pour $\mu(x \mid \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1})$, qui corresponde à cette équation symbolique. Remarquons pour cela que $T(\theta_\alpha)$, de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$, est engendrée par le groupe g_1 de la transformation infinitésimale $\xi(x \mid \theta_\alpha)\frac{df}{dx}$ lorsqu'on fait $t = 1$; on obtiendra donc la transformation du même groupe de module $r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$ en faisant $t = r\frac{(-1)^{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} : \frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; ce nombre est sensiblement égal à $\frac{(-1)^{\alpha+1}}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}$. L'équation de cette transformation est alors donnée par

$$x_1 = g\left[x, \frac{(-1)^{\alpha+1}}{m_\alpha}\frac{r_\alpha}{a_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right].$$

En utilisant une fois de plus les résultats du paragraphe 7 du premier Mémoire on aura donc, pour $\mu(x \mid \theta_\alpha, \overline{\theta}_\alpha)$, l'équation

$$\sum_0^{a_\alpha - 1}{}_r \frac{\mu\left[g\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right) \,\middle|\, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1}\right]}{g^{1,0}\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{\alpha_\alpha}, \theta_\alpha\right)}$$
$$= \xi(x \mid \theta_\alpha)\sum_0^{a_\alpha - 1}{}_r \frac{\mu\left[g\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right) \,\middle|\, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g\left(x, \frac{(-1)^\alpha}{m_\alpha}\frac{r}{\alpha_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right) \,\middle|\, \theta_\alpha\right]} = 0.$$

Divisons cette équation par $\xi(x \mid \theta_\alpha)$; en outre, si α est impair et $(-1)^\alpha = -1$, remplaçons x par $g\left(x, \frac{1}{m_\alpha} \,\middle|\, \frac{a_\alpha - 1}{a_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right)$ et r par $-r + a_\alpha - 1$. Nous obtenons de la sorte l'équation

$$\sum_0^{a_\alpha - 1}{}_r \frac{\mu\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right) \,\middle|\, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha} \,\middle|\, \theta_\alpha\right) \,\middle|\, \theta_\alpha\right]} = 0.$$

i étant un entier très grand, considérons, à côté de cette équation, celles qu'on obtient en y substituant x par $g\left(x, \frac{j}{i}\frac{1}{m_\alpha}\frac{r}{a_\alpha}\middle|\theta_\alpha\right)$, où $j=1, 2, \ldots, i-1$. Si nous additionnons ces équations et divisons ensuite par $\frac{1}{m_\alpha}\frac{1}{a_\alpha}\frac{1}{i}$ nous trouvons

$$\sum_0^{i-1}{}_j \sum_0^{a_\alpha-1}{}_r \frac{1}{m_\alpha}\frac{1}{a_\alpha}\frac{1}{i}\frac{\mu\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{ri+j}{a_\alpha i}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1}\right]}{\xi\left[g\left(x, \frac{1}{m_\alpha}\frac{ri+j}{a_\alpha i}\middle|\theta_\alpha\right)\middle|\theta_\alpha\right]}=0.$$

Le premier membre est une somme de Riemann de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{m_\alpha}}\frac{\mu[g(x, \tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1}]}{\xi[g(x, \tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}d\tau;$$

du fait que cette relation est valable pour i infiniment grand, on déduit

$$\int_0^{\frac{1}{m_\alpha}}\frac{\mu[g(x, \tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1}]}{\xi[g(x, \tau\,|\,\theta_\alpha)\,|\,\theta_\alpha]}d\tau=0.$$

Cette équation pour la fonction $\mu(x\,|\,\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1})$ est égale à l'équation (58′), à laquelle doit satisfaire la fonction $\xi^{0,1****}(x\,|\,\theta_\alpha)$. Nous sommes arrivés au point essentiel de la déduction développée dans les deux derniers paragraphes : Additionnons à la fonction $\xi^{0,1}(x\,|\,\theta_\alpha)$ la fonction $\frac{d_\alpha}{n_\alpha}\mu(x\,|\,\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1})$, qui représente une solution de (58′) et dont les valeurs sont, comme l'on voulait, de l'ordre $n_\alpha N_\alpha^{1,0}\,\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$ au plus; d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe précédent, la fonction $\mu(x\,|\,\theta_\alpha, \bar\theta_{\alpha+1})$ est alors transformée en $\sigma\xi(x\,|\,\theta_\alpha)$; comme cette fonction doit être encore une solution de (58′) on voit, *a posteriori*, que $\sigma=0$.

Du résultat obtenu on déduit immédiatement le lemme énoncé au commencement du paragraphe précédent.

On a donc enfin démontré que

$$\lim_{a_\alpha\to\infty}\frac{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}{\xi(x\,|\,\theta_\alpha)}=1.$$

28. Pour démontrer que $\xi(x, \theta)$ est continue nous devons successivement considérer le rapport $\frac{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+2})}{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}$; nous allons voir dans ce paragraphe qu'*on a*

$$\lim_{a_\alpha\to\infty}\frac{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+2})}{\xi(x\,|\,\theta_{\alpha+1})}=1. \tag{64}$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, le rapport en question est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{N_{\alpha+1}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$, $N_{\alpha+1}^{1,0}$ étant une borne pour la valeur absolue de $\xi^{1,0}(x \mid \theta_{\alpha+1})$. Nous allons reprendre ici les considérations du paragraphe 14 et reconnaître que, dans les conditions actuelles, on peut choisir la borne $N_{\alpha+1}^{1,0}$ de façon que le rapport $\frac{N_{\alpha+1}^{1,0}}{n_{\alpha+1}}$ soit infiniment petit pour $a_\alpha \to \infty$. La détermination d'une borne pour $|\xi^{1,0}(x \mid \theta_{\alpha+1})|$ revient, d'après ce que nous avons vu au paragraphe cité, à celle d'une borne pour les sommes

$$(29^{\alpha+1}) \qquad \sum_{l=0}^{s-1} \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]} \xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}] \qquad (s \leqq n_{\alpha+1}).$$

Nous allons d'abord montrer que, pour $a_\alpha \to \infty$, les sommes

$$(27^{\alpha+1}) \qquad \sum_{l=0}^{i} \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]} \gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}] \qquad (i < n_{\alpha+1})$$

sont infiniment petites; par une déduction tout à fait analogue à celle du paragraphe 14, on voit que ces sommes sont au plus de l'ordre de

$$\frac{g_i^{1,0}[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g_i^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} - 1.$$

On a alors

$$(65) \qquad \frac{g_i^{1,0}[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g_i^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})} = \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\xi[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]} \frac{\xi[g_{n_\alpha+i}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}{\xi[g_i(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}.$$

D'après (56) on peut substituer au premier facteur du second membre de (65)

$$\frac{\xi(x \mid \theta_\alpha)}{\xi[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha]} = 1 - \frac{\xi[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha] - \xi(x \mid \theta_\alpha)}{\xi[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_\alpha]},$$

en faisant une erreur infiniment petite. Le numérateur de la fraction au second membre de cette dernière équation ne peut certainement dépasser $|N_\alpha^{1,0} \gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})|$; il est donc, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe 10, au plus de l'ordre de $N_\alpha^{1,0} \frac{1}{m_{\alpha+1}} \xi(x \mid \theta_\alpha)$. La fraction considérée est donc au plus de l'ordre de $\frac{N_\alpha^{1,0}}{m_{\alpha+1}}$, sa valeur est donc infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$, on conclut alors que le premier facteur $\frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\xi[g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}$ du deuxième membre de (65) est infiniment proche de 1. On peut démontrer, d'une façon analogue, qu'il en est de même du deuxième facteur. Il résulte alors, comme on l'avait annoncé, que les sommes $(29^{\alpha+1})$ sont infiniment petites pour $a_\alpha \to \infty$.

En rappelant (16) et (26) on voit qu'on a

$$(30^{\alpha+1}) \qquad \frac{\dfrac{\xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}{\gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}}{\dfrac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})}} = \frac{\dfrac{\xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}}{\dfrac{\gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})}} = \frac{g_l^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}{g_l^{1,0}(x^*, \theta_{\alpha+1})} \qquad (l < n_{\alpha+1}),$$

$x^\star$ étant un point convenable dans l'intervalle $(x, g_{n_\alpha}(x, \theta_{\alpha+1}))$. On a d'autre part

$$\frac{g_l^{1,0}(x, \theta_{\alpha+1})}{g_l^{1,0}(x^\star, \theta_{\alpha+1})} = \frac{\xi(x^\star \mid \theta_{\alpha+1})}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})} \frac{\xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}{\xi[g_l(x^\star, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]}.$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour le deuxième membre de (65) on trouve que le deuxième membre de la dernière relation est infiniment proche de 1 pour $a_\alpha \to \infty$. Le rapport ($30^{\alpha+1}$) est alors infiniment proche de 1 pour $a_\alpha \to \infty$. On en déduit

$$\xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}] = \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})} \gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}][1 + \rho_l \varepsilon(a_\alpha)],$$

$\varepsilon(a_\alpha)$ étant une quantité infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$ et ρ_l étant un facteur (qui dépend aussi de x et de a_α) qui reste borné.

Si l'on introduit dans ($29^{\alpha+1}$) l'expression obtenue pour $\xi[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]$ on trouve

$$\frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})} \left\{ \sum_0^{s-1} \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{l g^{1,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]} \gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}] \right\}$$
$$+ \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})} \varepsilon(a_\alpha) \sum_{0\ l}^{s-1} \rho_l \frac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]} \gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}].$$

Dans le premier des deux termes de cette expression on trouve le produit de la fraction $\frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})}$ (qui, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 14, est de l'ordre de $n_{\alpha+1}$) par une somme qui, d'après ce que nous venons de voir dans ce paragraphe, est infiniment petite pour $a_\alpha \to \infty$. Dans le deuxième terme on trouve la même fraction $\frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\gamma_\alpha(x \mid \theta_{\alpha+1})}$, qui est multipliée par le facteur infiniment petit $\varepsilon(a_\alpha)$ et par une somme qui, du fait qu'on a

$$\sum_{0\ l}^{s-1} |\gamma_\alpha[g_l(x, \theta_{\alpha+1}) \mid \theta_{\alpha+1}]| < 1,$$

reste bornée en valeur absolue. On conclut alors, en raisonnant comme au paragraphe 14, qu'on peut donner une borne pour la valeur absolue de $\xi^{1,0}(x \mid \theta_{\alpha+1})$ de façon que, pour $a_\alpha \to \infty$, le rapport de cette borne à $n_{\alpha+1}$ soit infiniment petit. La relation (64) s'en déduit immédiatement.

29. Au paragraphe précédent on a utilisé le fait que

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1$$

pour démontrer que

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+2})}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+1})} = 1.$$

On a alors aussi

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+2})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1.$$

En utilisant maintenant ce dernier résultat, on peut démontrer, par un raisonnement tout à fait semblable à celui du paragraphe précédent, qu'on a aussi

$$\lim_{\alpha_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+3})}{\xi(x \mid \theta_{\alpha+2})} = 1,$$

et par conséquent,

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha+3})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1.$$

On peut continuer par induction. On pourra alors choisir une valeur de l'indice $\alpha' > \alpha$, qui soit infiniment grande pour $a_\alpha \to \infty$ et telle que

$$\lim_{a_\alpha \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta_{\alpha'})}{\xi(x \mid \theta_\alpha)} = 1.$$

En désignant par θ une valeur du paramètre telle que la valeur correspondante k du module admet $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ parmi ses réduites, on a d'autre part, d'après les résultats du chapitre précédent,

$$\lim_{\alpha' \to \infty} \frac{\xi(x \mid \theta)}{\xi(x \mid \theta_{\alpha'})} = 1.$$

On déduit des deux dernières relations que le rapport $\frac{\xi(x \mid \theta)}{\xi(x \mid \theta_\alpha)}$ tend vers 1 lorsque $a_\alpha \to \infty$. Cette dernière relation démontre la continuité de la fonction $\xi(x, \theta)$ au point θ_α.