ANDRÉ MARCHAUD

Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné et plus particulièrement de celles du troisième ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 303-370

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__303_0>

SUR LES

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

DES

SURFACES D'ORDRE BORNÉ

ET PLUS PARTICULIÈREMENT

DE CELLES DU TROISIÈME ORDRE

PAR M. ANDRÉ MARCHAUD.

INTRODUCTION.

Un des traits les plus marquants de la *Géométrie finie*, appelée aussi Géométrie de l'ordre (Ordnungsgeometrie) est l'étonnante richesse de la notion d'ordre. L'ordre d'une surface, par exemple, est la borne supérieure du nombre de ses points d'intersection avec une sécante quelconque, non située toute entière sur elle. Dans les travaux de C. Juel et de ses successeurs les surfaces considérées sont définies d'une manière très générale, elles ne sont pas supposées être algébriques ou même analytiques, mais elles sont pourvues par hypothèse d'un plan tangent continu. Or il se trouve que dans certains cas l'existence et la continuité du plan tangent est une conséquence de la seule hypothèse relative à l'ordre. Ainsi, ayant pu définir, dans un travail antérieur (1), la surface générale du troisième ordre immédiatement à partir de la notion de continu plan d'ordre 3, j'ai montré que si elle était réglée (non conique) elle possédait nécessairement partout, sauf le long d'une directrice

(1) A. MARCHAUD, *Sur les Surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie* (*Journ. Math. p. et appl.*, t. 18, fasc. IV, 1939).

rectiligne et peut-être le long de deux génératrices limites un plan tangent continu. Ce résultat inattendu m'a incité à entreprendre l'étude systématique des propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné en réduisant les hypothèses au minimum. Dans l'exemple qui vient d'être rappelé j'avais déduit l'existence et la continuité du plan tangent en partie des propriétés globales de la surface et non pas uniquement de ses propriétés locales. Il m'a paru nécessaire de considérer seulement un morceau de surface, défini d'une manière aussi large que possible. L'élément étudié dans le présent Mémoire sera un morceau de surface (S) représentable en axes rectangulaires ou obliques par une équation

$$z = f(x, y) \qquad (S)$$

où la fonction $f(x, y)$ est définie et continue sur un disque convexe [1] (C) du plan des xy. Il revient au même de dire que (S) se projette sur (C) d'une manière biunivoque et bicontinue parallèlement à une direction fixe.

Pour simplifier l'écriture nous dirons généralement : surface et non pas : morceau de surface car il ne pourra y avoir de confusion.

La seule hypothèse faite sur (S) sera celle relative à son *ordre*. Mais comme celle-ci peut contenir des segments rectilignes ou des facettes planes il sera nécessaire de généraliser la définition habituellement adoptée.

Je dirai que (S) est d'*ordre borné* si toute sécante ne possédant sur elle aucun segment la rencontre en un nombre borné de points; la borne supérieure de ce nombre sera l'*ordre* de (S). *L'ordre local* en un point se définit aisément.

Pour établir une relation entre l'ordre local en un point et le faisceau dérivé en ce point (ensemble des demi-tangentes) il a été nécessaire d'introduire la notion d'*ordre conique* d'un demi-cône simple (c'est-à-dire sans rayon multiple). Un demi-cône simple de sommet O est d'ordre conique borné si tout plan issu de O ne possédant sur lui aucun secteur plan le rencontre suivant un nombre borné de demi-droites; son *ordre conique* (nécessairement pair) est la borne supérieure de ce nombre. Un demi-cône simple d'ordre conique 2 est un plan, un dièdre où la frontière d'un vrai demi-cône convexe. On voit que l'ordre conique est différent de l'ordre du demi-cône.

Dans les trois premières parties du Mémoire après avoir rappelé les résultats d'un précédent travail sur le faisceau dérivé et le faisceau des tangentes [2] (paratingent de M. Georges Bouligand) en un point où celui-ci ne remplit pas tout l'espace (point *ordinaire*), j'étudie les arcs simples plans d'ordre borné et plus en détail ceux du troisième ordre, puis les demi-cônes simples d'ordre conique borné, me limitant chaque fois aux propriétés indispensables à notre objet. Le résultat général auquel on aboutit est le suivant :

---

(1) On verra au n° 3 pourquoi (C) est supposé convexe.

(2) A. MARCHAUD, *Sur les propriétés différentielles du premier ordre des Surfaces simples de Jordan et quelques applications* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 63, fasc. 2].

1° L'ensemble des points ordinaires de (S) est ouvert et partout dense;

2° En un point intérieur ordinaire où l'ordre local est n le faisceau dérivé est un demi-cône simple dont l'ordre conique est au plus égal à $2n-2$ ou $2n$, suivant que n est pair ou impair; lorsque l'ordre conique est $2n$ tout plan passant par le point et coupant le faisceau dérivé exactement suivant $2n$ rayons donne pour intersection n couples de demi-tangentes opposées.

Pour $n=2$ on retrouve un résultat connu : le faisceau dérivé est un plan, un dièdre ou la frontière d'un vrai demi-cône convexe. Résultat incomplet car j'ai montré, dans le travail qui vient d'être cité (1) que si (S) est du second ordre, c'est une partie de la frontière d'un corps convexe ou bien un morceau de vraie *quadrique réglée*. Autrement dit : si (S) est du second ordre et non convexe elle est *algébrique*, du second degré et réglée.

La quatrième partie est consacrée au cas où (S) est du troisième ordre. D'après la théorie générale l'ordre conique du faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ en un point ordinaire M est 6, 4 ou 2. Je montre d'abord que le premier cas ne peut se produire que si (S) est un morceau de cône (lieu de droites) de sommet M.

Lorsque $\mathcal{D}(M)$ est d'ordre conique 4, il possède nécessairement deux couples au moins de rayons opposés; s'il y en a plus de deux ils sont dans un même plan, lequel contient deux secteurs opposés de $\mathcal{D}(M)$; enfin tous les couples de demi-tangentes opposées sont entièrement sur (S) (2). Dans chacun des cas on peut décrire avec précision les différents types de faisceau dérivé. Des exemples sont donnés dans la Note I où l'on trouvera la définition d'une surface (close) du troisième ordre, non analytique et contenant trois droites coplanaires.

Le cas où $\mathcal{D}(M)$ est un plan conduit à des résultats intéressants sur le faisceau des tangentes : $\mathcal{T}(M)$; la plupart seront utilisés dans la cinquième partie. En voici un, qui donnera une idée de ce que l'on peut déduire d'hypothèses paraissant peu riches à première vue :

Si en un point M intérieur à (S) les demi-tangentes en ce point à une section de (S) par un plan parallèle à Oz (verticale), sont opposées et parallèles à cette droite, le faisceau des tangentes en M est un plan vertical, à moins que (S) ne contienne une droite passant par M, dans ce dernier cas on peut seulement affirmer que le faisceau dérivé est un plan vertical.

La cinquième et dernière partie du Mémoire, la plus longue et la plus délicate, traite du cas où (S), toujours supposée du troisième ordre, *ne possède nulle part de plan d'appui local*. J'y démontre que la surface admet alors un *plan tangent continu* (faisceau des tangentes) sauf peut-être en des points isolés ne pouvant avoir de point d'accumulation que sur le bord.

Autrement dit : pour le troisième ordre la non-convexité (entendue au sens

---

(1) Nos 22 et 23.

(2) Pour simplifier les énoncés je dis qu'une droite est toute entière sur (S) si le segment de cette droite contenu dans le cylindre projetant (S) parallèlement à Oz est sur la surface.

de l'absence de plans d'appuis locaux) implique l'existence d'un plan tangent continu, sauf en de très rares points. D'une manière plus précise voici l'essentiel des résultats.

1° Tous les points intérieurs de (S), sauf peut-être 4 au plus, sont ordinaires;

2° En tout point intérieur ordinaire le faisceau des tangentes est un plan à moins que le faisceau dérivé ne soit un dièdre;

3° Si en un point intérieur M_i le faisceau dérivé est un dièdre, l'arête Δ_i de celui-ci est toute entière sur (S), une de ses faces est plan tangent (faisceau des tangentes) stationnaire tout le long de Δ_i sauf en M_i et traverse la surface, laquelle n'a dans ce plan que les points Δ_i. L'ensemble des points M_i ne peut avoir de point d'accumulation que sur le bord de (S).

Comme le faisceau des tangentes, lorsqu'il se réduit à un plan en un point et dans son voisinage est nécessairement continu, on a bien la propriété annoncée.

Les conditions imposées à la surface par l'existence d'*un seul* point où le faisceau dérivé est un dièdre sont telles qu'il est permis de supposer que le nombre des points M_i doit être borné, mais je n'ai pu le démontrer. D'ailleurs j'ai longtemps douté de leur existence jusqu'au jour où j'ai pu construire (après de nombreux essais infructueux) l'exemple que l'on trouvera en Note II à la fin du Mémoire.

I. — Faisceau des tangentes et faisceau dérivé. Points ordinaires.

1. Avant d'aborder les problèmes qui font l'objet du présent travail il sera utile de rappeler quelques définitions et résultats essentiels dont nous ferons constamment usage. Pour les démonstrations je renverrai à mon Mémoire sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications, qui dans les références sera désigné par la lettre M [1].

Soit M un point intérieur (c'est-à-dire non situé sur le bord) d'une surface simple de Jordan, image biunivoque et bicontinue d'un disque circulaire plan. Une *tangente* en M à la surface est par définition toute droite d'accumulation d'une série de sécantes $M'M''$ lorsque les points M' et M'' tendent vers M en restant sur la surface. Une *demi-tangente* en M est toute demi-droite d'accumulation de demi-sécantes MM' quand M' tend vers M en restant sur la surface. L'ensemble des tangentes en M est le *faisceau des tangentes* en ce point, on le désignera par $\mathcal{T}(M)$; l'ensemble des demi-tangentes est le *faisceau dérivé*, il sera représenté par $\mathcal{D}(M)$.

Les deux faisceaux $\mathcal{T}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$ sont évidemment fermés et le premier

[1] *Ann. Éc. Norm.*, (3), 63, fasc. 2.

contient le second. Il résulte immédiatement de sa définition que si $\mathcal{T}(M)$ se réduit à un plan en un point M et dans son voisinage ce plan varie d'une manière continue, plus généralement que si $\mathcal{T}(M_0)$ est un plan, tout plan contenu dans $\mathcal{T}(M)$ a pour limite $\mathcal{T}(M_0)$ quand M tend vers M_0.

Une catégorie importante de points intérieurs est constituée par ceux où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace. Nous les appellerons *points ordinaires*. Les autres points intérieurs seront les *points de remplissage tangentiel* ou encore *non ordinaires*.

2. Avec ces définitions les propositions annoncées sont les suivantes.

Soit M un point ordinaire :

1° Il existe sur la surface un voisinage Σ_M de M, représentable en axes rectangulaires ou obliques $M\xi\eta\zeta$ par une équation

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta) \qquad (\Sigma_M)$$

où la fonction est définie et à nombres dérivés bornés dans un cercle $\xi^2 + \eta^2 \leqq r^2$. Cette propriété est une conséquence directe des définitions; $M\zeta$ est assujetti à la seule condition d'être *extérieur* à $\mathcal{T}(M)$. On voit immédiatement que les points intérieurs de Σ_M sont ordinaires.

2° Le complémentaire de $\mathcal{T}(M)$ est un système de deux demi-cônes convexes ouverts et symétriques sans rayons communs : $\theta(M)$ et $\theta'(M)$.

Il en résulte que $\mathcal{T}(M)$ est un plan, un bidièdre (système de deux dièdres opposés par l'arête) ou bien l'ensemble des droites issues de M ne pénétrant pas à l'intérieur d'un vrai cône convexe : le *cône directeur des tangentes*, ensemble des frontières de $\theta(M)$ et $\theta'(M)$ qui en constituent les deux nappes [M, n^{os} 7 et 8] (¹).

De la convexité du complémentaire de $\mathcal{T}(M)$ on déduit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{T}(M)$ se réduise à un plan est qu'on puisse trouver deux plans distincts passant par M tels que chacun d'eux ne contienne qu'une seule tangente, celle-ci étant distincte de l'intersection des deux plans [M, n° 8].

3° Les tangentes situées dans un plan contenant une droite extérieure à $\mathcal{T}(M)$ s'obtiennent en considérant seulement les sécantes $M'M''$ parallèles à ce plan [M, n° 6].

4° Les rayons de $\mathcal{D}(M)$ situés dans un demi-plan ayant pour arête une droite extérieure à $\mathcal{T}(M)$ sont les demi-tangentes en M à la section de Σ_M par ce demi-plan [M, n° 6]. Cette proposition avait été établie par M. Bouligand, par une méthode différente de celle que nous utilisons dans [M] (²).

(¹) Cette propriété est fondamentale. Je l'ai signalée pour la première fois (et établie) dans une Note aux *Comptes rendus*, séance du 11 janvier 1937.

(²) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p, 168.

5° Dans tout demi-plan dont l'arète est extérieure à $\mathfrak{T}(M)$ la trace du faisceau dérivé se compose d'un angle dont les côtés décrivent deux demi-cônes simples, qui peuvent être confondus [M, n° 6] (un demi-cône simple de sommet M est l'ensemble des demi-droites joignant M aux points d'une courbe simple, c'est-à-dire fermée et sans point double, tracée sur une sphère centrée en M).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on puisse trouver un faisceau partout dense de demi-droites issues de M, dont chaque rayon coupe Σ_M suivant un ensemble dans lequel M est isolé [M, n° 10].

Pour les surfaces que nous considérerons dans le présent travail, *le faisceau dérivé en un point ordinaire sera toujours un demi-cône simple.* Nous supposerons cette hypothèse réalisée désormais. Les propositions énoncées ci-dessous seront des cas particuliers de celles auxquelles on renvoie le lecteur.

7° Si $\mathfrak{T}(M)$ est un bidièdre, $\mathcal{D}(M)$ se réduit à deux demi-plans symétriques ou non [M, n° 8].

8° Si $\mathcal{D}(M)$ possède deux rayons non opposés, l'un sur la frontière de $\theta(M)$ l'autre sur celle de $\theta'(M)$, l'angle formé par ces deux rayons appartient à $\mathcal{D}(M)$ [M, n° 9 *b*].

9° Si $\mathcal{D}(M)$ a quatre rayons (au moins) sur la frontière de $\theta(M)$ ou de $\theta'(M)$ il est, au sens large, d'un même côté d'un certain plan passant par M.

Lorsque trois quelconques de ces quatre rayons ne sont pas coplanaires cette dernière proposition est un cas particulier de celle qu'on trouvera en M [n° 9 *a*] laquelle affirme de plus que le plan contient au plus quatre demi-tangentes. Il suffira donc d'examiner l'hypothèse contraire. Remarquons tout d'abord que la question se pose seulement si le cône directeur des tangentes est un vrai cône. Soient alors MD, MD′, MD″ trois demi-tangentes coplanaires situées sur la même nappe. Supposons, ce qui est permis, MD intérieur à l'angle D′MD″. On peut trouver un plan Π coupant la nappe suivant une courbe convexe Γ. Soient D, D′, D″ les points où les trois demi-tangentes rencontrent Π, D est intérieur au segment D′D″ qui est nécessairement sur Π; celle-ci est d'un certain côté par rapport au plan D′MD″.

Je vais montrer que $\mathcal{D}(M)$ ne peut avoir de rayon MD_1 du côté opposé au sens strict, ce qui établira la proposition. Supposons donc MD_1 situé par rapport au plan D′MD″ du côté opposé à Γ. Le plan D_1MD pénètre à l'intérieur de Γ, donc du cône directeur des tangentes. Dans le plan D_1MD une droite issue de M. voisine de MD et rencontrant Π à l'intérieur de Γ laissera MD et MD_1 d'un même côté ce qui est impossible.

II. — Arcs simples et surfaces simples d'ordre borné.

3. On définit habituellement l'ordre d'une surface comme la borne supérieure (lorsqu'elle existe) du nombre de ses points d'intersection avec une droite

quelconque. Cette définition a l'inconvénient d'écarter les surfaces contenant des segments rectilignes ou des facettes planes. Nous allons la généraliser pour les surfaces telles que (S) représentables en axes rectangulaires ou obliques, par une équation

$$z = f(x, y), \qquad (S) \tag{1}$$

f étant définie et continue dans un domaine borné, fermé et convexe (C) du plan des xy.

On ne réduit évidemment pas la généralité en supposant le plan des xy perpendiculaire à l'axe des z. C'est ce que nous ferons en appelant (pour simplifier le langage) *vertical* tout plan ou droite parallèle à Oz.

Il revient au même de dire que (S) se projette sur (C) parallèlement à OZ d'une manière biunivoque et bicontinue.

La surface (S) sera dite d'*ordre borné* si toute sécante *ne possédant sur elle aucun segment rectiligne* la rencontre en un nombre borné de points; la borne supérieure du nombre de ces points sera *l'ordre* de (S).

Il faut remarquer que si (C) n'était pas convexe l'ordre d'une surface pourrait en quelque sorte dépendre artificiellement du bord, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons un triangle $M_1M_2M_3$ dont le plan n'est pas vertical, et une ligne brisée $M_1N_1N_2, \ldots, N_{p2+1}M_2$, dont les sommets N_{2i} ($i = 1, 2, \ldots, p$) sont sur le segment M_1M_2, les autres étant intérieurs au triangle. En retranchant de celui-ci les points intérieurs aux triangles $M_1N_1N_2$, $N_2N_3N_4$, $\ldots$, $N_{2p}N_{2p+1}M_2$, on obtient un morceau de plan dont l'ordre serait $p+2$ avec la définition précédente. Cet ordre pourrait même n'être pas borné si l'on prenait une infinité de points N.

La section de (S) par un plan vertical est un arc simple rencontré en un nombre borné de points par toute sécante de son plan *ne possédant sur l'arc aucun segment rectiligne*. Il sera nécessaire pour la suite d'étudier quelques propriétés de ces arcs. Comme le fait qu'ils ont un seul point sur toute verticale n'apportera aucune simplification dans les raisonnements nous négligerons cette hypothèse.

4. Arcs simples plans d'ordre borné. — Soit donc $\widehat{AB}$ un arc simple plan, image biunivoque et bicontinue d'un segment rectiligne $\alpha\beta$, rencontré en n points au plus par toute sécante ne possédant sur lui aucun segment rectiligne, l'une au moins le rencontrant exactement en n points. L'arc AB est par définition d'ordre n.

Il est immédiat que si $\widehat{AB}$ est d'ordre *un* c'est un segment de droite. Nous supposerons n supérieur à l'unité.

Remarquons tout d'abord que $\widehat{AB}$ possède au plus une infinité dénombrable de segments rectilignes, puisqu'à chacun d'eux correspond un segment de $\alpha\beta$.

Cette propriété sera constamment utilisée explicitement ou implicitement de la manière suivante : une sécante étant donnée on peut toujours mener une sécante voisine passant ou non par un de ses points et ne contenant aucun segment rectiligne de l'arc.

D'autre part $\widehat{AB}$ admet en chacun de ses points une demi-tangente unique pour chaque côté (avec la restriction évidente en A et B) comme dans le cas où l'on exclut les segments rectilignes. J'ai montré en effet que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc simple $\widehat{MM'}$ possède en M une demi-tangente unique est que l'on puisse trouver un ensemble de droites issues de M partout dense, sur chacune desquelles, M est point isolé pour l'intersection avec l'arc (1).

5. Nous allons étudier pour commencer la disposition de $\widehat{AB}$, supposé d'ordre n, par rapport à une droite donnée Δ.

Si un point M intérieur à $\widehat{AB}$ est isolé sur Δ, on peut trouver sur l'arc deux arcs partiels ayant pour extrémité commune $M : \widehat{A'M}$ et $\widehat{MB'}$, ne possédant chacun que le point M sur Δ ; on dit que M est une *traversée* ou *un retour* suivant que ces arcs sont d'un même côté ou de part et d'autre de Δ.

Ceci posé, considérons d'abord le cas où $\widehat{AB}$ n'a aucun segment rectiligne sur Δ. La section se compose alors de n points au plus. Supposons cette limite atteinte (ce qui a lieu par hypothèse pour une sécante au moins) et désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$, les n points. Les arcs successifs $\widehat{A_i A_{i+1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont chacun d'un même côté de Δ qui ne contient que les extrémités.

Je vais montrer qu'il existe des sécantes voisines de Δ coupant $\widehat{AB}$ en n points isolés distincts des extrémités A et B ; il suffira pour cela d'établir que ces points sont intérieurs à $\widehat{A_1 A_n}$.

Par un point I de Δ menons deux droites Δ_1 et Δ_2 faisant avec elle les angles $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut et choisi de telle manière que Δ_1 et Δ_2 ne portent aucun des segments éventuels de $\widehat{AB}$, ce qui est possible puisque ceux-ci forment un ensemble au plus dénombrable. Si I est distinct des extrémités d'un arc $\widehat{A_i B_{i+1}}$ et si Δ_1 et Δ_2 sont assez voisines de Δ la somme des points d'intersection de $\widehat{A_i B_{i+1}}$ avec Δ_1 et Δ_2 sera au moins égale à 2. Si I est confondu avec A_i par exemple la somme sera au moins égale à 3. Prenons I en A_1, comme le nombre des arcs est fini, nous pourrons choisir ε de manière que la somme $n_1 + n_2$ des nombres de points sur Δ_1 et Δ_2 soit au

(1) A. Marchaud, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'existence des demi-tangentes en un point d'un arc simple* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 56, juin 1932).

moins égale à $3 + 2(n - 2) = 2n - 1$. Les nombres n_1 et n_2 sont d'autre part inférieurs ou égaux à n. Nous avons donc : $2n \geqq n_1 + n_2 > 2n - 1$.

Ceci exige que l'un des nombres : n_1 et n_2, n_1 par exemple soit égal à n. Le point A_n n'est pas sur Δ_1. En reprenant le raisonnement sur Δ_1 en faisant jouer le rôle de A_1 au dernier point de $\widehat{AB}$ sur Δ_1 on obtiendra une sécante Δ'_1, coupant $\widehat{AB}$ exactement en n points intérieurs. Je dis qu'une telle sécante est traversée par l'arc en chacun des n points. La démonstration sera analogue à celle que j'ai donnée antérieurement de cette propriété dans le cas moins général où les segments sont exclus [1]. On pourrait se contenter de l'invoquer en raison de la remarque faite au début du nº 4. Il m'a paru préférable d'employer un procédé un peu plus simple d'ailleurs, dont l'idée nous servira dans l'étude des demi-cônes simples d'ordre borné.

Soient donc $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les intersections de Δ avec $\widehat{AB}$ dont les extrémités sont en dehors de Δ. Les points A_i découpent dans $\widehat{AB}$ $n+1$ arcs. Chacun d'eux est d'un même côté de Δ qui contient seulement une extrémité s'il s'agit de $\widehat{AA_1}$ et $\widehat{A_nB}$ ou deux s'il s'agit des autres. Il faut montrer que le nombre des retours est nul. Appelons côté supérieur et côté inférieur les deux demi-plans limités par Δ. Les expressions : retour supérieur, retour inférieur s'entendent d'elles-mêmes; désignons par p_1 et p_2 leurs nombres respectifs, par t celui des traversées. On a

$$p_1 + p_2 + t = n.$$

En raisonnant comme plus haut on voit qu'une parallèle à Δ située au-dessus, voisine et convenablement choisie donnera au moins $t + 2p_1 \leqq n$ intersections.

De même une sécante convenablement choisie au-dessous donnera au moins $t + 2p_2 \leqq n$ intersections. Comme $t + p_1 + p_2 = n$, on a nécessairement $t + 2p_1 = n$, $t + 2p_2 = n$, d'où $p_1 = p_2$.

Reste à montrer que ce nombre commun ne peut être que nul. Soit A_k le retour le plus à gauche sur Δ; on peut toujours supposer que c'est un retour supérieur. Le retour inférieur le plus à gauche : soit $A_{k'}$ est à droite de A_k. Une sécante menée par un point compris entre A_k et $A_{k'}$ assez voisine de Δ, laissant A_k au-dessous d'elle, et ne portant aucun segment rectiligne, donnera pour le retour A_k au moins deux points, pour chacun des retours inférieurs au moins deux points et un point au moins pour chaque traversée. Soit en tout $2 + 2p_2 + t$ points au moins. Ce qui exige

$$2 + 2p_2 + t \leqq n.$$

Nous aboutissons à une contradiction. Il faut donc que p_1 et p_2 soient nuls.

---

[1] A. MARCHAUD, *Sur les Continus d'ordre borné* (*Acta Math.*, t. 55, nº 9).

6. Examinons maintenant le cas où la droite Δ porte au moins un segment rectiligne de $\widehat{AB}$. L'ensemble des points de $\widehat{AB}$ situés sur Δ est fermé; désignons par A' et B' ses bornes sur l'arc, A' étant la borne du côté de A. Si A' est distinct de A, l'arc partiel $\widehat{AA'}$ n'a sur Δ que A', la même remarque vaut pour B'. Si l'arc $\widehat{A'B'}$ de $\widehat{AB}$ n'a pas de point extérieur à Δ il se réduit au segment $A'B'$ seul arc simple joignant A' à B' sur Δ. Dans le cas contraire il existe un point M_1 de $\widehat{A'B'}$ extérieur à Δ. Désignons par A'_1 la borne du côté de A' des arcs $\widehat{MM_1}$ de $\widehat{A'B'}$ (M entre A' et M_1) n'ayant aucun point sur Δ. Le point A'_1 est sur Δ, et peut être confondu avec A'. De la même manière on détermine un arc $\widehat{M_1B'_1}$ de $\widehat{A'B'}$, n'ayant sur Δ que B'_1 qui peut être confondu avec B'. On a ainsi un arc $\widehat{A'_1B'_1}$ n'ayant que ses extrémités sur Δ et situé tout entier d'un même côté de cette droite. Les points A'_1 et B'_1 ne peuvent être à la fois le premier en A' le second en B', car l'intersection de AB par Δ ne comporterait aucun segment. Si $A'B'$ possède *en dehors de* $\widehat{A'_1B'_1}$ des points extérieurs à Δ on déterminera un nouvel arc partiel $\widehat{A'_2B'_2}$ analogue de $\widehat{A'_1B'_1}$, etc. Je dis qu'au bout d'un nombre limité d'opérations on aura épuisé $A'B'$. En effet si q arcs sont d'un même côté de Δ, une sécante, parallèle assez voisine, située du côté en question et choisie de manière à ne porter aucun segment de $\widehat{A'B'}$ donnera au moins $2q$ intersections et ce nombre ne peut surpasser n. Soit donc r le nombre total des arcs; nous pouvons toujours supposer que les arcs $\widehat{A'_1B'_1}, \widehat{A'_2B'_2}, \ldots, \widehat{A'_rB'_r}$ se rangent dans cet ordre sur $\widehat{A'B'}$.

L'ensemble des points de $\widehat{A'B'}$ situés sur Δ sont les $r+1$ éléments : $A'A'_1$, $B'_1A'_2, \ldots, B'_rB'$, segments ou points quand les extrémités sont confondues. L'un d'eux au moins est un segment (par hypothèse). Soit I un point intérieur à ce segment. Menons par I deux sécantes Δ_1 et Δ_2 voisines de Δ et choisies comme au numéro précédent. Soit encore n_1 et n_2 les nombres respectifs des points d'intersection de $\widehat{A'B'}$ par Δ_1 et Δ_2. Dans la somme n_1+n_2 chaque arc donne au moins deux points. Nous avons donc : $n_1+n_2 \geqq 2+2r$.

Comme n_1+n_2 est au plus égal à $2n$, on en déduit $r+1 \leqq n$.

Autrement dit :

Si Δ porte un segment de $\widehat{AB}$, l'intersection de la sécante avec l'arc se compose au plus de n éléments segments ou points.

Lorsque la limite est atteinte le raisonnement précédent montre que A et B sont nécessairement sur Δ. En effet, dans le cas contraire la somme des intersections avec $\widehat{AB}$ de Δ_1 et Δ_2 convenablement choisies serait au moins $2n+1$, ce qui est impossible.

Les résultats obtenus dans les deux derniers numéros peuvent être rassemblés dans la proposition suivante.

1° *Un arc simple d'ordre n est rencontré par une droite quelconque de son plan suivant des points isolés ou des segments en nombre au plus égal à n ;*

2° *Si une sécante ne renfermant aucune des extrémités, contient n éléments distincts de l'arc, ce sont des points isolés et l'arc traverse la sécante en chacun d'eux* (1)*; il existe toujours de telles sécantes;*

3° *Toute sécante ne contenant aucune extrémité et possédant plus de n points sur l'arc, la rencontre suivant n — 1 éléments au plus dont un segment.*

6 *bis*. Pour terminer ces généralités je donnerai une proposition importante pour la suite. Soit $\widehat{AB}$ un arc d'ordre n et Δ une sécante. Considérons un arc partiel $\widehat{M'M''}$ de $\widehat{AB}$ ayant ses extrémités de part et d'autre de Δ au sens strict. Il existe sur $\widehat{M'M''}$ deux points M'_0 et M''_0 situés sur Δ et pouvant être confondus, tels que $\widehat{M'M'_0}$ et $\widehat{M''_0M''}$ n'aient sur Δ que les extrémités M'_0 et M''_0. On voit immédiatement que si M'_0 et M''_0 sont distincts, une sécante joignant un point I intérieur au segment $M'_0M''_0$ à un point de $\widehat{M'M'_0}$ voisin de M' et choisie de manière à ne porter aucun des segments éventuels de AB, coupera $M'M''$ suivant trois éléments au moins, si elle est assez voisine de Δ. Ceci posé supposons qu'il existe, sur $\widehat{AB}$, $n-1$ arcs partiels $\widehat{M'_iM''_i}$ tous extérieurs les uns aux autres et tels que pour chacun d'eux les extrémités soient de part et d'autre de Δ. Il résulte immédiatement de ce qui précède que chaque arc $\widehat{M'_iM''_i}$ rencontre Δ en un *point unique* M_i *qui est une traversée*. En effet, dans le cas contraire une sécante convenable couperait Δ suivant $(n-2)+3$ éléments distincts; ce qui est impossible.

On peut toujours choisir les notations de manière que les points M'_i, M_i, M''_i se rangent sur $\widehat{AB}$ dans l'ordre

$$A,\quad M'_1,\quad M_1,\quad M''_1,\quad M'_2,\quad M_2,\quad M''_2,\quad \ldots,\quad M'_{n-1},\quad M_{n-1},\quad M''_{n-1},\quad B.$$

Si deux points M''_i, M'_{i+1} sont de part et d'autre de Δ l'arc $\widehat{M''_iM'_{i+1}}$ contient un point et un seul sur Δ qui est une traversée. $\widehat{AB}$ traverse alors Δ en n points distincts des extrémités et l'intersection ne peut rien comporter d'autre, sans

---

(1) La restriction relative aux extrémités est indispensable, comme le montre l'exemple suivant. A l'intérieur d'un segment AB prenons trois points : $A'B_1B'$. L'arc constitué par les segments AA', B_1B' et par deux demi-cercles de diamètres $A'B'$ et B_1B, situés de part et d'autre de AB est du troisième ordre et il a sur le support de AB trois éléments : deux segments et un point. Le même exemple montre le caractère indispensable de la même restriction pour le 3°.

quoi on aurait plus de n éléments distincts. Lorsque A et M'_1 ou bien M''_{n+1} et B sont de part et d'autre de Δ, la conclusion est la même. Si A et M'_1 sont d'un même côté de Δ l'arc partiel $\widehat{AM'_1}$ ne peut avoir de point sur Δ, car une sécante parallèle et voisine couperait $\widehat{AB}$ suivant au moins $2+(n-1)=n+1$ éléments distincts. Même chose pour M''_{n+1} et B. Il reste à examiner le cas où A par exemple est sur Δ. Si la section comporte un second point M sur l'arc $\widehat{AM'_1}$ coupons par une sécante joignant A à un point N intérieur au segment MM'_1. On voit immédiatement qu'en choisissant N assez voisin de M la sécante coupera suivant au moins $n+1$ éléments distincts ce qui est impossible. L'arc $\widehat{AM'_1}$ n'a donc sur Δ que le point A. Ceci faisant, avec les $n-1$ points M_i, n éléments distincts l'arc $\widehat{M''_{n+1}B}$ ne peut avoir de point sur Δ.

En définitive nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Soient $\widehat{AB}$ un arc simple d'ordre n et Δ une sécante, si l'on peut trouver sur l'arc $n-1$ arcs partiels $\widehat{M'_iM''_i}$ extérieurs les uns aux autres, chacun d'eux ayant (au sens strict) ses extrémités de part et d'autre de Δ, il existe à l'intérieur de chaque arc $M'_i\,M''_i$ et un point M_i et un seul situé sur Δ, ce point étant une traversée; dans le cas où les $n-1$ points M_i n'épuisent pas l'intersection de l'arc par Δ, celle-ci comprend un seul point supplémentaire qui est une traversée ou une extrémité.

7. Avant de passer à l'étude des surfaces d'ordre borné examinons les cas particuliers $n=2$ et 3. Soit d'abord $\widehat{AB}$ un arc d'ordre 2. Il existe necessairement sur le segment AB un point O n'appartenant pas à l'arc. Considérons le domaine balayé par le segment OM lorsque M parcourt $\widehat{AB}$, ce domaine (C) est évidemment fermé. Je dis qu'il est convexe. Soient N_1 et N_2 deux points de (C), il s'agit de montrer que le segment N_1N_2 en fait partie. (C) étant fermé on peut supposer que N_1 et N_2 ne sont pas sur le support de AB. Les points N_1 et N_1 appartiennent respectivement à des segments OM_1 et OM_2 (positions de OM), M_1 et M_2 sont distincts de A et B. Si M_1 et M_2 sont confondus la question ne se pose pas. Dans le cas contraire considérons la sécante M_1M_2. Si elle contient un segment de $\widehat{AB}$, ce segment est l'élément unique de l'intersection [n° 6, 3°]; sinon l'arc $\widehat{AB}$ traverse la droite M_1M_2 en M_1 et M_2. L'arc partiel $\widehat{M_1M_2}$ est donc, par rapport à M_1M_2, du côté opposé à celui où se trouvent A et B. Dans les deux circonstances le triangle OM_1M_2 fait partie de (C), donc le segment N_1N_2.

En résumé : tout arc simple du second ordre est un arc de la frontière d'un domaine convexe. La réciproque est évidente.

Les considérations précédentes montrent également que toute courbe simple fermée du second ordre est la frontière d'un domaine convexe.

8. Considérons maintenant les arcs d'ordre 3. Je vais donner pour ces arcs quelques propositions qui nous seront indispensables pour l'étude différentielle des surfaces du troisième ordre.

I. *Tout arc simple d'ordre 3 est formé au plus de quatre arcs du second ordre placés bout à bout.*

Cette propriété est l'extension aux arcs d'ordre 3 au sens général où nous les considérons ici d'un résultat de mon Mémoire cité plus haut [nº 5] *sur les Continus d'ordre borné*. Les arcs que je considérais alors ne contenaient aucun segment rectiligne. Mais la démonstration donnée aux nºs 17 et 18 du Mémoire en question s'applique ici sans changement, car elle s'appuie uniquement sur les faits suivants, valables on l'a vu pour les arcs du troisième ordre au sens général adopté dans le présent Mémoire : un arc d'ordre 3 contient à son intérieur un arc partiel du même ordre; toute sécante contenant trois points de l'arc dont aucun n'est extrémité est traversée par l'arc en chacun d'eux [nº 6].

Les propositions suivantes sont relatives aux arcs du troisième ordre se projetant parallèlement à une direction fixe d'une manière biunivoque sur un segment de droite. Elles seraient d'ailleurs fausses sans cette hypothèse, qui sera toujours réalisée dans les applications que nous ferons.

II. *Si une sécante donne un retour sur un arc simple du troisième ordre se projetant sur elle d'une manière biunivoque parallèlement à une direction fixe, elle contient au plus un second point de l'arc qui est une traversée ou une extrémité.*

Soient $\widehat{AB}$ l'arc, Δ la sécante, M le retour. Il existe deux arcs partiels $\widehat{A'M}$ $\left(\text{sur } \widehat{AM}\right)$ et $\widehat{MB'}$ $\left(\text{sur } \widehat{MB}\right)$ situés d'un même côté de Δ au sens strict. Ils sont de part et d'autre d'une droite ML, direction selon laquelle $\widehat{AB}$ se projette biunivoquement sur Δ. Supposons que $\widehat{B'B}$ par exemple ait un point M′ sur Δ, il sera par rapport à ML du côté de $\widehat{AB'}$. Considérons alors une sécante Δ' issue de M′ et traversant les segments MA′ et MB′ à leur intérieur. Les conclusions du nº 6 *bis* (dans le cas $n = 3$), permettent d'affirmer que si M′ est distinct de B c'est une traversée pour Δ'. On en déduit que $\widehat{B'M'}$ et $\widehat{M'B}$ sont dans deux angles opposés de sommet M′, ne contenant pas Δ et définis par Δ' et la parallèle à ML menée par M′. Ce point est donc une traversée pour Δ. $\widehat{AB}$ ne peut avoir d'autres points sur Δ car il lui faudrait traverser une quatrième fois Δ' [1].

---

[1] L'exemple suivant montre que la proposition est fausse dans le cas général. Soient $\widehat{MM'}$ un demi-cercle de centre M″, AM un segment situé du côté de $\widehat{MM'}$ par rapport à la droite Δ portant MM′ et sans point commun avec le demi-cercle, M″B un segment situé par rapport à Δ du côté opposé à AM. L'arc simple constitué par le segment AM, le demi-cercle $\widehat{MM'}$, les segments M′M″ et M″B est du troisième ordre et possède le retour M par rapport à Δ.

III. *Soit $\overset{\frown}{AB}$ un arc simple du troisième ordre se projetant d'une manière biunivoque sur une sécante Δ contenant A mais pas B; si Δ contient un segment rectiligne AA_1 de l'arc et en plus deux points A_2 et A_3 dans cet ordre sur l'arc (et par suite sur Δ) le segment A_1A_2 fait partie de l'arc.*

Soit N un point de $\overset{\frown}{A_1A_2}$ situé hors de Δ. S'il est du côté de B par rapport à Δ (au sens strict) on pourra trouver une sécante traversant les segments AA_1, A_1N, NA_2 et A_3B car les points A, A_1, A_2, A_3 sont dans cet ordre sur Δ; s'il est du côté opposé on pourra mener une sécante traversant les segments A_1N, NA_2, A_2A_3 et A_3B pour la même raison. Dans les deux cas la sécante donne pour intersection quatre éléments au moins. Il faut donc bien que A_1A_2 soit sur l'arc ([1]).

IV. *Si un arc simple $\overset{\frown}{AB}$ du troisième ordre se projetant sur sa corde, parallèlement à une direction fixe d'une manière biunivoque, la rencontre en deux points distincts A_1 et B_2 (dans cet ordre) l'un des segments AA_1 ou B_1B au moins est sur l'arc.*

Supposant que B_1B par exemple n'est pas sur l'arc on verra en raisonnant comme plus haut que AA_1 s'y trouve forcément.

V. *Un arc simple $\overset{\frown}{AB}$ du troisième ordre se projetant sur sa corde parallèlement à une direction fixe d'une manière biunivoque et possédant sur celle-ci deux segments AA' et $B'B$ se compose de deux segments AA_1 et B_1B reliés : ou bien par un seul arc n'ayant que ses extrémités ou bien par deux arcs $\overset{\frown}{A_1C}$ et $\overset{\frown}{CB_1}$ situés de part et d'autre de la corde, avec laquelle ils n'ont en commun que leurs extrémités.*

Le nombre des éléments distincts de l'intersection de $\overset{\frown}{AB}$ avec la droite AB est deux ou trois (n° 6). Supposons-le d'abord égal à deux. L'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ a tous ses points d'un même côté de AB au sens large. En raisonnant comme au n° 6 on prélèvera sur lui un arc $\overset{\frown}{A_1B_1}$ n'ayant sur AB que ses extrémités, et cet arc épuisera les points de $\overset{\frown}{A'B'}$ extérieurs à AB. Les points A, A', A_1 B_1, B', B sont dans cet ordre sur l'arc et sa corde. Si A' et A_1 ne sont pas confondus, $\overset{\frown}{A'A_1}$ se

---

([1]) Comme la précédente cette proposition est fausse dans le cas général. Soit en effet $\overset{\frown}{AB}$ un arc du troisième ordre défini de la manière suivante.

Sur une droite Δ prenons quatre points A_1, A, A_3, A_2 dans cet ordre, et prenons pour arc $\overset{\frown}{AB}$ la somme du segment AA_1 d'un demi-cercle de diamètre A_1A_2, du segment A_2A_3 et d'un segment A_3B situé par rapport à Δ du côté du demi-cercle sans le rencontrer. L'arc $\overset{\frown}{AB}$ satisfait aux conditions de l'énoncé sans que A_1A_2 soit sur Δ.

réduit au segment $A'A_1$ seul arc simple joignant A' et A_1 sur AB. Même chose pour $\widehat{B_1B'}$. L'arc $\widehat{AB}$ se compose de deux segments AA_1 et B_1B reliés par un arc $\widehat{A_1B_1}$ n'ayant que ses extrémités sur AB.

Considérons maintenant le cas où l'arc possède un troisième élément sur AB soit CC', C' pouvant être confondu avec C. Cet élément est intérieur au segment $A'B'$. Si C' est différent de C nous choisirons les notations de manière qu'il soit entre C et B'. L'arc partiel $\widehat{A'C}$ de $\widehat{AB}$ ne peut avoir de points de part et d'autre de AB (au sens strict). On épuisera donc les points extérieurs à AB au moyen d'un arc $\widehat{A_1C_1}$. De même on épuisera les points de $\widehat{C'B'}$ extérieurs à AB au moyen d'un arc $\widehat{C'_1B_1}$, et l'on voit immédiatement que $\widehat{AB}$ se compose ainsi : segment AA_1, arc $\widehat{A_1C_1}$, (segment $C_1C'_1$ pouvant se réduire à un point), arc C'_1B_1, segment B_1B. Les deux arcs ne peuvent être d'un même côté de AB; ils doivent donc être de part et d'autre. Ceci qui exige que C et C' soient confondus, autrement une sécante convenable couperait suivant quatre éléments (¹).

9. Ordre local. — Revenons aux surfaces d'ordre borné. Soit (S) la surface d'ordre n définie au n° 3. D'après ce qui précède la section de (S) par une sécante quelconque se compose de n éléments distincts au plus (points isolés, ou segments). Il en résulte immédiatement que si (C_1) est un domaine convexe contenu dans (C) le morceau (S_1) de (S) correspondant à (C_1) est d'ordre n au plus. Ceci n'était pas évident car on ne pouvait affirmer *a priori* qu'une sécante ne possédant aucun segment sur (S_1) n'en avait pas sur (S) à l'extérieur de (S_1), ce qui aurait été nécessaire pour prouver — immédiatement à partir de la définition de l'ordre — que (S_1) est d'ordre au plus égal à celui de (S).

La remarque précédente conduit aisément à la notion d'ordre local. Soit M un point intérieur de (S). Donnons-nous dans le plan $z = 0$, une suite de domaines convexes (C_r), $(r = 1, 2, \ldots)$ chacun d'eux contenant le suivant et la projection de M à son intérieur, le diamètre de (C_r) tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Ces domaines définissent des morceaux (S_r) dont les ordres ne vont pas en croissant. Comme ils sont bornés inférieurement par l'unité ils sont constants à partir d'une certaine valeur de r. On voit immédiatement que cette constante est indépendante de la suite (C_r); c'est par définition *l'ordre local* en M.

(¹) L'arc $\widehat{AB}$ construit de la manière suivante va nous montrer que les propositions IV et V seraient fausses dans le cas général. Sur une droite Δ prenons 6 points A, A_1, A_3, A_2, B_1, B (dans cet ordre) et considérons les demi-cercles $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_3B_1}$ situés de part et d'autre de Δ. L'arc constitué par le segment AA_1, l'arc $\widehat{A_1A_2}$, le segment A_2A_3, l'arc $\widehat{A_3B_1}$ et le segment B_1B est du troisième ordre. Pour la proposition IV il suffit de l'arrêter en un point intérieur de A_3B_1; pour la proposition V il faut le prendre en entier.

Les considérations précédentes s'appliquent en tout point *ordinaire* M d'une surface simple de Jordan, pourvu qu'un voisinage Σ_M, suffisamment petit soit d'ordre borné.

Enfin il est bien évident que si les propriétés du faisceau dérivé dépendent de l'ordre, elles ne dépendront que de l'ordre local. C'est bien ce que nous verrons, mais auparavant il sera utile d'établir quelques propriétés générales des surfaces d'ordre borné.

10. Soit donc (S) d'ordre n défini au n° 3. Considérons sur (S) deux points M_1 et M_2. Ils ne peuvent être sur la même verticale et définissent par conséquent un plan vertical unique. Celui-ci coupe (S) suivant *un* arc simple puisque (C) est convexe, je désignerai par $\widehat{M_1 M_2}$ l'arc partiel de cette section ayant pour extrémités M_1 et M_2.

Remarquons encore que (S) définit dans le cylindre plein vertical de base (C) deux régions que nous appellerons : région *supérieure* (au-dessus), région *inférieure* (au-dessous). Soit N un point du cylindre et M l'intersection avec (S) de la verticale de N. Ce dernier est dans la région supérieure ou inférieure suivant que la mesure de $\overrightarrow{MN}$ (sur Oz) est positive ou négative. Soient alors N' et N'' les extrémités d'un segment non vertical situées dans des régions différentes, M' et M'' les points où les verticales respectives de N' et N'' rencontrent (S). L'arc $\widehat{M'M''}$ de la section de (S) par le plan vertical de $N'N''$ a ses extrémités de part et d'autre de la droite $N'N''$. Ceci posé considérons une sécante Δ pénétrant à *l'intérieur* du cylindre projetant verticalement (S) et supposons qu'il existe sur Δ, $n-1$ segments extérieurs les uns aux autres $N_i' N_i''$ chacun d'eux ayant ses extrémités dans des régions différentes. On peut toujours supposer que tous les points N_i', N_i'' se projettent verticalement à l'intérieur de (S) Menons par chacun de ces points un plan vertical parallèle à un plan fixe non parallèle à Δ; on pourra trouver dans chacun de ces plans un petit disque circulaire centré sur le point et situé par rapport à (S) dans la même région que ce point. Soit alors $\overline{\Delta}$ une sécante rencontrant les $2(n-1)$ disques à l'intérieur, ce qui aura lieu si $\overline{\Delta}$ est assez voisine de Δ. Désignons par $\overline{N}_i'$ et $\overline{N}_i''$ les points de $\overline{\Delta}$ situés sur les disques de centres respectifs N_i' et N_i'' et par $\overline{M}_i'$ et $\overline{M}_i''$ les intersections des verticales de $\overline{N}_i'$ et $\overline{N}_i''$ avec (S). La proposition du n° 6 *bis* permet d'affirmer que chacun des segments $\overline{N}_i'\overline{N}_i''$ contient un point et un seul de (S), de même pour chaque segment $N_i'N_i''$. Soit M_i le point situé entre N_i' et N_i''. On voit immédiatement que Δ ne peut être une tangente en M_i. En effet s'il en était autrement il existerait des cordes de (S) voisines de Δ et joignant deux points distincts voisins de M_i, ce qui serait contradictoire avec ce qui précède. Comme M_i est intérieur à (S) c'est un point ordinaire.

Rappelons encore que si Δ contient un point M en dehors des $n-1$ points M_i, ce point est traversée ou extrémité pour la section de (S) par le plan vertical de Δ (n° 6 *bis*). Dans le premier cas on pourra trouver n segments tel que $N'_i N''_i$ l'un d'eux correspondant à M qui lui aussi est ordinaire. Comme enfin il est équivalent de dire :

On peut trouver, sur Δ, $n-1$ segments extérieurs les uns aux autres tels que chacun d'eux ait ses extrémités dans deux régions différentes (supérieure et inférieure) ou bien : il existe sur la section de (S) par le plan vertical de Δ, $n-1$ arcs extérieurs les uns aux autres, chacun d'eux ayant ses extrémités de part et d'autre de Δ, nous pouvons énoncer la proposition suivante dont nous ferons un usage constant, notamment pour l'étude des propriétés différentielles des surfaces du troisième ordre.

Soit M *un point intérieur de* (S), *s'il existe une sécante* Δ *issue de* M *telle qu'on puisse trouver sur la section de la surface par le plan vertical de* Δ, $n-1$ *arcs extérieurs les uns aux autres et traversant* Δ, *le point* M, *appartenant ou non à l'un de ces arcs, est ordinaire et* Δ *est extérieure au faisceau des tangentes en* M.

11. Les considérations précédentes vont nous conduire encore à deux résultats importants. Le premier est relatif aux sections verticales d'ordre égal à celui de la surface. (S) étant supposée d'ordre n, il existe un plan Q au moins, coupant (S) suivant un arc d'ordre n, et par suite dans Q une sécante Δ traversée n fois par la section (n° 6). On pourra par suite trouver, sur Δ, $n+1$ points $N_i (i=1, 2, \ldots, n+1)$ placés dans l'ordre des indices et tels qu'en passant de l'un à l'autre on change de région par rapport à (S). On considérera encore pour chaque N_i un disque circulaire centré en N_i, situé dans le plan vertical perpendiculaire à Q et assez petit pour que tous les points appartenant au cylindre projetant verticalement (S) soient dans la même région. Il pourrait arriver en effet que le plan Q touche ce cylindre le long d'une bande limitée par deux génératrices parallèles, ce qui a lieu si la trace de Q sur le plan $z=0$ contient un segment de la frontière du domaine convexe (C). Dans ce cas on aura $n+1$ demi-disques. On peut toujours réduire les disques de manière à leur donner le même rayon. Il est alors immédiat que tout plan suffisamment voisin de Q coupera (S) suivant un arc d'ordre n, car il sera possible de trouver dans un tel plan une sécante rencontrant les $n+1$ disques ou les $n+1$ demi-disques, sécante donnant au moins n intersections, donc exactement n.

Ceci permet d'affirmer que si (S) est d'ordre n ;

1° *Il existe des plans verticaux contenant des points intérieurs de la surface et la coupant suivant des arcs d'ordre n exactement;*

2° *Si un plan* Q *donne une section d'ordre n, tout plan suffisamment voisin coupera également suivant un arc d'ordre n.*

Une conséquence de cette dernière proposition est que pour évaluer l'ordre d'une surface (S) d'ordre borné on peut ne pas considérer un ensemble dénombrable de plans.

Le second résultat annoncé concerne l'ensemble des points ordinaires de (S). D'après la définition même du point ordinaire, cet ensemble, sur (S), ne comprend que des points intérieurs. Je dis qu'il est partout dense. Soit, en effet, M_0 un point intérieur de (S) où celle-ci est localement d'ordre $n_0 \leqq n$. Le point M_0 est intérieur à un morceau (S_0) de (S) se projetant verticalement sur $z=0$ suivant un contour convexe. D'après ce qui précède une sécante traversera (S_0) en des points tous ordinaires. Ce qui justifie l'affirmation. Ainsi :

L'ensemble des points ordinaires de (S) *se projette verticalement sur le plan* $z=0$ *suivant un ensemble ouvert partout dense.*

III. — Demi-cônes simples d'ordre conique borné. Faisceau dérivé en un point ordinaire d'une surface d'ordre localement borné.

12. Soit M un point ordinaire d'une surface simple de Jordan localement d'ordre n en M. Considérons un voisinage Σ_M de la surface, assez petit pour être d'ordre n. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ est un demi-cône simple ayant un rayon et un seul dans tout demi-plan d'arête $M\zeta$ (n° 2). Il paraît probable que la section de $\mathcal{D}(M)$ par tout plan contenant M doive se réduire à un nombre borné d'éléments distincts : rayons isolés ou secteurs plans. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi. Considérons d'abord deux demi-plans fixes Q_1 et Q_2, non opposés, d'arête $M\zeta$. Il n'y a aucun inconvénient à appeler verticale la direction de $M\zeta$, pendant tout le temps que nous raisonnerons sur Σ_M. Désignons par Π un plan vertical rencontrant Q_1 et Q_2 et par Π_λ l'homothétique de Π par rapport à M dans le rapport λ compris entre 0 et 1. La partie du faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ appartenant au dièdre $(M\zeta, Q_1, Q_2)$ découpe sur Π un arc simple $\widehat{M_1M_2}$ (M_1 dans Q_1, M_2 dans Q_2); je dis que cet arc est d'ordre n au plus.

Pour le montrer considérons l'arc partiel de la section de (S) par Π_λ situé dans le dièdre $(M\zeta, Q_1Q_2)$ et sa perspective sur Π vu de M, soit $\widehat{M_{1,\lambda}M_{2,\lambda}}$ ($M_{1,\lambda}$ étant dans Q_1). Sur chaque verticale de Π, dans le dièdre, $\widehat{M_{1,\lambda}M_{2,\lambda}}$ tend vers $\widehat{M_1M_2}$ [1], puisque les rayons de $\mathcal{D}(M)$ sont les demi-tangentes en M aux sections par les demi-plans d'arête $M\zeta$ (n° 2).

Il s'agit d'établir que la section de $\widehat{M_1M_2}$ par une droite quelconque Δ (de son plan) comporte n éléments au plus. La question se pose seulement si Δ n'est pas verticale et contient des points de l'arc. L'intersection de Δ et de $\widehat{M_1M_2}$

---

(1) La limite est atteinte uniformément, mais cela n'apporte aucune simplification pour la démonstration.

est un ensemble fermé, soient M'_1 et M'_2 ses bornes, M'_1 du côté de M_1 (sur Δ et sur $\widehat{M_1 M_2}$, car ici l'arc et sa projection verticale sur Δ se correspondent d'une manière bi-univoque).

En raisonnant comme au n° 6 on déterminera sur $\widehat{M'_1 M'_2}$ une suite d'arcs partiels, chacun d'eux n'ayant que ses extrémités sur Δ. Supposons qu'il en existe un nombre p d'un même côté. Une sécante $\bar{\Delta}$ parallèle à Δ suffisamment voisine et située de ce côté donnera $2p$ traversées, c'est-à-dire $2p$ couples de points N'_i, N situés sur $\widehat{M'_1 M'_2}$ de part et d'autre de $\bar{\Delta}$. Désignons par $N'_{i,\lambda}$, $N'_{i,\lambda}$ les points de $\widehat{M_{1,\lambda} M_{2,\lambda}}$ qui sont respectivement sur les verticales de N'_i et N''_i. D'après la remarque précédente ils tendent respectivement vers N'_i et N''_i lorsque λ tend vers zéro. Comme ils sont en nombre fini on pourra choisir λ assez petit pour que $\widehat{M_{1,\lambda} M_{2,\lambda}}$ traverse $\bar{\Delta}$ au moins $2p$ fois, ce qui exige $2p \leqq n$ L'arc $\widehat{M_1 M_2}$ est donc d'ordre borné, soit K son ordre. Il existe une sécante traversée K fois par lui (n° 6). Le raisonnement précédent montre que si λ est assez petit, ladite sécante sera traversée au moins K fois par $\widehat{M_{1,\lambda} M_{2,\lambda}}$. On a donc $K \leqq n$.

En résumé nous avons établi le résultat suivant : *la partie de* $\mathcal{D}(M)$ *située dans un vrai dièdre d'arête* $M\zeta$ *est rencontrée par un plan quelconque passant par* M *suivant n éléments distincts au plus : rayons isolés où secteurs plans.*

Il en résulte que $\mathcal{D}(M)$ est rencontré par tout plan passant par M ne portant pas un de ses secteurs plans (s'il en a) suivant $3n$ éléments distincts au plus. Cette limite peut être abaissée, mais pour cela une brève étude des demi-cônes simples d'ordre conique borné sera nécessaire.

13. Demi-cônes simples d'ordre conique borné. — Soit $\mathcal{D}$ un demi-cône simple de sommet O, c'est-à-dire l'ensemble des demi-droites joignant O aux points d'une courbe simple fermée (d) située sur une sphère centrée en O.

On dira que $\mathcal{D}$ est *d'ordre conique borné* si tout plan contenant O et ne portant aucun de ses secteurs plans, s'il en possède, le coupe suivant un nombre borné de rayons. La limite supérieure de ce nombre est *l'ordre conique* de $\mathcal{D}$. On ne pourrait dire : *ordre* tout court car un plan, par exemple, est d'ordre conique deux.

Je vais établir quelques propriétés des demi-cônes d'ordre conique borné dans le cas général, c'est-à-dire sans supposer (comme c'est le cas pour un faisceau dérivé) qu'il existe une droite issue de O telle que tout demi-plan ayant cette droite pour arête contienne une seule demi-droite du demi-cône. Il n'en résulterait aucune simplification pour les démonstrations.

Remarquons pour commencer que l'ensemble des secteurs plans pouvant se trouver sur $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable. En effet chacun de ces secteurs correspond à un arc de cercle situé sur d.

Nous allons étudier l'intersection de $\mathcal{D}$, supposé d'ordre conique N, par un plan donné P passant par O, ou ce qui revient au même l'intersection de d. Si la section de $\mathcal{O}$ par P ne contient aucun secteur plan, elle se compose de N rayons au plus. Nous étudierons plus loin le cas où la limite N est atteinte.

Examinons le cas où $\mathcal{O}$ ne se réduisant pas à P contient dans ce plan un angle correspondant à un arc $\widehat{a'aa''}$ de la courbe fermée d (a est un point de l'arc, il est nécessaire d'en indiquer un car d étant fermée, a' et a'' définissent deux arcs). En raisonnant comme pour étudier la structure de l'intersection d'une droite et d'un arc simple d'ordre borné (n° 5), on pourra prélever sur d une suite d'arcs partiels $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, chacun n'ayant dans P que ses extrémités et deux quelconques ne pouvant avoir de points communs que dans ce plan.

Considérons un nombre donné r de ces arcs $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

L'ensemble des plans portant les secteurs plans éventuels de $\mathcal{O}$ étant au plus dénombrable, on peut choisir dans P une droite Δ joignant O à un point intérieur de $\widehat{a'aa''}$, ne contenant aucune extrémité des r arcs $\widehat{a'_i a_i a''}$ et telle que tout plan contenant Δ coupe $\mathcal{O}$ suivant des rayons isolés en nombre au plus égal à N.

Menons alors par Δ deux plans P_1 et P_2 symétriques par rapport à P et tels que les r points a_i extérieurs à P soient extérieurs aux deux dièdres limités par P_1 et P_2 contenant P. Chaque arc $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ rencontre l'ensemble des deux plans P_1, P_2 en deux points au moins puisque a'_i et a''_i sont intérieurs à l'ensemble des deux dièdres, tandis que a_i est extérieur. D'autre part P_1 et P_2 contiennent un point intérieur de $\widehat{a'aa''}$. Désignons par N_1 et N_2 les nombres respectifs de rayons de $\mathcal{O}$ situés dans P_1 et P_2, nous aurons

$$N_1 + N_2 > 2 + 2r,$$

car les arcs $\widehat{a'_i a_i a''_i}$ ne peuvent avoir de points communs que dans P. Comme N_1 et N_2 sont chacun au plus égaux à N, on en déduit

$$r + 1 \leqq N.$$

Cette inégalité montre tout d'abord que l'on épuisera tous les points de d extérieurs à P au moyen d'un nombre fini r d'arcs, au plus égal à $N - 1$. Nous pouvons toujours supposer que ces r arcs se rangent sur d dans l'ordre $a'aa''a'_1 a_1 a''_1 a'_2 a_2 a''_2 \ldots a'_r a_r a''_r a'$. On voit immédialement que la courbe sphérique d possède dans P un arc de cercle $a''_r a' aa'' a'_1$ et les éléments $a''_1 a'_2$, $a''_2 a'_3$, $\ldots$, $a''_{r-1} a'_r$, qui peuvent être des arcs ou des points. En résumé, tout demi-cône simple d'ordre conique N rencontre un plan quelconque suivant N rayons isolés, ou bien $N - 1$ éléments au plus dont l'un au moins est un secteur plan.

14. Examinons maintenant le cas où un plan P coupe $\mathcal{O}$ suivant N éléments distincts, qui sont nécessairement des rayons isolés. Soient alors $a_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ les points où P est rencontré par d, celle-ci est la somme de N arcs

$$\widehat{a_i a_{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad \text{avec} \quad a_{N+1} = a_1.$$

Prélevons sur chaque arc $\widehat{a_i a_{i+1}}$ les points intérieurs à un arc partiel non nul $\widehat{b_i b'_{i+1}}$, il restera 2N arcs $\widehat{b'_i a_i}$, $\widehat{a_i b_i}$. Un point a_i ou le rayon correspondant de $\mathcal{O}$ sera dit une *traversée* ou un *retour* suivant que $\widehat{b'_i a_i}$ et $\widehat{a_i b_i}$ sont ou non de part et d'autre de P. Si nous désignons par dessus et dessous les deux côtés de P, les expressions *retour supérieur*, *retour inférieur* ont un sens évident.

Considérons comme plus haut dans P une droite Δ passant par O, ne contenant aucun a_i et choisie de manière que tout plan contenant Δ coupe $\mathcal{O}$ suivant des rayons isolés. La droite Δ partage P en deux régions que nous désignerons par (1) et (2). Désignons alors par T le nombre de traversées, par R_1 et R'_1 les nombres de retours supérieurs et inférieurs de (1), par R_2 et R'_2 les nombres de retours supérieurs et inférieurs de (2). On a $R_1 + R'_1 + R_2 + R'_2 + T = N$. Enfin on peut évidemment pour chaque a_i choisir b_i et b'_i assez près de a_i pour les angles ε_i et ε'_i que font les plans (Δ, b_i), (Δ, b'_i) avec P soient petits. Soit alors ε un nombre inférieur à tous les ε_i, ε'_i. Ceci posé, soient P_1 et P_2 deux plans contenant Δ, symétriques par rapport à P et faisant avec celui-ci un angle moindre que ε. On peut toujours supposer que P_1 est au-dessus de P dans la région (1). Dans ces conditions, en désignant par N_1 et N_2 les nombres respectifs d'intersections de P_1 et P_2 avec d, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$2(R_1 + R'_2) + T \leqq N_1,$$
$$2(R_2 + R'_1) + T \leqq N_2.$$

Comme N_1 et N_2 sont au plus égaux à N et que la somme $R_1 + R_2 + R'_1 + R'_2 + T$ vaut N, on en déduit :

$$2(R_1 + R'_2) + T = N,$$
$$2(R_2 + R'_1) + T = N.$$

Remarquons en passant que P_1 et P_2 traversent $\mathcal{O}$ chacun suivant N rayons isolés, ce qui exige que N *soit pair*.

Les deux dernières relations donnent par soustraction

$$R_1 + R'_2 = R_2 + R'_1.$$

Contrairement à ce qui se passe pour les arcs plans, le nombre des retours n'est pas nécessairement nul, on le verra par un exemple donné à la fin du présent numéro. Mais on peut montrer que s'il y a des retours ils sont deux à deux opposés et de même nature (c'est-à-dire tous les deux inférieurs ou supérieurs).

Supposons que a_1, par exemple, soit un retour supérieur. Considérons deux demi-droites $O\delta'$ et $O\delta''$ voisines de Oa_1 telles que leurs supports Δ' et Δ'' ne passent par aucun a_i et que l'angle $\delta' O \delta''$ ne contienne aucun autre retour que a_1. Appelons pour Δ' région (1) celle qui ne contient pas a_1, pour Δ'' celle qui le contient. Lorsque l'on passe de Δ' à Δ'' en parcourant le petit angle, les sommes $R_1 + R'_2$ et $R_2 + R'_1$ doivent rester égales. Or du fait de a_1, R_2 diminue d'une unité et R_1 augmente d'une unité. Cette variation ne peut être compensée que si le symétrique de a_1 est un retour supérieur.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

I. *Tout demi-cône simple d'ordre conique borné est d'ordre conique pair.*

II. 1° *La section d'un demi-cône simple d'ordre conique* 2K *par un plan quelconque contenant son sommet se compose de rayons isolés et de secteurs plans en nombre au plus égal à* 2K ;

2° *Si ce nombre égale* 2K *les éléments sont des rayons isolés; ceux d'entre eux, s'ils existent, le long desquels le demi-cône simple ne traverse pas le plan sont opposés deux à deux et dans leur voisinage le demi-cône simple reste d'un même côté du plan*;

3° *Dans tout plan contenant* 2K *rayons on peut trouver une droite passant par le sommet du cône, ne contenant aucun rayon du demi-cône, qui soit l'arête de deux dièdres opposés ayant pour bissecteur le plan, de manière que tout plan intérieur à ces deux dièdres traverse le demi-cône suivant* 2K *rayons distincts.*

Voici pour terminer l'exemple annoncé.

Soient Σ une sphère de centre O, P le plan d'un grand cercle C et ω l'un des pôles de P. Prenons pour courbe d l'inverse d'un carré inscrit dans C, dans l'inversion de pôle ω qui transforme P en Σ. Le demi-cône simple de sommet O défini par d est du quatrième ordre conique. En effet un grand cercle de Σ donne par l'inversion précédente un cercle ou une droite passant par deux points diamétralement opposés de C, et un tel cercle coupe évidemment le carré en quatre points au plus. D'autre part les diagonales du carré sont deux couples de rayons opposés le long desquels le demi-cône reste du côté opposé à ω, puisqu'il est tout entier de ce côté au sens large.

15. Considérons maintenant un demi-cône simple d'ordre conique 2K symétrique par rapport à son sommet. Je dis que K est nécessairement impair. En effet, on peut trouver un plan P passant par le sommet donnant 2K rayons distincts le long desquels le plan est traversé. Ces 2K rayons découpent, dans le demi-cône, 2K secteurs qui sont alternativement d'un côté et de l'autre du plan. D'autre part deux secteurs symétriques sont de part et d'autre du plan. Ceci exige que K soit impair. Dans ce cas le demi-cône est un cône simple

d'ordre impair K, c'est-à-dire rencontré par toute droite ne contenant aucun segment suivant K points au plus.

On déduit immédiatement de cette propriété qu'un cône simple d'ordre pair se compose de deux nappes distinctes : demi-cônes simples opposés.

16. Demi-cônes simples du second ordre conique. — Je compléterai cette étude en montrant qu'un demi-cône simple d'ordre conique 2 est un système de deux demi-plans distincts de même arête, opposés ou non, ou bien la frontière d'un vrai demi-cône plein convexe.

Soit $\mathcal{D}$ un tel demi-cône de sommet O et considérons deux cas suivant que $\mathcal{D}$ possède ou non au moins un couple de rayons opposés.

A. Plaçons-nous dans la première hypothèse et soient OD et OD′ deux rayons opposés. Considérons un troisième rayon OD_1 ; il détermine avec les deux premiers un plan P, dont la section par $\mathcal{D}$ se réduit à *un* secteur plan (n° 14, II, 3°) qui comprend nécessairement les trois demi-droites. Supposons que l'angle DOD_1 par exemple, ne soit pas sur $\mathcal{D}$; le secteur plan comprend nécessairement le complémentaire de cet angle. Le support d'une demi-droite intérieure à l'angle D_1OD' est sur $\mathcal{D}$ et l'on voit immédiatement la possibilité de mener par cette droite un plan coupant $\mathcal{D}$ suivant quatre rayons; ce qui est contraire à l'hypothèse. Le demi-plan d'arête D′OD contenant D_1 est donc sur $\mathcal{D}$. Il en résulte immédiatement que celui-ci se réduit à deux demi-plans de même arête, opposés ou non, c'est-à-dire à un *dièdre* (surface) ou un *plan*.

B. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ ne possède aucun couple de rayons opposés. Distinguons deux cas :

1° $\mathcal{D}$ contient un secteur plan.

Celui-ci est nécessairement un angle DOD′ moindre que π, soit P son plan. Tous les rayons de $\mathcal{D}$ autres que ceux de DOD′ sont d'un même côté de P au sens strict, au-dessus par exemple. Menons alors dans P, par O, une droite Δ laissant DOD′ d'un même côté au sens strict et désignons par P_1 le demi-plan de P d'arête Δ contenant DOD′, par P_2 l'autre. Considérons alors un demi-plan P'_2 d'arête Δ voisin de P_2 et au-dessus. Si le voisinage est assez étroit, $\mathcal{D}$ sera tout entier dans le dièdre $(\Delta, P_1 P'_2)$, sans quoi il posséderait nécessairement un rayon dans P_2 ce qui n'est pas. On voit alors qu'un plan Q parallèle à Δ et rencontrant P_1 et P'_2 est coupé par $\mathcal{D}$ suivant une courbe simple fermée dont tous les points sont à distance bornée puisque Δ n'est pas sur $\mathcal{D}$. Cette courbe est du second ordre, elle limite donc un domaine convexe (n° 7). $\mathcal{D}$ est donc la frontière d'un vrai demi-cône convexe.

2° $\mathcal{D}$ ne contient aucun secteur plan.

Considérons un rayon fixe OD et un rayon mobile OD′ tendant vers OD en restant du même côté. Le plan DOD′ a une limite P. (Il suffit pour le voir de couper par un plan perpendiculaire à OD ne passant pas par O; on obtient un arc de second ordre.) Tous les rayons de $\mathcal{D}$, sauf OD, sont d'un même côté de P au sens strict. La démonstration se poursuit comme plus haut en remplaçant le secteur par le rayon unique OD.

Tout demi-cône simple d'ordre conique deux est donc un plan, un dièdre, ou la frontière d'un vrai demi-cône convexe.

17. Revenons à l'étude du faisceau dérivé en un point ordinaire M d'une surface d'ordre localement borné et conservons les notations du n° 12. Σ_M est d'ordre n, $\mathcal{D}(M)$ est d'ordre borné. Soit $2K$ son ordre [1]. Nous allons chercher une relation entre K et n. D'après ce qu'on a vu plus haut (n° 12), on peut trouver un plan P passant par M contenant exactement $2K$ rayons. Donnons-nous dans P une droite ne contenant aucun de ces $2K$ rayons et considérons un dièdre d'arête $M\zeta$ contenant à son intérieur tous les rayons de $\mathcal{D}(M)$ situés d'un côté donné de la droite. D'après les conclusions du n° 12, le nombre de ces rayons ne peut dépasser n. On a donc $2K \leqq 2n$. Supposons cette limite atteinte. Toute droite de P (passant par M) ne contenant aucun rayon de $\mathcal{D}(M)$ en laisse exactement n de chaque côté. Il en résulte que les $2n$ rayons sont opposés deux à deux. On a vu d'autre part (n° 14, II, 3°) que P peut être choisi de manière à être traversé $2n$ fois. En raisonnant comme au n° 15 on voit que n est nécessairement impair. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Si un point ordinaire d'une surface simple de Jordan est à voisinage d'ordre n, le faisceau dérivé en ce point est un demi-cône simple d'ordre conique pair au plus égal à $2n - 2$ ou $2n$ suivant que n est pair ou impair.

Lorsque l'ordre conique est égal à $2n$ tous les plans passant par le point et donnant exactement $2n$ rayons du faisceau dérivé contiennent n couples de demi-tangentes opposées.

D'après les résultats du n° 15 on peut affirmer que *si le faisceau dérivé est symétrique, son ordre conique ne peut être multiple de 4.*

18. Lorsque $n = 2$, on retrouve en partie des résultats connus. Supposons que la surface (S) définie au n° 3 soit du second ordre. D'après ce qu'on a vu au n° 7, les arcs sections verticales de (S) sont du second ordre au sens que j'avais adopté dans mon Mémoire cité sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan. Il en résulte *qu'elle est ou bien un morceau de la frontière d'un volume convexe, ou bien un morceau de quadrique réglée* [2].

---

(1) Conique.
(2) M., n° 23.

Ainsi pour le second ordre, la non-convexité implique nécessairement l'algébricité. Nous montrerons que dans le cas du troisième ordre elle implique la continuité du plan tangent, sauf peut-être en de rares points exceptionnels, propriété que nous avions énoncée sans démonstration dans le Mémoire en question. Pour l'établir, une étude approfondie du cas $n = 3$ sera nécessaire. Elle nous conduira d'ailleurs à des résultats intéressants en eux-mêmes.

IV. — Surfaces du troisième ordre.

19. Soit (S_3) une surface du troisième ordre définie en axes quelconques par une équation

$$(S_3) \qquad z = f(x, y)$$

où f est définie et continue dans un domaine fermé, borné et convexe (c). Nous supposerons comme précédemment l'axe des x vertical.

Considérons un point ordinaire de (S_3) c'est-à-dire un point intérieur M où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace. D'après la théorie générale le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ est d'ordre conique 6, 4 ou 2. Nous allons examiner sucessivement les trois cas. Auparavant rappelons la dernière proposition du n° 10 qui devient pour $n = 3$:

Si une sécante Δ qui pénètre à l'intérieur du cylindre projetant verticalement (S_3) traverse deux fois (S_3), chacune des traversées correspond à un point ordinaire unique où Δ est extérieure au faisceau des tangentes. Nous allons en déduire une proposition importante dont nous ferons un constant usage.

Soient M *un point intérieur de* (S_3), MD *et* MD′ *les demi-tangentes à l'arc section de* (S) *par un plan vertical contenant* M*;*

1° *Si* MD *et* MD′ *sont opposées et si l'arc n'est pas entièrement sur leur support commun, le point* M *est ordinaire et les deux demi-tangentes sont sur la frontière de* $\mathcal{T}(M)$*;*

2° *Si* MD *et* MD′ *ne sont pas opposées et si l'arc contient des points à l'intérieur de l'angle* D′MD *ou de son symétrique, le point* M *est ordinaire et l'une au moins des demi-tangentes est sur* la frontière de $\mathcal{T}(M)$.

Dans les deux cas il existe dans le plan de l'arc des droites issues de M extérieures à $\mathcal{T}(M)$.

L'énoncé précédent suppose que MD et MD′ ne sont pas confondues, ce qui ne peut arriver que si elles sont verticales.

Je vais faire la démonstration dans le cas où MD et MD′ sont distinctes. Soit $\widehat{UV}$ l'arc section, $\widehat{MV}$ étant l'arc partiel ayant MD pour demi-tangente en M.

Supposons que $\widehat{MV}$ par exemple ait un point N intérieur à D′MD ou son symétrique. Envisageons d'abord la première hypothèse.

Une droite Δ issue de M et pénétrant à l'intérieur de l'angle DMN traverse $\widehat{UV}$ en deux points : l'un en M l'autre entre M et N; elle est donc extérieure à $\mathfrak{T}(M)$. Comme Δ peut être choisie aussi près qu'on veut des supports de MD, celle-ci est bien sur la frontière de $\mathfrak{T}(M)$.

Supposons maintenant N intérieur à l'opposé de D′MD. Il suffira de choisir Δ pénétrant à l'intérieur de l'angle D'_1MN où MD'_1 désigne l'opposé MD′ pour obtenir la même conclusion, avec cette différence que c'est MD′ qui est certainement sur la frontière de $\mathfrak{T}(M)$.

Dans le cas où les demi-tangentes sont opposées et non verticales la démonstration est la même, mais évidemment les deux demi-tangentes sont sur la frontière. Si elles sont verticales, leur support n'est pas sur (S_3). L'arc $\widehat{UMV}$ possède une inflexion. M est donc ordinaire. Il suffit alors d'appliquer le raisonnement précédent à Σ_M.

20. Nous pouvons maintenant procéder à l'étude complète de $\mathcal{D}(M)$ en un point ordinaire en examinant successivement les trois cas possibles. Soit Σ_M un voisinage de (S_3) rapporté comme d'habitude à trois axes $M\zeta\eta\xi$. Supposons d'abord $\mathcal{D}(M)$ *d'ordre conique* 6. Il existe alors un plan P_0 contenant M et traversé par $\mathcal{D}(M)$ suivant six rayons opposés deux à deux (n° 17). Soient $MD_i(i=1, 2, \ldots, 6)$ ces rayons dans l'ordre où les rencontre une demi-droite d'origine M tournant dans P_0 dans le même sens. Considérons un rayon MD, distinct des précédents, que, pour fixer les idées, nous supposerons intérieur au dièdre $(M\zeta, D_2, D_3)$. Le plan $(M\zeta, D)$ coupe P_0 suivant une demi-droite Md. Désignons par Md' la demi-droite opposée à cette dernière et par MD′ la demi-tangente située dans le demi-plan $(M\zeta, d')$. Comme $\mathcal{D}(M)$ traverse P_0 le long des six rayons, MD′ est par rapport à P_0 du côté opposé à MD. Je dis que les angles dMD et d'MD′ ne peuvent être inégaux; il en résultera que MD et MD′ sont nécessairement opposées. Si les angles sont inégaux nous pouvons toujours supposer que dMD est le plus petit. Menons alors par M dans P_0 une droite Δ pénétrant à l'intérieur de D_1MD_2. Comme la trace sur P_0 des plans portant les secteurs plans éventuels de $\mathcal{D}(M)$ est au plus dénombrable, Δ peut être choisie en dehors de l'ensemble. Dans ces conditions tout plan contenant Δ coupe $\mathcal{D}(M)$ suivant six rayons au plus. Ceci posé soit Ml une demi-droite intérieure à l'angle dMD; on voit immédiatement que les rayons MD, MD_5, MD_6, MD_1, sont d'un même côté du plan (Δ, l) les rayons MD′, MD_2, MD_3, MD_4 étant de l'autre, dans les deux cas au sens strict. On en déduit que $\mathcal{D}(M)$ traverse le plan (Δ, l) suivant six rayons intérieurs respectivement aux dièdres $(M\zeta, D_2D)$, $(M\zeta, DD_3)$, $(M\zeta, D_5D')$, $(M\zeta, D'D_6)$, $(M\zeta, D_1D_2)$, $(M\zeta, D_4, D_5)$. Ces six rayons sont deux à deux opposés (n° 17), le premier et le troisième d'une part, le

second et le quatrième le sont donc nécessairement. Faisons tendre Ml vers MD, chacun des six rayons tend vers une limite située sur $\mathcal{D}(M)$. Les troisième et quatrième limites sont forcément distinctes, car MD' est par rapport à (Δ, D) du côté opposé à MD_5 et MD_6. On trouve donc sept rayons, ce qui est impossible.

Ainsi $\mathcal{D}(M)$ est symétrique. Je vais montrer qu'il porte (S_3). Remarquons d'abord que le cône directeur des tangentes est ici un vrai cône, sans quoi $\mathcal{D}(M)$ serait un dièdre ou un plan (n° 2, 7°). Considérons alors deux demi-tangentes opposées MD_0 et MD'_0 non verticales et supposons que la section L_0 de $\mathcal{D}(M)$ par le plan vertical de MD_0 ne soit pas entièrement sur (S_3). Prenons sur $\mathcal{D}(M)$ deux rayons MD et MD' voisins respectivement de MD_0 et MD'_0. Le plan vertical de MD sera voisin de celui de MD_0 et sa section L par (S_3) ne sera pas entièrement sur le support de MD. Les deux couples de rayons opposés MD_0, MD'_0; MD, MD' sont donc sur le cône directeur des tangentes (n° 19). Mais si MD est assez voisin de MD_0 il sera sur la même nappe. Il résulte alors de la propriété énoncée au n° 2, 7° que les angles D_0MD' et DMD'_0 sont sur $\mathcal{D}(M)$. En faisant tendre MD vers MD_0 on voit que $\mathcal{D}(M)$ contient un plan ce qui est impossible. Le raisonnement s'applique à Σ_M comme à (S_3), mais dans ce cas aucune demi-tangente n'est parallèle à $M\zeta$; Σ_M est donc sur $\mathcal{D}(M)$, qui par suite ne peut avoir de rayon vertical.

En définitive nous avons montré que si $\mathcal{D}(M)$ *est du sixième ordre conique,* (S_3) *est un morceau de cône (lieu de droites) du troisième ordre.*

En effet (S_3) est rencontré par une droite quelconque ne portant aucun segment suivant trois points au plus.

En prenant pour (S_3) le morceau de cône

$$z(x^2+y^2)=xy(x+y)$$

limité au cylindre

$$x^2+y^2=1,$$

on obtient un exemple de ce cas, car (S_3) est à pentes bornées. Il suffit pour le voir de passer en coordonnées semi-polaires.

Avant de passer à l'examen du cas où $\mathcal{D}(M)$ est du quatrième ordre conique faisons une dernière remarque.

Le raisonnement précédent montre que si $\mathcal{D}(M)$ supposé n'être pas un plan contient deux secteurs DMD_1 et $D'MD'_1$ symétriques par rapport à M, ceux-ci sont entièrement sur (S_3).

Nous faisons ici la convention suivante, qui vaudra pour la suite : *une droite sera dite tout entière sur* (S_3) si le segment que découpe sur elle le cylindre vertical projetant son bord est sur (S_3).

21. Supposons maintenant $\mathcal{D}(M)$ *d'ordre conique* 4. Notre étude va être fondée sur la considération des couples de demi-tangentes opposées. Remarquons tout d'abord que si $\mathcal{D}(M)$ possède trois couples de rayons opposés, ils

sont dans un même plan. En effet soient MD_i, MD'_i ($i=1, 2, 3$), trois couples non coplanaires. Un axe $M\zeta$ extérieur à $\mathfrak{T}(M)$ est nécessairement intérieur à l'un des huit trièdres formés par les six rayons, car tout plan contenant M coupe $\mathfrak{T}(M)$ suivant deux rayons au plus. On peut toujours choisir les notations telles que $M\zeta$ soit intérieur à $(M, D_1D_2D_3)$. En faisant tourner un demi-plan d'arête $M\zeta$ autour de celle-ci, on voit que $\mathcal{D}(M)$ traverse au moins six fois tout plan issu de M et laissant le trièdre $(M, D_1D_2D_3)$ d'un même côté au sens strict; ce qui est impossible. La proposition est donc établie. On en déduit immédiatement que si en un point ordinaire de (S_3) *existent trois couples de demi-tangentes opposées non situées dans un même plan, la surface se réduit à un morceau de cône du troisième ordre ayant pour sommet le point.*

En effet le faisceau dérivé au point considéré ne peut être que d'ordre conique six.

22. $\mathcal{D}(M)$ étant supposé d'ordre conique 4 étudions pour commencer le cas où il possède au moins trois couples opposés. Ces couples opposés sont dans un plan P qu'ils partagent en six angles opposés deux à deux. L'un au moins de ces angles est sur $\mathcal{D}(M)$, sans quoi ce dernier posséderait dans P six éléments, ce qui est impossible.

Pour étudier complètement $\mathcal{D}(M)$, deux remarques préliminaires seront utiles. Soit $\zeta' M\zeta$ une droite extérieure à $\mathfrak{T}(M)$, Considérons deux demi-tangentes MD et ML telles qu'elles déterminent un dièdre non plat d'arête $\zeta'\zeta$. Je désignerai par (D, L) le secteur de $\mathcal{D}(M)$ situé dans ce dièdre.

I. Soient alors quatre secteurs consécutifs (D_i, D_{i+1}), $i=0, 1, 2, 3$, situés dans le dièdre $(\zeta'\zeta, D_0D_4)$; si (D_0, D_1), D_2 et D_3 sont dans P et si D_4 ne s'y trouve pas le secteur (D_1, D_2) est forcément dans P.

Pour le voir il suffit de considérer la section de $(D_0. D_4)$ par un plan π parallèle à $\zeta'\zeta$ rencontrant les demi-droites D_0 et D_4 et d'appliquer la proposition II du n° 8.

II. Soient un secteur (A_0, B_0) possédant dans P deux secteurs plans (A_0, A_1) et (B_1, B_0), mais non tous ses rayons. La proposition III du n° 8 permet d'affirmer que (A_0, B_0) se compose de deux secteurs plans (A_0, A), (B, B_0) situés dans P, reliés ou bien par un secteur (A, B) n'ayant dans le plan que ses rayons extrêmes, ou bien par deux secteurs (A, C) et (C, B) situés de part et d'autre de P, où ils n'ont que leurs rayons extrêmes.

Ceci posé considérons les six rayons de $\mathcal{D}(M)$ opposés deux à deux dans P. Ils découpent dans ce plan six angles opposés deux à deux que nous numéroterons dans l'ordre où les rencontre une demi-droite issue de M tournant dans P dans le même sens. Je vais montrer qu'un couple au moins d'angles opposés est sur $\mathcal{D}(M)$. On a vu qu'un angle au moins, que nous numéroterons (1) est sur $\mathcal{D}(M)$. Il suffit éxidemment de considérer le cas où (4) n'est pas sur $\mathcal{D}(M)$.

S'il en est ainsi il existe dans le secteur se projetant suivant (4), parallèlement à $\zeta'\zeta$, un rayon MD_4 situé hors de P. Considérons alors à l'intérieur de (1) un rayon MD_0 assez voisin de (2) pour que le secteur (D_0, D_4) soit dans un dièdre moindre que π. La remarque I précédente montre que (2) est nécessairement sur $\mathcal{D}(M)$. Il en est de même de (6). Mais de la même manière on voit que si (3), par exemple, n'est pas sur $\mathcal{D}(M)$, (5) adjacent à (6) y est forcément. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ possède donc bien dans P deux angles opposés, que nous désignerons par $A_1MB'_1$ et $B_1MA'_1$, MA'_1 étant opposé à MA_1. Considérons alors les deux secteurs (A_1, B_1) et (A'_1, B'_1). L'un d'eux, le premier, par exemple, n'est pas entièrement dans P. Prenons dans ce plan deux rayons MA_0 et MB_0 respectivement voisins de MA_1 et MB_1 et intérieurs à $A_1MB'_1$ et $B_1MA'_1$. D'après la remarque II nous sommes conduits à distinguer deux cas.

a. (A_0, B_0) se compose de deux angles A_0MA et BMB_0 de P, reliés par un secteur (A, B) n'ayant dans ce plan que ses rayons extrêmes. Les rayons MA et MB appartiennent à A_1MB_1. Soit Δ une droite intérieure aux angles $A_1MB'_1$, $B_1MA'_1$. En coupant $\mathcal{D}(M)$ par des plans convenables passant par Δ on voit que (A'_1, B'_1) ne peut avoir de rayons situés par rapport à P du côté opposé à (A, B). Donc : ou bien (A'_1, B'_1) est tout entier dans P ou du même type que (A_1, B_1). Dans le premier cas : a_1. $\mathcal{D}(M)$ se réduit à un angle AMB supérieur à π complété par un secteur (A, B) n'ayant dans le plan de l'angle que ses rayons extrêmes. Étudions la seconde hypothèse : a_2. Supposons MA distinct de MA_1 et considérons MA' opposée à MA. Donnons-nous alors un rayon MD_4 de $\mathcal{D}(M)$ intérieur au secteur se projetant suivant A'_1MA' et choisissons un rayon MD_0 voisin de MA, intérieur à A_1MA. Le secteur (D_0, D_4) aura dans P un angle D_0MA, les rayons MB, MB_0, MA'_1. Il est contenu dans un dièdre moindre que π et le secteur (A, B) n'est pas dans P, il faut donc que MD_4 y soit [Remarque I]. Il en résulte que l'angle A'_1MA' est sur $\mathcal{D}(M)$. Considérons de même MB' opposée à MB, l'angle B'_1MB' est sur $\mathcal{D}(M)$ si MB' est distinct de MB_1. Enfin le même raisonnement montre que le secteur (A', B') ne peut avoir de rayon dans P, En résumé : $\mathcal{D}(M)$ se compose de deux angles opposés AMB' et BMA' reliés par deux secteurs (A, B) et (A', B'), situés du même côté du plan des angles, plan dans lequel ils n'ont que leurs rayons extrêmes.

b. (A_0, B_0) se compose de deux angles A_0MA, BMB_0 reliés par deux secteurs (A, C) et (C, B) situés de part et d'autre de P. On voit alors immédiatement que (A'_1, B'_1) est dans P.

Si l'on se reporte au n° 20, l'on voit que dans les trois cas les secteurs plans opposés de $\mathcal{D}(M)$ sont sur (S_3). Je vais montrer que dans le cas *b*, le couple isolé MC, MC' est aussi sur (S_3). Il va falloir procéder autrement. On a vu au n° 2 (9°) que si $\mathcal{D}(M)$ possède quatre rayons sur $\theta(M)$ ou $\theta'(M)$, c'est-à-dire ici sur la même nappe du cône directeur des tangentes, $\mathcal{D}(M)$ reste d'un même côté, au sens large, d'un certain plan. Or on voit immédiatement dans le cas qui nous occupe que P ou tout autre plan traverse $\mathcal{D}(M)$; le faisceau dérivé ne peut donc posséder plus de sept rayons sur la frontière $\mathfrak{T}(M)$. Coupons alors (S_3) par le plan vertical de C'MC, qui est bien déterminé car P ne peut être vertical, puisque deux de ses angles sont sur (S_3). Il s'agit de montrer que la section ne peut avoir de point extérieur à la droite D'MD.

Supposons qu'il y en ait un : N. Prenons sur (M) un rayon MD voisin de MC, le plan vertical de MC contiendra en dehors de MC une seule dem-tangente : MD', située dans P, voisine de MC'. Il est immédiat que si MD est assez voisine de MC, la section de (S) par le plan vertical de MD aura des points à l'intérieur de l'angle D'MD ou de son opposé. En se reportant au nº 19 (2°), on voit que MD ou MD' sont sur la frontière de $\mathfrak{T}(M)$, ce qui est impossible car $\mathfrak{T}(M)$ contient au plus six de tels rayons. Les demi-tangentes MC et MC' sont donc sur (S_3).

En définitive nous avons l'énoncé suivant :

Si en un point ordinaire de (S_3) *le faisceau dérivé est du quatrième ordre conique et possède plus de deux couples de rayons opposés il appartient à l'un des types suivants :*

I. *Deux angles (pleins) opposés complétés par deux secteurs situés d'un même côté du plan des angles ;*

II. *Un angle supérieur à* π *complété par un secteur situé d'un même côté du plan de l'angle ;*

III. *Un angle supérieur à* π, *complété par deux secteurs situés de part et d'autre du plan de l'angle ;*

Dans les trois cas les secteurs n'ont dans le plan des angles *que leurs rayons extrêmes et de plus tous les couples de rayons opposés sont sur* (S_3).

23. Étudions maintenant le cas où $\mathcal{D}(M)$ toujours supposé d'ordre conique 4, a au plus deux couples de rayons opposés. Considérons encore Σ_M rapporté aux axes $M\xi\eta\zeta$, $M\zeta$ extérieur à $\mathfrak{T}(M)$. Il existe un plan P coupant $\mathcal{D}(M)$ suivant quatre rayons distincts. D'autre part comme $\mathcal{D}(M)$ possède au plus deux rayons opposés, la proposition II (3°) du nº 14 montre qu'il est possible de choisir P de manière qu'il ne contienne aucun couple de rayons opposés et soit traversé le long des quatre rayons. Soient MD_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les demi-tangentes situées dans P dans l'ordre où les rencontre une demi-droite issue de M tournant dans P dans le même sens. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ traverse P le long de chaque MD_i et de plus, trois au plus de ces rayons sont d'un même côté de toute droite de P n'en portant aucun (nº 12). Ici encore le cône directeur des tangentes est un vrai cône. Je vais montrer que le faisceau dérivé a au plus six rayons sur ce cône. S'il en avait sept au moins, quatre seraient certainement sur

la même nappe et par suite $\mathcal{D}(M)$ serait d'un même côté au sens large d'un certain plan R passant par M (nº 2, 9º). Ce plan ne pouvant être P le coupe suivant une droite Δ qui laisse alors les quatre demi-droites MD_i d'un même côté au sens large. Mais deux quelconques d'entre-elles n'étant pas opposées on pourrait toujours trouver, si Δ portait l'une d'elles, une droite voisine les laissant d'un même côte au sens strict. Donc $\mathcal{D}(M)$ possède au plus six rayons sur le cône directeur des tangentes.

Coupons maintenant Σ_M par un plan Q contenant $M\zeta$ et soient MD et $M\overline{D}$ les demi-tangentes en M à la section MD′ et $M\overline{D}'$ les demi-droites opposées. D'après la proposition du nº 19 la section de Σ_M par Q est tout entière dans la somme des deux angles opposés $DM\overline{D}'$, $\overline{D}MD'$ sauf peut-être pour 6 positions au plus de Q, donc quel que soit Q puisque Σ_M est un ensemble fermé. Je vais montrer que pour deux positions de Q et deux seulement MD et $M\overline{D}$ sont opposées. Pour cela considérons la somme des deux angles adjacents $D_1MD_2 + D_2MD_3$; elle est différente de π, de même que $D_3MD_4 + D_4MD_1$. Le total valant 2π, une des sommes, par exemple, la première est inférieure à π. Désignons par ML_1, ML_2 et ML_3 les demi-droites opposées à MD_1, MD_2 et MD_3, le quatrième rayon MD_4 est nécessairement intérieur à l'un des angles L_1ML_2, L_2ML_3. En permutant au besoin les indices 1 et 3 on peut supposer que MD_4 est intérieur à L_1ML_2. On voit immédiatement que si Q pénètre à l'intérieur de D_2MD_3 les deux demi-tangentes sont d'un certain côté de P, tandis qu'elles sont du côté opposé lorsqu'il pénètre à l'intérieur de L_1MD_4. Comme la somme $DM\zeta + \zeta M\overline{D}$ varie d'une manière continue elle passe deux fois par la valeur π lorsque le plan Q fait un tour complet. Il en résulte que $\mathcal{D}(M)$ possède au moins deux couples de rayons opposés et par suite deux exactement puisqu'il n'en possède pas trois. D'autre part les supports de ces deux couples de demi-tangentes opposées sont sur Σ_M. Le plan des deux couples ne peut donc être vertical. Soit Δ_1 le support de l'un d'eux; la section de (S_3) par le plan vertical de Δ_1 ne peut avoir de point extérieur à Δ_1, sans quoi $\mathcal{D}(M)$ aurait une infinité de rayons sur la frontière de $\mathcal{C}(M)$. Il suffit pour le voir de raisonner comme on l'a fait au numéro précédent pour montrer que le support de MC est sur (S_3).

En définitive nous avons le résultat suivant.

Si en un point ordinaire M *de* (S_3) *le faisceau dérivé* $\mathcal{D}(M)$ *supposé du quatrième ordre conique, ne contient pas plus de deux couples de rayons opposés, il en possède exactement deux et les supports de ceux-ci sont sur* (S_3).

On peut ajouter qu'un voisinage Σ_M est compris entre $\mathcal{D}(M)$ et son symétrique.

On trouvera dans la Note I à la fin du présent Mémoire un exemple de ce cas.

23 *bis*. Il sera utile pour la suite d'étudier plus complètement $\mathcal{D}(M)$ dans le cas qui nous occupe. Soient MD_1, MD'_1 et MD_2, MD'_2 les deux couples de demi-tangentes opposées et P leur plan. Supposons d'abord que P ne contienne pas d'autre rayon de $\mathcal{D}(M)$ que les quatre précédents. Chacun des quatre secteurs (D_1, D_2), (D_2, D'_1), (D'_1, D'_2), (D'_2, D_1) n'a dans P que ses rayons extrêmes. Si deux secteurs adjacents sont d'un même côté leur rayon commun est un retour et le rayon opposé est un retour de même nature [n° 14, II]. Dans ces conditions les quatre secteurs sont d'un même côté de P. Ceci est impossible il suffit pour le voir de couper $\mathcal{D}(M)$ par un plan parallèle à $M\zeta$[$M\zeta$ désignant toujours une demi-droite extérieure à $\mathcal{C}(M)$] et rencontrant MD_1 et MD_2, on obtient un arc du troisième ordre donnant deux retours sur une sécante.

Examinons le cas où $\mathcal{D}(M)$ possède dans P un cinquième rayon MD, dans l'angle D_1MD_2 par exemple. La demi-droite opposée n'est pas sur $\mathcal{D}(M)$. Il n'est pas possible qu'aucun des angles D_1MD, DMD_2 ne soit pas sur $\mathcal{D}(M)$, car ce dernier ne pouvant avoir que trois éléments au plus dans P, il faudrait que les angles opposés $D_1MD'_2$ et $D_2MD'_1$ y soient, ce qui est impossible puisque $\mathcal{D}(M)$ est supposé n'avoir que deux couples de rayons opposés. Il faut donc que D_1MD par exemple soit sur $\mathcal{D}(M)$. Donnons-nous une demi-tangente MD_0 intérieure à D_1MD et sur le secteur (D'_1, D'_2) un rayon MD_3 voisin de MD'_1; MD_3 ne peut être dans P car il y aurait trois couples de demi-tangentes opposées dans ce plan. Le secteur (D_0, D_3) comprend dans P un angle plan D_0MD, deux rayons MD_2, MD'_1 et le rayon extrême MD_3 est hors du plan. Il faut par suite que l'angle DMD_2 soit sur $\mathcal{D}(M)$ [n° 22, II].

On voit donc que si P contient cinq demi-tangentes (au moins) un seul ou deux adjacents des angles formés par les deux couples de demi-tangentes opposés sont sur $\mathcal{D}(M)$. Dans tous les cas il existe dans P un système de deux angles opposés dont les côtés sont sur $\mathcal{D}(M)$ et tels que celui-ci est d'un même côté de P dans les deux angles, ou bien sur P dans un des angles et d'un certain côté dans l'autre.

24. Les couples de demi-tangentes opposées ont joué un rôle important dans l'étude du faisceau dérivé supposé d'ordre conique 6 ou 4. Je donnerai encore deux propositions relatives à ces couples.

I. *Si en un point intérieur de* (S_3) *les demi-tangentes à une section verticale sont opposées et pas entièrement contenues sur* (S_3) *le point est ordinaire et le faisceau dérivé y est un dièdre ou un plan.*

En effet, le point est ordinaire (n° 19, 1°); le faisceau dérivé ne peut être d'ordre conique 6 ou 4, car dans les deux cas tout couple de demi-tangentes opposées est sur la surface, (n^{os} 20, 22, III; n° 23), il est donc d'ordre conique 2 et comme il possède deux rayons opposés, c'est un dièdre ou un plan (n° 16, A).

II. *Si en un point intérieur de* (S_3) *les demi-tangentes à une section verticale sont verticales et opposées, le faisceau dérivé en ce point est un plan vertical.*

Le support des demi-tangentes ne peut être sur (S_3), le point est donc ordinaire et le faisceau dérivé un dièdre ou un plan. Je dis qu'il est nécessairement un plan. Supposons qu'en un point M le faisceau dérivé soit un dièdre $(\Delta, P_1 P_2)$ d'arête verticale. En se reportant à la définition du faisceau des tangentes, on voit que celui-ci comprend tous les plans passant par Δ qui ne pénètrent pas à l'intérieur du dièdre. Mais la section verticale par un tel plan possède en M une inflexion, par suite certaines sécantes issues de M la traversent trois fois, et ces sécantes sont extérieures à $\mathfrak{T}(M)$ (nº 19). Il y a contradiction, ce qui exige que P_1 et P_2 soient opposées. $\mathcal{D}(M)$ est donc un plan vertical.

25. Pour compléter l'étude des propriétés différentielles de (S_3) dans le cas général, je vais examiner avec quelques détails le cas où le faisceau dérivé est un plan.

Soit M un point intérieur de (S_3) où le faisceau dérivé est un plan P, que nous supposerons d'abord n'être pas vertical. Menons par M un plan vertical Q. Si (S_3) est bien du troisième ordre sa section par Q ne pourra être toujours sur P. La proposition 2° du nº 19 montre que M est un point ordinaire; elle permet d'affirmer également que toute droite D′MD de P intérieure à $\mathfrak{T}(M)$ est toute entière sur (S_3).

Si $\mathfrak{T}(M)$ est un plan il est confondu avec P.

Nous allons considérer successivement deux cas.

a. $\mathfrak{T}(M)$ *est un bi-dièdre.*

Le plan P qui est un plan de tangentes contient nécessairement l'arête Δ du bidrièdre, de plus il en est une des faces sans quoi (S_3) serait plane. Δ partage P en deux demi-plans P_1 et P_2; désignons par (1) et (2) les morceaux de (S_3) qui se projettent verticalement sur P_1 et P_2. Comme la surface n'est pas entièrement sur P, (1), par exemple, possède un point N_1 situé hors de P, et dont la projection N'_1 sur P_1 n'est pas sur Δ. Coupons (S_3) par le plan vertical $MN_1N'_1$. Toute droite de ce plan issue de M et rencontrant le segment $N_1N'_1$ à son intérieur, traverse la section deux fois, donc est extérieure à $\mathfrak{T}(M)$ (nº 19). Ce dernier étant un bi-dièdre d'arête Δ on en déduit que tout demi-plan intérieur au dièdre $(\Delta, P_1 N_1)$ est extérieur à $\mathfrak{T}(M)$. De là résulte que (1) est d'un même côté de P, au sens large, sans quoi $\mathfrak{T}(M)$ se réduirait à P; le raisonnement vaut pour (2). On voit de la même manière que (1) et (2) ne peuvent être d'un même côté de P; ce qui exige que Δ soit sur (S_3).

Ainsi :

I. *Lorsque* $\mathcal{D}(M)$ *se réduisant à un plan non vertical* $\mathfrak{T}(M)$ *est un bidièdre,* *l'arête de celui-ci est sur* (S_3) *et la partage en deux parties l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan, au sens large. De plus le plan* $\mathcal{D}(M)$ *est une face de* $\mathfrak{T}(M)$.

b. Le cône directeur des tangentes en M *est un vrai cône.* Soit $\mathcal{C}$ le cône, P ne peut pénétrer à l'intérieur. S'il ne le touchait pas ou le touchait suivant une seule génératrice il serait tout entier sur (S_3) ce qui n'est pas. Il faut donc que P touche suivant deux angles opposés, qui sont inférieurs à π. Les deux angles complémentaires de P étant extérieurs à $\mathcal{C}$ sont sur (S_3). En raisonnant comme à l'instant on voit aisément que les morceaux de (S_3) qui se projettent suivant les angles de P situés sur $\mathcal{C}$ sont au sens large de part et d'autre du plan. En conclusion :

II. *Lorsque* $\mathcal{D}(M)$ *se réduisant à un plan non vertical, le cône directeur des tangentes est un vrai cône,* P *contient deux angles opposés entièrement situés sur* (S_3), *les morceaux de celle-ci se projetant verticalement sur les angles complémentaires étant* (au sens large) *de part et d'autre de* P.

Des deux dernières propositions on déduit immédiatement la suivante.

III. *Si en un point* M *le faisceau dérivé se réduit à un plan non vertical, et si de plus on peut trouver une section verticale* $\overset{\frown}{UMV}$ *telle que ou bien l'un des arcs* $\overset{\frown}{UM}$ *ou* $\overset{\frown}{MV}$ *traverse* P *en dehors de* M, *ou bien les arcs* $\overset{\frown}{UM}$ *et* $\overset{\frown}{MV}$ *ont des points d'un même côté de* P, *le faisceau des tangentes en* M *se réduit à* P.

Il nous reste à examiner le cas où $\mathcal{D}(M)$ se réduit à un plan vertical P. Considérons un voisinage Σ_M. La proposition II précédente montre que $\mathfrak{T}(M)$ est un bidièdre ou un plan.

S'il est un bidièdre Σ_M contient un segment $M'MM''$, dont le support est sur (S_3); autrement il y aurait dans P des droites extérieures à $\mathfrak{T}(M)$.

On peut donc affirmer que :

IV. *Si le faisceau dérivé en* M *est un plan vertical* P, *celui-ci est le faisceau des tangentes à moins que* P *contienne une droite de* (S_3) *auquel cas* $\mathfrak{T}(M)$ *peut être un bidièdre ayant cette droite pour arête.*

On rapprochera ce dernier résultat de la proposition II du n° 24.

V. — Surfaces du troisième ordre sans plans d'appui locaux.

26. Dans ce dernier chapitre nous étudierons le cas particulier où (S_3) ne possède nulle part de plan d'appui local.

Précisons d'abord les définitions.

Soit M un point intérieur de (S_3), nous dirons qu'un plan P passant par M est un *plan d'appui* en M si (S_3) est d'un même côté de P, le plan d'appui est *strict* si M est le seul point de (S_3) situé dans P. De même on définira un *plan d'appui local*, strict ou non en remplaçant (S_3) par un petit morceau ayant M à son intérieur [1].

On peut montrer que si (S_3) est effectivement du troisième ordre, elle ne peut posséder soit partout un plan d'appui, soit partout un plan d'appui local strict. Par contre (S_3) peut avoir partout un plan d'appui local pas partout strict, comme le montre l'exemple obtenu en remplaçant dans un disque circulaire du plan $z = 0$, un disque circulaire intérieur par une calote sphérique moindre qu'une demi-sphère.

Nous allons étudier les propriétés différentielles de (S_3) *dans l'hypothèse où elle ne possède de plan d'appui local en aucun point intérieur.*

Faisons d'abord quelques remarques utiles.

Soit (γ) une courbe simple fermée tracée sur (S_3) découpant sur celle-ci un morceau (Γ). Supposons que (γ) soit au sens large d'un certain côté d'un plan P non vertical, le dessous par exemple. Considérons une verticale qui rencontre P en un point p. La projection de (γ) sur la verticale parallèlement à P est un segment $\alpha\beta$ (pouvant se réduire à un point) situé au-dessous de p au sens large. De même la projection de (Γ) est un segment ab comprenant le premier. Si son extrémité supérieure est au-dessus de p, (Γ) possède nécessairement en un point intérieur un plan d'appui parallèle à P. Il en est de même si l'extrémité supérieure de ab est en p et $\alpha\beta$ au dessous.

Voyons ce qui se passe lorsque ab et $\alpha\beta$ ont leurs extrémités supérieures en p. Si (Γ) possède un point intérieur dans P celui-ci est plan d'appui. Le raisonnement vaut si ab se réduit à p.

En résumé nous pouvons énoncer le lemme suivant dont nous ferons un usage constant.

I. *Soit* (γ) *un contour fermé sans point double découpant un morceau* (Γ) *de* (S_3), *si* (γ) *reste d'un certain côté d'un plan* P, *au sens large, et si de plus un point intérieur de* (Γ) *est de l'autre côté, au sens large,* (Γ) *possède quelque part à son intérieur un plan d'appui* (*parallèle à* P).

Voici encore une remarque utile.

II. (S_3) *ne peut contenir aucun morceau d'un demi-cône simple.*

Il suffira de montrer que tout secteur d'un demi-cône simple possède au moins un plan d'appui, le même tout le long d'une génératrice.

Soit donc un secteur $(\omega L_1, \omega L_2)$ obtenu par la variation d'une génératrice ωL. Nous pouvons prélever sur ce secteur un secteur partiel $(\omega L_1, \omega L_3)$ tel que l'angle $L_1 \omega L$ reste inférieur à un petit angle donné ε lorsque ωL par-

[1] Ces définitions sont évidemment indépendantes du fait que (S_3) est d'ordre 3.

court le secteur $(\omega L_1, \omega L_3)$. Prenons alors dans le plan $L_1\omega L_3$ une demi-droite ωD faisant avec ωL_1 un angle 3ε. Lorsque ωL varie de ωL_1 à ωL_3 l'angle des plans $L_1\omega L_3$ et $D\omega L$ varie d'une manière continue et reste borné. Sa borne supérieure correspond à un plan d'appui.

27. Points non ordinaires. — Je vais, pour commencer, montrer que *tous les points intérieurs de* (S_3) *sauf peut-être quatre au plus sont des points ordinaires*. Pour simplifier, je désignerai par la lettre A, affectée ou non d'accent ou d'indice, les points intérieurs de (S_3) qui ne sont pas des points ordinaires, et de même par la lettre B les points situés sur le bord.

Étudions d'abord les sections verticales de (S) contenant un point A. Soit $\widehat{B_1AB_2}$ l'une d'elle et désignons par AD_1 et AD_2 les demi-tangentes en A $\left(AD_1 \text{ étant celle du côté de } \widehat{AB_1}\right)$. Ces deux demi-tangentes ne peuvent être verticales et opposées car A serait point ordinaire. Si elles sont opposées sans être verticales l'arc $\widehat{B_1AB_2}$ est un segment rectiligne [n° 19].

Supposons AD_1 et AD_2 non opposées. Elles sont nécessairement (dans le plan de l'arc) de part et d'autre de la verticale de A au sens large. Soient AD'_1 et AD'_2 les demi-droites respectivement opposées. Invoquant encore les conclusions du n° 19 on peut affirmer que $\widehat{B_1A}$ et $\widehat{AB_2}$ sont respectivement dans les angles $D_1AD'_2$ et $D_2AD'_1$. Lorsque AD_1 et AD_2 sont confondues, (nécessairement verticales) ces derniers angles sont deux demi-plans. Dans les deux cas, si M est un point de $\widehat{B_1AB_2}$ (distinct de A et des extrémités) intérieur à l'un des angles $D_1AD'_2$, $D_2AD'_1$, ce point est ordinaire; c'est une traversée tandis que A est un retour pour la droite AM, qui ne possède pas d'autre point sur l'arc [n° 8, II].

Supposons maintenant que $\widehat{AB_2}$, par exemple, possède un point intérieur N sur AD_2 ou AD'_1. Considérons d'abord le premier cas. Il résulte de ce qui vient d'être dit que l'arc partiel $\widehat{AN}$ de $\widehat{AB_2}$ est sur AD_2 Dans le deuxième cas on voit aisément que $\widehat{NB_2}$ est sur AD'_1 et $\widehat{B_1A}$ sur AD_1.

Pour simplifier le langage nous appellerons, *supplément* d'un segment non vertical M_1M_2, intérieur au cylindre projetant verticalement (S_3), l'ensemble des points de la droite M_1M_2 situés dans le cylindre et extérieurs au segment M_1M_2. Ce supplément se compose de deux segments.

Avec cette convention nous pouvons dire :

I. Si l'arc $\widehat{B_1AB_2}$ possède un point intérieur N (distinct de A) sur un côté des angles $D_1AD'_2$, $D_2AD'_1$, ou bien le segment AN est sur (S_3) ou bien son supplément.

II. Voici encore une remarque qui nous sera très utile. Soient A un point intérieur non ordinaire, U et V deux points intérieurs de (S_3) choisis de telle manière que le plan vertical contenant $\widehat{UV}$ ne passe pas par A. L'arc $\widehat{UV}$ est du troisième ordre au plus. Le segment AM et *a fortiori* la droite AM ne peuvent rester sur (S_3) quand M parcourt $\widehat{UV}$ sans quoi la surface contiendrait un morceau de cône du troisième ordre au plus, ce qui impliquerait un plan d'appui local [n° 26, II]. Il existe donc un point M' tel que le segment AM' ne soit pas sur la surface. M étant un point assez voisin il en sera de même pour le segment AM puisque (S_3) est un ensemble fermé. On peut donc trouver un arc partiel $\widehat{U'V'}$ de $\widehat{UV}$ tel que le segment AM ne soit pas sur (S_3) quand M parcourt $\widehat{U'V'}$. Mais le raisonnement vaut pour le supplément de AM. Il existe par conséquent un arc partiel $\widehat{U_1V_1}$ de $\widehat{U'V'}$, donc de $\widehat{UV}$ possédant la propriété suivante : quel que soit M sur $\widehat{U_1V_1}$, ni le segment AM ni son supplément ne sont sur (S_3). Considérons alors la section de la surface par le plan vertical de AM $\left(\text{M étant donné sur } \widehat{U_1V_1}\right)$, soit $\widehat{B_1AB_2}$. Il résulte immédiatement de ce qui a été dit au début du présent numéro que la droite AM ne porte aucune des demi-tangentes en A et que celles-ci sont du même côté au sens strict. On en déduit que A et M sont respectivement retour et traversée pour la sécante AM, laquelle ne contient pas d'autre point de l'arc.

28. Soient maintenant A_1 et A_2 deux points A. Considérons la section $\widehat{B_{1,2}A_1B_{2,1}}$, de (S_3) par le plan vertical de A_1A_2. Si les demi-tangentes en A_1 sont confondues la droite A_1A_2 est sur la surface. Dans le cas contraire, A_2 ne pouvant être extérieur à l'ensemble des deux angles formés l'un par les deux demi-tangentes en A_1 à l'arc $\widehat{B_{1,2}A_1B_{2,1}}$, l'autre par les demi-droites opposées, il faut nécessairement que A_1A_2 ou son supplément soient sur (S_3). Dans ce dernier cas l'arc $\widehat{A_1A_2}$ est d'un même côté de A_1A_2, avec lequel il n'a en commun que ses extrémités. En effet, supposons que $\widehat{A_1A_2}$ ait un point M intérieur au segment; la demi-tangente en A_1 étant distincte de A_1A_2 une sécante convenable issue de A_2 donnerait pour $\widehat{A_1M}$ deux traversées, ce qui est impossible puisque A_2 n'est pas un point ordinaire.

En résumé *si* A_1 *et* A_2 *sont deux points* A *ou bien la droite* A_1A_2 *est sur* (S_3) *ou bien c'est le segment* A_1A_2 *ou son supplément, dans ce dernier cas l'arc* $\widehat{A_1A_2}$ *est d'un même côté de* A_1A_2 *avec lequel il n'a en commun que ses extrémités.*

29. Supposons maintenant qu'un plan vertical Q contienne trois points A, soient : A_1, A_2, A_3, dans l'ordre où ils se trouvent sur la section de (S_3) par le

plan. Si ces trois points sont alignés le segment A_1A_3 est sur (S_3), les demi-tangentes en A_2 à la section de (S_3) par Q sont opposées. Donc la droite A_1A_3 est sur la surface.

Dans le cas contraire le supplément de A_1A_3 est sur (S_3) et la section de cette surface par Q est une ligne brisée de quatre côtés dont les extrêmes sont alignés. On en déduit immédiatement qu'un plan vertical Q ne peut contenir quatre points A non alignés.

30. Nous venons de voir que si trois points A_1, A_2, A_3, situés dans Q sont alignés, la droite qui les porte est sur (S_3). Voyons les choses de plus près.

Donnons-nous dans un plan parallèle à Q, mais distinct de lui, deux points intérieurs de (S_3) : U et V, D'après la remarque II du n° 27 on peut trouver sur $\overparen{UV}$ un arc partiel $\overparen{U_1V_1}$ possédant la propriété suivante :

M étant un point quelconque de $\overparen{U_1V_1}$ la section de (S_3) par le plan vertical de A_1M comporte par rapport à la sécante A_1M un retour en A et une traversée en M seuls points de (S_3) sur la sécante. Considérant ensuite A_2, puis A_3, on obtiendra un arc $\overparen{U_3V_3}$ de $\overparen{UV}$ tel que la propriété précédente soit vérifiée pour les sections par les plans verticaux de A_2M et A_3M.

Soit alors M un point de $\overparen{U_3V_3}$ et P le plan A_1A_3M. Nous obtenons dans les plans verticaux de A_iM $(i = 1, 2, 3)$ des arcs $\overparen{B_{i,1}A_iMB_{i,2}}$. Pour fixer les idées supposons A_2 entre A_1 et A_3.

Si les arcs $\overparen{A_1M}$ et $\overparen{A_3M}$ sont du côté opposé à $\overparen{A_2M}$, le morceau de (S_3) limité par le contour MA_1A_3M possède des points intérieurs du côté opposé (par rapport à P) à celui où se trouve le contour. Ceci impliquant pour (S_3) un plan d'appui local [n° 26, I] l'hypothèse est à écarter.

Reste à examiner le cas où $\overparen{A_1M}$ ou $\overparen{A_3M}$, le premier par exemple, est du même côté que $\overparen{A_2M}$. Coupons par un plan vertical passant par A_3 et rencontrant les arcs $\overparen{B_{1,1}A_1}$ et $\overparen{B_{1,2}A_2}$ en des points B''_1 et B''_2. Ces points sont au sens strict d'un même côté de P. L'arc $\overparen{B''_1B''_2}$ de la section est donc de ce côté au sens strict sans quoi A_3 serait point ordinaire. Le contour $MB''_1B''_2M$ est alors d'un côté de P alors qu'un point intérieur de A_1A_2, c'est-à-dire intérieur au morceau de (S_3) limité par le contour est dans P. Ceci est impossible pour la même raison que tout à l'heure. En définitive nous avons établi que (S_3) *ne peut avoir trois points* A *alignés*.

31. Considérons maintenant trois points A : A_1, A_2, A_3 qui ne sont situés dans un même plan vertical. Les trois segments A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 ne peuvent

être sur (S_3), il y aurait un plan d'appui local [n° 26, I]. Je vais montrer qu'on ne peut avoir non plus un seul segment sur (S_3). Examinons ce cas et pour fixer les idées supposons le segment A_2A_3 sur la surface, A_1A_2 et A_1A_3 n'y étant pas les suppléments de A_1A_2 et A_1A_3 s'y trouvent alors. Étudions la disposition de la surface par rapport au plan P défini par les trois points A_i. On a vu plus haut que l'arc $\widehat{A_1A_2}$ est d'un même côté de sa corde. Pour fixer les idées supposons-le au-dessus. D'après la remarque II faite au n° 27 il existe au voisinage de A_2 sur le segment A_2A_3 un point M tel que la section verticale de (S_3) par le plan vertical de A_1M n'ait en commun avec cette droite que deux points : $A\xi$ qui est un retour et M une traversée. L'arc $\widehat{BA_1}$ de cette section (B étant du côté opposé à M) est donc au-dessus de P pourvu que M soit assez voisin de A_2. De la même manière on peut trouver sur le prolongement de A_3A_1 du côté de A_1 un point M', voisin de A_1 tel que la section de (S) par le plan vertical de A_2M' n'ait sur la droite A_2M' que les points A_2 (retour) et M' traversée. En choisissant M' assez voisin de A_1 on aboutit à une contradiction, car le prolongement de l'arc $\widehat{A_2M'}$ du côté de A_2 rencontre $\widehat{BA_1}$.

Si nous rapprochons le dernier résultat obtenu du fait que (S_3) ne peut posséder trois points A alignés nous pouvons affirmer que *le triangle défini par trois points intérieurs non ordinaires possède zéro ou deux de ses côtés sur* (S_3), *que le plan du triangle soit vertical ou non*. Dans le premier cas il y en a exactement deux.

32. La limitation à quatre du nombre maximum des points A va se faire sans difficulté. Supposons l'existence de cinq points A, soient $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Je vais montrer pour commencer qu'on peut toujours choisir trois de ces points de manière qu'aucun des côtés du triangle qu'ils forment ne soit sur (S_3). La question se pose seulement si l'un des segments (au moins) joignant deux des points, A_3 et A_4 pour fixer les idées est sur (S_3). Considérons alors les triangles $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, $A_5A_3A_4$, chacun d'eux possède un second côté (mais pas un troisième) sur (S_3), deux au moins, qu'on peut toujours supposer être issus de A_1 et A_2, aboutissent au même des deux sommets : A_3 ou A_4. En permutant au besoin A_3 et A_4, on peut supposer que c'est A_4. Le triangle $A_1A_2A_3$ n'a aucun côté sur (S_3). De plus son plan n'est pas vertical.

Pour aller plus loin il nous faut commencer par étudier la disposition de (S_3) par rapport au plan P du triangle $A_1A_2A_3$. Précisons d'abord quelques notations. Le plan vertical de $A_iA_j (j = i)$ coupe (S_3) suivant un arc que nous désignerons par $\widehat{B_{i,j}A_iA_jB_{j,i}}$. Les arcs partiels $\widehat{B_{i,j}A_i}$ et $\widehat{A_jB_{j,i}}$ sont rectilignes et dans P, $\widehat{A_iA_j}$ est d'un certain côté de ce plan (dans lequel il n'a que ses extrémités). Les arcs rectilignes ou non $\widehat{A_iB_{i,j}}$ et $\widehat{A_iA_j}$ découpent dans (S_3) sept morceaux que l'on peut désigner sans ambiguïté par $(A_1A_2A_3)$, $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ et deux autres obtenus par permutations circulaires à partir du second, $(B_{1,3}A_1A_2B_{2,3})$ et deux autres obtenus par permutations circulaires.

Considérons l'arc $\widehat{A_1A_2}$ et supposons-le au-dessus de P par exemple. Soit N un point de $B_{1,3}A_1$. Si N est assez voisin de A_1, l'arc $\widehat{A_2M}$ de (S_3), où M désigne un point quelconque de A_1N, aura des points au dessus de P. Mais d'après la remarque II du n° 27, il y a aussi près qu'on veut de tout M un point M' tel que la section de (S_3) par le plan vertical de A_2M' ait en A_2 et M' : retour et traversée par rapport à la sécante A_2M'. Il existe donc dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ un voisinage de A_1 situé au dessous de P au sens large. Mais si ce voisinage avait un point intérieur dans P ce plan serait d'appui local au point considéré. Ainsi au voisinage de A_1 dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ et pour la même raison au voisinage de A_2 dans $(B_{2,3}A_2A_{2,1})$, la surface (S_3) est par rapport à P du côté opposé à celui de $\widehat{A_1A_2}$. De là on déduit que les trois arcs sont d'un même côté, que pour fixer les idées nous supposerons être le dessus. Le lemme I du n° 26 permet d'affirmer que $(A_1A_2A_3)$ est au-dessus de P au sens strict, sauf bien entendu en ce qui concerne les trois points A_i Considérons maintenant $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ et supposons qu'il possède un point M_1 au-dessous de P au sens large, situé en dehors des segments $A_2B_{2,1}$ et $A_3B_{3,1}$, M_1 ne peut être sur $\widehat{A_2A_3}$. Coupons (S_3) par le plan vertical de A_1M_1. La section obtenue contient sur $\widehat{A_2A_3}$ un point N_1 situé au-dessus de P au sens strict. Prenons alors une sécante Δ joignant A_1 à un point intérieur du segment M_1N_1; l'arc $\widehat{A_1M_1}$ la traverse. Par suite A_1 est pour Δ un retour. L'arc de la section verticale situé dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ est donc au-dessus de Δ. Nous aboutissons à une contradiction, car Δ peut être choisie aussi près qu'on veut de P tandis que $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ est au voisinage de A_1 au-dessous de P au sens strict. Ainsi tous les points de $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$, sauf ceux des segments $A_2B_{2,1}$ et $A_3B_{3,1}$, sont au-dessus de P au sens strict. Le résultat est le même pour $(B_{3,2}A_3A_1B_{1,2})$ et $(B_{1,3}A_1A_2B_{2,3})$. Enfin en raisonnant comme pour le voisinage de de A_1 on voit que $(B_{1,3}A_1B_{1,2})$ tout entier a ses points, sauf ceux des segments $A_1B_{1,2}$, $A_1B_{1,3}$ au-dessous de P au sens strict. En résumé *la section de* (S_3) *par* P *se compose uniquement des segments* $A_iB_{i,j}$, *le long desquels la surface traverse* P.

33. Considérons un quatrième point A. Il ne pourrait être dans P sans être à l'intérieur d'un segment $A_iB_{i,j}$ ce qui est impossible car trois points A ne peuvent être alignés [n° 30]. D'autre part il résulte immédiatement du n° 31 que les trois segments AA_1, AA_2, AA_3 sont sur (S_3) à moins qu'aucun n'y soit. Voyons ce qui se passe suivant les différentes positions de A.

I. Le point A est au-dessous de P, dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ par exemple. Le segment AA_2 ne peut être sur (S_3), il faudrait qu'il rencontre $A_1B_{1,3}$. Donc aucun des segments $AA_i(i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3).

II. Le point A est au-dessus de P, mais pas intérieur à $(A_1A_2A_3)$, dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ par exemple. Si A est sur $\widehat{A_2A_3}$ les segments AA_2 et AA_3 sont sur (S_3) [n° 29], il en est donc de même de AA_1. Supposons A en dehors de $\widehat{A_2A_3}$, si le segment AA_2 n'était pas sur (S_3) son supplément y serait. Ceci est impossible car les deux segments constituant ce supplément ne peuvent être au-dessus de P. Donc les segments $AA_i(i=1, 2, 3)$ sont sur (S_3).

III. Le point A est intérieur à $(A_1A_2A_3)$, là les deux cas sont possibles.

34. Revenant à l'hypothèse faite au début du numéro précédent, nous allons placer A_4 dans toutes les positions possibles et montrer chaque fois que A_5 ne saurait exister.

Utilisant les notations définies au n° 32 je désignerai la section verticale de (S_3) par le plan contenant deux points A_i et A_j (où i et j sont des entiers distincts au plus égaux à 5) par $B_{i,j}A_iA_jB_{j,i}$. Nous savons que si l'arc $\widehat{A_iA_j}$ est différent de sa corde $\widehat{B_{i,j}A_i}$ et $\widehat{A_jB_{j,i}}$ sont sur le support de A_iA_j.

Examinons donc toutes les positions poseibles pour A_4.

I_1. A_4 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$ et les segments A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 ne sont pas sur (S_3).

1° A_5 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$. Il est dans un des trois morceaux découpés dans ce domaine par $\widehat{A_4A_1}$, $\widehat{A_4A_2}$, $\widehat{A_4A_3}$, par exemple dans $(A_4A_1A_2)$. Il ne peut être sur le segment $B_{4,3}A_4$ sans quoi A_3, A_4, A_5 seraient alignés. En permutant au besoin A_1 et A_2 on peut supposer qu'il est du côté de A_1 par rapport à $B_{4,3}A_4$. Si A_1A_5 [1] n'est pas sur (S_3), $A_5B_{5,1}$ s'y trouve et rencontre $B_{4,3}A_4$. On en déduit que A_5 est dans le plan $A_1A_3A_4$. Ce qui est impossible car aucun des côtés du triangle $A_1A_3A_4$ n'est sur (S_3) (le triangle $A_1A_3A_4$ joue ici le rôle de $A_1A_2A_3$ au numéro précédent). Si A_1A_5 est sur (S_3), il en est de même de A_5A_2 qui croise $B_{4,3}A_4$. Mais alors A_5 est dans le plan $A_2A_3A_4$, ce qui conduit encore à une impossibilité.

2° A_5 est dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ ou dans un des deux autres domaines analogues. On peut toujours supposer qu'il est dans le premier. Dans ce cas ni A_5A_2 ni A_5A_3 ne sont sur (S_3). En permutant alors A_1 et A_5 on est ramené au cas précédent car A_5 ne peut être ni sur $B_{1,2}A_1$ ni sur $B_{1,3}A_1$.

3° A_5 est dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ ou l'un des deux autres domaines analogues, le premier par exemple. Il ne peut être ni sur $B_{1,2}A_2$, ni sur $B_{3,1}A_3$ pas plus

[1] Pour éviter de répéter le mot « segment », nous conviendrons que si deux majuscules, affectées ou non d'indices ou d'accents, désignent chacune un point, leur ensemble représente le segment qui les joint.

que sur $A_4B_{4,1}$. Mais on sait [n° 33] que A_5A_1, A_5A_2, A_5A_3, sont sur (S_3). Si A_5 est du côté de A_2 par rapport à $A_4B_{4,1}$, A_5A_1 croise $B_{4,3}A_4$, et les points A_2, A_3, A_4, A_5, sont dans un même plan. Nous avons une contradiction car le triangle $A_2A_3A_4$ n'a aucun côté sur (S_3). La conclusion est évidemment la même si A_5 est du côté de A_3 par rapport à $A_4B_{4,1}$.

Si donc A_4 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$ et si aucun des segments $A_4A_i (i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3), A_5 ne peut exister.

I_2. A_4 intérieur à $(A_1A_2A_3)$ et les trois segments $A_4A_i (i=1, 2, 2)$ sont sur (S_3).

1° A_5 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$. Si aucun des $A_5A_i (i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3) on est ramené au cas I_{13}, 1°. Si tous ces segments sont sur (S_3) on trouve un triangle dont les trois côtés sont sur la surface. Le point A_5 ne peut donc être intérieur à $(A_1A_2A_3)$.

2° A_5 dans $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$.

Il ne peut être sur $A_1B_{1,2}$ ou $A_1B_{1,3}$, de plus aucun des segments A_5A_i, $(i=1, 2, 3)$ n'est sur (S_3) [n° 33, II]. Le segment $A_1B_{1,5}$ est donc sur la surface, il ne peut contenir A_4; ceci conduirait en effet à trois points alignés. $A_1B_{1,5}$ rencontre donc A_4A_2 ou A_4A_3. On peut toujours supposer que c'est le premier. Dans ces conditions A_5, A_1, A_4, A_3 sont coplanaires; mais comme le triangle $A_1A_3A_5$ n'a aucun côté sur (S_3) on est encore conduit à une impossibilité. Il ne peut donc y avoir de cinquième point dans le domaine $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$ ni dans les deux autres qui s'en déduisent par permutation circulaire.

3° A_5 dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$.

Les segments $A_5A_i (i=1, 2, 3)$ sont sur (S_3). A_5A_1 rencontre nécessairement A_2A_4 ou A_3A_4 en dehors de A_4 (sans quoi trois A seraient alignés). On obtient alors un triangle dont les côtés sont sur la surface, ce qui est impossible.

En résumé nous pouvons affirmer que si A_4 est intérieur à $(A_1A_2A_3)$, A_5 ne peut exister.

II. A_4 est dans un domaine tel que $(B_{1,2}A_1B_{1,3})$. Comme A_4A_2 et A_4A_3 ne sont pas sur la surface, il suffit de permuter A_1 et A_4 pour se ramener au cas I; A_5 ne peut donc exister.

III. A_4 est dans un domaine $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$. D'après ce qui précède il suffira de placer A_5 dans $(B_{2,1}A_2A_3B_{3,1})$ ou dans un domaine analogue par exemple $(B_{3,2}A_3A_1B_{1,2})$. Dans les deux cas les 6 segments A_4A_i, A_5A_i, $(i=1, 2, 3)$ sont sur (S_3) et l'on voit aisément que deux au moins se croisent, ce qui conduit à un triangle dont les côtés sont sur la surface, c'est-à-dire encore à une impossibilité.

La démonstration est achevée. Je dis que s'il y a quatre points A ils ne sont pas dans un même plan. On a vu plus haut que si un des quatre triangles formés avec trois des points n'a aucun côté sur (S_3) son plan ne peut contenir un quatrième point A. Il suffira donc de considérer le cas où chacun des quatre triangles possède deux de ses côtés sur (S_3). Considérons $A_1A_2A_3$; deux de ses côtés A_1A_2, A_1A_3 par exemple sont sur (S_3), A_2A_3 n'y étant pas. Mais alors A_4A_2 et A_4A_3 s'y trouvent. Si les quatre points sont dans un plan, celui-ci contient un contour fermé $A_1A_2A_4A_3A_1$, ce qui conduit à un plan d'appui local [n° 26, I].

En définitive nous avons la proposition suivante :

Si (S_3) *ne possède nulle part à son intérieur de plan d'appui local, tous ses points intérieurs sont ordinaires sauf peut être 4 au plus; le segment joignant deux points non ordinaires ou son supplément, ou les deux sont sur* (S_3); *s'il y a quatre points non ordinaires, ils ne sont pas dans un même plan.*

35. Étudions maintenant le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M)$ en un point intérieur ordinaire M. Il ne peut être ici du sixième ordre conique car un morceau de cône possède des plans d'appui locaux [n° 20 et 26, II].

Si $\mathcal{D}(M)$ est du quatrième ordre conique, il ne peut avoir plus de deux couples de demi-tangentes opposées, car dans ce cas (S_3) possède deux angles plans de sommet M. Il faut examiner de plus près le cas où $\mathcal{D}(M)$ possède exactement deux couples de demi-tangentes opposées, situés dans un plan P. On a vu au n° 23 *bis* qu'il existe dans tous les cas deux angles opposés D_1MD_2 et $D'_1MD'_2$, dont les côtés forment les couples de demi-tangentes opposées et tels que le secteur (D_1, D_2) de $\mathcal{D}(M)$ soit d'un côté de P au sens strict, le secteur (D'_1, D'_2) étant du même côté au sens strict ou entièrement dans le plan. Considérons un voisinage Σ_M rapporté comme d'habitude à des axes $M\xi\eta\zeta$. Pour fixer les idées choisissons $M\zeta$ du côté où se trouve le secteur (D_1, D_2) et appelons dessus de P le côté de $M\zeta$. Le morceau de Σ_M qui se projette parallèlement à $M\zeta$ dans l'angle D_1MD_2 a au voisinage de M des points du côté de $M\zeta$. Coupons par un plan Q parallèle à $M\zeta$, passant par un de ces points et rencontrant MD_1 et MD_2 à l'intérieur de Σ_M. Nous obtiendrons sur Σ_M un arc que nous pouvons appeler $\widehat{D_1D_2}$. Soit M_1 le point de cote maximum de cet arc, la parallèle à P menée par M_1 dans le plan Q définit avec M un plan R, tel que le contour MD_1D_2M soit au-dessous de lui. Si nous établissons que le morceau limité par ce contour possède un point intérieur situé dans R ou au-dessus nous pourrons affirmer l'existence pour (S_3) d'un plan d'appui local [n° 26, I]. Ce qui nous conduira en définitive à la conclusion que $\mathcal{D}(M)$ ne peut pas être du quatrième ordre conique. Soit $\widehat{MM_1}$ l'arc joignant M à M_1 sur la section de Σ_M par le plan ζMM_1. Désignons par MD la demi-tangente en M à $\widehat{MM_1}$ et par ML la demi-droite opposée à la seconde demi-tangente en M à la section de Σ_M par le plan ζMM_1. On sait que MD est au-dessus de P au sens strict, alors que ML est certainement au-dessous au sens large. D'autre part l'arc $\widehat{MM_1}$ appartient à l'angle LMD [n° 23]. Si M_1 est intérieur à cet angle il y aura sur $\widehat{MM_1}$ des points situés au-dessus de R au sens strict. Si M_1 est sur un des côtés de l'angle ce ne peut être que sur MD. On voit alors aisément que $\widehat{MM_1}$ se réduit au segment MM_1. En effet, si $\widehat{MM_1}$ possédait un point N_1 au-dessous de MM_1 une sécante joignant M à un point intérieur du segment N_1M donnerait un retour en M et deux traversées, ce qui est impossible. La démonstration est achevée.

36. Jusqu'à présent nous avons établi qu'en tout point ordinaire M de (S_3) — supposée n'avoir pas de plans d'appui locaux — le faisceau dérivé est nécessairement du second ordre conique. Trois cas restent à examiner suivant qu'on a un vrai demi-cône, un dièdre ou un plan. Considérons d'abord le premier. Soit Σ_M un voisinage de M où $\mathcal{D}(M)$ est un vrai demi-cône. $\mathcal{D}(M)$ étant convexe il existe un plan R le laissant d'un même côté au sens strict. Ce plan ne peut passer par $M\zeta$ lequel contient deux rayons de $\mathcal{D}(M)$. Il est immédiat qu'on pourra choisir Σ_M assez petit pour qu'il soit par rapport à R du même côté que $\mathcal{D}(M)$, autrement R contiendrait des points de (S_3) aussi voisins de M que l'on veut et par suite une demi-tangente en M ce qui est impossible.

En définitive $\mathcal{D}(M)$ ne peut être en tout point ordinaire qu'un *dièdre* ou un *plan*.

37. Étudions pour commencer le cas du *dièdre*.

Soit M un point intérieur de (S_3) où le faisceau dérivé est un dièdre. (*Nous ne supposons pas que* M *est un point ordinaire*). D'après les résultats du n° 24, II, l'arête Δ du dièdre ne peut être verticale. D'autre part on voit immédiatement que les faces P_1 et P_2 ne peuvent être d'un même côté du plan vertical de Δ au sens strict. La verticale de M pénètre dans le dièdre (Δ, P_1P_2), à son intérieur s'il n'a pas une face verticale. Pour fixer les idées nous supposerons que la verticale descendante de M pénètre dans le dièdre. Donnons-nous un plan R contenant Δ et laissant le dièdre au-dessous au sens strict. Soit alors $\widehat{BMB'}$ la section de (S_3) par un plan vertical ne contenant pas Δ. Désignons par r, p_1, p_2 les traces respectives de ce plan sur R, P_1, P_2. Les demi-droites Mp_1 et Mp_2 sont les demi-tangentes en M à l'arc $\widehat{BMB'}$; elles sont au-dessous de r. Autrement dit M est un retour pour $\widehat{BMB'}$ par rapport à r. Il résulte alors de la proposition II du n° 8 que l'arc possède un point au plus sur r, nécessairement traversée ou extrémité. Par suite si $\widehat{BM}$, par exemple, possède un point au-dessus de R, $\widehat{MB'}$ est au-dessous au sens strict (sauf bien entendu en ce qui concerne M). Cette remarque va jouer un rôle essentiel. Démontrons pour commencer que Δ est toute entière sur (S_3). Pour cela considérons la section de la surface par le plan vertical de Δ. Il s'agit de montrer qu'elle n'a pas de point en dehors de cette droite. Supposons d'abord qu'elle possède un point N_0 au dessus de Δ. On peut toujours supposer que ce point n'est pas sur le bord de (S_3). Il est alors possible de trouver sur la section de la surface par le plan vertical mené par N_0 perpendiculairement à celui qui projette Δ, un arc $\widehat{N'N_0N''}$ (ayant N_0 à son intérieur et situé au-dessus d'un plan donné R laissant (Δ, P_1P_2) au-dessous au sens strict. N étant un point quelconque $\widehat{N'N_0N''}$ distinct de N_0, considérons la section de (S_3) par le plan vertical de NM. Nous obtenons un arc $\widehat{BNMB'}$. D'après ce qui précède l'arc $\widehat{MB'}$ est au-dessous de R au sens strict. On en déduit que l'arc $\widehat{MB'_0}$, correspondant à N_0 est au-dessous au sens large. Mais si un point intérieur de cet arc était sur Δ, R serait plan d'appui local en ce point. En conclusion on peut affirmer que si la section de (S_3) par le plan vertical de Δ n'est pas sur cette arête elle possède dans tous les cas un point intérieur, soit I_0, au-dessous d'elle. Considérons alors deux demi plans R_1 et R_2 d'arête Δ et tels que leurs plans supports laissent (Δ, P_1P_2) au-dessous d'eux au sens strict, choisis de manière que (Δ, R_1R_2) contienne (Δ, P_1P_2) à son intérieur; le point I_0 sera dans ces conditions intérieur à (Δ, R_1R_2). Coupons alors (S_3) par le plan vertical mené par I_0 perpendiculairement au plan vertical de Δ. On pourra trouver sur la section un arc partiel $\widehat{I'I_0I''}$ contenant I_0 à son intérieur et tout entier intérieur au dièdre (Δ, R_1R_2). Considérons les verticales de I' et I'' chacune d'elles rencontre une des faces de (Δ, R_1R_2). On peut toujours choisir les notations de manière que la première rencontre R_1, soit I'_1 le point d'intersection; la seconde rencontrera R_2 en un point I''_2. D'autre part si I' et I'' sont assez voisins de I_0 l'arc $\widehat{I'I''}$ sera au-dessous du segment $I'_1I''_2$, puisque I_0 est au-dessous de Δ. Considérons alors le morceau de (S_3) limité par les arcs $\widehat{I'I''}$, $\widehat{I'M}$ et $\widehat{I''M}$; son contour aura tous ses points, sauf M, au dessous du plan $I'_1I''_2M$. Mais la demi-droite $M\Delta_0$ d'origine M, portée par Δ et dirigée du côté de I_0 étant une demi-tangente en M à (S_3) il existe sur la surface des points M' aussi voisins qu'on veut de M tels que la demi-droite MM' tende vers $M\Delta_0$. Il en résulte que le morceau $(MI'I'')$ possède des points au-dessus du plan $MI'_1I''_2$ ce qui implique l'existence d'un plan d'appui local [n° 26, I]. Nous avons donc bien établi que *si en un point intérieur* M *le faisceau dérivé est un dièdre, l'arête de celui-ci est toute entière sur* (S_3).

38. Poursuivant notre étude, nous allons préciser la disposition de (S_3) par rapport aux supports de P_1 et P_2. Prenons sur Δ un point M' intérieur à (S_3) et distincts de M et donnons-nous, comme précédemment un plan R passant par Δ et laissant P_1 et P_2 au-dessous de lui au sens strict. Considérons la section L' de

(S_3) par un plan vertical π' contenant M', mais pas Δ. Je dis que L' traverse R en M'. En effet, L' étant d'ordre 3 au plus on peut trouver sur elle deux arcs partiels $\widehat{N'_1M'}$, $\widehat{M'N'_2}$ situés de part et d'autre du plan vertical de Δ, chacun d'eux étant sur R ou d'un même côté de R au sens strict (il suffit de considérer l'intersection de L' avec la trace de π' sur R) Soit N un point variable de $\widehat{N'_1M'N'_2}$, la section de (S_3) par le plan vertical de MN est un arc $\widehat{B'NMB}$ et nous savons que si N est au-dessus de R, l'arc $\widehat{MB}$ est au-dessous, et que si N est au-dessous de R l'arc $\widehat{NM}$ est au-dessous et enfin que si N est dans R les deux arcs $\widehat{NM}$ et $\widehat{MB}$ sont au-dessous.

Ceci dit supposons que $\widehat{N'_1M'}$ par exemple soit dans R; lorsque N décrit $\widehat{N'_1M'}$ l'arc $\widehat{NMB}$ reste au-dessous de R. Nous distinguerons alors deux cas, suivant que $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessus ou au-dessous de R au sens large. Si $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessus au sens large l'arc $\widehat{MB}$ correspondant à N sur $M'N'_2$ est au-dessous de R. On en déduit que lorsque N décrit $\widehat{N'_1N'_2}$ le morceau de (S_3) balayé par $\widehat{MB}$ est au-dessous de R sauf lorsqu'il est sur Δ. R est donc un plan d'appui local.

Si $\widehat{M'N'_2}$ est au-dessous au sens large on considérera le morceau balayé par $\widehat{NM}$ et l'on aboutira à la même conclusion. Nous sommes donc assurés que chacun des arcs $\widehat{N'_1M'}$ et $\widehat{M'N'_2}$ est d'un même côté de R au sens strict. S'ils sont tous les deux au-dessus le morceau balayé par $\widehat{MB}$ possède R comme plan d'appui local, s'ils sont tous les deux au-dessus ce sera le morceau balayé par $\widehat{NM}$. En résumé : L' traverse R en M'.

Pour simplifier le langage désignons par *gauche* et *droite* les deux parties de (S_3) séparées par Δ et supposons que L' soit au-dessus de R au voisinage gauche de M'. Prenons sur Δ du côté opposé à M' par rapport à M un point M'' et coupons (S_3) par un plan vertical π'' ne contenant pas Δ. L'arc section, soit L'' est au-dessous de R au voisinage droit de M''. Il suffit pour le voir de considérer sur L' un point voisin de M' à gauche et la section par le plan vertical contenant ce point et M. Comme L'' traverse R en M il est au-dessus au voisinage gauche de M''. On voit alors que la section de (S_3) par un plan vertical quelconque traversant Δ en un point intérieur à (S_3) est au voisinage de ce point au-dessus de R à gauche et au-dessous à droite.

Considérons encore M' sur Δ et intérieur à (S_3) et deux points analogues M'' et M''', le second étant au delà de M, le troisième entre M' et M. Soient π, π'', π''' trois plans verticaux parallèles traversant Δ en M, M'', M''' et L, L'', L''' les sections de (S_3) par ces plans. Au voisinage gauche de M'' et de M''', L'' et L''' sont au-dessus de R, tandis que L est au-dessous. Si donc nous coupons (S_6) par un plan vertical π' contenant M′ et un point de L″ situé à gauche de M″ au voisinage de M″, on voit immédiatement que, si ce voisinage est assez étroit, la trace de L′ sur R traverse (S_3) une fois entre L‴ et L et une seconde fois entre L et L″. On déduit alors du n° 10 que M′ est *ordinaire* et que la trace en question est extérieure à $\mathcal{C}(M')$. Mais on a vu plus haut [n° 36] qu'en tout point ordinaire le faisceau dérivé est un dièdre ou un plan. Si donc $\mathcal{D}(M')$ est un dièdre son arête est Δ, si c'est un plan il contient cette droite. D'après ce qu'il vient d'être dit aucun des demi-plans d'arête Δ constituant $\mathcal{D}(M')$ n'est sur R.

Considérons maintenant un second plan tel que R, soit $\bar{R}$. S'il est au-dessous de R à gauche de Δ, un arc quelconque L′ section par un plan vertical π' traversant Δ en un point quelconque M′ intérieur à (S_3), distinct de M, sera au-dessus de $\bar{R}$ au voisinage gauche de M′. Je dis qu'il en est de même si $\bar{R}$ est au-dessus de R à gauche de Δ. S'il en était autrement la demi-tangente à gauche en M′ à L′ serait au-dessous de $\bar{R}$ et au-dessus de R. Elle définirait un plan tel que R contenant un demi-plan de $\mathcal{D}(M')$ ce qui est impossible.

En résumé nous sommes arrivés à la conclusion suivante :

quels que soient R laissant $(\Delta, P_1 P_2)$ au-dessous de lui au sens strict, et M′ sur Δ, intérieur à (S_3) et distinct de M, toute section verticale de (S_3) contenant M′ (mais pas M) est au voisinage de M′ au-dessus de R d'un certain côté de Δ, indépendant de R, de M′ et du plan de la section et au-dessous de R de l'autre côté.

De plus M′ est *ordinaire* et $\mathcal{D}(M')$ est un dièdre d'arête Δ ou un plan la contenant.

Comme on le verra plus loin ce résultat est bien incomplet, mais c'est une étape que je n'ai pu éviter.

Pour fixer les idées nous supposerons que les arcs L′ sont *au-dessus* de R au voisinage *gauche* de Δ.

39. Nous n'avons pas écarté le cas où l'une des faces de $(\Delta, P_1 P_2)$ est verticale. Continuons notre étude en examinant d'abord ce cas. Comme le dièdre peut être à droite ou à gauche du plan vertical de Δ, ce cas se subdivisera en deux.

a. P_1 est vertical et P_2 à droite du plan vertical de Δ.

Donnons-nous sur Δ deux points M′ et M″ intérieurs à (S_3), situés de part et d'autre de M et un plan R contenant Δ et laissant $(\Delta, P_1 P_2)$ au-dessous de lui au sens strict. Soit L′ et L″ deux sections verticales contenant : la première M′ la seconde M″, mais pas M. On peut prélever sur L′ et L″ des arcs $\widehat{N'M'}$ $\widehat{N''M''}$ dont les extrémités N′ et N″ sont dans un plan vertical parallèle à celui de Δ et situé à gauche de ce dernier, de telle manière que $\widehat{N'M'}$ et $\widehat{N''M''}$ soient au dessus de R.

Considérons alors l'arc $\widehat{N'N''}$. Il est possible de mener par Δ un plan tel que R, soit R laissant $\widehat{N'N''}$ est au-dessus de lui. Or il y a nécessairement au voisinage de M des points au-dessous de ce plan. Ceci conduit à une contradiction car on a un plan d'appui local [n° 26]. Le cas envisagé est impossible.

b. P_2 est vertical et P_1 à gauche du plan vertical de Δ.

Considérons encore une section verticale L' passant par un point M' de Δ. Elle est au voisinage gauche de M' au-desus de tout plan R et au-dessous au voisinage droit. Comme R peut être choisi aussi près qu'on veut de la verticale, on en déduit que $\mathcal{D}(M')$ est le plan vertical support de P_2, plan traversé par la surface.

40. Je vais montrer que cette propriété se conserve lorsque le dièdre $(\Delta, P_1 P_2)$ n'a pas de face verticale. Une remarque préliminaire sera nécessaire.

Désignons toujours par P_1 le demi-plan situé à gauche du plan vertical de Δ au sens strict, P_2 sera à droite également au sens strict.

Soient N'_1 et N_2 deux points de (S_3) situés le premier à gauche le second à droite de Δ, tous les deux supposés au-dessous du support de P_2 au sens strict et tels que l'arc $\widehat{N'_1 N_2}$ rencontre Δ en un point M' intérieur à (S_3) et distinct de M. Nous allons étudier d'abord la disposition d'un tel arc par rapport au plan support de P_2. Considérons un plan R (passant par Δ et laissant le dièdre $(\Delta, P_1 P_2)$ au-dessous de lui au sens strict) et désignons par r sa trace sur le plan vertical de $\widehat{N'_1 N_2}$. Faisons tendre R vers le support de P_2. Lorsqu'il sera assez près de sa limite la droite r laissera N'_1 et N_2 d'un même côté au sens strict. D'autre part on a vu [n° 38] que $\widehat{N'_1 N_2}$ traverse en M', l'arc à gauche étant au-dessus de r. Cela implique donc une seconde traversée entre N'_1 et M'. Si r contenait un troisième point de $\widehat{N'_1 N_2}$ ce serait encore une traversée [n° 6], car r ne renferme aucune extrémité de l'arc. Mais alors on aboutirait à une contradiction puisque N'_1 et N_2 sont d'un même côté de r. L'arc $\widehat{M'N_2}$ est donc au-dessous de r quel qu'il soit. Il est par suite au-dessous de P_2 au sens large. On en déduit que la demi-tangente en M' à $\widehat{M'N_2}$ est dans P_2 ou au-dessous. Considérons le premier cas. Je dis que $\widehat{N'_1 M'}$ est alors au-dessous du support de P_2 au sens large. En effet, supposons que cet arc possède un point N au-dessus; on pourra tracer par M' une sécante laissant N au-dessus N_2 au dessous d'elle Mais alors les arcs $\widehat{N'_1 N}$ et $\widehat{M'N_2}$ traverserons la sécante chacun à leur intérieur, ce qui exige que M' soit une troisième traversée [n° 6]. Nous aboutissons à une contradiction car les extrémités de l'arc sont d'un même côté de la sécante.

Supposons maintenant que la demi-tangente $\widehat{M'D_2}$ en M' à l'arc $\widehat{M'N_2}$ soit au-dessous de P, et donnons-nous dans le plan vertical de l'arc une demi-droite M'L passant au-dessus de N_2 et de $M'D_2$ et au-dessous de P_2 tout ceci au sens strict. Je dis que $\widehat{M'N_2}$ est au-dessous de $M'L$ au sens strict, sauf bien entendu en ce qui concerne M'. Si l'arc possédait un point sur $M'L$ ou au-dessus il traverserait deux fois une sécante légèrement au-dessous de $M'L$ et ceci à l'intérieur de de l'arc $\widehat{M'N_2}$; il faudrait alors que $\widehat{N'_1N_2}$ traverse aussi en M', ce qui conduit à une contradiction car la sécante laisse N'_1 et N_2 d'un même côté.

41. La démonstration s'achèvera facilement. Supposons d'abord que (S_3) possède à droite de Δ un point N_2 au-dessous de P_2 au sens strict; N_2 peut être sur le bord mais pas sur Δ. Considérons la section de (S_3) par le plan vertical MN_2, elle est à gauche de M et dans son voisinage au-dessous du support de P_2 puisque la demi-tangente à gauche en M est dans P_1. Soit alors N_1 un point assez voisin de M pour être au-dessous du support de P_2 au sens strict. Coupons (S_3) par le plan vertical mené par N_1 parallèlement au plan vertical de Δ. Nous pourrons prélever sur cette section un arc $\widehat{N'_1N_1N''_1}$ situé tout entier au-dessous du support de P_2 au sens strict. Si N''' est un point quelconque de cet arc distinct de N_1 les considérations précédentes s'appliquent à l'arc $\widehat{N'''N_2}$. Il n'est pas possible que deux positions distinctes de N''' la demi-tangente à droite à l'arc en son point sur Δ soit dans P_2, car le morceau de (S_3) limité par les deux arcs correspondants et l'arc de $\widehat{N'_1N''_1}$ qu'ils déterminent aurait son bord au-dessous du support de P au sens large et des points intérieurs (sur Δ) dans ce plan, ce qui impliquerait un plan d'appui local [n° 26, I].]

Nous pouvons donc supposer en déplaçant légèrement $N'_1N''_1$ que les demi-tangentes à droite aux arcs $\widehat{N'_1N_2}$ et $\widehat{N''_1N_2}$ aux points M' et M'' où elles rencontrent Δ sont au-dessous de P_2. Dans ces conditions les arcs $\widehat{M'N_2}$ et $\widehat{M''N_2}$ sont au-dessous au sens strict d'un demi-plan d'arête Δ et situé lui-même au-dessous de P_2 au sens strict. Mais la demi-tangente en M à l'arc $\widehat{MN_2}$ étant dans P_2 le morceau de (S_3) limité par le segment $M'M''$ et les arcs $\widehat{M'N_2}$ et $\widehat{M''N_2}$ possède des points au-dessus du demi-plan considéré au sens strict. Nous obtenons encore un plan d'appui local.

En résumé tous les points de (S_3) situés à *droite* de Δ sont au-dessus de P au sens large. On en déduit immédiatement que tous les points intérieurs sont au dessus au sens strict, car si un point intérieur était dans P_2, son support serait plan d'appui local au point considéré. Reste à voir ce qui se passe pour les points du bord. Supposons qu'un point N du bord soit dans P_2 et coupons (S_3) par le plan vertical de NM. L'arc $\widehat{MN}$ a tous ses points sauf M et N au dessus de P. En coupant la section par une sécante de son plan, passant par M et assez voisine de P_2 on obtiendra un retour en M et deux traversées (au moins) ce qui est impossible [n° 10].

Nous sommes désormais assurés que (S_3) est à droite de Δ au-dessus de P_2 au sens strict. Considérons alors un point quelconque de (S_3) situé à gauche de Δ, soit N_1 et coupons par le plan vertical de MN_1. Nous obtenons un arc $\widehat{N_1MB_2}$, dont l'arc partiel $\widehat{MB_2}$ est au-dessus de P_2. Si par un point N_2 voisin de M sur cet arc nous menons la droite MN_2 elle donnera en M un retour et en N_2 une traversée ce qui exige que N_1 soit au-dessous de la sécante donc au-dessous du support de P_2 au sens strict.

En définitive (S_3) est à gauche de Δ au-dessous du support de P_2 et à droite elle est au-dessus, dans les deux cas au sens strict. Il en résulte immédiatement qu'en tout point de Δ intérieur à (S_3) et distinct de M le faisceau dérivé est un plan stationnaire : le support de P_2. Il suffit de se rappeler que le demi-plan gauche de $\mathcal{D}(M')$ en un point M' distinct de M est au-dessus de tout plan R et que le demi-plan droit est au-dessous [n° 38].

42. Dans ce qui va suivre P_2 pourra être vertical ou non. Je vais montrer que le bord gauche de (S_3) possède des points au-dessous de P_1. Il en résultera en particulier que le point M est ordinaire, ce qui n'a pas été supposé.

Soient B_0 et B'_0 les extrémités du bord gauche situées sur Δ et B un point de ce dernier, distinct de B_0 et B'_0. Le demi-plan (Δ, B) est au-dessous au sens strict du demi-plan P'_2 opposé à P_2. Je dis que si B tend vers B_0, par exemple, (Δ, B) tend vers P'_2. En effet, donnons-nous un plan R voisin de P_2 (je rappelle qu'un plan R contient Δ et laisse le trièdre (Δ, P_1P_2) au-dessous de lui au sens strict) et menons par un point M_1 intérieur au segment MB_0 un plan vertical distinct de celui de Δ. A gauche de M_1 la section aura un petit arc $\widehat{N_1M_1}$ au-dessus de R. Si on coupe alors par le plan vertical de N M où N est point quelconque de $\widehat{N_1M_1}$, distinct de M, on obtiendra un arc dont l'extrémité gauche sera au-dessus de R [n° 27]. Par suite il existe sur le bord un arc $\widehat{B_1B_0}$ au-dessus de R. Comme R est aussi près qu'on veut de P'_2, le demi-plan (Δ, B) tend bien vers P'_2 quand B tend vers B_0. Il en est de même lorsque B tend vers B'_0, On en déduit que (Δ, B) varie continûment quand B décrit l'arc $B_0B'_0$ du bord gauche. Il balaye un dièdre dont la face supérieure est P'_2 et la face inférieure un demi-plan, atteint pour un point au moins B_m. Le contour du morceau gauche de (S_3) est au-dessus de (Δ, B_m) au sens large. Il en résulte que tous les points intérieurs du morceau sont au-dessus du plan au sens strict, sans quoi on aurait un plan d'appui local [n° 26]. B_m ne peut donc être au-dessus de P_1. Je dis qu'il ne peut non plus être sur lui. En effet, supposons B_m dans P_1 et coupons par le plan vertical de B_mM. Un point N intérieur à l'arc $\widehat{B_mM}$ est au dessus de B_mM, la droite NM donnera donc pour la section totale par le plan vertical de B_mM un retour en M et une traversée en N[n° 8-11], ce qui est contradictoire avec le fait que B_m est au-dessous de NM. Le point B_m est donc bien *au-dessous* de P_1 au *sens strict.* On voit immédiatement qu'une sécante du plan vertical de B_mM, issue de M, située à gauche de ce point au-dessous de P_1 et passant au-dessus de B_m donnera deux traversées : l'une entre B_m et M, l'autre en M. On en déduit que M est un *point ordinaire* [n° 10].

En définitive et rassemblant les résultats obtenus depuis le n° 37 nous obtenons la proposition suivante.

Si en un point intérieur M *de* (S_3) (*d'ordre* 3 *et supposé n'avoir nulle part de plan d'appui local*) *le faisceau dérivé est un dièdre d'arête* Δ :

1° *le point* M *est ordinaire;*

2° Δ *est tout entière sur* (S_3)*;*

3° *en tout point de* Δ*, autre que* M *et intérieur à* (S_3) *le faisceau dérivé est un plan stationnaire : le support de l'une des faces dièdre, lequel plan ne contient d'autres points de* (S_3) *que ceux de* Δ*, le long de laquelle elle le traverse;*

4° *L'autre face du dièdre est traversée par* (S_3) *qui possède des points intérieurs au dièdre aussi voisins qu'on veut de* M.

On peut encore ajouter que (S_3) ne peut contenir une droite ayant un point commun avec Δ, même sur le bord. Il serait intéressant également d'étudier les sections de la surface par les plans contenant Δ. Voici ce qu'on peut dire : La section de (S_3) par un plan R contient à gauche un arc du second ordre tangent à Δ en M; la section par le support de P_1 contient un arc du second ordre passant par M (¹).

Je ne donnerai pas les démonstrations pour ne pas allonger ce Mémoire, car je n'ai pu jusqu'à présent utiliser ces résultats pour améliorer le dénombrement des points où le faisceau dérivé est un dièdre. Je signale toutefois qu'ils m'ont guidé dans la difficile construction d'un exemple de (S_3) n'admettant nulle part à son intérieur de plan d'appui local et telle qu'en un point ordinaire le faisceau dérivé y soit un dièdre. On trouvera cet exemple dans la note II.

43. Le théorème du numéro précédent conduit à penser que les points de (S_3) où le faisceau dérivé est un dièdre sont très rares. Lorsque le domaine (C), dans lequel est considérée la fonction $f(x, y)$ qui définit (S_3), est le plan des x, y tout entier, nous allons voir aisément que le faisceau dérivé peut être un dièdre en un point au plus. Mais dans le cas où (C) est borné, j'ai pu établir seulement que tout morceau de (S_3) entièrement intérieur à elle possède seulement un nombre fini de tels points. Tous mes efforts ont été vains pour améliorer ce résultat. C'est la raison pour laquelle

(¹) Un plan R est un plan touchant $\mathcal{D}$(M) le long de sa seule arête.

j'ai longtemps différé la publication du présent Mémoire, car je suis persuadé qu'il est très imparfait. Quoiqu'il en soit, considérons d'abord le cas où (S_3) se projette biunivoquement sur tout le plan des x, y. Soit M un point où $\mathcal{D}(M)$ est un dièdre $(\Delta, P_1 P_2)$, les notations et les conventions étant les mêmes que plus haut. S'il existe un second point M_1 où le faisceau dérivé est un dièdre, il lui correspond une droite Δ_1, de la surface. D'après ce qui a été dit au numéro précédent Δ_1 ne peut croiser Δ; il faut donc que les plans verticaux de Δ et Δ_1 soient parallèles. Ceci conduit à considérer deux cas suivant que les droites sont ou non parallèles.

1° Δ_1 est parallèle à Δ.

Supposons d'abord Δ_1 à gauche de Δ. Elle sera au-dessous du support de P_2 on pourra donc trouver un plan R (plan contenant Δ et laissant $\mathcal{D}(M)$ au-dessous de lui au sens strict) passant au-dessus de Δ_1. En coupant par des plans verticaux passant par M on voit que le morceau de (S_3) compris entre Δ_1 et Δ est au-dessous de R [n° 37] ce qui est impossible [n° 38].

Supposons maintenant Δ_1 à droite. On peut trouver un plan R passant au-dessous de Δ_1. Mais alors toute la partie gauche de (S_3), par rapport à Δ, est au-dessous de R, ce qui est impossible [n° 38].

2° Δ_1 n'est pas parallèle à Δ.

Dans ce cas Δ_1 traverse en un point I un plan R donné quelconque. En coupant par des plans verticaux passant par M on voit immédiatement en utilisant encore les remarques du n° 37 que R est un plan d'appui local; ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration est achevée. Elle montre que (S_3) ne peut posséder aucune droite en dehors de Δ.

44. Revenons au cas où (S_3) est *bornée*. Nous savons que à chaque point M_i où $\mathcal{D}(M_i)$ est un diédre correspond une droite Δ_i de la surface et un plan P_i, contenant cette droite, faisceau dérivé en tout point de Δ_i distinct de M_i, ce plan P_i étant traversé par (S_3). Nous savons également que deux Δ_i ne peuvent avoir de point commun sur (S_3). Considérons un plan vertical rencontrant Δ_i en dehors de M_i, la section comportera une inflexion sur Δ_i. Comme un arc d'ordre trois se compose de 4 arcs convexes au plus [n° 8, I] il possède au maximum trois points d'inflexions. On en déduit qu'un plan vertical ne peut croiser 4 Δ_i à l'intérieur de (S_3). Ces remarques permettent d'établir aisément que si le contour de (C) selon lequel se projette (S_3) est un polygone de N côtés, le nombre des points M_i est au plus égal à $N+1$. On en déduit que l'ensemble des points M_i n'a pas de point d'accumulation intérieur à (S_3), ou ce qui revient au même que tout morceau de (S_3) entièrement intérieur à elle contient un nombre nul ou fini de points M_i. Ceci peut se montrer encore de la manière

suivante. Supposons que les M_i aient un point d'accumulation ω intérieur à (S_3), il existera une suite infinie de Δ_i ayant au moins une droite d'accumulation Δ passant par ω. Ce qui est évidemment impossible, car des plans verticaux couperaient (S_3) suivant des arcs ayant plus de trois inflexions.

Lorsque les M_i ont un point d'accumulation ω sur le bord de (S_3), Δ ne peut avoir de point intérieur à la surface, car on pourrait encore trouver un plan vertical traversé par plus de trois Δ_i.

Le même raisonnement montre que Δ n'a d'autre point que ω sur (S_3). On en déduit qu'un point tel que ω ne peut se projeter verticalement à l'intérieur d'un segment de (C).

45. Abandonnant l'étude du cas où $\mathcal{D}(M)$ est un dièdre nous allons aborder celle du cas où il est un plan. Nous avons vu au numéro 25 que si $\mathcal{D}(M)$ est un plan vertical ou non le point M est ordinaire, et d'autre part que si le cône directeur des tangentes est un vrai cône, (S_3) contient deux secteurs plans. Dans l'hypothèse où nous sommes actuellement : inexistence de plans d'appui locaux, ceci ne peut avoir lieu. Nous sommes donc assurés que $\mathfrak{T}(M)$ est un plan ou un bidièdre. Je vais montrer que ce dernier cas ne peut se présenter. Supposons que $\mathfrak{T}(M)$ soit un bidièdre d'arête Δ et considérons un voisinage Σ_M de M assez petit pour qu'il ne contienne aucun point où le faisceau dérivé serait un dièdre. La proposition I du numéro 25 nous apprend que l'une des faces de $\mathfrak{T}(M)$ est le plan $\mathcal{D}(M)$ et que l'arête Δ est sur Σ_M, qu'elle partage en deux parties situées de part et d'autre de $\mathcal{D}(M)$ au sens large. Il est immédiat que pour les points intérieurs de chacune de ces parties la situation doit être entendue ici au sens strict, en raison de l'inexistence de plans d'appui locaux.

Σ_M sera rapporté comme d'habitude à des axes $M\xi\eta\zeta$ que pour simplifier l'exposé nous lierons à $\mathfrak{T}(M)$ de la manière suivante :

1° le plan $\zeta = 0$ est $\mathcal{D}(M)$;

2° l'axe $M\eta$ est porté par Δ;

3° l'axe $M\zeta$ étant fixé nous choisirons $M\xi$ de manière que le morceau de Σ_M dont les points intérieurs ont une abscisse positive soient au-dessus de $\zeta = 0$, c'est-à-dire du côté de $M\zeta$.

Pour déterminer la position de $\mathfrak{T}(M)$ par rapport aux axes, considérons la section de Σ_M par le plan $\eta = 0$. Elle possède en M une inflexion ascendante. De là résulte qu'une sécante de $\eta = 0$, issue de M et de pente positive assez petite traverse trois fois la section, ce qui montre qu'elle est extérieure à $\mathfrak{T}(M)$.

Par suite la seconde face du faisceau des tangentes en M est un plan d'équation.

$$\zeta = -K\xi.$$

où K est un nombre *positif*.

Ceci posé, prenons sur Δ deux points B et B_1, intérieurs à Σ_M d'ordonnées respectives b et $-b(b>0)$, et coupons Σ_M par les plans $\eta=\pm b$. Nous obtenons de chaque côté de $\xi=0$ deux paires d'arcs que nous limiterons aux plans $\eta=\pm a(a>0)$, soit $\widehat{A'B}$, $\widehat{A'_1B_1}$ d'abscisses négatives et $\widehat{BA}$ et $\widehat{B_1A_1}$ d'abscisses positives.

Comme un arc du troisième ordre se compose de 4 arcs convexes au plus, nous pourrons choisir a assez petit pour que les 4 arcs précédents soient convexes. Désignons enfin par $\widehat{A'A'_1}$ et $\widehat{AA_1}$ les arcs joignant A′ à A'_1 dans le plan $\xi=-a$, et A à A_1 dans le plan $\xi=a$.

Je vais montrer que le morceau $\mathfrak{M}$ de Σ_M limité par le contour $A'BAA_1B_1A'_1A'$ possède nécessairement un plan d'appui local. Ainsi sera bien prouvé que $\mathfrak{T}(M)$ ne peut être un bi-dièdre.

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Remarquons d'abord que $\widehat{AA_1}$ et $\widehat{A'A'_1}$ sont (au sens strict) le premier au-dessus, le second au-dessous de $\zeta=0$ et désignons par h le module maximum de la cote d'un quelconque de leurs points; h positif.

46. Pour aller plus loin nous allons déduire des propriétés générales du faisceau des tangentes trois conséquences qui nous seront utiles. Désignons par Γ_r le morceau de $\mathfrak{M}$ qui se projette sur $\zeta=0$, parallèlement à $M\zeta$, suivant le losange de centre M dont les côtés, de longueur $2r$, sont parallèles aux axes $M\xi$ et $M\eta$. Nous supposons r inférieur à a et à b. Le faisceau des tangentes $\mathfrak{T}(M)$ étant l'ensemble des droites passant par M, situées dans l'espace balayé par le plan $\zeta=\lambda\xi$ lorsque λ parcourt l'intervalle fermé $(-K, 0)$, on déduit de la définition générale du faisceau des tangentes que pour tout nombre positif ε donné (que nous prendrons inférieur à K) on pourra choisir r assez petit de manière que dans Γ_r :

1° toute corde située dans un plan $\xi=$ const. ait (en axes η, ζ) un coefficient angulaire moindre que ε en module;

2° toute corde située dans un plan $\eta=$ const. ait (en axes ξ, ζ) un coefficient angulaire compris entre $-K-\varepsilon$ et $+\varepsilon$;

3° une corde au moins : M′M″ située dans un plan $\eta=$ const. ait (en axes ξ, ζ) un coefficient angulaire inférieur à $-K+\varepsilon$.

Les deux premières propriétés sont une conséquence immédiate de la définition de faisceau des tangentes. La troisième résulte du fait que pour obtenir les tangentes situées dans un plan contenant $M\zeta$ l'on peut se borner aux cordes parallèles à ce plan [n° 1, 2°].

Considérons M′M″ et pour fixer les idées supposons l'abcisse de M′ inférieure à celle de M″. La cote de M′ sera supérieure à celle de M″, on en déduit que les abscisses de M' et M'' ont nécessairement le même signe. Quitte à remplacer le trièdre de référence $M\xi\eta\zeta$ par son symétrique on pourra toujours supposer que ce signe est $+$. C'est ce que nous ferons. Nous pourrons ainsi nous borner à considérer le morceau $\overline{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ limité par le contour AA_1B_1BA et de même le morceau $\overline{\Gamma}_r$ de Γ_r situé à droite (au sens large) de $\xi = 0$. La cote d'un point de Γ_r d'abscisse positive ξ est positive et d'après la remarque 2° du présent numéro elle est moindre que $\varepsilon\xi \leqq \varepsilon r < \varepsilon a$.

Coupons $\overline{\mathfrak{M}}$ par le plan $\eta = \eta'_0$ contenant $M'M''$ nous obtenons un arc $\widehat{B'_0M'M''A'_0}$ dont les extrémités B'_0 et A'_0 sont respectivement sur BB_1 et $\widehat{AA_1}$. La cote de B'_0 est nulle; celle de M' est supérieure à celle de M'', toutes deux sont positives et moindres que εa, celle de A'_0 est au moins égale à h. Nous supposerons ε tel que εa soit inférieur à h. Donnons-nous alors dans $\eta = \eta'_0$ une sécante passant par un point intérieur du segment $M'M''$ de coefficient angulaire supérieur à celui de $M'M''$ mais inférieur à $-K+\varepsilon$. Les points B'_0 et M'' seront au-dessous, les points M' et A'_0 au dessus de cette sécante, qui traversera dont l'arc en trois points N, N', N'', les deux premiers appartenant certainement à $\overline{\Gamma}_r$. Considérons à l'intérieur du segment $N'N''$ un point situé en dehors de la trace des segments de l'arc MN' s'il en existe. Dans le plan $\eta = \eta'_0$ on peut mener par ce point une droite qui touche $\widehat{NN'}$ en un point unique : M'_0 et qui restant au dessus de $\widehat{NN'}$ traversera l'arc $\widehat{N'N''}$. Le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M'_0)$ est un plan et comme l'arc $\widehat{NM'_0N'}$ n'a dans ce plan que M'_0 le faisceau des tangentes $\mathcal{T}(M'_0)$ est confondu avec $\mathcal{D}(M'_0)$ [n° 25 III]. Autrement dit le faisceau dérivé (qui en tout point intérieur de Σ_u est un plan) est continu en M'_0, dont je désignerai les coordonnées par $\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0$.

D'autre part la trace de $\mathcal{D}(M'_0)$ sur $\eta = \eta'_0$ a un coefficient angulaire inférieur à $-K+\varepsilon$. Enfin les extrémités B'_0 et A'_0 sont : la première au-dessous, la seconde au-dessus de $\mathcal{D}(M'_0)$ et il existe sur $\widehat{B'_0A'_0}$ un point N'_1 d'abscisse $\xi'_1 > \xi'_0$ situé au-dessous de $\mathcal{D}(M'_0)$.

Mettons l'équation de $\mathcal{D}(M'_0)$ sous la forme :

$$\zeta = \zeta'_0 + \alpha'(\xi - \xi'_0) + \beta'(\eta - \eta'_0).$$

D'après ce qui vient d'être vu α' est inférieur à $-K+\varepsilon$, et d'autre part comme conséquence de la remarque 1° du présent numéro β' est en module moindre que ε.

Pour aller plus loin il nous faudrait être certain que $\overline{\mathfrak{M}}$ possède au voisinage de M'_0 de chaque côté de $\eta = \eta'_0$ des points situés au dessus de $\mathcal{D}(M'_0)$. Or il peut arriver qu'il n'en soit pas ainsi (¹). Pour éviter cette difficulté nous allons

(¹) La section d'une surface du 3ᵉ degré par son plan tangent en un point peut avoir un rebroussement au point considéré.

déterminer dans $\overline{\Gamma}_r$ un point $M_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ répondant à la condition qui nous est nécessaire et choisi assez près de M'_0 pour que les coefficients α et β de l'équation de $\mathcal{D}(M_0)$, soit :

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0),$$

satisfassent aux mêmes conditions que α' et β'.

En raison de la continuité de $\mathcal{D}(M)$ en M'_0 il suffira que $M_0 M'_0$ soit moindre qu'une certaine quantité ω pour que les conditions soient remplies. Dans tous les cas il y a à une distance de M'_0 moindre que ω un point M''_0 de $\overline{\Gamma}_r$ situé au dessus de $\mathcal{D}(M'_0)$ sans quoi celui-ci serait plan d'appui local. Si ω est assez petit M''_0 ne peut être dans le plan $\eta = \eta'_0$. Considérons l'arc $\widehat{M'_0 M''_0}$ de la section de $\overline{\Gamma}_r$ par le plan projetant $M'_0 M''_0$ parallèlement à $M\zeta$. Par un point du support de $M'_0 M''_0$ extérieur à ce segment et à la trace des supports des segments qui pourraient se trouver sur $\widehat{M'_0 M''_0}$ on peut mener une droite T_0 qui touche $\widehat{M'_0 M''_0}$ en un point unique M_0, tous les points de l'arc étant au-dessus. Mais si M_0 est assez voisin de M'_0 la section $\widehat{B_0 M_0 A_0}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$ par $\eta = \eta_0$ aura ses extrémités B_0 et A_0 respectivement au-dessous et au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ et un point N'_0 d'abscisse $\xi'_1 > \xi_0$ au-dessous.

Considérons maintenant l'intersection du contour de $\overline{\mathfrak{M}}$ avec $\mathcal{D}(M_0)$. D'abord $\widehat{AA_1}$.

Si nous faisons $\xi = a$ dans l'équation de $\mathcal{D}(M_0)$ nous obtenons :

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha(a - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0),$$

ζ_0 est moindre que εa, le second terme est négatif, le troisième est en module moindre que εb. Si donc ε a été choisi tel que $\varepsilon(a + b)$ soit inférieur à h, l'arc $\widehat{AA_1}$ est au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens strict.

Considérons maintenant $B_0 B + \widehat{BA}$ dont les extrémités B_0 et A sont alors : la première au-dessous, la seconde au dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ l'une et l'autre au sens strict.

Remarquons d'abord que $B_0 B$ possède au plus un point sur $\mathcal{D}(M_0)$ (autrement α serait positif). Désignons par L la trace de $\mathcal{D}(M_0)$ sur $\eta = b$, son coefficient angulaire est négatif. Envisageons pour commencer le cas où $B_0 B$ possède un point I dans $\mathcal{D}(M_0)$, B est alors au-dessus ou sur L, comme l'arc $\widehat{BA}$ a tous ses points sauf B au dessus de la droite de coefficient angulaire zéro passant par B, seul ce point de l'arc peut être dans $\mathcal{D}(M_0)$ et ceci lorsque I est en B. Dans les deux cas le contour $B_0 B + \widehat{BA}$ n'a dans $\mathcal{D}(M_0)$ que le point I et traverse le plan en ce point.

Reste à examiner le cas où $B_0 B$ est tout entier au-dessous de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens strict. Dans ces conditions les extrémités de l'arc convexe $\widehat{BA}$ sont de part et d'autre de L qui traverse l'arc en un point unique I.

En résumé : dans tous les cas le contour $B_0B+\widehat{BA}$ traverse $\mathcal{O}(M_0)$ en un point unique I. De même $B_0B_1+\widehat{B_1A_1}$ traverse ce plan en un point unique I_1.

Rappelons enfin que le plan mené par T_0 parallèlement à $M\zeta$ n'est pas parallèle à $\eta=0$ et coupe $\mathcal{M}$ suivant un arc qui au voisinage de M_0 et de part et d'autre de M_0 est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$ et aussi que l'arc $\widehat{B_0A_0}$ est disposé de la manière suivante :

B_0 et A_0 sont : le premier au-dessous, le second au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$, un point N'_0 de $\widehat{M_0A_0}$ est au-dessous de $\mathcal{O}(M_0)$, au sens strict dans les trois cas.

La démonstration est presque achevée. Faisons une dernière remarque qui nous sera utile. Soit $\widehat{UM_0V}$ un arc section de $\mathcal{M}$ par un plan parallèle à $M\zeta$; il ne peut traverser $\mathcal{O}(M_0)$ deux fois en dehors de M_0. En effet il traverserait nécessairement en M_0 [n° 6] et alors la trace du plan de $\widehat{UM_0V}$ sur $\mathcal{O}(M_0)$ serait une tangente d'inflexion donnant deux traversées en dehors de M_0, ce qui est impossible (des sécantes convenablement choisies traverseraient un arc d'ordre 3 en 5 points.

Une première application de cette remarque est que $\widehat{B_0M_0}$ est au-dessous de $\mathcal{O}(M_0)$ au sens large.

Nous allons établir aussi que l'arc $\widehat{IM_0}$ de la section de $\mathcal{M}$ par le plan mené par IM_0 parallèlement à $M\zeta$ est, par rapport à $\mathcal{O}(M_0)$ d'un même côté au sens large. Supposons par exemple que $\widehat{M_0I}$ ait un point G au-dessus et un point G' au-dessous de $\mathcal{O}(M_0)$. Si G' est entre G et I nous prendrons un point I' voisin de I sur le contour $B_0B+\widehat{IA}$ du côté où il est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$; en choisissant I' assez voisin de I, l'arc $\widehat{I'M_0}$ dans le plan projetant $I'M_0$ parallèlement à $M\zeta$ donnera deux traversées. Si G' est entre G et M_0 nous choisirons I' de l'autre côté de I sur le contour et la conclusion sera la même. Deux cas sont donc possibles pour $\widehat{M_0I}$: ou bien il est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$ au sens large et dans ce cas le contour $\widehat{M_0I}+\widehat{IA}+\widehat{AA_0}$ est au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$ au sens large, ou bien il est au-dessous.

Plaçons-nous dans le dernier cas $\big($où $\widehat{M_0I}$ est au-dessous$\big)$. Soit alors J le point où le plan parallèle à $M\zeta$ mené par T_0 rencontre la partie du contour de $\mathcal{M}$ d'ordonnée supérieure à η_0 ; J ne peut être en I puisque $\widehat{M_0I}$ n'a aucun point au-dessus de $\mathcal{O}(M_0)$. Il ne peut être non plus avant I quand on parcourt $B_0B+\widehat{BA}+\widehat{AA_0}$ dans le sens B_0A, car le morceau de $\mathcal{M}$ limité par la partie B_0I

du contour précédent, $\widehat{IM_0}$ et $\widehat{M_0B}$ aurait des points intérieurs au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ et un bord au-dessous au sens large, ce qui impliquerait un plan d'appui local [n° 26, I]. Il faut donc que J soit au delà de I dans le sens défini à l'instant. Mais alors l'arc $\widehat{JM_0}$ (de plan parallèle à $M\zeta$) est tout entier au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens large, car s'il possédait un point au-dessous, il traverserait deux fois.

Cette fois nous sommes enfin au terme. Nous avons établi qu'il existe un morceau de $\overline{\mathfrak{M}}$ dont les points ont une ordonnée supérieure ou égale à η_0 tel que la partie de son bord autre que $\widehat{M_0A_0}$ soit au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens large. De la même manière on trouverait un second morceau de $\overline{\mathfrak{M}}$ qui, soudé au premier le long de $\widehat{M_0A_0}$ constituera un morceau de Σ_M dont le bord est au-dessus de $\mathcal{D}(M_0)$ au sens large, alors qu'il possède au-dessous un point intérieur N'_0, ce qui implique encore l'existence d'un plan d'appui local.

En groupant les résultats les plus importants obtenus depuis le n° 26, nous pouvons énoncer le théorème général suivant :

Soit (S_3) *un morceau de surface du troisième ordre* (*c'est-à-dire tel que toute sécante ne possédant sur lui aucun segment le rencontre en trois points au plus*) *se projetant parallèlement à une direction fixe suivant un domaine plan et convexe* (C) *d'une manière biunivoque et bicontinue et ne possédant nulle part à son intérieur de plan d'appui local;*

1° *Tous les points intérieurs de* (S_3) *sauf peut-être quatre points A au plus* (*non coplanaires s'ils sont quatre*) *sont des points ordinaires; s'il y a des points intérieurs* M_i *où le faisceau dérivé est un dièdre, leur ensemble* $\{M_i\}$ *n'a aucun point d'accumulation intérieur à* (S_3); *en dehors des points* A *et* M_i, *s'ils existent, le faisceau des tangentes en tout point intérieur est un plan, qui par conséquent varie d'une manière continue;*

2° *Dans le cas où* $\{M_i\}$ *n'est pas vide, à chaque point* M_i *correspond une droite* Δ_i, *arête de* $\mathcal{D}(M_i)$, *entièrement située sur la surface; le plan* P_i *d'une des faces* $\mathcal{D}(M_i)$ *est tangent à* (S_3) *tout le long de* Δ_i *sauf en* M_i, *et traverse la surface qui n'a dans* P_i *d'autres points que ceux de* Δ_i; *de plus chaque* Δ_i *ne peut rencontrer sur* (S_3) *aucune droite de la surface.*

Cette proposition légitime le résultat annoncé dans mon Mémoire sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications; à savoir que pour le troisième ordre la non convexité implique presque toujours l'existence d'un plan tangent continu. L'expression *presque toujours* étant équivalente à celle-ci : sauf peut-être aux points d'un ensemble fini dans toute portion de la surface sans point commun avec son bord.

Lorsque (C) peut être étendu à tout son plan, on a vu plus haut qu'il y a au plus un point M_i. Autrement dit, (S_3) possède un plan tangent continu, sauf peut-être en cinq points.

Comme je l'ai dit plus haut la limitation des points M_i dans le cas général peut sans doute être améliorée. Mais ceci demanderait de nouvelles et probablement difficiles recherches.

Remarquons enfin que si (S_3) *est supposée ne contenir aucun segment, elle possède au plus un point non ordinaire et partout ailleurs un plan tangent continu.*

Les résultats du présent Mémoire s'appliquent évidemment aux surfaces closes et plus particulièrement à celle du troisième ordre; ils peuvent alors être précisés et complétés grâce aux propriétés globales de la surface. Par exemple : sur une surface du troisième ordre le faisceau dérivé ne peut être du quatrième ordre conique qu'en un seul point et à condition que la surface se compose d'un ovoïde et d'une surface simple de Jordan contenant trois droites coplanaires.

Ces applications feront l'objet d'un autre travail.

NOTE I.

1. Dans cette Note, je donnerai des exemples de (S_3) pour chacune desquelles *le faisceau dérivé en un certain point ordinaire sera du quatrième ordre conique,* tous les types étudiés aux n^os 22 et 23 pouvant être obtenus. L'élément constitutif de ces surfaces sera un secteur du second ordre limité à deux demi-droites d'origine commune.

Soient Ox et Oy deux demi-droites non opposées faisant entre elles un angle θ et Oz un axe perpendiculaire à leur plan. Pour chaque valeur entière de n donnons-nous un point (de coordonnées *positives*) (a_n, b_n, c_n) répondant aux conditions suivantes :

1° l'ensemble (a_n, b_n, c_n) est partout dense dans l'angle xOy ;

2° c_n est le plus petit des trois nombres positifs $\varepsilon_n, \varepsilon_n a_n, \varepsilon_n b_n$, où ε_n est choisi de manière que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit convergente.

Considérons le trièdre T_n de sommet (a_n, b_n, c_n) dont les arêtes sont les deux premières respectivement parallèles à Ox et Oy, la troisième passant par O. Les pentes des faces de T_n sont :

$$0, \quad \frac{c_n}{b_n \sin\theta}, \quad \frac{c_n}{a_n \sin\theta}.$$

D'après la manière dont a été choisi c_n ces trois nombres sont bornés par $\frac{\varepsilon_n}{\sin\theta}$. Désignons par $\varphi_n(x, y)$ la fonction représentée dans l'angle xOy par le trièdre T_n.

Cette fonction est bornée et continue. Si λ est un nombre positif arbitraire et quels que soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartenant à xOy on a évidemment :

$$(1) \qquad (1+\lambda)\varphi_n\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right) \geqq \varphi_n(x_1, y_1) + \lambda\varphi_n(x_2, y_2);$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si les parallèles à Oz menées par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) rencontrent T_n sur la même face. Ceci posé, considérons l'équation

$$(2) \qquad z = \sum_1^\infty \varphi_n(x, y) = \Phi(x, y).$$

Le second membre étant une série absolument convergente de fonctions continues est une fonction continue. L'équation (2) représente par suite dans xOy une surface Σ. Toutes les φ_n étant nulles sur Ox et Oy il en est de même de z. D'autre part z est bornée. Il en résulte, qu'au point de vue projectif, les points à l'infini de Σ sont sur la droite de l'infini du plan $z = 0$.

Il est immédiat que Σ est à pentes bornées. Je vais montrer qu'elle est du second ordre. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) deux points donnés de l'angle xOy et λ un nombre positif arbitraire. En donnant à n, dans la relation (I), les valeurs 1, 2, 3, ..., et en ajoutant membre on obtient l'inégalité

$$(1+\lambda)\Phi\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right) \geqq \Phi(x_1, y_1) + \lambda\Phi(x_2, y_2).$$

D'après la remarque faite plus haut, le signe : $=$ n'est valable que si

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad y_1 = y_2 = 0.$$

La dernière relation montre que tout arc $\widehat{M_1M_2}$ de Σ (situé dans un plan parallèle à Oz) dont les extrémités ne sont pas toutes deux sur Ox ou Oy est strictement au-dessus de sa corde. De là résulte que Σ est du second ordre et ne contient aucun segment rectiligne en dehors de Ox et Oy.

2. Nous allons maintenant construire les exemples annoncés. Le lecteur verra aisément, en coupant par des plans parallèles à Oz que les surfaces obtenues sont du troisième ordre et à pentes bornées.

I. Les notations étant conservées. Construisons un secteur Σ', défini par les demi-droites Ox' et Oy' opposées à Ox et Oy et situé du côté des z positifs.

En complétant par les angles plans $x'Oy$ et xOy' on obtient une surface (S_3) où (C) s'étend à tout le plan. Comme elle est à pentes bornées, O est un point ordinaire. Nous sommes dans le cas I du n° 22.

II. Complétant Σ par les angles $x'Oy'$, $x'Oy$ et xOy', nous obtiendrons une surface correspondant au cas II du numéro cité.

III. Pour obtenir un exemple du cas III, il suffira de souder à Σ le long de Oy

un secteur Σ_1 construit comme Σ mais du côté des z négatifs, limité par une demi-droite Ox_1, intérieure à $x'Oy$, et de compléter par les angles x_1Ox', $x'Oy'$ et $y'Ox$.

3. Dans les exemples précédents le faisceau dérivé $\mathcal{D}(o)$ contient plus de deux couples de rayons opposés. Par le même procédé on construit aisément des exemples pour lesquels il y en a seulement deux.

Considérons Σ et Σ' comme au numéro précédent (cas I) et Σ_1 et Σ'_1 situés du côté des z négatifs et limités, le premier par Oy et Ox', le second par Oy' et Ox. La surface (S_3) constituée par Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1 est du troisième ordre. Le faisceau dérivé en O est du quatrième ordre conique et contient seulement deux couples de rayons opposés, lesquels sont sur (S_3). Il en serait de même si un des quatre secteurs Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1, ou deux contigus étaient plans.

Dans le cas où aucun des secteurs n'est plan, (S_3) est une surface close du troisième ordre, non analytique, ne possédant aucun segment rectiligne en dehors des droites $x'Ox$, $y'Oy$ et de la droite à l'infini de leur plan.

NOTE II.

EXEMPLE DE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE, N'AYANT NULLE PART A L'INTÉRIEUR UN PLAN D'APPUI LOCAL ET TELLE QU'EN UN POINT ORDINAIRE LE FAISCEAU DÉRIVÉ SOIT UN DIÈDRE.

1. Nous prendrons pour (C) le carré

$$-1 \leqq x \leqq +1$$
$$-1 \leqq y \leqq +1$$

et représenterons la surface Σ par la fonction

$$z = f(x, y),$$

définie de la manière suivante :

$$\text{pour} \quad x \leqq 0, \qquad f = \frac{x^3 - x^2}{k^2y^2 - x} \quad [\text{avec } f(0, 0) = 0],$$
$$\text{pour} \quad x \geqq 0, \qquad f = x^2(1 - k^2y^2),$$

où k désigne un nombre compris entre 0 et 1, qui sera fixé ultérieurement.

Σ est formée de deux morceaux, le premier appartenant à la surface du troisième degré $z(k^2y^2 - x) - x^3 + x^2 = 0$, le second appartenant à la surface du quatrième degré $z = x^2(1 - k^2y^2)$ qui se soudent le long de l'axe des y, le premier est au-dessous, le second au dessus du plan $z = 0$, qui est faisceau dérivé stationnaire le long de l'axe des y sauf à l'origine. On voit immédiatement que le faisceau dérivé à l'origine se compose des demi-plans : $z=0$, $x \geqq 0$ et $z=x$, $x \leqq 0$, c'est un *dièdre*.

Il s'agit de montrer que k peut être choisi de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° $f(x, y)$ est à nombres dérivés bornés;
2° Σ ne possède nulle part à l'intérieur de plan d'appui local;
3° Σ est d'ordre trois.

2. Vérifions pour commencer la première condition. Supposons d'abord $x \leqq 0$. On a pour dérivées partielles

$$p = \frac{3x^2 - 2x}{k^2y^2 - x} + \frac{x^3 - x^2}{(k^2y^2 - x)^2}, \qquad q = -\frac{2k^2y(x^3 - x^2)}{(k^2y^2 - x)^2}$$

Quand x est compris entre -1 et 0, la quantité $k^2y^2 - x$ est positive et supérieure à $|x|$. On peut donc écrire

$$|p| < \frac{3x^2 + 2|x|}{|x|} + \frac{|x^3| + x^2}{x^2} = 4|x| + 3 < 7,$$

et

$$|q| < \frac{2k^2[|x^3| + x^2}{x^2} = 2k^2[|x| + 1] < 4k^2.$$

Lorsque $x=0$, $f(x, y)=0$, q est nul.

La question se pose seulement pour p qui est ici la limite, pour $x=0$ de

$$\frac{x^3 - x^2}{k^2y^2 - x} : x = \frac{x^2 - x}{k^2y^2 - x},$$

dont le module est moindre que $|x| + 1$.

Pour $x \geqq 0$, $f(x, y)$ étant un polynome, p et q sont bornées.

La fonction $f(x, y)$ est donc partout dans (C) à nombres dérivés bornés; d'où il résulte bien que l'origine est point ordinaire.

3. Considérons maintenant la seconde condition. Elle est évidemment vérifiée sur l'axe des y. En dehors de cette droite il suffira de montrer que $s^2 - rt$ est partout *positif*, ce qui établira bien que le plan tangent traverse la surface. Dans le cas où x est négatif il est plus simple de considérer la surface sous forme entière

$$z(k^2y^2 - x) - x^3 + x^2 = 0,$$

et de déterminer directement l'intersection du plan tangent en (x, y, z) avec la surface. En transportani l'origine au point (x, y, z) on obtient pour équations des tangentes à l'intersection de la surface par son plan tangent

$$(2x - 3x^2 - z)X + 2k^2yzY + (k^2y^2 - x)Z = 0,$$
$$(1 - 3x)X^2 - XZ + k^2zY^2 + 2k^2yYZ = 0.$$

Ce qui donne en projection sur le plan $z = 0$

$$[x - z + k^2y^2(1 - 3x)]X^2 + 2k^2y[2z - 2x + 3x^2]XY - k^2z[3k^2y^2 + x]Y^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces droites soient réelles et distinctes est que

$$k^4y^2[2z - 2x + 3x^2]^2 + k^2z(3k^2y^2 + x)[x - z + k^2y^2(1 - 3x)]$$

soit *positif*. Or tous calculs faits après avoir remplacé z par sa valeur en fonction de x et y on trouve

$$k^2y^6x^2 - k^4y^2x^3(1 + x) + k^2y^2x^6 + x^6(1 - x),$$

dont tous les termes sont *positifs* dans l'intervalle ouvert $(-1, 0)$.

Lorsque x est positif les calculs sont beaucoup plus simples. On a immédiatement

$$r = 2(1 - k^2y^2),$$
$$s = -4k^2xy,$$
$$t = -2k^2x^2,$$

et

$$s^2 - rt = 4k^2x^2(3k^2y^2 + 1),$$

qui est bien positif pour $x > 0$.

4. Reste la troisième condition, à savoir que Σ est d'ordre 3 pour k assez petit. La surface étant constituée par deux morceaux de surfaces algébriques du troisième et du quatrième degré est nécessairement d'ordre borné, soit n_k son ordre pour une valeur donnée de k. Il s'agit de montrer que $n_k = 3$ pour k assez petit.

Nous rappelant les conclusions du numéro 11 du mémoire nous savons qu'il existe un plan vertical Q (c'est-à-dire parallèle à Ox) coupant Σ suivant un arc Γ_Q d'ordre n_k et d'autre part que tout plan vertical voisin donne aussi un arc d'ordre n_k. Nous pouvons donc supposer qu'un plan Q donnant une section d'ordre n_k n'est parallèle ni au plan $x = 0$, ni à $y = 0$, et qu'il évite un nombre fini de points donnés.

L'équation de Q pourra se mettre sous la forme

$$\text{(Q)} \qquad x = a(y - b), \qquad a \neq 0,$$

avec les conditions

$$x_i \neq a(y_i - b)$$

où les points donnés (x_i, y_i) sont en nombre fini. D'autre part en raison de la symétrie par rapport au plan $x=0$ nous pourrons supposer $a>0$.

L'arc Γ_Q sera ainsi défini par les conditions

$$x=a(y-b), \qquad |x|\leqq 1,$$
$$z=f(x, y), \qquad |y|\leqq 1.$$

Si nous supprimons la condition $|x|\leqq 1$ nous obtiendrons un arc Γ'_Q contenant Γ_Q dont l'ordre n'_k sera au moins égal à n_k. Je vais montrer que k peut être choisi assez petit pour que n'_k soit au plus égal à 3. Il en résultera que Σ est bien d'ordre 3, car il ne peut être d'ordre moindre.

Parmi les points (x_i, y_i) nous prendrons $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Ceci nous permet de considérer seulement les cas

$$b>1, \qquad b<-1, \qquad |b|<1.$$

Dans le premier cas Γ'_Q est sur une surface du troisième degré, on a donc $n'_k\leqq 3$.

Dans le second cas Γ'_Q est sur une surface du quatrième degré

$$z=x^2(1-k^2y^2)$$

La projection de Γ'_Q, sur le plan $x=0$, a pour équation, dans ce plan

$$z=a^2(y-b)^2(1-k^2y^2);$$

elle a même ordre que

$$Z=(y-b)^2(1-k^2y^2),$$

l'arc étant défini par l'intervalle $-1\leqq y\leqq +1$.

Calculant les dérivées de Z, on obtient

$$Z'=2(y-b)(1+K^2by-2k^2y^2),$$
$$Z''=2(1-k^2b^2+6k^2by-6k^2y^2),$$
$$Z'''=12k^2(b-2y).$$

Si b est inférieur à -2, Z''' ne s'annule pas dans $(1, +1)$, une sécante ne peut donc couper en quatre points, ce qui impliquerait nécessairement l'annulation de Z''' dans $(-1, +1)$. Si l'on a

$$-2\leqq b<1,$$

on voit immédiatement que Z'' sera positive dans $(-1, +1)$ pourvu que l'inégalité

$$1-k^2(4+12+6)>0$$

soit satisfaite ce qui aura lieu pour $k<\frac{1}{5}\cdot$ Z'' étant *positive* l'arc Γ'_Q est du second ordre. Autrement Z'' devrait s'annuler entre -1 et $+1$.

Comme n_k ne peut être moindre que trois la dernière position envisagée pour Q ne peut avoir lieu.

5. Le cas $-1 < b < +1$ va nous retenir plus longtemps.

Ici l'arc Γ'_Q se compose de deux parties dont les projections sur $x=0$, sont définies respectivement par les conditions

$$z = \frac{a^3(y-b)^3 - a^2(y-b)^2}{k^2y^2 - a(y-b)}, \qquad -1 \leqq y \leqq b,$$
$$z = a^2(y-b)^2(1-k^2y^2), \qquad b \leqq y \leqq 1.$$

En divisant par a^2 nous obtiendrons deux arcs de $x=0$ dont la somme est de même ordre n'_k que Γ'_Q; nous les désignerons par

$$(1) \qquad \widehat{AI} \quad z = \frac{a(y-b)^3 - (y-b)^2}{k^2y^2 - a(y-b)}, \qquad -1 \leqq y \leqq b,$$

$$(2) \qquad \widehat{IB} \quad z = (y-b)^2(1-k^2y^2), \qquad b \leqq y \leqq 1,$$

$\widehat{AI}$ est au-dessous de $z=0$ et $\widehat{IB}$ au-dessus.

D'après la remarque précédente l'arc $\widehat{A'IB}$ obtenu en faisant varier y de -1 à $+1$ dans (2) sera du second ordre si (comme nous le supposerons désormais) k est moindre que $\frac{1}{5}$. De plus l'arc $\widehat{A'IB}$ tournera sa concavité vers le haut (côté des $z>0$).

On a vu plus haut que nous pouvons supposer

$$b \neq 0, \qquad 1 - a\left(\frac{\pm 1}{k} - b\right) \neq 0,$$

ce qui revient à intégrer l'origine et $\left(1, \frac{\pm 1}{k}\right)$ dans l'ensemble des points (x_i, y_i). Dans ces conditions la fraction algébrique définissant $\widehat{AI}$ ne sera indéterminée pour aucune valeur de y.

Rappelons enfin que $\widehat{AI} + \widehat{IB}$ étant d'ordre n'_k il existe une sécante Δ le traversant en n'_k points distincts des extrémités et si l'on veut distincts de I [n° 6].

S'il n'y a de points que sur $\widehat{AI}$, n'_k est au plus égal à 3, donc égal à 3; s'il n'y en avait que sur $\widehat{IB}$ on aurait $n'_k \leqq 2$, ce qui est impossible. Nous pouvons donc supposer qu'il y a des points sur les deux arcs; soient α et β leurs nombres respectifs sur $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$. On a

$$\alpha + \beta = n'_k, \qquad 1 \leqq \alpha \leqq 3, \qquad 1 \leqq b \leqq 2.$$

Je distinguerai deux cas, suivant que $1 - a\left(\frac{1}{k} - b\right)$, qui, on l'a vu, peut être supposé différent de zéro, est négatif ou positif.

I. $1 - a\left(\frac{1}{k} - b\right) < 0$.

Le coefficient a étant positif cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{a} + b < \frac{1}{k}.$$

Posons $y_0 = b + \frac{1}{a}$. On a

$$a(y-b) - 1 = a(y-y_0) \qquad \text{et} \qquad ky_0 < 1.$$

Considérons d'autre part le trinome

$$k^2y^2 - a(y-b);$$

les résultats de substitution de b, et y_0 sont

$$k^2b^2 \quad \text{et} \quad k^2y_0^2 - 1 < 0.$$

On en déduit que ce trinome a deux zéros y_1 et y_2 tels que l'on ait

$$b < y_1 < y_0 < y_2.$$

Représentons par

$$z = \lambda(y-b) + \mu$$

l'équation de Δ. Celle-ci joignant un point d'abscisse inférieure à b et d'ordonnée négative $(\text{sur } \widehat{\text{AI}})$ à un point d'abscisse supérieure à b et d'ordonnée positive $(\text{sur } \widehat{\text{IB}})$, le coefficient λ est positif. D'autre part μ est différent de zéro, puisque Δ ne passe pas par I.

Formons l'équation donnant les y des points d'intersection de $\widehat{\text{AI}}$ avec Δ. Elle s'écrit

$$(3) \qquad [\lambda(y-b)+\mu][k^2y^2 - a(y-b)] - a(y-b)^2(y-y_0) = 0.$$

Les racines convenables sont celles comprises entre -1 et b. Mais d'après la remarque précédente, en remplaçant dans le premier membre de (3), y par y_1 et y_2 on obtient des résultats respectivement positif et négatif.

Si μ est négatif la substitution de y par b donne un résultat négatif. Dans ce cas $\alpha = 1$, car l'équation (3) a deux racines supérieures à b. Comme $\beta = 1$ ou 2 on a nécessairement $n'_k = 3$.

Si μ est positif, on peut seulement affirmer que α ne peut surpasser 2.

Considérons alors le zéro y_3 de $\lambda(y-b)+\mu$; il est inférieur à b mais supérieur à -1. Mais alors l'équation

$$(4) \qquad \lambda(y-b) + \mu - (y-b)^2(1-k^2y^2) = 0$$

a une racine entre y_3 et b, car en remplaçant y par y_3 et b on obtient deux résultats de signes contraires [1]. Comme $\widehat{\text{A}'\text{IB}}$ est d'ordre deux, Δ possède un

[1] Car $(y-b)^2(1-k^2y^2)$ est positif sauf pour $y=b$ dans $(-1, +1)$.

point au plus sur $\widehat{IB}$. Donc $\beta = 1$. On a encore n'_k au plus égal à trois, c'est-à-dire exactement égal à 3.

II. $1 - a\left(\frac{1}{k} - b\right) > 0$

De cette condition on déduit

$$a < \frac{k}{1-kb} < \frac{k}{1-k} \qquad \text{et} \qquad y_0 > \frac{1}{k} > 1.$$

De là résulte que $\lambda(y_0 - b) + \mu$ est positif, puisque le point d'ordonnée 1 sur la droite $z = \lambda(y-b)+\mu$ a une cote positive et que λ est positif. En désignant toujours par y_3 l'ordonnée du point de rencontre Δ avec Oy, on voit que les résultats de substitution de y_3 et de y_0 dans l'équation (3) sont positifs.

Si μ est négatif, y_3 est supérieur à b, et ce nombre donne un résultat négatif. L'équation (3) a donc au moins une racine intérieure à l'intervalle $(b, 1)$. Par suite α ne peut surpasser 2. Pour que n'_k puisse atteindre 4 il faut que les équations (3) et (4) aient la première trois racines dans $(-1, +1)$ et la seconde deux.

Supposons $\mu > 0$. Dans ce cas l'équation (4) a comme plus haut une racine entre y_3 et b.

Donc $\beta = 1$. L'ordre n'_k ne peut atteindre 4 que si $\alpha = 3$.

En définitive, il nous reste à montrer que si les équations (3) et (4) ont respectivement 3 et 2 racines dans l'intervalle $(-1, +1)$, on aboutit pour k assez petit à une contradiction.

La droite $z = \lambda(y-b)+\mu$ joignant deux points intérieurs de l'arc $\widehat{A'IB}$, λ est égal à la pente d'une tangente en un point de l'arc, donc de $\widehat{IB}$ puisque λ est positif. La valeur maximum de λ est celle de la dérivée de

$$(y-b)^2[1-k^2y^2] \qquad \text{pour} \quad y = 1.$$

C'est-à-dire

$$2(1-b)(1+k^2b-2k^2)$$

Comme $|b|$ est inférieur à *un* on a

$$0 < \lambda < 4(1-3k^2).$$

Pour simplifier posons : $\mu_1 = \mu - \lambda b$ et bornons μ_1. En désignant par (y', z') un point commun à $\widehat{IB}$ et Δ (il y en a au moins un) on peut écrire

$$z' = \lambda y' + \mu_1,$$

d'où

$$|\mu_1| \leq |z'| + \lambda|y'| < |z'| + \lambda.$$

$|z'|$ est moindre que la cote de B, c'est-à-dire : $(1-b)^2(1-k^2)$.

On obtient donc l'inégalité

$$|\mu_1| < 4(1-k^2) + 4(1-3k^2) = 8(1-2k^2).$$

Ceci posé revenons à l'équation (3), qui s'écrit maintenant

$$(\lambda y + \mu_1)[k^2y^2 - a(y-b)] - a(y-b)^3 + (y-b)^2 = 0.$$

La somme des trois racines : σ est donnée par la relation

$$(\lambda k^2 - a)\sigma + (\mu_1 k^2 - a\lambda + 3ab + 1) = 0$$

d'où l'on déduit

$$1 = (a - \lambda k^2)\sigma + a\lambda - \mu_1 k^2 - 3ab.$$

$|\sigma|$ est moindre que 3, $|b|$ moindre que *un*.

On a vu plus haut que a, positif, ne peut atteindre $\frac{k}{1-k}$. Utilisant enfin des bornes qui viennent d'être obtenues pour λ et μ_1 on peut limiter le module du second membre par l'expression

$$[4(1-3k^2)+3+3]\frac{k}{1-k} + 3k^2.4(1-3k^2) + k^2 8(1-2k^2)$$
$$= (10-12k^2)\frac{k}{1-k} + 20k^2 - 52k^4,$$

qui tend vers zéro avec k. La démonstration est donc achevée.

Il est facile de déterminer une valeur finie de k satisfaisant à l'inégalité

$$(10-12k^2)\frac{k}{1-k} + 20k^2 - 52k^4 < 1.$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$11k - 12k^2 + 20k^2(1-k) - 52k^4(1-k) < 1,$$

inégalité satisfaite *a fortiori* si

$$11k + 20k^2 < 1,$$

ce qui a lieu pour $k \leqq \frac{1}{13}$.

Malgré la simplicité (relative) des calculs, je dois avouer que la construction de cet exemple m'a donné beaucoup de peine. D'ailleurs j'ai douté pendant longtemps que le faisceau dérivé en un point ordinaire d'une surface du troisième ordre n'ayant nulle part de plan d'appui local puisse être un dièdre.