ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURENT LE FLOCH

Rigidité générique des feuilletages singuliers

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 31, nº 6 (1998), p. 765-785
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_6_765_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 31, 1998, p. 765 à 785.

RIGIDITÉ GÉNÉRIQUE DES FEUILLETAGES SINGULIERS

PAR LAURENT LE FLOCH *

RÉSUMÉ. – Dans cet article, on étudie le type analytique des familles d'équations différentielles $0 = A_\varepsilon\,\mathrm{d}x + B_\varepsilon\,\mathrm{d}y$, à deux variables, ayant un type formel fixé. Dans une première partie nous établissons de manière géométrique que cette famille est à type holomorphe constant, sous une hypothèse de rigidité d'un des groupes d'holonomie associé à cette équation.

Dans la deuxième partie, nous montrons que, dans la classe des courbes généralisées, cette hypothèse de rigidité d'un des groupes d'holonomie est génériquement satisfaite. © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – *Generic rigidity of singular foliations.* In this paper, we study the analytic type of families of differential equations $0 = A_\varepsilon\,\mathrm{d}x + B_\varepsilon\,\mathrm{d}y$, with two complex variables, of a fixed formal type. First, under a rigidity hypothesis for one of the holonomy subgroups associated to the equation, we prove, using geometric techniques, that these families are of a constant analytic type.

Then we show that in the class of generalized curves, this hypothesis of rigidity is generically satisfied. © Elsevier, Paris

1. Introduction

Soit $\mathcal{O}_n$ (resp. Λ_n^p) l'anneau (resp. le $\mathcal{O}_n$ module) des germes de fonctions (resp. des p-formes) holomorphes de $\mathbb{C}^n_{,0}$; on note

$$\underline{\Lambda}_n^1 = \left\{ \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i \in \Lambda_n^1 \text{ avec } \begin{bmatrix} (a_1, \ldots, a_n) = 1, \\ a_1(0) = \ldots = a_n(0) = 0 \\ \omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rappelons qu'une 1-forme $\omega \in \underline{\Lambda}_n^1$ définit un feuilletage (régulier) $\mathcal{F}_\omega$ en dehors du lieu singulier

$$S(\omega) = \{m \mid \omega(m) = 0\}.$$

On note également Diff_n (resp.$\widehat{\mathit{Diff}_n}$) le groupe des germes de difféomorphismes analytiques (resp. formels) de $\mathbb{C}^n_{,0}$. Deux sous-groupes H_1 et H_2 de Diff_n sont analytiquement (resp. formellement) conjugués s'il existe $\Phi \in \mathit{Diff}_n$ (resp.$\widehat{\mathit{Diff}_n}$), appelée conjugante analytique (resp. formelle), tel que

$$\{\Phi \circ h_1 \mid h_1 \in H_1\} = \{h_2 \circ \Phi \mid h_2 \in H_2\}.$$

* Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de géométrie analytique de l'université de Rennes I.

Soit Δ un disque de $\mathbb{C}$ centré en 0; on appelle famille à un paramètre dans Δ la donnée de

$$\Psi_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{i_1+\cdots+i_n\geq 1} \alpha^1_{i_1\ldots i_n}(\varepsilon)\, x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}, \right.$$
$$\left. \ldots, \sum_{i_1+\cdots+i_n\geq 1} \alpha^n_{i_1\ldots i_n}(\varepsilon)\, x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n} \right)$$

d'éléments de *Diff*$_n$ (resp. $\widehat{\mathit{Diff}}_n$) telle qu'il existe un voisinage ouvert V de $\overline{\Delta}$ sur lequel les $\alpha^k_{i_1\ldots i_n}$ soient holomorphes. On note *Diff*$_n(\Delta)$ (resp. $\widehat{\mathit{Diff}}_n(\Delta)$) l'ensemble de ces familles. De même, on appelle famille à un paramètre la donnée de la famille

$$\omega_\varepsilon = \sum_{i=1}^n a_i(x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)\,\mathrm{d}x_i$$

d'éléments de $\underline{\Lambda}^1_n$ telle qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage ouvert V de $\overline{\Delta}$ tels que les a_i soient holomorphes sur $U\times V$. On note $\Omega_n(\Delta)$ l'ensemble de ces familles. Deux familles (ω^1_ε) et (ω^2_ε) de $\Omega_n(\Delta)$ sont analytiquement (resp. formellement) conjuguées s'il existe $(\Phi_\varepsilon)\in$ *Diff*$_n(\Delta)$ (resp.$\widehat{\mathit{Diff}}_n(\Delta)$) telle que

$$\Phi^*_\varepsilon\,\omega^1_\varepsilon \wedge \omega^2_\varepsilon = 0.$$

Rappelons qu'un sous-groupe H de *Diff*$_n$ est dit rigide (resp. super-rigide) si sa classe analytique coïncide avec sa classe formelle (resp. si toute conjugante formelle qui lui est associée est holomorphe). D. Cerveau et R. Moussu ont donné une caractérisation des sous-groupes non abéliens super-rigides de *Diff*$_1$. Ils appellent groupe exceptionnel tout sous-groupe H de *Diff*$_1$ dont le premier groupe dérivé $[H,H]$ est abélien non trivial. Ils établissent alors le théorème qui suit.

THÉORÈME ([Ce,Mo]). – *Un sous-groupe non abélien H de Diff$_1$ est super-rigide si et seulement si il est non exceptionnel.*

Une 1-forme $\omega\in\underline{\Lambda}^1_2$ est dite non exceptionnelle s'il existe une composante irréductible de son arbre de désingularisation, non dicritique, ayant un groupe d'holonomie non abélien non exceptionnel. Le but de ce travail est de prouver les deux théorèmes qui suivent :

THÉORÈME I. – *Soit $(\omega_\varepsilon)\in\Omega_2(\Delta)$ une famille formellement conjuguée à la famille constante ω_0; si ω_0 est non exceptionnelle, alors (ω_ε) est analytiquement conjuguée à ω_0.*

On se donne une propriété $\mathcal{P}$ portant sur une classe d'objets $\mathcal{A}$ qui peut être indifféremment :

– Un sous ensemble de *Diff*$_n$, $\widehat{\mathit{Diff}}_n$,
– Un sous ensemble de Λ^1_n, $\widehat{\Lambda}^1_n$.

Pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$, $j^k(\alpha)$ désigne le jet d'ordre k de α. Deux éléments α et β de $\mathcal{A}$ sont dits k-tangents si $j^k(\alpha)=j^k(\beta)$. Soit $r\in\mathbb{N}$ et $\alpha_0\in\mathcal{A}$; la propriété $\mathcal{P}$ est dite

– r-déterminée pour l'objet α_0 si elle est vérifiée pour tout objet $\alpha'\in\mathcal{A}$ tel que $j^r(\alpha_0)=j^r(\alpha')$.

– De détermination finie si, pour tout objet $\alpha \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathcal{P}$, il existe $r(\alpha) \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}$ est $r(\alpha)$-déterminée pour α.
– Générique si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  G_1 : $\mathcal{P}$ est de détermination finie sur $\mathcal{A}$
  G_2 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe $\alpha' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathcal{P}$ tel que $j^k(\alpha') = j^k(\alpha)$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des courbes généralisées (au sens de [Ca,L-N,Sa]). Pour cette classe importante de feuilletages, on a le théorème suivant.

THÉORÈME II. – *La propriété « ω est une 1-forme non exceptionnelle » est générique dans la classe $\mathcal{C}$ des courbes généralisées.*

2. Préliminaires

2.1 – Notations

On reprend essentiellement les notations de [Ma] (voir également [Ma,Mo], [Ce, Ma] pour les notions classiques de feuilletages réduits, de désingularisation, d'holonomie projective, ...).

Étant donnés M une variété analytique complexe de dimension 2 et $\mathcal{F}$ un faisceau de base M, pour tout ouvert U de M, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U et $\mathcal{F}_{|U}$ désigne la restriction de $\mathcal{F}$ à U; pour tout point m de M, $\mathcal{F}_m$ désigne la fibre de $\mathcal{F}$ au-dessus de m.

On note
– $\mathcal{O}_M$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur M,
– Λ^p_M le faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules des germes de p-formes holomorphes sur M,
– χ_M le faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules des germes de champs de vecteurs sur M.

Soit $M_0 \subset \mathbb{C}^2$ un polydisque centré en O; on appelle arbre au-dessus de M_0 la donnée :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
M_h & \xrightarrow{E^h} & M_{h-1} & \xrightarrow{E^{h-1}} & M_{h-2} & \ldots & M_2 & \xrightarrow{E^2} & M_1 & \xrightarrow{E^1} & M_0 \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
\Sigma_h & & \Sigma_{h-1} & & \Sigma_{h-2} & & \Sigma_2 & & \Sigma_1 & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
S_h & & S_{h-1} & & S_{h-2} & & S_2 & & S_1 & &
\end{array}$$

où

$$S_0 \subset \Sigma_0 = \{0\} \subset M_0, \quad D_0 = \{0\}, \quad E_0 = E^0 = \mathrm{Id}$$

et où, pour tout $j \in \{1, \ldots, h\}$,
– E^j est le morphisme d'éclatement de centre S_{j-1} de la variété analytique complexe M_j dans la variété analytique complexe M_{j-1},
– $E_j = E^1 \circ \ldots \circ E^j$,
– $D_j = E_j^{-1}(\{0\})$ est appelé le $j^{\text{ième}}$ diviseur exceptionnel,
– $S_j \subset \Sigma_j$ sont des ensembles finis de points de D_j.

Un tel arbre au dessus de M_0 sera noté

$$A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\ldots,h}.$$

L'entier h est appelé la hauteur de l'arbre A, la variété M_0 est le socle de l'arbre A et la variété M_h est la cîme de l'arbre A. Nous convenons de noter spécialement toutes les données de « cîmes », par exemple : $\widetilde{M}$ pour M_h, $\widetilde{\Sigma}$ pour Σ_h, $\widetilde{D}$ pour D_h et $\widetilde{E}$ pour E_h. Cette convention vaudra tout au long de l'article.

Soit

$$A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\ldots,h}$$

un arbre au-dessus de M_0; nous désignons par

- $\mathcal{E}_i$, la restriction au diviseur exceptionnel D_i du faisceau $\mathcal{O}_{M_i}$,
- $\mathcal{I}_i$, le faisceau d'idéaux de $\mathcal{E}_i$ localement engendré par les fonctions du type $f \circ E_i$ où f est une fonction holomorphe sur M_0 telle que $f(0) = 0$,
- Λ_i^1 la restriction de $\Lambda_{M_i}^1$ à D_i,
- χ_i la restriction de χ_{M_i} à D_i.

On considère l'arbre produit au dessus de $M_0 \times V$

$$M_h \times V \xrightarrow{\overline{E}^h} M_{h-1} \times V \xrightarrow{\overline{E}^{h-1}} M_{h-2} \times V$$
$$\ldots \quad M_2 \times V \xrightarrow{\overline{E}^2} M_1 \times V \xrightarrow{\overline{E}^1} M_0 \times V$$

où

$$\begin{array}{rcccc} \overline{E}^i & : & M_i \times V & \longrightarrow & M_{i-1} \times V \\ & & (m_i, \varepsilon) & \longmapsto & (E^i(m_i), \varepsilon) \end{array}$$

et on note

- $\overline{E}_i = \overline{E}^1 \circ \ldots \circ \overline{E}^i$,
- $\mathcal{E}_{i\times V}$ la restriction de $\mathcal{O}_{M_i \times V}$ à $D_i \times V$,
- $\Lambda_{i\times V}^1$ la restriction de $\Lambda_{M_i\times V}^1$ à $D_i \times V$,
- $\chi_{i\times V}$ la restriction de $\chi_{M_i \times V}$ à $D_i \times V$,
- $\mathcal{I}_{i\times V}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{E}_{i\times V}$ localement engendré par les $f \circ \overline{E}_i$ où f est holomorphe sur $M_0 \times V$ et telle que $f(0, \varepsilon) = 0$ si $\varepsilon \in V$.

Un tel arbre sera noté $A \times V$.

On considère les voisinages infinitésimaux ([Ba,St]) de D_i dans M_i suivants :

$$M_i^{[k]} = \left(D_i, \mathcal{E}_i^{[k]} = \mathcal{E}_i / \mathcal{I}_i^{k+1}\right)$$

ainsi que les faisceaux de base D_i :

$$\widehat{\mathcal{E}}_i = \varprojlim_k \mathcal{E}_i^{[k]} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Lambda}_i^1 \otimes_{\mathcal{E}_i} \widehat{\mathcal{E}}_i$$

dont les sections au-dessus d'un ouvert U_i de D_i sont respectivement appelées germes le long de U_i de fonctions holomorphes transversalement formelles et germes le long de U_i de 1-formes holomorphes transversalement formelles. On aura également besoin des faisceaux suivants de base $D_i \times V$:

$$\widehat{\mathcal{E}}_{i\times V} = \varprojlim_k \left(\mathcal{O}_{i\times V} / \mathcal{I}_{i\times V}^{k+1}\right)$$
$$\widehat{\Lambda}_{i\times V}^1 = \Lambda_{i\times V}^1 \otimes_{\mathcal{E}_{i\times V}} \widehat{\mathcal{E}}_{i\times V}$$
$$\widehat{\chi}_{i\times V} = \chi_{i\times V} \otimes_{\mathcal{E}_{i\times V}} \widehat{\mathcal{E}}_{i\times V}$$

2.2 – Eclaté d'une série formelle

On reprend ici des énoncés de [Ma,Mo] en les généralisant au cas des arbres produits, ce qui ne pose aucune difficulté.

Soient $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\ldots,h}$(resp. $A \times V$) un arbre (resp. un arbre produit) au dessus de M_0 (resp. $M_0 \times V$) et $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{E}}_0$ (resp. $\widehat{\mathcal{E}}_{0\times V}$); on a alors les deux lemmes qui suivent.

LEMME 2.1. – *Pour tout $j \in 1, \ldots, k$, $\widehat{f} \circ E_j \in \widehat{\mathcal{E}}_j$ (resp. $\widehat{f} \circ \overline{E}_j \in \widehat{\mathcal{E}}_{j\times V}$).*

Cela signifie que l'éclaté d'une série formelle est une section globale le long du diviseur du faisceau des fonctions holomorphes le long du diviseur transversalement formelles.

LEMME 2.2. – *La série formelle $\widehat{f}$ appartient à $\mathcal{E}_0$ (resp. à $\mathcal{E}_{0\times V}$) dès que $\widehat{f} \circ \widetilde{E}$ (resp. $\widehat{f} \circ \widetilde{\overline{E}}$) converge en un point de $\widetilde{D}$ (resp. $\widetilde{D} \times V$).*

C'est-à-dire qu'une série formelle est convergente dès que l'un de ses éclatés converge en un point du diviseur exceptionnel.

2.3 – Rappels sur les feuilletages

Soit $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\ldots,h}$ un arbre au-dessus de M_0 et V un voisinage ouvert de Δ; pour tout $j \in 0, \ldots, h$ et tout ouvert U de D_j , on appelle :

1) Germe le long de U de feuilletage holomorphe (resp. holomorphe transversalement formel) la donnée d'un faisceau $\mathcal{F}_U$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}_U$) de sous-modules de $\Lambda^1_{j|U}$ (resp. $\widehat{\Lambda}^1_{j|U}$) tel que :

– $\mathcal{F}_U$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}_U$) est localement libre de rang 1,
– $\Lambda^1_{j|U}/\mathcal{F}_U$ (resp. $\widehat{\Lambda}^1_{j|U}/\widehat{\mathcal{F}}_U$) est sans torsion.

2) Germe le long de $U \times V$ de feuilletage holomorphe (resp. holomorphe transversalement formel) la donnée d'un faisceau $\mathcal{F}_{U\times V}$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}_{U\times V}$) de sous-modules de $\Lambda^1_{j\times V|U\times V}$ (resp. $\widehat{\Lambda}^1_{j\times V|U\times V}$) tel que :

– $\mathcal{F}_{U\times V}$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}_{U\times V}$) est localement libre de rang 1,
– $\Lambda^1_{j\times V|U\times V}/\mathcal{F}_{U\times V}$ (resp. $\widehat{\Lambda}^1_{j\times V|U\times V}/\widehat{\mathcal{F}}_{U\times V}$) est sans torsion,
– $\mathcal{F}_{U\times V} \wedge d\mathcal{F}_{U\times V} = 0$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}_{U\times V} \wedge d\widehat{\mathcal{F}}_{U\times V} = 0$).

Remarque 2.3. – Les notations classiques de singularités, singularités réduites associées à un germe le long de U de feuilletage holomorphe ([Ma,Mo], [Ce, Ma]) se généralisent naturellement au cas formel.

THÉORÈME 2.4. – *Soient $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\ldots,h}$ un arbre au-dessus de M_0, et, pour $0 \leq i \leq h$, $\mathcal{F}_i$ un germe le long de D_i de feuilletage holomorphe; alors, il existe un unique germe le long de D_{i+1} de feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{i+1}$ tel que*

$$(E^*_{i+1})\mathcal{F}_i = \mathcal{I}_{i+1}\mathcal{F}_{i+1}$$

où $(E^*_{i+1})\mathcal{F}_i$ est le faisceau de sous-modules de Λ^1_{i+1} localement engendré par les images réciproques $(E^*_{i+1})\omega_{i,m}$ des $\omega_{i,m}$ qui engendrent $\mathcal{F}_{i,m}$.

On dit alors que $\mathcal{F}_{i+1}$ est le transformé strict de $\mathcal{F}_i$ par E_{i+1}. Cet énoncé s'adapte au cas des feuilletages formels ainsi qu'aux feuilletages le long d'un arbre produit. On peut alors énoncer le théorème de désingularisation.

THÉORÈME DE DÉSINGULARISATION ([Ma,Mo]). – *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage de $\mathbb{C}^2_{,0}$; il existe un unique arbre $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_jD_j)_{j=0,\dots,h}$ au-dessus de M_0 tel que, si on note $\mathcal{F}_i$ le transformé strict de $\mathcal{F}$ par E_i alors, pour tout $i \in \{0, \dots, h\}$,*

– $\Sigma_i = \{$*singularités de* $\mathcal{F}_i\}$,
– $S_i = \{$*singularités non réduites de* $\mathcal{F}_i\}$,
– $S_h = \emptyset$ *et* $S_i \neq \emptyset$ *si* $0 \leq i < h$.

Cet arbre A au dessus de M_0 est appelé arbre d'éclatement associé à $\mathcal{F}$. Là encore cet énoncé s'adapte au cas des feuilletages formels ainsi que les notions classiques de composantes dicritiques et de groupe d'holonomie projective associé à une composante non dicritique ([Ma,Mo], [Ce, Ma]).

Deux formes ω_1 et ω_2 sont équidésingularisables à l'ordre l si d'une part, $\mathcal{F}_{\omega_1}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}$ ont le même arbre d'éclatement associé $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_jD_j)_{j=0,\dots,h}$, et si d'autre part, pour tout $j \in \{0, \dots, h\}$, en désignant par $\mathcal{F}^j_{\omega_1}$ et $\mathcal{F}^j_{\omega_2}$ les transformés stricts par E_j respectivement de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ et $\mathcal{F}_{\omega_2}$, alors pour tout $m \in D_j$ et pour tout $\omega^j_{1,m}$ (resp. $\omega^j_{2,m}$) générateur de $\mathcal{F}^j_{\omega_{1,m}}$ (resp. $\mathcal{F}^j_{\omega_{2,m}}$),

$$j^l(\omega^j_{1,m} \wedge \omega^j_{2,m}) = 0.$$

Une conséquence de la démonstration du théorème de désingularisation est la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5. – *Soit $\omega_0 \in \underline{\Lambda}^1_2$ (resp. $\widehat{\underline{\Lambda}}^1_2$); alors, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\omega \in \underline{\Lambda}^1_2$ (resp. $\widehat{\underline{\Lambda}}^1_2$), $j^k(\omega \wedge \omega_0) = 0$ entraîne que ω et ω_0 ont la même désingularisation à l'ordre l.*

Soit $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon \in V} \in \Omega_2(\Delta)$; on appelle déploiement holomorphe (resp. formel) de la famille (ω_ε) la donnée d'une 1-forme

$$\Omega(x, y, \varepsilon) = \omega_\varepsilon + h(x, y, \varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \in \Lambda^1_{0\times V} \text{ (resp. } \widehat{\Lambda}^1_{0\times V})$$

vérifiant la condition d'intégrabilité $\Omega \wedge \mathrm{d}\Omega = 0$.

2.4 Un résultat de cohomologie

Soit $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_jD_j)_{j=0,\dots,h}$ un arbre au-dessus de M_0. Les germes d'automorphismes de M_i (resp. $M_i^{[k]}$), aux points $m \in D_i$, qui valent l'identité en restriction à D_i, forment un faisceau de groupes de base D_i que nous noterons G_i (resp. $G_i^{[k]}$).

Pour $l \leq k$, on a les morphismes de restriction,

$$\rho^k_{i,l} : G_i^{[k]} \longrightarrow G_i^{[l]}$$
$$\rho_{i,l} : G_i \longrightarrow G_i^{[l]}$$

et on pose

$$G^{[k]}_{i,l} = \ker(\rho^k_{i,l}),$$
$$G_{i,l} = \ker(\rho_{i,l}),$$
$$\widehat{G}_{i,l} = \varprojlim_k G^{[k]}_{i,l}.$$

Une section de ces faisceaux au-dessus de D_i est appelée un germe d'automorphisme l-tangent à l'identité au-dessus de D_i, respectivement germe d'automorphisme transversalement formel l-tangent à l'identité le long de D_i.

Le théorème suivant dû à J.-F. Mattei et E. Salem est un résultat de cohomologie à valeurs dans les faisceaux de groupes que nous venons de définir.

THÉORÈME 2.6 ([Ma,Sa]). – *Pour tout $l \geq h$ et pour tout $k \geq 0$, les applications*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{U}, \widetilde{G}_{l+k}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U}, \widetilde{G}_k) \\ [\varphi_{i,j}]_{\widetilde{G}_{l+k}} & \longmapsto & [\varphi_{i,j}]_{\widetilde{G}_k} \end{array}$$

sont les applications constantes

$$[\varphi_{i,j}]_{\widetilde{G}_{l+k}} \longmapsto [I_{i,j}]_{\widetilde{G}_k},$$

où $I_{i,j}$ désigne l'identité.

Remarque 2.7. – On rappelle que si G est un faisceau de groupes de base D et si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fini de D, on note :

- $Z^1(\mathcal{U}, G)$, l'ensemble des familles $(\varphi_{i,j})$, où $\varphi_{i,j} \in G(U_i \cap U_j)$ telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, vérifiant les conditions de cocycles : pour tous i, j, k tels que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$.
- $H^1(\mathcal{U}, G)$, le quotient de $Z^1(\mathcal{U}, G)$ par la relation de cohomologie $(\varphi_{i,j}) \sim (\psi_{i,j})$ si et seulement si il existe $h \in \prod_{i \in I} G(U_i)$ tel que, pour tout i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_{i,j} = h_i \circ \psi_{i,j} \circ h_j^{-1}$. On note $[\varphi_{i,j}]_G$ la classe d'équivalence de $(\varphi_{i,j})$ dans $H^1(\mathcal{U}, G)$.

3. Démonstration du théorème I

3.1 – Notations et résultats préliminaires

On considère $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon \in V} \in \Omega_2(\Delta)$ et $(\widehat{\psi}_\varepsilon)_{\varepsilon \in V} \in \widehat{Diff}_2(\Delta)$ tels que

$$(\widehat{\psi}_\varepsilon^* \omega_0) \wedge \omega_\varepsilon = 0.$$

Il s'agit de montrer que la famille (ω_ε) est à type analytique constant.

Remarque 3.1. – Considérons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_\varepsilon^k = j^k(\widehat{\psi}_\varepsilon) \in Diff_2(\Delta)$. Il vérifie $j^k\Big(\widehat{\psi}_\varepsilon \circ (P_\varepsilon^k)^{-1}\Big) = Id$.

De plus, on a

$$\Big(\Big(\widehat{\psi}_\varepsilon \circ (P_\varepsilon^k)^{-1}\Big)^* \omega_0\Big) \wedge \Big(\big((P_\varepsilon^k)^{-1}\big)^* \omega_\varepsilon\Big) = 0.$$

Donc, quitte à remplacer la famille (ω_ε) par la famille analytiquement équivalente $\big((P_\varepsilon^k)^{-1}\big)^* \omega_\varepsilon$, on peut supposer que la famille $(\widehat{\psi}_\varepsilon)$ est tangente à l'identité à un ordre arbitrairement grand. Par conséquent, d'après la proposition 2.5, on peut supposer que, pour tout $\varepsilon \in V$, ω_ε et ω_0 ont même désingularisation à un ordre l arbitrairement grand (on dit alors que la famille est équidésingularisable à l'ordre l)

On considère $A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\dots,h}$ l'arbre de désingularisation au-dessus de M_0 commun aux $\mathcal{F}_{\omega_\varepsilon}$.

On note $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ le feuilletage sur $\widetilde{M}$ transformé strict de $\mathcal{F}_{\omega_\varepsilon}$ par $\widetilde{E}$.

On fixe C une composante irréductible du diviseur exceptionnel $\widetilde{D}$, non dicritique pour $\widetilde{\mathcal{F}}_0$, telle que le groupe d'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ associé à C soit non abélien et non exceptionnel. On note $\{m_1, \dots, m_n, m_\infty\} = \mathrm{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon) \cap C$.

Comme la famille (ω_ε) est équidésingularisable, cette composante C est non dicritique pour chacun des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$. Choisissons pour toute la démonstration une carte de Stein $(W, (x,t))$ contenant $C \setminus \{m_\infty\}$ telle que :

– $C \setminus \{m_\infty\} = \{x = 0\}$;

– pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $m_i = (0, t_i)$;

– les feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}_{\varepsilon|W}$ sont globalement définis par

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon = (P_\varepsilon(t) + x\, A_\varepsilon(x,t))\, \mathrm{d}x + x\, (b_\varepsilon(t) + x\, B_\varepsilon(x,t))\, \mathrm{d}t \in \Lambda^1_{\widetilde{M}}(W).$$

On note $\mathcal{L} = C \setminus \{m_1, \dots, m_n, m_\infty\}$. C'est une séparatrice du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$.

Fixons un point $m_0 = (0, t_0) \in \mathcal{L}$ et notons G_ε le groupe d'holonomie projective du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ associé à C, par rapport à la transversale $T_0 = \{t = t_0\}$.

Remarque 3.2. – Rappelons brièvement la construction du groupe d'holonomie projective du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ (pour une construction complète et rigoureuse, le lecteur pourra se référer à [Ca,LN]). Soit $T_0 = \{t = t_0\}$ et $T_1 = \{t = t_1\}$ deux fibres de la fibration de Hopf au dessus de $\mathcal{L}$, $\mathrm{d}t = 0$. On se donne un chemin γ dans $\mathcal{L}$ tel que $\gamma(0) = (0, t_0) = m_0$ et $\gamma(1) = (0, t_1) = m_1$. Alors il existe un voisinage Ω de $\gamma([0,1])$ tel que la fibration de Hopf soit transverse au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ sur Ω (on utilise pour cela le théorème du flow-box et la compacité de $\gamma([0,1])$. L'unicité du relèvement de γ suivant cette fibration induit un germe de difféomorphisme holomorphe de T_{0,m_0} dans T_{1,m_1} et donc un élément de *Diff*$(\mathbb{C}_{,0})$ en identifiant T_{0,m_0} et T_{1,m_1} à $\mathbb{C}_{,0}$. Ce difféomorphisme $h_{\varepsilon,\gamma,T_0,T_1}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. En prenant $T_0 = T_1$, l'application

$$\begin{array}{rccc} H_\varepsilon: & \pi_1(\mathcal{L}, m_0) & \longrightarrow & \mathit{Diff}(\mathbb{C}_{,0}) \\ & [\gamma] & \longmapsto & h_{\varepsilon,\gamma,T_0,T_0} = h_{\varepsilon,\gamma} \end{array}$$

est un morphisme de groupes dont l'image est appelé groupe d'holonomie projective du feuilletage par rapport à la transversale T_0.

LEMME TECHNIQUE 1. – *Il existe une famille* $(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_{\varepsilon \in V} \in \widehat{\mathit{Diff}_1}(\Delta)$ *telle que* $\widehat{\varphi}_\varepsilon^* G_0 = G_\varepsilon$.

C'est une version à paramètre d'un résultat classique ([Be,Mo]). Comme G_0 est un groupe non exceptionnel (par hypothèse), d'après le théorème de Cerveau et Moussu ([Ce,Mo]), il est super-rigide et ainsi les $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ sont convergents. On retiendra le corollaire qui suit.

COROLLAIRE 3.3. – *Il existe une famille* $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in V}$ *de* Diff_1 *telle que* $\varphi_\varepsilon^* G_0 = G_\varepsilon$.

Soit $\mathcal{F}$ un germe le long de $\mathcal{L}$ de feuilletage holomorphe, non dicritique, et sans singularité sur $\mathcal{L}$. Alors $\mathcal{F}$ est globalement défini par $\omega \in \Lambda^1_{\widetilde{M}}(\mathcal{L})$ qui s'écrit

$$\omega = (P(t) + x\, A(x,t))\, \mathrm{d}x + x\, (b(t) + x\, B(x,t))\, \mathrm{d}t$$

où P et b sont holomorphes sur $\mathcal{L}$, A et B appartiennent à $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ et P ne s'annule pas sur $\mathcal{L}$.

On dit que $\mathcal{F}$ admet un facteur intégrant, le long de $\mathcal{L}$, transversalement formel, s'il existe $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ tel que $\mathrm{d}\left(\dfrac{\omega}{\widehat{f}}\right) = 0$.

LEMME TECHNIQUE 2. – *Si $\mathcal{F}$ admet un facteur intégrant le long de $\mathcal{L}$ transversalement formel, alors le groupe d'holonomie projective G de $\mathcal{F}$ associé à $\mathcal{L}$ est abélien.*

On trouvera les démonstrations complètes de ces deux lemmes techniques dans [LF].

3.2 – La construction géométrique

La relation $(\widehat{\psi}_\varepsilon^* \omega_0) \wedge \omega_\varepsilon = 0$ est équivalente à $\widehat{\psi}_\varepsilon^* \omega_0 = \widehat{U}\, \omega_\varepsilon$ où $\widehat{U} \in \widehat{\mathcal{E}}_{0\times V}$.

Posons

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(x,y,\varepsilon) &= \left(\widehat{\psi}_\varepsilon^1(x,y), \widehat{\psi}_\varepsilon^2(x,y), \varepsilon\right) \in \widehat{\mathcal{E}}_{0\times V}^3\\
\widehat{\Omega}_1 &= \widehat{\varphi}^* \omega_0 = \widehat{U}\, \omega_\varepsilon + \widehat{H}\, \mathrm{d}\varepsilon \in \widehat{\Lambda}_{0\times V}^1\\
\widehat{\Omega}_2 &= \widehat{\Omega}_1 / \widehat{U} = \omega_\varepsilon + \widehat{h}\, \mathrm{d}\varepsilon \in \widehat{\Lambda}_{0\times V}^1
\end{aligned}$$

Alors $\widehat{\Omega}_2$ est un déploiement formel de la famille (ω_ε). Nous commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 3.4. – *La 1-forme $\widehat{\Omega}_2$ est un déploiement holomorphe de la famille (ω_ε).*

Démonstration. – Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon \in V$, $\widehat{h}_\varepsilon(x,y) = \widehat{h}(x,y,\varepsilon)$ est convergent. D'après le lemme 2.2, cela revient à montrer que $\widehat{h}_\varepsilon \circ \widetilde{E}$ converge en un point du diviseur exceptionnel $\widetilde{D}$.

Notons $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Gamma_\infty$ des disques dans $\mathbb{C}$, respectivement centrés en $m_1, \ldots, m_n, m_\infty$, deux à deux disjoints, et ne contenant pas m_0. On va construire sur un voisinage de $\{C \setminus \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n \cup \Gamma_\infty\} \times \Delta$ dans $W \times V$, un feuilletage holomorphe coïncidant « horizontalement » avec le feuilletage défini par $\widetilde{\omega}_\varepsilon$.

Comme $\{C \setminus \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n \cup \Gamma_\infty\} \times \Delta$ est compact, il existe un voisinage ouvert W_1 de $\{C \setminus \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n \cup \Gamma_\infty\}$ dans W et un voisinage V de Δ tels que :

- $\forall (x_1, t_1) \in W_1$ et $\forall \varepsilon \in V$, il existe un chemin γ dans $\mathcal{L}$ et $(x_0', t_0) \in T_0$ tels que $\gamma(0) = (0, t_0)$, $\gamma(1) = (0, t_1)$ et $x_1 = h_{\varepsilon,\gamma,T_0,T_1}(x_0')$ (remarque 3.2) avec $T_1 = \{(x, t_1)\}$.
- $\forall (x, t_0) \in T_0$ et $\forall \varepsilon_0 \in V$, la courbe paramétrée par ε, $(\varphi_\varepsilon \circ \varphi_{\varepsilon_0}^{-1}(x), t_0, \varepsilon)$ est contenue dans $W_1 \times V$ où $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in V}$ est la famille de difféomorphismes de *Diff*$(\mathbb{C}, 0)$ telle que $\varphi_\varepsilon^* G_0 = G_\varepsilon$.

On définit géométriquement un feuilletage sur $W_1 \times V$ de la manière suivante :

- Localement, en un point $m_0 = (x, t_0, \varepsilon_0) \in T_0 \times \{\varepsilon_0\}$, la feuille locale $\mathcal{F}_{m_0}$ passant par m_0 a la structure produit suivante :
  - « verticalement », elle contient la courbe $(\varphi_\varepsilon \circ \varphi_{\varepsilon_0}^{-1}(x), t_0, \varepsilon)$.
  - « horizontalement », elle contient la feuille $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ passant par $(\varphi_\varepsilon \circ \varphi_{\varepsilon_0}^{-1}(x), t_0)$.
- En un point $m' = (x_1, t_1, \varepsilon_0)$ quelconque de $W_1 \times V$: On note $T_1 = \{(x, t_1)\}$. Considérons un chemin γ de $\mathcal{L}$ qui relie $m_0 = (0, t_0)$ à $m_1 = (0, t_1)$ et le point $m_{0,\gamma} = (x_\gamma, t_0) \in T_0$ tels que $x_1 = h_{\varepsilon_0,\gamma,T_0,T_1}(x_\gamma)$ (remarque 3.2). On note $\widetilde{\gamma}$ le relèvement de γ contenu dans une feuille de $\mathcal{F}_{\varepsilon_0}$ suivant la fibration de Hopf d'extrémité $m_{0,\gamma}$ (ce chemin existe d'après les hypothèses faites sur W_1 et V). On définit alors la feuille locale $\mathcal{F}_{m',\gamma}$ au voisinage de m' comme étant le prolongement analytique de la

feuille locale $\mathcal{F}_{m_{0,\gamma}}$ au voisinage de $(x_\gamma, t_0, \varepsilon_0)$ le long du chemin $\widetilde{\gamma}$. Montrons que cette construction est indépendante de la classe d'homotopie de γ. Soit γ_1 et γ_2 deux chemins dans $\mathcal{L}$ vérifiant les hypothèses précédentes. Remarquons que $\gamma_1 = \gamma_2.\gamma_2^{-1}.\gamma_1$, donc $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}_2.\widetilde{\gamma}_2^{-1}.\widetilde{\gamma}_1$. Mais $\mathcal{F}_{m',\gamma_1}$ (resp.$\mathcal{F}_{m',\gamma_2}$) est le prolongement analytique de $\mathcal{F}_{m_{0,\gamma_1}}$ (resp. $\mathcal{F}_{m_{0,\gamma_2}}$) le long de $\widetilde{\gamma}_1$ (resp. $\widetilde{\gamma}_2$). Il suffit donc de montrer que le prolongement analytique de $\mathcal{F}_{m_{0,\gamma_1}}$ le long de $\widetilde{\gamma}_2^{-1}.\widetilde{\gamma}_1$ coïncide avec $\mathcal{F}_{m_{0,\gamma_2}}$. Tout d'abord, par définition de l'holonomie, $(x_{\gamma_2}, t_0) = h_{\varepsilon_0,\gamma_2^{-1}.\gamma_1}(x_{\gamma_1}, t_0)$. De plus on connait la structure produit de chacune de ces deux feuilles. Les composantes horizontales coïncident puisqu'elles contiennent toutes deux la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_\varepsilon$ passant par (x_{γ_2}, t_0). Verticalement elles coïncident également. Cela est dû au fait que les difféomorphismes $\varphi_\varepsilon \circ \varphi_{\varepsilon_0}^{-1}$ conjuguent G_{ε_0} à G_ε.

On définit ainsi géométriquement un feuilletage holomorphe sur $W_1 \times V$. Comme $W_1 \times V$ est un ouvert de Stein, ce feuilletage est globalement défini par une 1-forme

$$\alpha = \widetilde{\omega}_\varepsilon + l(x,t,\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \in \Lambda_3^1(W_1 \times V)$$

qui vérifie la condition d'intégrabilité

$$\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = 0,$$

qui s'écrit encore

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon \wedge \left[\mathrm{d}_{x,t} l_\varepsilon + \frac{\partial \widetilde{\omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right] + l_\varepsilon\,\mathrm{d}_{x,t}\,\widetilde{\omega}_\varepsilon = 0 \qquad (*)$$

où $\mathrm{d}_{x,t}$ désigne la différentielle par rapport aux variables x et t. Désignons par $\widehat{\beta}$ l'éclaté strict dans la carte $W \times V$ de $\widehat{\Omega}_2$ par $\overline{E}_h$, c'est-à-dire

$$\widehat{\beta} = \frac{\overline{E}_h^* \widehat{\Omega}_2}{x^\nu}, \qquad \nu \in \mathbb{N}.$$

Il vérifie la relation $\widehat{\beta} \wedge \mathrm{d}\widehat{\beta} = 0$. Dans la carte $W \times V$, $\widehat{\beta}$ s'écrit

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon + \frac{\widehat{h}_\varepsilon \circ \widetilde{E}}{x^\nu}\,\mathrm{d}\varepsilon = \widetilde{\omega}_\varepsilon + \widehat{K}_\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

La condition $\widehat{\beta} \wedge \mathrm{d}\widehat{\beta} = 0$ s'écrit alors

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon \wedge \left[\mathrm{d}_{x,t} \widehat{K}_\varepsilon - \frac{\partial \widetilde{\omega}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right] + \widehat{K}_\varepsilon\,\mathrm{d}_{x,t}\,\widetilde{\omega}_\varepsilon = 0 \qquad (**)$$

Si on soustrait les relations $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$\widetilde{\omega}_\varepsilon \wedge \mathrm{d}\left(l_\varepsilon - \widehat{K}_\varepsilon\right) + \left(l_\varepsilon - \widehat{K}_\varepsilon\right)\mathrm{d}_{x,t}\,\widetilde{\omega}_\varepsilon = 0.$$

Si $l_\varepsilon - \widehat{K}_\varepsilon \neq 0$, cela signifie que $l_\varepsilon - \widehat{K}_\varepsilon$ est un facteur intégrant le long de $\mathcal{L}\backslash\{D_1 \cup \ldots \cup D_n\}$ transversalement formel, ce qui entraînerait, d'après le lemme technique 2, que G_ε est abélien. Ceci est exclu. Par conséquent $l_\varepsilon - \widehat{K}_\varepsilon = 0$ et $\widehat{h}_\varepsilon \circ \widetilde{E}$ est convergent.

□

Comme $\widehat{\Omega}_1 = \widehat{\varphi}^* \omega_0$, et comme ω_0 annule le champ $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$, la 1-forme $\widehat{\Omega}_1$ annule le champ

$$\widehat{Z} = \widehat{\varphi}^* \frac{\partial}{\partial\varepsilon} = \widehat{X}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{Y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \in \widehat{\chi}_{0\times V}.$$

Donc $\widehat{\Omega}_2 = \dfrac{\widehat{\Omega}_1}{\widehat{U}}$ annule également le champ $\widehat{Z}$. Comme $\widehat{\Omega}_2$ est holomorphe, d'après un théorème d'Artin ([Ar]) ou plus simplement par un argument de platitude, $\widehat{\Omega}_2$ annule un champ de vecteurs holomorphes.

$$Z = X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \in \chi_{0\times V}.$$

D'après le théorème de rectification des champs, il existe un difféomorphisme

$$g(x,y,\varepsilon) = (g_1(x,y,\varepsilon), g_2(x,y,\varepsilon), \varepsilon) \in \mathcal{O}^3_{0\times V}$$

tel que $g^* Z = \dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$ et donc $(g^*\widehat{\Omega}_2).\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon} = 0$. On a donc trivialisé $\widehat{\Omega}_2$ et ainsi la famille $\big(g^1_\varepsilon(x,y), g^2_\varepsilon(x,y)\big)_{\varepsilon\in V}$ est une famille de $\mathit{Diff}_2(\Delta)$ telle que $g^*_\varepsilon\, \omega_\varepsilon \wedge \omega_0 = 0$.

□

Remarque 3.5. – Le théorème I s'étend à la dimension n par les mêmes techniques que celles utilisées par Cano-Cerveau ([Ca,Ce]), puis Cano-Mattei ([Ca,Ma]), pour étendre le théorème de la séparatrice ([Ca,Sa]) de Camacho-Sad en dimension 2 à la dimension 3, puis à la dimension n. Un feuilletage $(\mathcal{F}_\omega, S)$ (où $\omega \in \underline{\Lambda}^1_n$ et S désigne son lieu singulier) est dit non exceptionnel si une section par un 2-plan transverse générique est un feuilletage (de dimension 2) non exceptionnel au sens de la dimension 2. Il est dit génériquement non dicritique si une section transverse par un 2-plan transverse générique du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ est un feuilletage (de dimension 2) non dicritique. On a alors le théorème qui suit.

THÉORÈME 3.6. – *Si $(\mathcal{F}_{\omega_\varepsilon})$ est une famille de feuilletages holomorphes ayant même lieu singulier S, génériquement non dicritique, à type formel constant et si $\mathcal{F}_{\omega_0}$ est non exceptionnel, alors $(\mathcal{F}_{\omega_\varepsilon})$ est à type analytique constant.*

4. Théorème II

4.1 – Quelques résultats sur les sous-groupes de *Diff*$_1$

Soit
$$f(z) = a\,z + z^2(\cdots) \in \widehat{\mathit{Diff}}_1;$$

Si $f'(0) = 1$, on dit que f est tangent à l'identité. On désigne par $\widehat{\mathit{Diff}}_{1,>0}$ le sous-groupe de $\widehat{\mathit{Diff}}_1$ des difféomorphismes tangents à l'identité.

Si $f \in \widehat{\mathit{Diff}}_{1,>0}$, on note $\nu(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'ordre de $f(z) - z$ et on l'appelle ordre de tangence de f à l'identité. On désigne par $X_{p,\lambda}$ l'élément $\dfrac{x^{p+1}}{1+\lambda x^p}\dfrac{\partial}{\partial x}$ de χ_1 et, pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, par ρ_a l'élément $z \longmapsto a\,z$ de Diff_1. On désigne par $\sim$ la conjugaison analytique et par $\approx$ la conjugaison formelle.

THÉORÈME 4.1. – *Soit $f \in \widehat{\mathit{Diff}}_1$; i) Si $f'(0)$ n'est pas racine de l'unité alors f est formellement linéarisable.* ii) *Si $f'(0)$ est racine de l'unité de période p alors,*

- *soit $f^p = \mathrm{Id}$ et alors $f \approx \rho_a$ où $a = f'(0)$,*
- *soit $f^p \neq \mathrm{Id}$ et alors il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f \approx \rho_a \circ \exp X_{p,\lambda}$ où $a = f'(0)$.*

Soit $f \in \widehat{\mathit{Diff}}_1$; on appelle centralisateur de f et on le note $\mathrm{Cent}\,(f)$, l'ensemble

$$\left\{g \in \widehat{\mathit{Diff}}_1 \mid f \circ g = g \circ f\right\}.$$

On trouvera les démonstrations ainsi que les références des résultats suivants dans [Ma,Ra] ou dans la thèse de F. Loray ([Lo]).

THÉORÈME 4.2. – i) *Si ρ_a est non périodique, alors* $\mathrm{Cent}\,(\rho_a) = \{\rho_b \mid b \in \mathbb{C}^*\}$. ii) *Si ρ_a est périodique de période p, alors*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cent}\,(\rho_a) = \left\{\textstyle\sum_{n\geq 0} a_n\, z^{n\,p+1},\ a_0 \neq 0\right\},\\ &\mathrm{Cent}\,(\rho_a \circ \exp\, X_{p,\lambda}) = \left\{\rho_\mu^n \circ \exp \tau X_{p,\lambda},\ \mu = e^{2\,i\,\pi/p},\ n \in \mathbb{Z} \text{ et } \tau \in \mathbb{C}\right\}.\end{aligned}$$

iii) *Étant donné $\varphi \in \widehat{\mathit{Diff}}_1$, on a*

$$\varphi^*(\rho_a \circ \exp\, X_{p,\lambda}) = \rho_a \circ \exp(\tau\, X_{p,\lambda}),\ \tau \in \mathbb{C},\ \tau \neq 1$$

si et seulement si $\lambda = 0$ et

$$\varphi \in \left\{\rho_b \circ (\rho_\mu)^n \exp \tau' X_{p,\lambda} \text{ où } b^p = \tau,\ \mu = e^{2\,i\,\pi/p},\ n \in \mathbb{Z} \text{ et } \tau' \in \mathbb{C}\right\}.$$

PROPOSITION 4.3. – *Un sous-groupe G de Diff_1 est dit exceptionnel s'il n'est pas abélien et s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :* i) *Le sous-groupe H des éléments de G tangents à l'identité est monogène.* ii) *Le sous-groupe des commutateurs de G, $[G, G]$, est monogène.* iii) *Il existe un entier p et $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^p = -1$ avec G est formellement conjugué au groupe $G_{\omega,p} = \langle z \mapsto \omega\, z,\ z \mapsto \dfrac{z}{(1+z^p)^{1/p}}\rangle$.*

On aura également besoin du résultat suivant de Cerveau et Moussu.

THÉORÈME ([Ce,Mo]). – *Toute paire f_j d'éléments, $j = 1, 2$, de $G_{\omega,p}$ s'écrit*

$$f_j(x) = \omega^{m_j} \frac{x}{(1 - k_j\, x^p)^{1/p}}$$

où $m_j \in \mathbb{Z}$ et $k_j \in \mathbb{C}$. De plus, si les f_j sont périodiques et ne commutent pas, alors les m_j sont des entiers impairs.

Remarque 4.4. – Ainsi si f_1 et f_2 dans $G_{\omega,p}$ sont périodiques et ne commutent pas, $f_1 \circ f_2$ est non périodique et f_1^2 et f_2 commutent. Ces résultats classiques nous permettent d'établir les deux lemmes suivants qui seront utiles dans la démonstration du critère G_2 de généricité.

LEMME 4.5. – *Soit $f, g \in \mathit{Diff}_1$ différents de l'identité tels que $f \circ g = g \circ f$ et $k \in \mathbb{N}$; alors il existe $\varphi \in \mathit{Diff}_1$, k-tangent à l'identité tel que $\varphi^* f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et g ne commutent pas.*

Démonstration. – Il suffit de montrer que si $f \in \widehat{Diff}_1$ et g est sous forme normale tels que $f \circ g = g \circ f$ alors il existe $\widehat{\varphi} \in \widehat{Diff}_1$, k-tangent à l'identité tel que $\widehat{\varphi}^* f$ et g ne commutent pas. En effet, supposons que l'on ait établi ce résultat. Notons alors $\widehat{\psi} \in \widehat{Diff}_1$ un élément qui conjugue g à sa forme normale. En appliquant le résultat à $\widehat{\psi}^* f$ et $\widehat{\psi}^* g$, il existe $\widehat{\varphi}$ tel que $(\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi})^* f$ et $\widehat{\psi}^* g$ ne commutent pas et $\widehat{\varphi}$ est k-tangent à l'identité. Alors $(\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}^{-1})^* f$ et g ne commutent pas et $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}^{-1}$ est k-tangent à l'identité. Pour un $l > k$, $\varphi = j^l(\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}^{-1})$ est k-tangent à l'identité et $\varphi^* f$ ne commute pas avec g.

Établissons le résultat annoncé.

• Premier cas : Les difféomorphismes f et g sont périodiques et donc $g(z) = a\,z$ où $a^p = 1$ et $p > 1$. Comme f et g commutent, on peut en fait supposer que f est également sous forme normale, c'est-à-dire $f(z) = b\,z$ où $b^q = 1$ où $q > 1$ est la période de b. Il s'agit de trouver $\widehat{\varphi}$ tel que $\widehat{\varphi}^* f \notin \mathrm{Cent}(f)$. Posons $s = \alpha\,p\,q + 1$ tel que $s > k$ et $\varphi(x) = \dfrac{x}{(1+x^s)^{1/s}}$. Alors $\varphi^* f = \dfrac{b\,z}{(1+(1-b)\,z^s)^{1/s}}$ ne commute pas avec $g(z) = a\,z$.

• Deuxième cas : Un des difféomorphismes f ou g n'est pas périodique. On peut supposer que g est non périodique.

– Sous-cas 2.1 : Supposons que $g(z) = \lambda\,z$ où λ n'est pas racine de l'unité. Comme $f \in \mathrm{Cent}(g)$ cela entraîne $f(z) = \mu\,z$ où $\mu \neq 1$. Il suffit alors de choisir φ tangent à l'identité à l'ordre k à l'extérieur de $\mathrm{Cent}(f)$ ce qui est possible d'après la description de $\mathrm{Cent}(f)$ du théorème 4.2.

– Sous-cas 2.2 : Supposons que $g(z) = a \exp X_{p,\lambda}$ où $a^p = 1$. Alors $f \in \mathrm{Cent}(g)$ entraîne $f(z) = b \exp s\,X_{p,\lambda}$ où $b^p = 1$. Il suffit donc de choisir $\widehat{\varphi}$ tangent à l'identité à l'ordre k tel que $\widehat{\varphi}^*(b \exp s\,X_{p,\lambda}) \neq b \exp \tau\,X_{p,\lambda}$ ce qui est possible d'après le théorème 4.2.

□

LEMME 4.6. – *Soient f et g deux éléments d'un groupe G exceptionnel qui ne commutent pas entre eux et k un entier; alors il existe $\varphi \in Diff_1$, k-tangent à l'identité tel que $(\varphi^* f) \circ g$ est non périodique ou $\langle \varphi^*\, g, f \rangle$ est non exceptionnel.*

Démonstration. – Le groupe G est non abélien exceptionnel. Pour la même raison que dans le lemme précédent, on peut supposer que G est sous forme normale. C'est-à-dire que,

$$f = \frac{\omega^{m_1}\,x}{(1-k_1\,x^p)^{1/p}} \qquad \text{et} \qquad g = \frac{\omega^{m_2}\,x}{(1-k_2\,x^p)^{1/p}}$$

et ne commutent pas. Remarquons que $\dfrac{\omega^{m_i}\,x}{(1-k_i\,x^p)^{1/p}} = \omega^{m_i} \exp \dfrac{k_i}{p+1}\, X_{p,0}$.

• Premier cas : Les difféomorphismes f et g sont périodiques. D'après la remarque 4.4 cela entraîne que m_1 et m_2 sont impairs. Or $f \circ g$ est de la forme $\dfrac{\omega^{m_1+m_2}\,x}{(1-k_1\,x^p)^{1/p}}$ et $m_1 + m_2$ est pair. Donc $f \circ g$ est non périodique et il suffit de prendre $\varphi = \mathrm{Id}$.

• Deuxième cas : Un des difféomorphismes f ou g n'est pas périodique. On peut supposer qu'il s'agit de g. Montrons qu'il existe φ tangent à l'identité à l'ordre l tel que $\langle \varphi^* f, g \rangle$ est non exceptionnel, $l > k$. On note k_0 un entier tel que $\nu(\varphi) > k_0$ entraîne que $\varphi^* f$ et g ne commutent pas. Soit alors φ un difféomorphisme tangent à l'identité à un ordre $l > k_0$. Si le groupe $\langle \varphi^* f, g \rangle$ est exceptionnel alors il existe $\widehat{\psi}$ tel que $\widehat{\psi}^*(\varphi^* f)$ et $\widehat{\psi}^* g$ sont sous forme normale. Mais comme g est sous forme normale, cela entraîne $\widehat{\psi}^* g = g$

et comme g est non périodique, alors $\widehat{\psi}$ est de la forme $\omega^m \exp s\, X_{p,0}$, ce qui implique que $\varphi^* f$ est de la forme $\omega^{m'} \exp t\, X_{p,0}$. Donc il suffit de choisir φ tangent à l'identité à un ordre supérieur à $\max(k_0, k)$ tel que $\varphi^* f$ ne soit pas de la forme $\omega^{m'} \exp t\, X_{p,0}$ ce qui est possible d'après le théorème 4.2.

□

4.2 – La condition G_1 de généricité

Il s'agit de montrer que la propriété $\mathcal{P}$ est de détermination finie. Soit $\omega_0 \in \mathcal{C}$ (la classe des courbes généralisées) une 1-forme non exceptionnelle; pour tout $r > 0$, $\mathcal{F}_r(\omega_0)$ désigne l'ensemble

$$\{\omega \in \underline{\Lambda}_2^1 \mid j^r(\omega) = j^r(\omega_0)\}.$$

D'après la proposition 2.5, il existe $r_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $\omega \in \underline{\Lambda}_2^1$, $j^{r_0}(\omega) = j^{r_0}(\omega_0)$ entraîne que ω et ω_0 ont la même désingularisation à l'ordre 1 (et donc en particulier $\omega \in \mathcal{C}$). Pour tout $r \geq r_0$ et tout $\omega \in \mathcal{F}_r(\omega_0)$, on note

$$A = (M_j, E^j, \Sigma_j, S_j D_j)_{j=0,\dots,h}$$

l'arbre au dessus de M_0 de désingularisation commun aux $\mathcal{F}_\omega$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ le feuilletage éclaté strict de $\mathcal{F}_\omega$ par $\widetilde{E} = E^1 \circ \dots \circ E^h$.

Comme ω_0 est non exceptionnelle, il existe une composante irréductible C de $\widetilde{D}$ telle que le groupe d'holonomie projective de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega_0}$ associé à C soit non exceptionnel.

Notons $\{m_1, \dots, m_n, m_\infty\} = \mathrm{Sing}\,(\widetilde{F}_{\omega_0}) \cap C$, $\mathcal{L} = C \setminus \{m_1, \dots, m_n, m_\infty\}$ et fixons une fibration transverse à $\mathcal{L}$, T et un point $m_0 \in \mathcal{L}$. On désigne alors par

$$H_{\mathcal{L},\omega} : \pi_1(\mathcal{L}; m_0) \longrightarrow \mathit{Diff}(\mathbb{C}_{,0})$$

la représentation d'holonomie du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ associée à la séparatrice $\mathcal{L}$, à la fibration T et au point m_0. On note $G_\omega = H_{\mathcal{L},\omega}(\pi_1(\mathcal{L}; m_0))$ et, pour tout lacet γ dans $\mathcal{L}$ pointé en m_0, $h_{\omega,\gamma} = H_{\mathcal{L},\omega}([\gamma])$.

La propriété G_1 découle du

LEMME 4.7. – *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un $l \geq r_0$ tel que, pour tout $\omega \in \mathcal{F}_l(\omega_0)$ et tout lacet γ de $\mathcal{L}$ pointé en m_0,*

$$j^k(h_{\omega,\gamma}) = j^k(h_{\omega_0,\gamma}).$$

4.3 – Quelques notations et définitions

Je reprends dans ce paragraphe des définitions de J.F. Mattei et E. Salem ([Ma,Sa]). On appelle famille critique associée à $\widetilde{\mathcal{F}}$, l'ensemble $C(\widetilde{\mathcal{F}})$ dont les éléments sont :

1. Les points singuliers de $\widetilde{\mathcal{F}}$ que l'on appelle ensembles critiques de dimension 0.
2. Les composantes connexes de $\widetilde{D} \setminus \mathrm{Sing}\,(\widetilde{\mathcal{F}})$, que l'on appelle ensembles critiques de dimension 1.

Un couple assorti d'éléments de $C(\widetilde{\mathcal{F}})$ est un couple (m, K) où K est un ensemble critique de dimension 1 et m est un ensemble critique de dimension 0 tel que $m \in \overline{K}$.

Un système de déformations k-tangentes de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est la donnée d'une famille

$$(\mathcal{F}_K)_{K\in C(\widetilde{\mathcal{F}})}$$

de germes le long de K de feuilletages holomorphes k-tangents à $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Soit $S = (\mathcal{F}_K)_{K\in C(\widetilde{\mathcal{F}})}$, un système de déformations k-tangentes de $\widetilde{\mathcal{F}}$; à tout couple assorti (m, K), on associe deux éléments de *Diff*$_1$:

– $h^1_{m,K}$ le germe de difféomorphisme d'holonomie de $\mathcal{F}_m$ le long de K, autour de m,

– $h^2_{m,K}$ le germe de difféomorphisme d'holonomie de $\mathcal{F}_K$ le long de K, autour de m.

Le système S est dit cohérent si, pour tout couple assorti (m, K), les difféomorphismes $h^1_{m,K}$ et $h^2_{m,K}$ sont conjugués. On note :

- $\{m_1, \ldots, m_n\} = \mathrm{Sing}\,(\widetilde{\mathcal{F}})$;
- $\{K_1, \ldots, K_p\}$ la famille des éléments critiques de dimension 1 et,
- pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $\{m^j_{i_1}, \ldots, m^j_{i_{n_j}}\} = \overline{K}_j \cap \mathrm{Sing}\,(\widetilde{\mathcal{F}})$.

Le symbole K, sans indice, désigne indifféremment un élément critique de dimension 0 ou de dimension 1. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on considère :

- T_j une fibration transverse à K_j;
- m^j_0 point de K_j;
- $\gamma^j_{i_1}, \ldots, \gamma^j_{i_{n_j}}$ des lacets dans K_j, pointés en m^j_0 tels que, pour tout $i \in \{i_1, \ldots, i_{n_j}\}$, γ^j_i est d'indice 1 par rapport à m^j_i et d'indice 0 par rapport à m^j_k où $k \in \{i_1, \ldots, i_{n_j}\}\backslash\{i\}$.
- $H_j : \pi_1(K_j; m^j_0) \longrightarrow$ *Diff*$_1$, la représentation d'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}}$ associée à K_j, à la fibration T_j et à m^j_0.

On note alors :

- $G_j = H_j(\pi_1(K_j; m^j_0))$,
- $h^j_i = H_j([\gamma^j_i])$ pour tout $i \in \{i_1, \ldots, i_{n_j}\}$.

4.4 – Lemmes techniques

On utilisera les deux lemmes suivants dont les démonstrations utilisent de manière essentielle les résultats de cohomologie dûs à J.-F. Mattei et E. Salem :

LEMME TECHNIQUE 3. – *Étant donné un système cohérent de déformations $(k+h)$-tangentes de $\widetilde{\mathcal{F}}$,*

$$S = \left(\widehat{\mathcal{F}}_K\right)_{K\in C(\widetilde{\mathcal{F}})},$$

il existe un germe $\widetilde{\widetilde{\mathcal{G}}}$ le long de $\widetilde{D}$ de feuilletage holomorphe transversalement formel, k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$, tel que, pour tout $K \in C(\widetilde{\mathcal{F}})$, $\widehat{\mathcal{F}}_K$ et $\widetilde{\widetilde{\mathcal{G}}}_{|K}$ sont formellement conjugués.

Soit $K_j \in C(\widetilde{\mathcal{F}})$ un ensemble critique de dimension 1; on note $\{m^j_1, \ldots, m^j_{n_j}\}$ l'ensemble des éléments critiques de dimension 0 dans $\overline{K}_j$. On se donne également une famille $f_1, \ldots, f_{n_j}$ de germes de difféomorphismes holomorphes de *Diff*$_1$, respectivement l-tangents aux $h^j_1, \ldots, h^j_{n_j}$ pour un l assez grand et tels que

$$f_1 \circ \ldots \circ f_{n_j} = Id.$$

LEMME TECHNIQUE 4. – *En gardant les notations précédentes, il existe un germe le long de $\overline{K}_j$ de feuilletage holomorphe, k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}_{|K}$, dont les difféomorphismes d'holonomie associés à T_j et aux chemins $\gamma_1^j, \ldots, \gamma_{n_j}^i$ sont respectivement $f_1, \ldots, f_{n_j}$.*

LEMME TECHNIQUE 5. – *Étant donné $\mathcal{G}_{i+1}$ un germe le long de D_{i+1} de feuilletage holomorphe, l-tangent à $\mathcal{F}_{i+1}$, il existe un unique germe $\mathcal{G}_i$ le long de D_i de feuilletage holomorphe, l-tangent à $\mathcal{F}_i$, tel que $\mathcal{G}_{i+1}$ soit l'éclaté strict de $\mathcal{G}_i$ suivant E^{i+1}.*

La démonstration de ce dernier lemme, s'inspire d'une démonstration de Cano et Cerveau ([Ca,Ce]). On trouvera les démonstrations complètes de ces résultats dans [LF].

4.5 – Stratégie pour établir la propriété G_2 de généricité

Soit $K \in C(\widetilde{\mathcal{F}})$ un ensemble critique de dimension 1; on appelle valence de K le nombre d'ensembles critiques de dimension 0 dans $\overline{K}$.

Un système cohérent de déformations k-tangentes de $\widetilde{\mathcal{F}}$, $S = (\widetilde{\mathcal{F}}_K)_{K \in C(\widetilde{\mathcal{F}})}$, est dit satisfaisant s'il existe un ensemble critique de dimension 1, K, de valence supérieure ou égale à 3, tel que le groupe d'holonomie projective de $\mathcal{F}_K$ associé à K est non exceptionnel.

La stratégie pour établir la propriété G_2 de généricité consiste à construire $S = (\widetilde{\mathcal{F}}_K)_{K \in C(\widetilde{\mathcal{F}})}$ un système cohérent de déformations $(k+h)$-tangentes à $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui soit satisfaisant. En effet, à partir d'un tel système, d'après le lemme technique 3, on obtient un germe le long de $\widetilde{D}$ de feuilletage holomorphe $\widetilde{\mathcal{G}}$, k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$, tel que pour tout $K \in C(\widetilde{\mathcal{F}})$, $\widetilde{\mathcal{G}}_K$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ sont formellement conjugués.

En particulier, il existe un ensemble critique de dimension 1, K_0, de valence supérieure ou égale à 3, tel que le groupe d'holonomie projective associé à K_0 est non exceptionnel. Alors d'après le lemme technique 5, il existe $\omega' \in \underline{\Lambda}_2^1$, k-tangente à ω telle que $\widetilde{\mathcal{G}}$ est l'éclaté strict de $\mathcal{F}_{\omega'}$.

4.6 La condition G_2 de généricité

On appelle sous-diviseur de $\widetilde{D}$, un sous-ensemble fermé L, connexe de $\widetilde{D}$, réunion d'éléments de $C(\widetilde{\mathcal{F}})$,

$$\cup_{K \in C(L)} K \quad \text{où} \quad C(L) \subset C(\widetilde{\mathcal{F}}).$$

Étant donné un sous-diviseur L de $\widetilde{D}$, on dit qu'une singularité $m \in C(L)$ est un coin de L s'il existe deux éléments critiques de dimension 1 distincts, K_{j_1} et K_{j_2} de $C(L)$, tels que $m \in \overline{K}_{j_1} \cap \overline{K}_{j_2}$. Sinon on dit que m est une flèche de L.

Une chaîne de L est un sous-diviseur Q de $\widetilde{D}$ contenu dans L tel que tous les éléments critiques de dimension 1 de $C(Q)$ sont de valence inférieure ou égale à 2. S'ils sont tous de valence 2, on parle de chaîne de valence 2 sinon on parle de chaîne de valence 1 ou encore de branche morte.

Si Q est une chaîne de L, on appelle couple d'attache de Q, un couple assorti (m, K) tel que $m \in Q$ et K est un élément critique de dimension 1 de valence supérieure ou égale à 3. La singularité m est alors appelée point d'attache de la chaîne Q. On se propose tout d'abord d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 4.8. – *Pour tout sous-diviseur L de $\widetilde{D}$ et tout entier k, il existe un système cohérent de déformations k-tangentes de $\widetilde{\mathcal{F}}$, $S = (\widetilde{\mathcal{F}}_K)_{K \in C(L)}$, le long de L* *qui vérifie l'une des propriétés suivantes :* i) *Le système S est satisfaisant.* ii) *D'une part, les difféomorphismes d'holonomie locaux autour des singularités qui ne sont pas des points d'attache d'une chaîne de valence 1 sont non periodiques. D'autre part, les groupes d'holonomie projective des éléments critiques de $C(L)$ de dimension 1 et de valence supérieure ou égale à 3 sont non abéliens.*

La démonstration de cette proposition nécessite quelques lemmes préliminaires.

4.9. – *Soit K_j un élément critique de dimension 1 et $m_i^j \in \overline{K}_j$ le point d'attache d'une chaîne Q de valence 1; alors h_i^j est différent de l'identité.*

Démonstration. – Pour simplifier l'indexation, on suppose que $Q = \overline{K}_{j-1} \cup \ldots \cup \overline{K}_1$ et que $\forall i \in \{j, \ldots, 2\}$, $\overline{K}_j \cap \overline{K}_{j-1} = \{m_{j-1}\}$.

On note e_i la classe de Chern de $\overline{K}_i$ dans $\widetilde{M}$. Comme Q est une branche morte, pour tout $i \in \{2, \ldots, j-1\}$, $e_i \leq -2$ ou encore $|e_i| \geq 2$.

En chaque m_i, on se donne une carte locale $(U_i, (x_i, t_i))$ telle que : 1) $\overline{K}_{i+1} \cap U_i = \{x_i = 0\}$, 2) $\overline{K}_i \cap U_i = \{t_i = 0\}$, 3) $\widetilde{\mathcal{F}}_{,m_i}$ est engendré par $\omega_{i,m}$ telle que

$$j^1\omega_{i,m} = \lambda_i\, x_i\, \mathrm{d}t_i + t_i\, \mathrm{d}x_i.$$

Avec ces notations, pour tout $i \in \{1, \ldots, j-1\}$, on a

$$\begin{aligned} j^1(h_i^{i+1}(z)) &= e^{-2i\pi\lambda_i} z, \\ i_{m_i}(\omega_i, K_{i+1}) &= -\lambda_i, \\ i_{m_i}(\omega_i, K_i) &= -\frac{1}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ que $\lambda_i \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$.

– Pour $i = 1$, le théorème de l'indice ([Ca,Sa]) appliqué à $\overline{K}_1$ s'écrit

$$-\frac{1}{\lambda_1} = e_1 \quad \text{ou encore} \quad \lambda_1 = \frac{1}{|e_1|} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[.$$

– Supposons que $\lambda_{i-1} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Le théorème de l'indice ([Ca,Sa]) appliqué à $\overline{K}_i$ permet d'écrire

$$-\frac{1}{\lambda_i} - \lambda_{i-1} = e_i$$

et donc

$$\lambda_i = \frac{1}{|e_i| - \lambda_{i-1}}.$$

Comme $|e_i| \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty[$ et $\lambda_{i-1} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$, $\lambda_i \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Donc par récurrence, $\lambda_{j-1} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. Or $j^1(h_{j-1}^j(z)) = e^{-2i\pi\lambda_{j-1}} z$, ce qui entraîne $h_{j-1}^j \neq Id$.

□

Remarque 4.10. – Rappelons la notion d'indice d'une séparatrice d'un feuilletage. Soit $(\mathcal{F}, \mathrm{Sing}(\mathcal{F}))$ un feuilletage sur M une variété analytique complexe de dimension 2, S une séparatrice de $\mathcal{F}$ telle que $\overline{S}$ soit une surface de Riemann lisse plongée dans M et $m \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \subset \overline{S}$. On suppose que $\mathcal{F}_m$ est engendré par la 1-forme ω. On considère

$\Phi : (M, m) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ une coordonnée locale dans laquelle $\omega = a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y$ et $S = \{y = 0\} \setminus \{(0,0)\}$. On a donc

$$a(0,0) = b(0,0) = 0 \text{ et } a(x,0) = 0.$$

On appelle indice de $\mathcal{F}$ en m par rapport à la séparatrice S, le nombre complexe

$$i_m(\mathcal{F}, S) = -\mathrm{Res}_{x=0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{b}\right)\right)(x,0)$$

où Res désigne le résidu d'une fonction méromorphe.

Remarque 4.11. – On se donne une chaîne de valence 2 de $\widetilde{D}$. Pour simplifier les notations, on suppose que :

- $Q = \overline{K}_1 \cup \ldots \cup \overline{K}_n$,
- $m_1 \in \overline{K}_1$ et $m_{n+1} \in \overline{K}_n$ sont les deux points d'attache de Q,
- pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $m_{i+1} = \overline{K}_i \cap \overline{K}_{i+1}$.

Étant donné $\mathcal{F}_{m_1}$ un germe en m_1 de feuilletage holomorphe k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}_{,m_1}$, on peut l'étendre en un système cohérent $S = (\mathcal{F}_K)_{K \in C(Q)}$ k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long de Q. En effet, $\mathcal{F}_{m_1}$ définit un germe d'holonomie f_1^1 le long de K_1 autour de m_1 qui est l-tangent à h_1^1. On pose alors $f_2^1 = (f_1^1)^{-1}$ qui est donc l-tangent à $h_2^1 = h_1^{-1}$. Donc, d'après le lemme technique 4, on récupère un germe le long de $\overline{K}_1$ de feuilletage holomorphe, k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$, qui a précisément f_1^1 (resp.f_2^1) pour holonomie autour de m_1 (resp. m_2) associée à T_1 et m_0^1. Ainsi $(\mathcal{F}_{m_2}, \mathcal{F}_{K_1}, \mathcal{F}_{m_1})$ est un système cohérent. On construit ainsi de proche en proche le système cohérent annoncé.

Démonstration (Proposition 4.8). – On raisonne par récurrence sur le nombre n d'éléments critiques de dimension 1 de valence supérieure ou égale à 3 que contient $C(L)$. Si $n = 1$, quitte à réindexer, on suppose que $K_1 \in C(L)$ est de valence supérieure ou égale à 3 et que $\overline{K}_1 \cap \mathrm{Sing}\,(\widetilde{\mathcal{F}}) = \{m_1, \ldots, m_p\}$ où p est supérieur ou égal à 3.

• Premier cas : Toutes les singularités de $\overline{K}_1$, sauf une que l'on supposera être m_1, sont point d'attache d'une chaîne de valence 1; alors d'après le lemme 4.9, les difféomorphismes $h_2^1, \ldots, h_p^1$ sont distincts de l'identité. Ainsi d'après le lemme 4.5, il existe $\varphi_1 \in \mathit{Diff}_1$ tangent à un ordre l arbitrairement grand tel que les difféomorphismes $\varphi_1^* h_2^1$ et h_3^1 ne commutent pas. On pose alors

$$f_1 = (\varphi_1^* h_2^1) \circ h_3^1 \circ \ldots \circ h_p^1, \quad f_2 = \varphi_1^* h_2^1 \quad \text{et} \quad f_i = h_i^1 \quad \text{pour } i \geq 3.$$

Par construction les difféomorphismes f_i sont tangents aux difféomorphismes h_i^1 à un ordre l arbitrairement grand et le groupe

$$G = \langle f_1, \ldots, f_p \;\; f_1 = f_2 \circ \ldots \circ f_p \rangle$$

est non abélien. Si G est non exceptionnel, on pose $g_i = f_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. Sinon :

a. Soit $f_3 \circ \ldots \circ f_p \neq Id$ et alors on pose $f = f_2$ et $g = f_3 \circ \ldots \circ f_p$ qui sont distincts de l'identité.

b. Soit $f_3 \circ \ldots \circ f_p = \mathrm{Id}$ et alors p est supérieur ou égal à 4. On pose $f = f_2 \circ f_3$ qui est différent de l'identité car f_2 et f_3 ne commutent pas et $g = f_4 \circ \ldots \circ f_p = (f_3)^{-1} \neq Id$.

Alors d'après le lemme 4.6, il existe $\varphi_2 \in \mathit{Diff}_1$ tangent à l'identité à un ordre l arbitrairement grand tel que, soit $G' = \langle \varphi_2^* f, g \rangle$ est non exceptionnel, soit $\varphi_2^* f \circ g$ est non périodique.

Dans le cas a, on pose $g_2 = \varphi_2^* f_2$, $g_i = f_i$ si $i \geq 3$ et $g_1 = g_2 \circ \ldots \circ g_p$.

Dans le cas b, on pose $g_2 = \varphi_2^* f_2$, $g_3 = \varphi_2^* f_3$, $g_i = f_i$ si $i \geq 4$ et $g_1 = g_2 \circ \ldots \circ g_p$.

Dans ces deux cas les difféomorphismes g_i sont tangents aux difféomorphismes f_i et donc aux difféomorphismes h_i^1 à un ordre l arbitrairement grand. De plus, soit le groupe $G' = \langle g_1, \ldots, g_p \quad g_1 = g_2 \circ \ldots \circ g_p \rangle$ est non exceptionnel soit le difféomorphisme g_1 est non périodique et, pour $i \geq 2$, les difféomorphismes g_i sont analytiquement conjugués aux difféomorphismes h_i^1.

D'après le lemme technique 4, on a un germe $\mathcal{F}_1$ le long de $\overline{K}_1$ de feuilletage holomorphe k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$, qui réalise ce groupe G'. Le long des chaînes de valence 1, $Q_2, \ldots, Q_p$ attachées à $m_2, \ldots, m_p$, on pose $\mathcal{F}_K = \widetilde{\mathcal{F}}_{|K}$ pour tout $K \in C(Qi)$ et pour tout $i \in 2, \ldots, p$. On pose $\mathcal{F}_{K_1} = \mathcal{F}_{1|K_1}$, $\mathcal{F}_{m_1} = \mathcal{F}_{1,m_1}$ et si m_1 est le point d'attache d'une chaîne Q_1 de valence 2, on étend $\mathcal{F}_{m_1}$ le long de Q_1. Ainsi on obtient un système cohérent le long de L, k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui vérifie les conditions demandées.

• Deuxième cas : On note $m_1, \ldots, m_s$ les singularités de $\overline{K}_1$ qui ne sont pas point d'attache d'une chaîne de valence 1, $s \geq 2$, et $m_{s+1}, \ldots, m_p$ les autres. Pour $i = 2, \ldots, s$, si h_i^1 est non périodique, on pose $f_i = h_i^1$. Sinon on prend f_i tangent à h_i^1 à un ordre l arbitrairement grand tel que f_i soit non périodique. On pose $f_1 = f_2 \circ \ldots \circ fp$. Alors, de la même façon que dans le premier cas, il existe des difféomorphismes $g_1, \ldots, g_p$, l-tangents aux $f_1, \ldots, fp$ pour un entier l arbitrairement grand tels que

– Pour $i \geq 2$, g_i est analytiquement conjugué au difféomorphisme f_i et est en particulier non périodique et les difféomorphismes $g_{s+1}, \ldots, g_p$ sont respectivement analytiquement conjugués aux difféomorphismes $h_{s+1}^1, \ldots, h_p^1$.

– Soit le groupe $G = \langle g_1, \ldots, g_p \quad g_1 = g_2 \circ \ldots \circ g_p \rangle$ est non exceptionnel, soit le difféomorphisme g_1 est non périodique.

D'après le lemme technique 4, on a un germe $\mathcal{F}_1$ le long de $\overline{K}_1$ de feuilletage holomorphe k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$, qui réalise ce groupe G. On note $Q_{s+1}, \ldots, Q_p$ les chaînes de valence 1 attachées à $m_{s+1}, \ldots, m_p$. Pour tout $i \geq s+1$ et pour tout $K \in C(Q_i)$, on pose $\mathcal{F}_K = \widetilde{\mathcal{F}}_K$. Pour tout $i = 1, \ldots, s$, si m_i est le point d'attache d'une chaîne Q_i de valence 2, on étend $\mathcal{F}_{1,m_i}$ le long de cette chaîne. Ainsi on obtient un système cohérent le long de L répondant aux conditions (i) et (ii) de la proposition 4.8.

Soit $n \geq 2$; on considère K_1 un élément critique de dimension 1 de $C(L)$ de valence supérieure ou égale à 3 tel que $\{m_1, \ldots, m_n\} = \overline{K}_1 \cap \operatorname{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}})$ contienne une flèche de L ou un point d'attache d'une chaîne de valence 2 fléchée.

On note $I = \{1, \ldots, n\}$ et on considère la partition $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$ suivante :

$i \in I_1$ si et seulement si m_i est une flèche de L;

$i \in I_2$ si et seulement si m_i est le point d'attache d'une chaîne Q_i de valence 2, fléchée;

$i \in I_3$ si et seulement si m_i est le point d'attache d'une chaîne Q_i de valence 1;

$i \in I_4$ si $i \notin I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

Comme $n \geq 2$ et d'après le choix de K_1, $I_1 \cup I_2 \neq \emptyset$ et $I_4 \neq \emptyset$. On suppose $1 \in I_1 \cup I_2$. Pour $i \in I_4$, on note L_i le sous-diviseur de L qui est la composante connexe de

$$L - \{K_1 \cup (\cup_{j \in I_1}(m_j)) \cup (\cup_{j \in I_2} Q_j) \cup (\cup_{j \in I_3} Q_j)\} \text{ contenant } m_i.$$

On applique l'hypothèse de récurrence et on considère pour tout $i \in I_4$ un système cohérent S_i le long de L_i, k-tangent à $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui vérifie (i) ou (ii) de la proposition 4.8. On récupère ainsi, pour tout $i \in I_4$, un difféomorphisme f_i^1, l-tangent à h_i^1. On pose alors,

pour tout $i \in I_4$, $f_i = f_i^1$,

pour tout $i \in I_3$, $f_i = h_i^1$,

pour tout $i \in I_1 \cup I_2 - \{1\}$, $f_i = h_i^1$ et $f_1 = f_2 \circ f_3 \circ \ldots f_n$.

Si un des systèmes S_i vérifie (i) ou (ii) de la proposition 4.8, on pose, pour tout $i \in I$, $g_i = f_i$. Sinon, pour tout $i \in I_4$, f_i est non périodique. Alors comme pour le cas $n = 1$, il existe des difféomorphismes $g_1, \ldots, g_n$, tangents aux h_i^1 à un ordre l arbitrairement grand tel que

– Soit $G = \langle g_1, \ldots, g_p \;\; g_1 = g_2 \circ \ldots \circ g_p \rangle$ est non exceptionnel, soit $\forall i \in I_1 \cup I_2 \cup I_4$ les g_i sont non périodiques.

– $\forall i \in I_3 \cup I_4$, les g_i sont conjugués analytiquement aux f_i.

On conclut, comme dans le cas $n = 1$. Et ainsi on construit sur L un système cohérent vérifiant (i) ou (ii) de la proposition 4.8.

□

On applique la proposition 4.8 au diviseur $\widetilde{D}$ tout entier. Il reste ainsi à considérer le cas où tous les difféomorphismes h_i^j, où m_i n'est pas le point d'attache d'une chaîne de valence 1, sont non périodiques et tous les G_j sont non abéliens exceptionnels.

Considérons alors $K_1 \in C(\widetilde{\mathcal{F}})$ tel que $\overline{K}_1$ soit de classe de Chern -1 dans $\widetilde{M}$. Alors, K_1 est de valence supérieure ou égale à 3 et $\overline{K}_1 \cap \operatorname{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}) = \{m_1, \ldots, m_s\}$ contient au moins une flèche. On suppose que m_1 est une flèche.

Comme G_1 est non abélien exceptionnel, $\forall i \in 1, \ldots, s$, $h_i^1(z) = e^{-2i\pi\lambda_i} z + z^2(\ldots)$ où $\lambda_i \in \mathbb{Q}_+^*$. Le théorème de l'indice ([Ca,Sa]) permet d'établir la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (*).$$

Posons $f(z) = h_2^1(z)$ et $g(z) = h_3^1(z) \circ \ldots \circ h_s^1(z)$. Alors d'après la relation $(*)$, $f(z)$ et $g(z)$ sont distincts de l'identité. Si $f(z)$ ou $g(z)$ est non périodique, d'après le cas 1 de la démonstration du lemme 4.6, il existe un $\varphi \in \mathit{Diff}_1$ tangent à l'identité à un ordre l arbitrairement grand tel que $\langle \varphi^* f, g \rangle$ est non exceptionnel.

Si f et g sont périodiques, comme $\lambda_2 + (\lambda_3 + \cdots + \lambda_s) = 1 - \lambda_1 < 1$, λ_2 ou $(\lambda_3 + \cdots + \lambda_s)$ est inférieur strictement à $\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire que f ou g n'est pas de période 2. Supposons que g n'est pas de période 2. D'après la remarque 4.4, si $\varphi \in \mathit{Diff}_1$ vérifie $\varphi^* g_2 = (\varphi^* g)^2$ et f ne commutent pas, alors $\langle \varphi^* f, g \rangle$ est non exceptionnel. Comme g_2 et f sont distincts de l'identité, le lemme 4.5 assure l'existence d'un tel φ tangent à l'identité à un ordre l arbitrairement grand. On pose alors $g_2 = \varphi^* h_2^1$, $g_i = h_i^1$ si $i \geq 3$ et $g_1 = g_2 \circ \ldots \circ g_s$ qui est une famille de Diff_1 d'éléments l-tangents aux h_i^1.

On conclut comme pour la proposition 4.8 grâce au second lemme technique 4. Ainsi on a construit un système cohérent vérifiant (i) ou (ii) de la proposition 4.8 de déformations k-tangentes de $\mathcal{F}$.

□

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] M. ARTIN, *On the solutions of analytic equations*, (*Invent. Math.*, vol. 5, 1968, p. 277-291).

[Ba,St] C. BANICA et 0. STANASILA, *Algebraic methods in the global theory of complex spaces*, John Wiley and sons, 1976.

[Be,Mo] M. BERTHIER et R. MOUSSU, *Réversibilité et classification des centres nilpotents*, (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 44, 2, 1994, p. 465-494).

[Ca,Ce] F. CANO et D. CERVEAU, *Desingularization of non dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*, (*Acta Math.*, vol. 169, 1992, p. 1-103).

[Ca,Ma] F. CANO et J.-F. MATTEI, *Hypersurfaces intégrales des feuilletages holomorphes*, (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 42, 1-2, 1992, p. 49-72).

[Ca,Sa] C. CAMACHO et P. SAD, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, (*Annals Math.*, vol. 115, 1982, p. 579-595).

[Ca,LN,Sa] C. CAMACHO, A. LINS NETO et P. SAD, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, (*J. Diff. Geom.*, vol. 20, N^{o}1, 1984, p. 143-174).

[Ce,Ma] D. CERVEAU et J.-F. MATTEI, *Formes intégrales holomorphes singulières*, (*Astérisque*, vol. 97, 1982).

[Ce,Mo] D. CERVEAU et R. MOUSSU, *Groupes d'automorphismes de* $\mathbb{C}_{,0}$ *et équations différentielles* $y\,\mathrm{d}y + \ldots = 0$, (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 116, 1988, p. 459-488).

[LF] L. LE FLOCH, *Un problème de rigidité pour une famille à un paramètre de 1-formes holomorphes*, Thèse de l'Université de Rennes I, 1995.

[Lo] F. LORAY, *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble*, Thèse de l'Université de Rennes I, 1994.

[Ma] J.-F. MATTEI, *Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I : équisingularité*, (*Ivent. Math.*, vol. 103, N^{o}2, 1991, p. 297-325).

[Ma,Sa] J.-F. MATTEI et E. SALEM, *Complete system of topological and analytical invariants for a generic foliation of* $\mathbb{C}^2_{,0}$, Preprint de l'Université Paul Sabatier, 1997.

[Ma,Ra] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, (*Ann. Sc. É. Norm. Sup.*, série 4, t 16, 1983, p. 571-621).

[Ma,Mo] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*, (*Ann.Sc. É. Norm. Sup.*, série 4, t 13, 1980, p. 469-523).

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1995;
accepté après révision le 30 avril 1998.)

L. LE FLOCH
Université de la Rochelle,
Laboratoire de mathématiques,
avenue Marillac,
17042 la Rochelle.