

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARIE-HÉLÈNE RIGAL

Systèmes bihamiltoniens en dimension impaire

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 31, n° 3 (1998), p. 345-359

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_3_345_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES BIHAMILTONIENS EN DIMENSION IMPAIRE

PAR MARIE-HÉLÈNE RIGAL

ABSTRACT. – This article is devoted to the study of the global geometry of dynamical systems of a special kind, the bihamiltonian systems defined on a closed and odd dimensional manifold M .

The dynamics of such a system is linked to the dynamics of a foliation \mathcal{A} which is characterised by certain properties along the leaves (existence of an affine structure) and transverse to the leaves (transverse rigidity due to the existence of a connection).

The analysis of these properties leads us to general results in odd dimension. Namely one can prove that the manifold M is a fibration whose fibers are the closures of the leaves of \mathcal{A} . Then one can apply these results to obtain a very precise description in dimensions 3 and 5. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – L'article consiste en l'étude de la géométrie globale de systèmes dynamiques d'un type particulier, les systèmes bihamiltoniens définis sur des variétés de dimension impaire.

La dynamique d'un tel système est reliée à celle d'un feuilletage \mathcal{A} caractérisé par des propriétés transverses (rigidité transverse liée à l'existence d'une connexion) ainsi que le long de ses feuilles (existence d'une structure affine).

En analysant ces propriétés nous obtenons des résultats généraux valables en toute dimension impaire lorsque la variété ambiante est fermée. Notamment, le fait que celle-ci est nécessairement une fibration dont les fibres sont les adhérences des feuilles de \mathcal{A} . Appliqués ensuite aux petites dimension 3 et 5, ces résultats conduisent à des descriptions très précises. © Elsevier, Paris

I. Introduction

Un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M est *transversalement parallélisable* s'il est possible de déterminer en chaque point un repère transverse dans $TM/T\mathcal{F}$, et ce, de manière différentiable et invariante le long des feuilles de \mathcal{F} . Dans ce cas, si M est fermée, les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont des sous-variétés et sont les fibres d'une fibration de M au-dessus d'une variété fermée [Mo]. Si le feuilletage est de dimension 1, ces adhérences sont des tores sur lesquels \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire [Ca1]. Considérons les exemples suivants sur une 3-variété M fermée :

- Les feuilles de \mathcal{F} sont toutes compactes. La variété M est un fibré en cercles au-dessus du tore \mathbb{T}^2 muni d'un parallélisme par projection de la structure transverse de \mathcal{F} .

- Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont des tores \mathbb{T}^2 . Dans cette situation :

Ou bien M est un fibré hyperbolique \mathbb{T}_A^3 , suspension de \mathbb{T}^2 au-dessus de S^1 via un difféomorphisme de recollement dont la partie linéaire est un isomorphisme A diagonalisable dans $SL(2, \mathbb{Z})$ ($Tr A > 2$). Auquel cas, le feuilletage \mathcal{F} est obtenu par suspension de $(\mathbb{T}^2, \mathcal{F}_0)$ où \mathcal{F}_0 est défini par l'une des directions propres de A .

Ou bien, M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^3 sur lequel \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire.

Comme nous le verrons ultérieurement, ces exemples de variétés feuilletées (M, \mathcal{F}) coïncident avec les systèmes bihamiltoniens (réguliers) en dimension 3 au sens

DÉFINITION 1 [GZ]. – *Un système bihamiltonien $(M^{2n+1}, \Pi^0, \Pi^\infty, H)$ (régulier) est la donnée d'une variété M de dimension $2n + 1$, d'une fonction H non constante sur M et de deux tenseurs de Poisson Π^0, Π^∞ tels que :*

- toute combinaison linéaire $\Pi^t = \Pi^0 - t\Pi^\infty$ soit un tenseur de Poisson de rang maximum.
- le gradient hamiltonien X_H^0 pour Π^0 soit non nul et préserve Π^∞ .

L'étude de ces systèmes a été envisagée d'un point de vue *local* par I. Gelfand et I. Zakharevitch [GZ]. L'objet de notre article est d'en analyser la géométrie *globale* en toute dimension impaire et de la décrire précisément en petites dimensions.

Dans la suite, les données géométriques sont lisses, les variétés sont connexes, orientables et les feuilletages sont transversalement orientables.

Rappelons qu'une *structure de Poisson* sur une variété M est la donnée d'une application \mathbb{R} -bilinéaire antisymétrique $\{ , \} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ vérifiant les deux propriétés [V] :

- pour tout f , l'application $X_f : g \mapsto \{f, g\}$ est une dérivation (identifiée à un champ de vecteurs)
- $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$.

Le tenseur de Poisson $\Pi : T^*M \rightarrow TM$ est défini par $\Pi(df) = X_f$. Il est antisymétrique, son rang en chaque point est pair et lorsqu'il est partout maximum, Π est dit de *rang maximum*. Dans ce cas, son image est une distribution intégrable dans TM associée au feuilletage symplectique (régulier) \mathcal{S} sur M . Ses feuilles S sont des variétés symplectiques pour la restriction $\Pi|_S$ de Π .

A titre d'exemple, le *réseau de Toda* en dimension 3 est un système bihamiltonien au sens de la définition 1 [D].

La condition de régularité imposée sur le rang de tous les tenseurs de Poisson signifie que les feuilletages symplectiques réguliers \mathcal{S}^t sont transverses deux à deux. C'est une contrainte très forte, comme le contrexemple suivant le souligne. On considère le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ des matrices 2×2 de déterminant 1 et l'on note sl_2 son algèbre de Lie. Soit \mathcal{H} la sous-algèbre de Lie de sl_2 formée des matrices triangulaires supérieures de trace nulle. On fixe une base de sl_2 dont les deux premiers vecteurs sont dans \mathcal{H} et l'on choisit une forme d'aire non dégénérée ω sur \mathcal{H} . Celle-ci se prolonge en une 2-forme invariante à gauche $\bar{\omega}$ et en une 2-forme invariante à droite $\tilde{\omega}$ sur $SL(2, \mathbb{R})$. Les 2-tenseurs duaux $\bar{\Pi}$ et $\tilde{\Pi}$ sont des tenseurs de Poisson de rang maximum en tout point et compatibles. Cependant, la structure bihamiltonienne $(SL(2, \mathbb{R}), \bar{\Pi}, \tilde{\Pi})$ n'est pas régulière puisque les deux tenseurs $\bar{\Pi}$ et $\tilde{\Pi}$ coïncident en l'élément neutre de $SL(2, \mathbb{R})$.

Dans la suite, on désignera par *système bihamiltonien* en dimension impaire tout système caractérisé par la définition 1.

1. Motivation pour l'étude de ces systèmes bihamiltoniens

Initialement introduits pour étudier la dynamique de systèmes mécaniques, les *systèmes hamiltoniens* (M^{2n}, ω, H) ont pour cadre naturel celui des variétés symplectiques (M^{2n}, ω) ou, si l'on adopte un point de vue dual, celui des structures de Poisson de rang maximum sur des variétés de dimension paire [LM]. La 2-forme fermée non dégénérée ω établit en chaque point x une dualité entre l'espace tangent $T_x M$ et l'espace cotangent $T_x^* M$. La donnée de la fonction lisse H correspond ainsi à celle du *gradient hamiltonien* X_H , champ de vecteurs sur M entièrement déterminé par la relation $\omega(X_H) = dH$. Le but est de décrire sa dynamique. Lorsque suffisamment d'intégrales premières de X_H sont connues, le système hamiltonien est *complètement intégrable*. Dans ce cas, la structure des trajectoires du gradient hamiltonien est bien comprise sur un ouvert dense. Celles-ci sont tangentes à des tores T^n sur lesquels X_H est conjugué à un flot linéaire [A][LM]. Cependant, il n'est pas toujours facile de déterminer si un système hamiltonien est complètement intégrable. D'où l'intérêt des systèmes *bihamiltoniens* qui en fournissent justement de très nombreux exemples [MM].

Le passage au quotient le long des trajectoires d'un champ de vecteurs préservant la forme symplectique (ou la restriction sur une transversale à ce champ de vecteurs si ses orbites ne sont pas compactes) conduit à étudier des systèmes analogues en dimension impaire et dans le contexte général des tenseurs de Poisson. La situation géométrique est alors très différente du cas pair. Nous la décrivons dans cet article.

2. Résultats principaux

Par définition d'un système bihamiltonien $(M^{2n+1}, \Pi^0, \Pi^\infty, H)$, quel que soit t , le feuilletage symplectique associé à Π^t est de codimension 1. On le note \mathcal{S}^t . Il résulte alors de [GZ] que l'intersection \mathcal{A} de tous les feuilletages symplectiques est un feuilletage de codimension $n + 1$. Il sera appelé *axe* du système bihamiltonien. Il est caractérisé par des propriétés transverses ainsi que le long de ses feuilles. Leur étude est effectuée en détail dans la première partie. Il en résulte notamment que la variété feuilletée (M, \mathcal{A}) est une donnée géométrique *rigide* dans un sens que nous préciserons alors. En exploitant cette remarque, nous obtenons en particulier le

THÉORÈME 1. – *L'axe \mathcal{A} d'un système bihamiltonien $(M^{2n+1}, \Pi^0, \Pi^\infty, H)$ sur une variété M fermée de dimension impaire $2n + 1$ est un feuilletage transversalement parallélisable. De plus, la fonction H est constante le long des feuilles de \mathcal{A} .*

Ce théorème permet de justifier le fait que les exemples de flots transversalement parallélisables donnés sur les 3-variétés s'identifient aux systèmes bihamiltoniens en dimension 3. En effet, puisque H est une fonction constante le long des feuilles de \mathcal{A} , elle le reste le long des adhérences des feuilles. Cependant H n'est pas constante sur M et \mathcal{A} ne peut être un feuilletage à feuilles denses. Par suite, la dimension des adhérences de ses feuilles est au plus 2 si M est de dimension 3. D'où le résultat, le fait de vérifier que ces exemples sont effectivement réalisables comme systèmes bihamiltoniens est aisé.

La dimension 5 est plus délicate et le restant de l'article lui est consacrée. Dans la deuxième partie, nous étudions le cas où les feuilles de \mathcal{A} sont toutes compactes. Ce sont alors des tores T^2 et la situation est l'analogie en dimension impaire de la complète intégrabilité en dimension paire.

Dans la troisième partie, nous envisageons les deux autres cas possibles, lorsque les adhérences des feuilles sont de dimension 3 et 4.

La description de la base de la fibration $p : M \rightarrow W$ par les adhérences des feuilles de \mathcal{A} provient d'une analyse approfondie de la structure transverse de l'axe \mathcal{A} lorsque sa codimension est 3. La description des fibres de p nécessite par contre de faire appel aux propriétés de \mathcal{A} le long de ses feuilles.

THÉORÈME 2. – *Soit un système bihamiltonien régulier $(M^5, \Pi^0, \Pi^\infty, H)$ d'axe \mathcal{A} sur une 5-variété fermée connexe orientable. Alors, M est de l'un des types suivants :*

- 1) un fibré en tores \mathbb{T}^2 (les feuilles de \mathcal{A}) au-dessus d'un fibré de Seifert.
- 2) un fibré de base le tore \mathbb{T}^2 , de fibre type $\mathbb{T}_{A'}^3$, A dans $SL_2(\mathbb{Z})$, $Tr A = 2$ sur laquelle \mathcal{A} induit un feuilletage à feuilles denses, par plans ou par cylindres.
- 3) un fibré au-dessus du cercle, de fibre type un fibré en tores au-dessus du tore. Sur chaque fibre, \mathcal{A} induit un feuilletage dense.

Signalons qu'il est possible de construire des exemples explicites de systèmes bihamiltoniens dans tous les cas [R1].

II. Systèmes bihamiltoniens et feuilletages TCP

Dans la suite, les variétés sont fermées.

1. Propriétés transverses de \mathcal{A}

Étant donnés deux tenseurs de Poisson Π^0 et Π^∞ satisfaisant les propriétés de la définition 1, leurs restrictions en chaque point x à l'espace tangent $T_x M$ sont deux formes bilinéaires antisymétriques de rang maximum. Il en est de même de toute combinaison linéaire $\Pi_x^t = \Pi_x^0 - t\Pi_x^\infty$. On peut alors montrer qu'il existe une base $(e_0^x, \dots, e_n^x, f_1^x, \dots, f_n^x)$ de $T_x M$ dans laquelle [GZ]

$$\Pi_x^0 = \sum_{i=1}^n e_i^x \wedge f_i^x \quad \Pi_x^\infty = \sum_{i=1}^n e_{i-1}^x \wedge f_i^x$$

En particulier, le noyau de Π_x^t est la forme linéaire $e_x^0 + te_x^1 + \dots + t^n e_x^n$ de $T_x^* M$ où $(e_x^0, \dots, e_x^n, f_x^1, \dots, f_x^n)$ désigne la base duale de $(e_0^x, \dots, e_n^x, f_1^x, \dots, f_n^x)$. Observons que (e_x^0, \dots, e_x^n) est unique à homothétie près.

Ceci reste vrai localement sur M . Autrement dit, au voisinage de tout point, il existe $n + 1$ 1-formes $(\omega^0, \dots, \omega^n)$ telles que, pour tout t ,

$$\omega_t = \omega^0 + t\omega^1 + \dots + t^n \omega^n$$

soit intégrable et définisse le feuilletage symplectique \mathcal{S}^t .

L'axe \mathcal{A} coïncide précisément avec le noyau de toutes les formes ω_t . Les 1-formes $(\omega^0, \dots, \omega^n)$ sont alors basiques pour \mathcal{A} et forment un corepère (transverse) de $T^* M / T^* \mathcal{A}$

ou, par dualité, un repère transverse (v_0, \dots, v_n) de $TM/T\mathcal{A}$. Celui-ci est défini à homothétie près par une fonction strictement positive.

DÉFINITION 2 [GZ]. – *Un tissu de Veronese sur une variété W de dimension $n + 1$ est la donnée (W, \mathcal{F}^t) d'une famille à un paramètre de feuilletages de codimension 1 tels que, au voisinage de tout point, il existe $n + 1$ 1-formes indépendantes $(\omega^0, \dots, \omega^n)$ de sorte que pour tout t , la 1-forme*

$$\omega_t = \omega^0 + t\omega^1 + \dots + t^n\omega^n$$

soit intégrable et définisse \mathcal{F}^t .

Lorsqu'un feuilletage de codimension $n + 1$ sur une variété M possède une telle structure transverse, il est dit transversalement de Veronese.

Le $n + 2$ -uplet $(\omega^0, \dots, \omega^n, \omega_1)$ transverse à \mathcal{A} détermine en chaque point un repère projectif de $TM/T\mathcal{A}$. Ce qui fait de \mathcal{A} un cas particulier de feuilletage transversalement conformément parallélisable au sens

DÉFINITION 3 [R2]. – *Un feuilletage \mathcal{F} de codimension $n + 1$, $n \geq 1$ est transversalement conformément parallélisable (TCP) s'il existe $n + 2$ feuilletages de codimension n contenant \mathcal{F} et tels que les $n + 2$ directions transverses qu'ils déterminent dans $T_x M/T_x \mathcal{F}$ en forment un repère projectif, et ce pour tout x de M .*

Puisqu'un repère projectif transverse est donné en chaque point, la notion de direction transverse D à \mathcal{F} a un sens sur toute la variété. D'où la

DÉFINITION 4. – *Soit une direction D transverse à \mathcal{F} et \mathcal{E}^D la distribution $D \oplus T_x \mathcal{F}$. Comme la direction D est feuilletée, \mathcal{E}^D est intégrable et le feuilletage de codimension n qui lui est tangent est noté \mathcal{F}^D .*

Notons $p : B_T(M) \rightarrow M$ le fibré des repères transverses de \mathcal{A} : un point z_x de $B_T(M)$ au-dessus de x dans M est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^{n+1} sur $T_x M/T_x \mathcal{F}$. De plus, $B_T(M)$ est feuilleté par un feuilletage \mathcal{F}_T de même dimension que \mathcal{F} , invariant par l'action à droite du groupe structural [Mo]. Le feuilletage \mathcal{F} est TCP s'il existe un sous-fibré principal E_T de B_T , de groupe structural les homothéties directes de \mathbb{R}^{n+1} (c'est à dire (\mathbb{R}_+^*, \times)), et tel que le feuilletage \mathcal{F}_T soit tangent à E_T .

A une telle structure est associée une connexion canonique ω sur E_T , basique pour \mathcal{F}_T , caractérisée dans toute section locale feuilletée $s = (\omega^0, \dots, \omega^n)$ de E_T par les conditions suivantes [R2]

$$s_k^* T^j \wedge \omega_k^0 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k^{j-1} \wedge \hat{\omega}_k^j \wedge \dots \wedge \omega_k^n = 0 \quad j = 0, \dots, n \pmod{n+1}$$

où T est la torsion de ω , c'est à dire la 2-forme à valeurs dans \mathbb{R}^{n+1} définie par $s^* T^j = d\omega^j + s^* \omega \wedge \omega^j$.

L'existence d'une telle connexion entraîne celle de géodésiques et d'une application exponentielle (transverses). Une propriété importante en découle : comme un difféomorphisme transverse qui préserve la structure transverse de \mathcal{A} commute avec l'exponentielle transverse, il est déterminé par sa valeur en un point et la valeur de sa différentielle en ce point, celle-ci étant une homothétie.

La difficulté essentielle pour étudier \mathcal{F} est la non compacité de E_T donc, a priori, la non complétude géodésique de la connexion canonique. Néanmoins, on arrive à prouver que ω

est complète si le feuilletage \mathcal{F}_T possède au moins une feuille relativement compacte. Précisément,

PROPOSITION 1 [R2]. – Soient \mathcal{F} un feuilletage **TCP** sur une variété fermée connexe orientable et \mathcal{F}_T le feuilletage relevé à E_T . Si \mathcal{F}_T possède une feuille relativement compacte, alors \mathcal{F} est muni d'un parallélisme transverse adapté à sa structure **TCP**.

où l'on appelle *parallélisme transverse adapté* tout parallélisme transverse de \mathcal{F} qui détermine une section feuilletée de E_T .

2. Propriétés le long des feuilles de \mathcal{A} .

LEMME. – Le gradient hamiltonien X_H^0 est tangent à l'axe.

Cela revient à dire que H est basique pour \mathcal{A} .

Preuve du lemme 1. – Le gradient hamiltonien est non nul. Comme $\mathcal{L}_{X_H^0} \Pi^t = 0$ pour tout t , X_H^0 préserve chacun des feuilletages symplectiques, donc leur intersection \mathcal{A} . En écrivant $\mathcal{L}_{X_H^0} \omega_t = \lambda(t) \omega_t$ quel que soit t , on voit que λ est indépendante de t . Par suite, X_H^0 préserve la structure transverse de tissu de Veronese de l'axe et, a fortiori, sa structure **TCP**.

Par construction, X_H^0 est tangent à S^0 . Soient z l'un de ses points critiques et \mathcal{T}_z une transversale en z à \mathcal{A} . On la suppose assez petite pour être connexe. La structure **TCP** de \mathcal{A} se projette en une \mathbb{R}_+^* -structure sur \mathcal{T}_z . Notons \bar{X}_H^0 la projection de X_H^0 sur \mathcal{T}_z . C'est un automorphisme infinitésimal de cette \mathbb{R}_+^* -structure. Il fixe z . L'existence de coordonnées géodésiques sur \mathcal{T}_z entraîne que son groupe local à un paramètre est formé de difféomorphismes caractérisés par leurs différentielles en z . Celles-ci sont des homothéties. S'il est non nul au voisinage de z , \bar{X}_H^0 doit être un champ radial, affirmation en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle il est tangent à la direction transverse définie par S^0 . D'où le lemme, par connexité de la variété. \square

COROLLAIRE 1. – Soit Ω l'ouvert (non vide) des points réguliers de H .

– La restriction de \mathcal{A} à Ω est un feuilletage transversalement parallélisable.

– L'ouvert Ω est saturé par les adhérences des feuilles de \mathcal{A} .

Preuve du corollaire 1. – L'ouvert Ω est saturé par les feuilles de \mathcal{A} . On choisit en chaque point l'unique repère transverse adapté (v^0, \dots, v^n) dans lequel la norme

$$|dH|^2 = v^0(H)^2 + \dots + v^n(H)^2$$

vaut 1. D'où un parallélisme transverse adapté sur Ω . En prenant une valeur régulière c de H , on constate que Ω contient les adhérences des feuilles incluses dans le compact $H^{-1}(c)$, donc est saturé par toutes les adhérences des feuilles de \mathcal{A} . \square

D'où le fait que \mathcal{A} vérifie bien les hypothèses de la proposition 1 [S]. Le théorème 1 en est alors une conséquence.

Pour chaque t , la restriction de \mathcal{A} au feuilletage symplectique S^t est un feuilletage lagrangien [GZ]. Sa structure affine le long des feuilles [W] est donnée par les n -uplet $(X_{f_1}^t, \dots, X_{f_n}^t)$ de gradients hamiltoniens locaux indépendants et commutants, où f_i désigne un casimir de S^{t_i} , les t_i étant tous distincts et différents de t . La compatibilité des tenseurs Π^t entraîne deux propriétés. D'une part, quels que soient s et t , $X_{f_i}^s$ est un champ de vecteurs hamiltonien qui préserve tous les tenseurs de Poisson. D'autre part, $X_{f_i}^s$ et

$X_{f_i}^t$ commutent. Les différentes structures affines le long des feuilles de l'âme coïncident donc en une structure *affine bihamiltonienne*.

On note $p : M \rightarrow W$ la fibration par les adhérences des feuilles de \mathcal{A} (théorème 1). La fibre type de p , notée N , est identifiée à une fibre de p sur laquelle X_H^0 est non nul.

LEMME 2. – *La partie linéaire de l'holonomie de la structure affine bihamiltonienne le long des feuilles de \mathcal{A} est uniquement formée d'homothéties.*

Preuve du lemme 2. – On fixe $n + 1$ valeurs distinctes (t, t_1, \dots, t_n) de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ainsi que des Casimirs f_i associés aux feuilletages \mathcal{S}^{t_i} , $i = 1, \dots, n$ (df_i détermine localement le feuilletage \mathcal{S}^{t_i}). Les gradients hamiltoniens $X_{f_i}^t$ déterminent n directions intrinsèques et indépendantes préservées par l'holonomie linéaire de la structure affine bihamiltonienne de \mathcal{A} . \square

Comme H est basique, le champ de vecteur non nul X_H^0 est parallèle pour la structure affine bihamiltonienne de \mathcal{A} . Celle-ci est nécessairement triviale, d'où la

PROPOSITION 2. – *Le long de chaque adhérence, les feuilles de \mathcal{A} sont les orbites d'une action localement libre de \mathbb{R}^n dont les générateurs infinitésimaux sont parallèles pour la structure affine bihamiltonienne de \mathcal{A} . En particulier, lorsque les feuilles de l'axe \mathcal{A} sont compactes, ce sont des tores \mathbb{T}^n sur lesquels le gradient hamiltonien X_H^0 est conjugué à un flot linéaire.*

3. Complète intégrabilité en dimension impaire

Lorsque les feuilles de \mathcal{A} sont toutes compactes, la situation est l'analogie en dimension impaire de la complète intégrabilité en dimension paire. On obtient ainsi la

PROPOSITION 3. – *Si les feuilles de l'axe sont des tores \mathbb{T}^n , il existe un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de W par des ouverts trivialisants pour p , tels que pour tout α , $\pi^{-1}(U_\alpha)$ soit muni d'une action bihamiltonienne libre ϕ^α de \mathbb{T}^n dont les orbites sont les fibres de p .*

Preuve de la proposition 3. – On note $p : M \rightarrow W$ la projection de M le long des feuilles de \mathcal{A} . Les feuilles symplectiques \mathcal{S}^t qui pivotent autour de \mathcal{A} se projettent sur W en des feuilletages \mathcal{F}^t de codimension 1. Soit (t_1, \dots, t_n) un n -uplet de réels distincts et non nuls. Tout point x de W est contenu dans un ouvert U_x de W sur lequel sont définies n fonctions f_1, \dots, f_n , la 1-forme df_i étant associée au feuilletage \mathcal{F}^{t_i} de codimension 1. On note encore f_i la fonction définie par $f_i \circ p$ sur M et associée au feuilletage symplectique \mathcal{S}^{t_i} . Les gradients hamiltoniens $X_{f_i}^0$ sont tangents à \mathcal{A} . Ils sont linéairement indépendants en chaque point et ils commutent. Quitte à prendre un ouvert plus petit, on voit que ce sont aussi des gradients hamiltoniens relativement à Π^∞ . Ils sont les générateurs infinitésimaux d'une action bihamiltonienne localement libre de \mathbb{R}^n sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$ dont les orbites sont les feuilles de \mathcal{A} . Cette action passe au quotient en une action libre du tore \mathbb{T}^n sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$ dont les générateurs infinitésimaux sont parallèles pour la structure affine bihamiltonienne de \mathcal{A} .

Or, sur une variété symplectique, toute action libre de \mathbb{T}^n ayant pour orbites les feuilles d'un feuilletage lagrangien et pour générateurs infinitésimaux des vecteurs parallèles pour la structure affine naturelle du feuilletage lagrangien est hamiltonienne [A]. L'action de \mathbb{T}^n précédemment définie est donc bien hamiltonienne pour Π^0 et Π^∞ (et, en fait, pour tous les Π^t , $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

Le recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ cherché s'obtient en prenant un recouvrement de W par des ouverts construits précédemment. \square

De même que pour la complète intégrabilité en dimension paire $[A]$, on peut alors définir des coordonnées action-angle (partielles) pour Π^0 .

COROLLAIRE 2. – *Quel que soit t , les feuilles de $\mathcal{F}^t = p(\mathcal{S}^t)$ sur W sont munies d'une structure affine entière.*

Preuve du corollaire 2. – On prend $t = 0$ et l'on note Ω^0 la forme symplectique, restriction de Π^0 le long des feuilles de \mathcal{S}^0 . Si X_1, \dots, X_n sont des générateurs infinitésimaux de ϕ^α au-dessus d'un ouvert U_α , les 1-formes $i_{X_1}\Omega^0, \dots, i_{X_n}\Omega^0$ sont fermées (car \mathcal{A} est lagrangien), indépendantes en chaque point et projetables sur W . Elles définissent une structure affine entière le long des feuilles de \mathcal{F}^0 $[A]$. \square

III. Complète intégrabilité en dimension 5

On envisage le cas des systèmes bihamiltoniens $(M^5, \Pi^0, \Pi^\infty, H)$ dont les feuilles de l'axe sont des tores \mathbb{T}^2 (proposition 2). Elles sont les fibres d'une fibration p au-dessus d'une 3-variété fermée connexe orientable W . Les feuilletages symplectiques \mathcal{S}^t qui pivotent autour de \mathcal{A} se projettent sur W en des feuilletages \mathcal{F}^t de codimension 1. La base hérite ainsi d'un tissu de Veronese (W, \mathcal{F}^t) par projection de la structure transverse de \mathcal{A} (définition 2). Précisément, au voisinage de chaque point, il existe un coparallélisme local $(\omega^0, \omega^1, \omega^2)$ défini à multiplication près par une fonction strictement positive, de sorte que la 1-forme $\omega_t = \omega^0 + t\omega^1 + t^2\omega^2$ soit intégrable pour tout t dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et soit associée au feuilletage \mathcal{F}^t de codimension 1. La variété W étant compacte, on peut choisir globalement un tel corepère $(\omega^0, \omega^1, \omega^2)$ pour des 1-formes sur M , éventuellement à singularités.

LEMME 3. – *Il existe une famille $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbb{C}, \text{Im}\tau \neq 0}$ de flots sur W , transversalement holomorphes, transverses à tous les feuilletages \mathcal{F}^t de codimension 1.*

Preuve du lemme 3. – La condition d'intégrabilité $\omega_t \wedge d\omega_t = 0$ valable pour tout t de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se prolonge formellement aux valeurs complexes de t .

Prenons par exemple $t = i$. Le noyau réel de ω_i défini comme l'intersection $\ker(\omega^0 - \omega^2) \cap \ker \omega^1$ est associé à une direction constante D_i sur W . On vérifie aisément que le feuilletage \mathcal{F}_i est transverse à tous les feuilletages \mathcal{F}^t . Il est de plus transversalement holomorphe pour l'opérateur J^* défini par

$$J^*(\omega^0 - \omega^2) = \omega^1 \quad \text{et} \quad J^*(\omega^1) = -(\omega^0 - \omega^2)$$

Ces raisonnements restent vrais pour tout nombre complexe τ avec $\text{Im}\tau \neq 0$, d'où le lemme. \square

Dans la suite, on considère \mathcal{F}_i . Ses propriétés en font un exemple particulier de la donnée $(W, \mathcal{F}_i, \mathcal{F}^t)$ d'un flot \mathcal{F}_i transversalement holomorphe, transverse à un feuilletage \mathcal{F}^t de codimension 1 sur une 3-variété W fermée, connexe orientable. Les situations possibles sont classifiées [BGh]. Notre cas peut a priori correspondre à n'importe lequel des exemples dont les feuilles du feuilletage \mathcal{F}^t sont parallélisables. Si le flot \mathcal{F}_i admet une orbite non compacte (auquel cas (M, \mathcal{F}_i) est un fibré de Seifert) ou s'il n'est pas conjugué à un flot linéaire sur le tore \mathbb{T}^3 , deux cas se présentent : W peut s'identifier à un fibré hyperbolique

\mathbb{T}_A^3 , suspension de \mathbb{T}^2 au-dessus de S^1 via un difféomorphisme de recollement dont la partie linéaire est un isomorphisme A diagonalisable dans $SL_2(\mathbb{R})$ ($Tr A > 2$). Le flot \mathcal{F}_i est alors conjugué au feuilletage de \mathbb{T}_A^3 tangent à l'une des directions propres de A et \mathcal{F}^t est difféomorphe à l'un des feuilletages modèles de \mathbb{T}_A^3 (un feuilletage de codimension 1 qui se projette sur S^1 et qui est tangent à l'autre direction propre de A) [GhS]. Ou bien, W est un espace lenticulaire ou $S^1 \times S^2$ et le feuilletage transverse au flot possède une composante de Reeb.

LEMME 4. – *Un fibré hyperbolique en tores n'admet pas de tissu de Veronese.*

Preuve du lemme 4. – Les feuilletages modèles de \mathbb{T}_A^3 sont transversalement affines et l'application développante associée $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une submersion grâce à laquelle l'espace des feuilles du feuilletage relevé dans \mathbb{R}^3 s'identifie à \mathbb{R} . Par l'absurde, s'il existe un tissu de Veronese $(\mathbb{T}_A^3, \mathcal{F}^t)$, le fibré \mathbb{T}_A^3 est muni d'une structure affine définie par le difféomorphisme

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad x \mapsto (D_0(x), D_1(x), D_\infty(x))$$

où D_0, D_1, D_∞ désignent les applications développantes attachées aux feuilletages $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^\infty$ transverses deux à deux. Le fibré hyperbolique s'identifie alors au quotient de son revêtement universel \mathbb{R}^3 par le groupe d'holonomie Γ de la structure affine. Celui-ci coïncide avec un sous-groupe non abélien du groupe G des transformations affines ϕ de \mathbb{R}^3 de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \phi(x) = A_\phi \cdot x + x_\phi \quad A_\phi = \text{matrice diagonale, } x_\phi \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

Puisque Γ agit sans points fixes, quel que soit ϕ distinct de l'identité dans Γ , x_ϕ est non nul et A_ϕ possède 1 comme valeur propre. Comme toutes les composées $A_{\phi_1}^p \cdot A_{\phi_2}^q$, (p, q dans \mathbb{Z}) de deux matrices diagonales A_{ϕ_1} et A_{ϕ_2} possèdent 1 comme valeur propre si et seulement si elles ont une direction propre commune pour cette valeur propre, on déduit qu'elles ont toutes un même vecteur propre associé à la valeur propre 1. En d'autres termes, l'un des feuilletages \mathcal{F}^j , $j = 0, 1, \infty$ est sans holonomie. Cette hypothèse est exclue car \mathcal{F}^j est conjugué à l'un des feuilletages modèle de \mathbb{T}_A^3 . Lequel a précisément une holonomie non triviale. \square

LEMME 5. – *Un tissu de Veronese (W, \mathcal{F}^t) sur une 3-variété fermée connexe orientable tel que l'un des feuilletages \mathcal{F}^t ait une composante de Reeb ne peut être la base d'un système bihamiltonien.*

Preuve du lemme 5. – On raisonne aussi par l'absurde et l'on suppose que \mathcal{F}^0 a une composante de Reeb sur un tore plein $S^1 \times D$ [HeH] et que le tissu de Veronese (W, \mathcal{F}^t) est la base d'un système bihamiltonien de dimension 5.

Les feuilles de \mathcal{F}^0 sont munies d'une structure affine entière, d'après le corollaire 2. Son holonomie linéaire coïncide avec l'holonomie linéaire de la feuille compacte puisque le groupe fondamental de la composante de Reeb est engendré par celui de cette feuille compacte.

Si l'holonomie est triviale, il existe deux champs de vecteurs définis sur $S^1 \times D$, tangents aux feuilles de \mathcal{F}^0 et qui commutent. Or ceci est impossible puisqu'une composante de Reeb ne peut être définie par une action localement libre de \mathbb{R}^2 [Li].

Si l'holonomie n'est pas triviale, elle est engendrée par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [NY]. Il existe alors deux champs de vecteurs X et Y définis sur la composante de Reeb, non singuliers, tangents à \mathcal{F}^0 , linéairement indépendants en chaque point et tels que $[X, Y] = fX$. Cette situation ne peut pas non plus se produire [Tu]. \square

La base W est donc un fibré de Seifert muni d'un tissu de Veronese, d'où la première assertion du théorème 2. De tels fibrés de Seifert existent effectivement. Par exemple, les fibrés unitaires tangents des surfaces de courbure négative -1 ainsi que le tore \mathbb{T}^3 peuvent être munis de tissus de Veronese [R1].

IV. Non intégrabilité en dimension 5

On note $p : M \rightarrow W$ la fibration par les adhérences des feuilles de \mathcal{A} et N la fibre type de p . On désigne par \mathcal{A}_N la trace de \mathcal{A} sur N . Celle-ci reste un feuilletage transversalement parallélisable sur N . Deux situations se présentent, selon que N est de dimension 3 ou 4.

1. La fibre type N est de dimension 3 et p est une fibration au-dessus d'une surface fermée

PROPOSITION 4. – *La fibre type N de la fibration $p : M \rightarrow W$ s'identifie à un fibré \mathbb{T}_A^3 où A est un isomorphisme de trace égale à 2 dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Le feuilletage \mathcal{A}_N est un feuilletage par plans ou par cylindres sur N , à feuilles denses.*

Preuve de la proposition 4. – Le feuilletage \mathcal{A}_N à feuilles denses est de codimension 1 et transversalement parallélisable sur N : il est défini par une 1-forme fermée ω_N sans singularité. Celle-ci peut être approchée aussi précisément que l'on veut par une 1-forme fermée à périodes rationnelles déterminant une fibration π de N sur S^1 [Ti]. Les fibres de π sont munies d'un parallélisme obtenu par projection de celui des feuilles de \mathcal{A}_N . Elles sont donc difféomorphes au tore \mathbb{T}^2 . La 3-variété N s'identifie alors à un fibré \mathbb{T}_A^3 , suspension de \mathbb{T}^2 au-dessus de S^1 par un difféomorphisme de recollement dont la partie linéaire est un isomorphisme A de $SL_2(\mathbb{Z})$. Deux situations se présentent a priori [GhS].

Si $TrA = 2$, \mathcal{A}_N est conjugué à un feuilletage par cylindres [He] ou par plans [Ro], dans ce deuxième cas, $N = \mathbb{T}^3$.

Si $TrA > 2$, \mathcal{A}_N n'ayant aucune feuille compacte devrait être conjugué à l'un des feuilletages modèles du fibré hyperbolique \mathbb{T}_A^3 . Ceux-ci étant non transversalement parallélisable, le cas est exclu. \square

Une notion utile est celle de faisceau commutant $\mathcal{C}(M, \mathcal{A})$ associé à \mathcal{A} [Mo]. Ses sections locales sont les champs locaux transverses à \mathcal{A} qui commutent avec les champs globaux transverses à \mathcal{A} . En particulier, ils commutent avec le parallélisme transverse adapté. Leurs représentants feuilletés sont tangents aux fibres de p dont ils engendrent l'espace tangent en tout point. Dans notre cas, puisque \mathcal{A} induit un feuilletage de codimension 1 le long de chaque adhérence, $\mathcal{C}(M, \mathcal{A})$ est de dimension 1. Soit z un point de M . Le long de l'adhérence N_z contenant z , il existe un représentant global Z_z de $\mathcal{C}(N_z, \mathcal{A}_N)$ puisque \mathcal{A}_N est transversalement parallélisable et de codimension 1 sur N . Celui-ci se prolonge en un représentant Z de $\mathcal{C}(M, \mathcal{A})$ sur un ouvert de M saturé par p .

Notamment, il préserve la structure **TCP** de \mathcal{A} puisqu'il commute avec le parallélisme transverse adapté.

PROPOSITION 5. – *La base de la fibration $p : M \rightarrow W$ s'identifie au tore \mathbb{T}^2 .*

Preuve de la proposition 5. – Une direction D transverse à l'axe est projetable le long des adhérences des feuilles de \mathcal{A} . Le feuilletage \mathcal{A}^D (définition 4) de codimension 2 se projette ainsi sur W en un feuilletage \mathcal{F}^D de dimension 1 dont l'ensemble des singularités est non vide par hypothèse. Comme toute feuille de \mathcal{A}^D transverse à p en un point le reste en chaque point, les singularités de \mathcal{F}^D correspondent exactement aux points de W au-dessus desquels il existe une feuille de \mathcal{A}^D verticale (qui coïncide avec une fibre de p).

Une démonstration analogue à celle du lemme 4 conduit au

LEMME 6. – *A tout nombre complexe τ de partie imaginaire non nulle est associée une direction D_τ fixée transverse à \mathcal{A} telle que le feuilletage \mathcal{A}^{D_τ} soit transversalement holomorphe et transverse à chacun des feuilletages symplectiques \mathcal{S}^t , t dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Le feuilletage \mathcal{A}^{D_i} se projette sur W en un flot \mathcal{F}_i . Soit X_i un champ transverse à \mathcal{A} , feuilleté pour \mathcal{A} (i.e qui préserve \mathcal{A}), tangent à \mathcal{A}^{D_i} et \bar{X}_i sa projection tangente à \mathcal{F}_i sur W .

LEMME 7. – *Les singularités de \mathcal{F}_i sont isolées et sa dynamique au voisinage de l'une quelconque d'entre elles est celle d'un champ holomorphe nul en ce point.*

Preuve du lemme 7. – L'ensemble des points en lesquels le feuilletage \mathcal{A}^{D_i} est transverse à p est un ouvert \mathcal{V}^i . S'il est vide, les feuilletages symplectiques sont tous transverses à la fibration p puisque transverses au feuilletage \mathcal{A}^{D_i} vertical pour p dans ce cas. Une direction transverse à \mathcal{A} et dont un représentant est tangent à l'un des \mathcal{S}^t se projette alors en un flot non singulier sur la base qui s'identifie au tore \mathbb{T}^2 .

On suppose donc que \mathcal{V}^i est non vide. Soit un point z de M et un ouvert saturé par p , contenant z sur lequel est défini un représentant feuilleté local Z de $\mathcal{C}(M, \mathcal{A})$. On note encore Z sa projection sur une transversale à \mathcal{A} locale \mathcal{T}_z supposée assez petite pour être connexe et contenue dans l'ouvert en question. Puisque Z commute avec le parallélisme transverse, il préserve \mathcal{F}_i dont il préserve en outre la structure holomorphe transverse. Le flot de sa projection \tilde{Z} sur la transversale $\tilde{\mathcal{T}}_z = \mathcal{T}_z / \mathcal{F}_i$ est ainsi formée de transformations holomorphes. Les zéros de \tilde{Z} coïncident avec les points au-dessus desquels \mathcal{F}_i et Z sont tangents donc tels que X_i (lemme 6) soit vertical pour p et que \bar{X}_i soit nul. Si z est un point de $\partial\mathcal{V}^i$, il est l'un des zéros du champ holomorphe \tilde{Z} au voisinage duquel celui-ci est non nul et z est nécessairement une singularité isolée. Par suite, les singularités de \bar{X}_i sont aussi isolées et le bord de \mathcal{V}^i est formé de points isolés, d'où la première assertion du lemme.

Quitte à restreindre la transversale \mathcal{T}_z , on suppose que z en est le seul point en lequel Z et X_i sont colinéaires. On peut alors choisir une transversale \tilde{Z} commune à p et \mathcal{A}^{D_i} contenant z de sorte que

$$Z = fX_i + \tilde{Z}$$

où f est une fonction basique pour Z s'annulant seulement en z . Comme $p_*(Z) = 0$, la dynamique de \bar{X}_i au voisinage de l'une de ses singularités sur la base W est la même que celle du champ transversalement holomorphe \tilde{Z} . On en déduit le second point du lemme. \square

Ainsi, la caractéristique d'Euler-Poincaré de W est positive puisque l'indice de la partie réelle d'un champ de vecteurs holomorphe en un de ses zéros est positif [Ma]. La base s'identifie donc au tore ou à la sphère.

Pour éliminer ce deuxième cas, il s'agit tout d'abord de mieux comprendre la dynamique des feuilletages symplectiques $(\mathcal{S}^t)_{t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ de codimension 1.

LEMME 8. – *Excepté pour une quantité au plus dénombrable de valeurs de t dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'ensemble \mathcal{K}^t des points en lesquels le feuilletage symplectique \mathcal{S}^t est tangent à la fibration p est un fermé saturé d'intérieur vide.*

Preuve du lemme 8. – Soit t dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On observe qu'une feuille de \mathcal{S}^t tangente à p en un point le reste en tout point. Le fermé \mathcal{K}^t est donc saturé de feuilles de \mathcal{S}^t . On note U^t son intérieur (éventuellement vide) et $U^{tt'}$ l'intersection $U^t \cap U^{t'}$ pour t et t' distincts. Dire que z se trouve dans $U^{tt'}$ signifie que les deux feuilletages transverses \mathcal{S}^t et $\mathcal{S}^{t'}$ sont simultanément tangents à p en z . D'après l'hypothèse de régularité sur le système bihamiltonien, il ne peut y avoir qu'au plus deux feuilletages symplectiques tangents à p en un même point. A t fixé, l'ensemble des $U^{tt'}$ est ainsi un ouvert de U^t formé d'ouverts disjoints dont l'ensemble est nécessairement au plus dénombrable. Par conséquent, s'il existait une quantité non dénombrable de valeurs de t pour lesquelles U^t est non vide, il existerait aussi une quantité non dénombrable d'ouverts disjoints, non vides, contenus dans la variété (paracompacte) M , ce qui est impossible. \square

Lorsque la base W est la sphère les \mathcal{K}^t sont tous non vides. En effet, dans le cas contraire, il existerait un t pour lequel \mathcal{K}^t serait vide et le feuilletage $\mathcal{S}^t \cap \mathcal{S}^{t'}$ (t et t' distincts) transverse à p se projetterait en un feuilletage de dimension 1 non singulier sur W , ce qui est évidemment impossible.

Dans la suite, on suppose que W ne s'identifie pas au tore.

Sans perte de généralité et quitte à reparamétriser la famille $(\Pi^t)_{t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ des tenseurs de Poisson par une homographie, on suppose donc que l'ensemble \mathcal{K}^0 des feuilles de \mathcal{S}^0 tangentes à p est à la fois non vide mais d'intérieur vide.

Puisque toute feuille transverse à p est localement dense, \mathcal{K}^0 contient les feuilles propres, compactes ou non et les feuilles exceptionnelles.

LEMME 9. – *Le feuilletage \mathcal{S}^0 n'a aucun minimal exceptionnel.*

Preuve du lemme 9. – Par l'absurde, supposons que le feuilletage \mathcal{S}^0 possède un minimal exceptionnel. Celui-ci contient alors une feuille S^0 exceptionnelle possédant une holonomie linéaire contractante, d'après le résultat de Sacksteder [HeH]. Cette holonomie correspond à un lacet contenu dans S^0 , vertical pour p puisque la projection $p(S^0)$ sur W est une courbe simple contractible. Soient z un point de S^0 , Z un représentant du faisceau commutant $\mathcal{C}(M, \mathcal{A})$ au voisinage de z , \mathcal{T}_z une transversale locale à S^0 en z qui soit aussi transverse à p et \bar{Z} la projection verticale de $Z|_{\mathcal{T}_z}$ sur le fibré tangent à \mathcal{T}_z . En particulier, \bar{Z} s'annule lorsque \mathcal{S}^0 est tangent à p . Par hypothèse, \bar{Z}_z est nul, mais \bar{Z} n'est pas identiquement nul sur \mathcal{T}_z au voisinage de z puisque l'ensemble des feuilles de \mathcal{S}^0 tangentes à p a un intérieur vide.

Comme Z est un champ feuilleté pour \mathcal{S}^0 (car commute avec le parallélisme adapté transverse à \mathcal{A}), son représentant \bar{Z} est préservé par l'holonomie linéaire contractante.

Puisqu'il n'est pas identiquement nul au voisinage de z , sa singularité en z est nécessairement isolée, ce qui revient à dire que les feuilles voisines de S^0 sont toutes transverse à p et que S^0 est propre, d'où la contradiction cherchée pour établir le lemme. \square

LEMME 10. – *L'ensemble limite de toute feuille non compacte de \mathcal{K}^0 est égale à la réunion de deux feuilles compactes distinctes. En particulier, toute feuille de \mathcal{K}^0 est propre.*

Preuve du lemme 10. – Puisque \mathcal{K}^0 est un fermé saturé par S^0 , il possède un minimal. Celui-ci ne pouvant être exceptionnel d'après le lemme précédent, il se réduit à une feuille compacte. Ainsi, l'ensemble k^0 formé par les feuilles compactes est non vide. Ces feuilles possèdent nécessairement de l'holonomie, sinon, elles seraient incluses dans un ouvert saturé de feuilles compactes de S^0 et \mathcal{K}^0 ne serait pas d'intérieur vide. Par conséquent, elles sont isolées. Comme S^0 est un feuilletage de codimension 1, l'ensemble k^0 est lui même compact [HeH] et k^0 contient un nombre fini de feuilles.

Soit S^0 une feuille non compacte dans \mathcal{K}^0 et F^0 sa projection sur S^2 . Le champ projetable X_i transverse à S^0 (lemme 6) est transverse à p sur \mathcal{K}^0 . Il existe alors un ouvert connexe \mathcal{U}^0 de S^2 contenant $p(\mathcal{K}^0)$, sur lequel \overline{X}_i est non singulier. Quitte à le restreindre, on peut de plus supposer que \mathcal{U}^0 vérifie les propriétés suivantes : \mathcal{U}^0 est une réunion finie d'ouverts V_k chacun d'entre eux étant relativement compact dans un ouvert U_k sur lequel \overline{X}_i est non singulier et au-dessus duquel il existe un champ de vecteurs w_k^0 feuilleté pour \mathcal{A} , tangent à S^0 et tel que les vecteurs $(p_*(w_k^0), \overline{X}_i)$ forment un repère orienté de S^2 . Si φ_k désigne une fonction lisse nulle en dehors de U_k , égale à 1 sur V_k , on voit que le champ de vecteurs $w = \sum_k \varphi_k p_*(w_k^0)$ est nul en dehors de \mathcal{U}^0 , non singulier au voisinage de F^0 et tangent à $p(\mathcal{K}^0)$.

Le théorème de Poincaré-Bendixon entraîne alors que toute projection F^0 d'une feuille S^0 de \mathcal{K}^0 s'accumule dans $p(\mathcal{K}^0)$ sur deux orbites compactes. Qui correspondent à la projection de deux feuilles compactes de S^0 . D'où le lemme. \square

Comme la projection d'une feuille de k^0 est une courbe simple fermée, k^0 se projette par p sur S^2 en une famille finie de courbes fermées simples disjointes les unes des autres. Le choix d'une orientation sur S^2 permet alors de définir un ordre partiel sur $p(k^0)$ (ainsi que sur k^0) de la manière suivante. Toute courbe fermée simple sur S^2 borde deux ouverts simplement connexes disjoints, l'un que l'on peut qualifier d'intérieur, l'autre d'extérieur à la courbe. Si C et C' sont deux courbes de $p(k^0)$, on dira alors que $C' < C$ si et seulement si C' se trouve à l'intérieur de C . Il existe évidemment une courbe de $p(k^0)$ minimale pour cette relation d'ordre. On la note C^0 et l'on désigne par D^0 le disque intérieur bordé par C^0 sur S^2 . Les feuilles de S^0 passant par un point de $p^{-1}(D^0)$ sont toutes transverses à p puisque C^0 est minimale pour $<$. En effet, si tel n'est pas le cas, par minimalité de C^0 , les feuilles de S^0 tangentes à p et contenues dans $p^{-1}(D^0)$ sont propres mais non compactes. Soit F^0 l'une d'entre elles. Leurs projections sur S^2 contenues dans D^0 seraient des courbes simples qui s'accumuleraient sur deux courbes fermées, l'une étant nécessairement distincte de C^0 , incluse dans D^0 et contenue dans le compact $p(k^0)$, ce qui est exclu par hypothèse.

Restreignons l'étude de S^0 à $U = p^{-1}(\overline{D}^0)$. On note S^0 la feuille de S^0 qui se projette sur C^0 . Puisque \overline{D}^0 est contractile, la restriction de la fibration p est triviale et s'identifie au produit $\overline{D}^0 \times \mathbb{T}_{\mathcal{A}}^3$, l'âme \mathcal{A} induisant un feuilletage dense par plans ou par cylindres le

long des fibres. Il est aussi possible de choisir un représentant Z du faisceau commutant au-dessus du compact contractile \overline{D}^0 . Le revêtement universel \tilde{U} de U s'identifie alors au produit $\overline{D}^0 \times \mathbb{R}^3$ sur lequel \mathcal{A} se relève en un feuilletage simple $\tilde{\mathcal{A}}$ dont les feuilles sont les fibres d'une fibration $\tilde{p} : \tilde{U} \rightarrow \overline{D}^0 \times \mathbb{R}$ par plans.

Le tissu de Veronese transverse à \mathcal{A} sur M se relève en un tissu de Veronese transverse à $\tilde{\mathcal{A}}$ sur \tilde{M} . Sa projection sur $D^0 \times \mathbb{R}$ est un tissu de Veronese $(D^0 \times \mathbb{R}, \mathcal{F}^t)$ tel que le bord $S^1 \times \mathbb{R}$ coïncide avec la feuille $\tilde{p}(\tilde{F}^0)$ de \mathcal{F}^0 . Comme Z préserve le tissu de Veronese transverse de \mathcal{S}^0 sur U , il se relève sur \tilde{U} en un champ transverse pour $\tilde{\mathcal{A}}$ et se projette par \tilde{p} en un automorphisme vertical \tilde{Z} du tissu de Veronese $(\overline{D}^0 \times \mathbb{R}, \mathcal{F}^t)$. Par minimalité de $C^0 = p(S^0)$, \tilde{Z} est transverse à \mathcal{S}^0 au-dessus de D^0 et \mathcal{F}^0 induit donc un feuilletage par plans au-dessus de D^0 .

Par ailleurs, l'âme \mathcal{A} possède une structure affine bihamiltonienne le long de ses feuilles, qui coïncide avec une action bihamiltonienne de \mathbb{R}^2 le long de chaque adhérence \mathbb{T}_A^3 . Cette action se relève en une action bihamiltonienne libre de \mathbb{R}^2 le long de chaque fibre de \tilde{p} , où l'on munit \tilde{U} de la structure bihamiltonienne relevée de celle de U . L'existence d'une section de \tilde{U} au-dessus de la variété contractile $\overline{D}^0 \times \mathbb{R}$ implique l'existence d'une action bihamiltonienne libre verticale de \mathbb{R}^2 sur \tilde{U} dont les orbites sont les fibres de \tilde{p} . On note (X, Y) un couple de générateurs infinitésimaux de cette action et Ω_0 la forme symplectique relevée à $\tilde{\mathcal{S}}^0$ de la forme symplectique duale de Π^0 sur \mathcal{S}^0 . Alors, les 1-formes $i_X \Omega_0$ et $i_Y \Omega_0$ sont projetables sur $\overline{D}^0 \times \mathbb{R}$, fermées puisque $\tilde{\mathcal{A}}$ est lagrangien et indépendantes en tout point. Elles définissent une action ϕ^0 de \mathbb{R}^2 dont les orbites sont précisément les feuilles de \mathcal{F}^0 . Impossible, par le même argument que celui utilisé dans le lemme 5 [Li]. \square

2. Les adhérences sont de dimension 4, la base de la fibration p est le cercle

Le feuilletage \mathcal{A}_N est un feuilletage transversalement de Lie [Mo]. Comme il est donné par une action localement libre de \mathbb{R}^2 , ses feuilles ont une croissance au plus quadratique. De ces propriétés on déduit que \mathcal{A}_N est un \mathbb{R}^2 -feuilletage de Lie [Ca2]. Il est ainsi déterminé par un couple de 1-formes fermées sur N . Le théorème de Tischler joint au même argument que celui utilisé pour les adhérences de dimension 3 entraîne que N est une fibration au-dessus du tore \mathbb{T}^2 dont les fibres sont parallélisables et sont des tores.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, edit. Mir, 1976.
- [BGh] M. BRUNELLA et E. GHYS, *Umbilical foliations and transversely holomorphic flows*, (*Journal of Diff. Geom.*, vol. 41, 1995, p. 1–19).
- [Ca1] Y. CARRIERE, *Flots riemanniens*, (*Astérisque*, vol. 116, 1984, p. 31–52).
- [Ca2] Y. CARRIERE, *Feuilletages riemanniens à croissance polynômiale*, (*Comm. Math. Helv.*, vol. 63, 1988, p. 1–20).
- [D] P. A. DAMIANOU, *Masters symmetries and R-matrices for the Toda lattice*, (*Letters in Math. Physics*, vol. 20, 1990, p. 101–112).
- [GZ] I. M. GELFAND et I. ZAKHAREVITCH, *Webs, Veronese curves and bihamiltonian systems*, (*Journ. Funct. Anal.*, vol. 99, 1991, p. 150–178).
- [Gh] E. GHYS, *Flots transversalement affines et tissus feuilletés*, (*Mémoires de la Société mathématique de France*, vol. 46, p. 123–150, 1991).

- [GhS] E. GHYS et V. SERGIESCU, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, (*Topology*, vol. 19, 1979, p. 179–197).
- [He] G. HECTOR, *Feuilletages en cylindres*, (*Lecture Notes*, vol. 597, 1976, p. 252–271).
- [HeH] G. HECTOR et U. HIRSH, *Introduction to the Geometry of foliations*, (*Aspects of Mathematics*).
- [LM] P. LIBERMANN et C. M. MARLE, *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*, vol. 1–4, (*Publ. Univ. Paris 7*).
- [Li] E. LIMA, *Commuting vector fields on S^3* , (*Ann. of Math.*, vol. 81, 1965, p. 70–81).
- [MM] F. MAGRI et C. MOROSI, *A geometrical characterisation of integrable hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, (*Publ. Dept. Math. Milan*, 1984).
- [Ma] J. MARTINET, *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno)* (*Séminaire Bourbaki*, vol. 564).
- [Mo] P. MOLINO, *Riemannian foliations*, (*Progress in Math.*, Birkhäuser, 1988).
- [NY] T. NAGANO et K. YAGI, *The affine structures on the real two torus*, (*Osaka J. Math.*, vol. 11, 1974, p. 181–210).
- [R1] M. H. RIGAL, *Géométrie globale des systèmes bihamiltoniens en dimension impaire*, (*Thèse Univ-Montpellier II*, 1996).
- [R2] M. H. RIGAL, *Rigidité des feuilletages transversalement conformément parallélisables*, (*prépublication ENS-Lyon*, vol. 199, 1996 à paraître au Tohoku Mathematical Journal).
- [Ro] H. ROSENBERG, *Foliations by planes*, (*Topology*, vol. 7, 1968, p. 131–138).
- [S] H. J. SÜSSMANN, *A generalization of the closed subgroup theorem to quotient of arbitrary manifolds*, (*Jour. Diff. Geom.*, vol. 101, 1975, p. 151–166).
- [Ti] D. TISCHLER, *On fibering certain foliated manifolds over S^1* , (*Topology*, vol. 9, 1970, p. 153–154).
- [Tu] F. J. TURIEL, *Dimension transverse des orbites d'une action feuilletée de \mathbb{R}^n sur une variété feuilletée compacte*, (*Sém. G. Darboux Univ- Montpellier II*, 1987).
- [V] I. VAISMAN, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, (*Progress in Math.*, Birkhäuser, 1994).
- [W] A. WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, (*Adv. in Math.*, vol. 6, 1971, p. 329–346).

(Manuscrit reçu le 17 mars 1997;
révisé le 19 décembre 1997.)

M.-H. RIGAL

Unité de Mathématiques C.N.R.S. UMR 128,
École normale supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
E-mail : mrigal@umpa.ens-lyon.fr