CHRISTOPHE EYRAL

Profondeur homotopique et conjecture de grothendieck

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 33, nº 6 (2000), p. 823-836
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_2000_4_33_6_823_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 33, 2000, p. 823 à 836.

PROFONDEUR HOMOTOPIQUE ET CONJECTURE DE GROTHENDIECK

PAR CHRISTOPHE EYRAL

RÉSUMÉ. – Soit (X,Y) un couple polyédral (*voir* conventions) tel que X admette une base dénombrable d'ouverts. Nous relions la profondeur homotopique de X le long de Y au degré de connexité du couple $(X, X \setminus Y)$ (conjecture de Grothendieck). En particulier, nous obtenons une relation entre la profondeur homotopique rectifiée et la profondeur homotopique rectifiée globale des espaces analytiques complexes. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – Let (X,Y) be a polyhedral pair (see conventions) such that X is second countable. We give a relation between the homotopical depth of X along Y and the degree of connectivity of the pair $(X, X \setminus Y)$ (a conjecture of Grothendieck). In particular, we obtain a relation between the rectified homotopical depth and the global rectified homotopical depth of a complex analytic space. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction

Dans le séminaire de géométrie algébrique sur les théorèmes du type de Lefschetz [5], A. Grothendieck introduit la notion de *profondeur homotopique* et formule la conjecture suivante :

CONJECTURE DE GROTHENDIECK (Version polyédrale). – *Soit (X,Y) un couple polyédral* (voir *conventions ci-après*) *tel que X admette une base dénombrable d'ouverts et soit n un entier naturel. Si pour tout point $y \in Y$ il existe un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de y dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, le couple $(U_\alpha, U_\alpha \setminus Y)$ soit $(n-1)$-connexe* (*on dit que X est de profondeur homotopique $\geqslant n$ le long de Y*), *alors le couple $(X, X \setminus Y)$ est $(n-1)$-connexe.*

Pour la commodité du lecteur, nous avons utilisé dans l'énoncé ci-dessus une forme simplifiée de la profondeur homotopique équivalente, dans le cas polyédral, à la définition générale donnée par Grothendieck (*voir* § 2).

Nous donnons, dans le présent article, une réponse positive à cette conjecture (théorème 2.4) par deux méthodes différentes : l'une directe, l'autre faisant apparaître la conjecture comme un corollaire d'un théorème de Eilenberg et Wilder [1].

En fait, Grothendieck conjecture un résultat plus général pour un espace topologique localement connexe par arcs X et une partie localement fermée Y de X (*voir* [5], exposé XIII, p. 15 ligne -11, p. 26 ligne 6 et p. 27 ligne 1), mais nous nous limitons ici au cas polyédral. Remarquons toutefois que dans le cas où Y est fermée, cette restriction n'est pas un obstacle dans la plupart des applications généralement envisagées (espaces analytiques réels ou complexes, ensembles sous-analytiques, ensembles stratifiés ...).

Grothendieck introduit également, dans [5], la notion de *profondeur homotopique rectifiée* pour les espaces analytiques complexes (*voir* définition au § 3) et formule plusieurs conjectures en relation avec cette notion et les théorèmes du type de Lefschetz pour les variétés complexes singulières, qui seront résolues par H.A. Hamm et Lê D.T. dans [7]. Pour y parvenir, Hamm et Lê remarquent que l'on peut utiliser la théorie des stratifications de Whitney pour calculer la profondeur homotopique rectifiée (*voir* [7]). Dans [6], ils avaient déjà utilisé cette version de la notion de profondeur homotopique rectifiée pour démontrer un théorème du type de Lefschetz pour les variétés quasi projectives singulières (*voir* [6], theorem 2.1.4). Dans [2], nous introduisons la *profondeur homotopique rectifiée globale* (analogue global de la notion de profondeur homotopique rectifiée de Grothendieck) pour démontrer un théorème du type de Lefschetz, également pour les variétés quasi projectives singulières (*voir* [2], théorème 2.5), qui généralise dans une certaine direction celui de [6]. Pour comparer le théorème de Lefschetz singulier de [2] à celui de [6], nous avions déjà, dans [2], établi un premier lien entre la profondeur homotopique rectifiée et la profondeur homotopique rectifiée globale le long des ensembles *finis* (*voir* [2], proposition 1.6). Le théorème 2.4 évoqué précédemment, permet de relier la profondeur homotopique rectifiée à la profondeur homotopique rectifiée globale dans le cas général (*voir* théorème 3.11).

Le plan de l'article est le suivant. Au § 1, nous rappelons la notion de *bons voisinages* au sens de D. Prill [10] qui sera utile pour simplifier les définitions originales des profondeurs homotopiques (« tout court » et rectifiée) données par Grothendieck dans [5] et nous introduisons la notion de *très bons voisinages* qui sera utile pour caractériser ces profondeurs. Au § 2, nous donnons la définition de la profondeur homotopique de Grothendieck et l'énoncé de notre théorème principal (théorème 2.4). Au § 3, nous rappelons la définition de la profondeur homotopique rectifiée de [5], la définition de la profondeur homotopique rectifiée globale de [2] et nous montrons comment le théorème 2.4 permet de relier les deux notions (*voir* théorème 3.11). Dans la suite de l'article (§§ 4 et 5) nous proposons deux démonstrations différentes du théorème 2.4. La première (§ 4) repose sur le théorème d'excision homotopique de Blakers–Massey (*voir* [4], corollary 16.27). La seconde (§ 5) repose sur un résultat de Eilenberg et Wilder qui relie la connexité locale absolue des espaces métriques séparables aux problèmes d'extension et d'approximation des applications continues (*voir* [1], theorems 1 et 2).

Conventions

(a) Par *complexe simplicial* nous entendons toujours un complexe simplicial abstrait combinatoirement localement fini. Si K est un complexe simplicial, nous notons $|K|$ son espace (*voir* [11], chap. 3). Noter que si L est un sous-complexe simplicial de K, alors $|L|$ est un sous-espace topologique fermé de $|K|$.

(b) Tous les espaces (topologiques, analytiques, ...) considérés dans cet article sont supposés *séparés*.

(c) Un espace topologique est dit *triangulable* s'il existe un complexe simplicial K et un homéomorphisme $f:|K| \to X$; le couple (K,f) s'appelle alors une triangulation de X. Un polyèdre est un espace topologique triangulable [11].

Un couple topologique (X,Y) (i.e. X est un espace topologique et Y un sous-espace topologique de X) est dit triangulable s'il existe un couple simplicial (K,L) (i.e. K est un complexe simplicial et L un sous-complexe simplicial de K) et un homéomorphisme $f:(|K|,|L|) \to (X,Y)$; le couple $((K,L),f)$ s'appelle alors une triangulation de (X,Y). Un couple polyédral est un couple topologique triangulable [11]. Noter que si (X,Y) est un couple polyédral, alors Y est nécessairement fermé dans X.

(d) Nous rappelons que pour un espace topologique non vide X et un sous-espace topologique non vide Y de X, on dit que le couple (X,Y) est k-connexe pour un certain entier naturel k, si toute composante connexe par arcs de X intersecte Y (on dit alors que le couple (X,Y) est 0-connexe) et si (lorsque $k \geqslant 1$) les groupes ou ensembles d'homotopie relatifs $\pi_q(X,Y,x)$ sont triviaux pour $1 \leqslant q \leqslant k$ et pour tout $x \in Y$. Nous rappelons également que cette condition équivaut à dire que pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant k$, toute application continue $f:(\mathrm{B}^q,\mathrm{S}^{q-1}) \to (X,Y)$ (avec $\mathrm{B}^q := \{x \in \mathbb{R}^q ; \|x\| \leqslant 1\}$ et $\mathrm{S}^{q-1} := \{x \in \mathbb{R}^q ; \|x\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^q$) est homotope relativement à S^{q-1} à une application continue de B^q dans Y (la notation $f:(\mathrm{B}^q,\mathrm{S}^{q-1}) \to (X,Y)$ implique $f(\mathrm{S}^{q-1}) \subset Y$). Pour $q=0$, $(\mathrm{B}^0,\mathrm{S}^{-1})$ est constitué d'un singleton B^0 et de l'ensemble vide S^{-1}, et la condition, pour toute application continue $f:(\mathrm{B}^0,\mathrm{S}^{-1}) \to (X,Y)$, d'être homotope relativement à S^{-1} à une application continue de B^0 dans Y est équivalente à la condition, pour tout point de X, de pouvoir être joint par un chemin continu à un point de Y (pour plus de détails, *voir* [11], 7.2). Nous convenons que le couple $(\emptyset,\emptyset)$ est k-connexe pour tout entier naturel k. Nous convenons également que, dans tous les cas, k-connexe avec $k<0$ est toujours vrai.

(e) Pour la définition d'une *rétraction* ou d'une *rétraction par déformation*, nous renvoyons à [11], 1.4.

(f) Les notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ désignent, respectivement, l'ensemble des entiers naturels et le corps des nombres réels.

1. Voisinages de Prill et très bons voisinages

Dans [10] (II-B, definition 1), D. Prill introduit la notion de *bons voisinages* d'un point dans un espace topologique :

DÉFINITION 1.1. – Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique de X et x un point de X. Un voisinage U de x dans X est dit un *bon voisinage* de x dans X relativement à Y, s'il existe un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de x dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, l'ensemble $U_\alpha \setminus Y$ soit rétracte par déformation de $U \setminus Y$.

Les bons voisinages possèdent la propriété suivante (*voir* [10], II-B, proposition 2) :

PROPOSITION 1.2. – *Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique de X et x un point de X. Soient U et V de bons voisinages de x dans X relativement à Y. Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ (resp. $(V_\beta)_{\beta\in B}$) un système fondamental de voisinages, donné par la définition* 1.1, *associé à U (resp. V). On a les deux assertions suivantes* :

(i) *chaque U_α (resp. V_β) est un bon voisinage de x dans X relativement à Y* ;

(ii) *les ensembles $U \setminus Y$ et $V \setminus Y$ ont le même type d'homotopie.*

Nous introduisons maintenant la notion de *très bons voisinages* :

DÉFINITION 1.3. – Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique de X et x un point de X. Nous dirons qu'un voisinage U de x dans X est un très bon voisinage de x dans X relativement à Y, s'il existe un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de x dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, le couple $(U_\alpha, U_\alpha \setminus Y)$ soit rétracte par déformation du couple $(U, U \setminus Y)$.

Remarque. – Tout très bon voisinage est un bon voisinage et satisfait donc à la proposition 1.2.

Les très bons voisinages vérifient aussi la proposition suivante dont la démonstration est similaire à celle donnée par D. Prill dans [10], II-B, proposition 2 :

PROPOSITION 1.4. – *Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique de X et x un point de X. Soient U et V de très bons voisinages de x dans X relativement à Y. Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ (resp. $(V_\beta)_{\beta\in B}$) un système fondamental de voisinages, donné par la définition* 1.3, *associé à U (resp. V). On a les deux assertions suivantes :*
(i) *chaque U_α (resp. V_β) est un très bon voisinage de x dans X relativement à Y ;*
(ii) *les couples $(U, U \setminus Y)$ et $(V, V \setminus Y)$ ont le même type d'homotopie.*

Dans [10] (II-B, lemma 1) D. Prill donne un procédé pour obtenir de bons voisinages. Ce procédé permet en fait d'obtenir de très bons voisinages. Voici son énoncé :

LEMME 1.5. – *Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique de X et x un point de X. Pour qu'un voisinage U de x dans X soit un très bon voisinage de x dans X relativement à Y, il suffit qu'il existe une application continue $F: U \times [0,1[\to U$ telle que :*
(i) *la famille $(F(U \times \{t\}))_{t\in[0,1[}$ forme un système fondamental de voisinages de x dans X ;*
(ii) *pour tout $t \in [0,1[$, l'application $F_t: U \to U$, définie par $F_t(x) := F(x,t)$, soit une rétraction de U sur $F(U \times \{t\})$;*
(iii) *l'application $F_0: U \to U$, définie par $F_0(x) := F(x,0)$, soit l'identité ;*
(iv) *$F((U \setminus Y) \times [0,1[) = U \setminus Y$.*

Exemples

PROPOSITION 1.6 (*voir* [10] II-B, proposition 3 ; Prill énonce la proposition avec des bons voisinages mais sa démonstration reste valable pour les très bons voisinages). – *Soient K un complexe simplicial, L un sous-complexe simplicial de K et v un sommet de L. Alors l'étoile ouverte $\mathrm{st}_K(v)$ de v dans K* (voir [11], *chap.* 3) *est un très bon voisinage contractile de v dans $|K|$ relativement à $|L|$.*

Remarque. – Il résulte immédiatement de la proposition 1.6 que si $((K,L),f)$ est une triangulation d'un couple polyédral (X,Y) et x un point de Y tel que $f^{-1}(x)$ soit un sommet de L, alors $f(\mathrm{st}_K(f^{-1}(x)))$ est un très bon voisinage contractile de x dans X relativement à Y.

Le résultat suivant est une généralisation de la proposition 1.6 :

PROPOSITION 1.7. – *Soient K un complexe simplicial, L un sous-complexe simplicial de K et $v_0,\dots,v_r$ les sommets d'un simplexe* (*abstrait*) *$\{v_0,\dots,v_r\}$ de L. Pour tout point x appartenant au simplexe ouvert $o(v_0,\dots,v_r) \subset |L|$ associé au simplexe* (*abstrait*) *$\{v_0,\dots,v_r\}$* (voir [11], *chap.* 3), *l'ensemble*

$$B := \mathrm{st}_K(v_0) \cap \cdots \cap \mathrm{st}_K(v_r)$$

(*qui est non vide*) *est un très bon voisinage contractile de x dans $|K|$ relativement à $|L|$* (*pour $i \in \{0,\dots,r\}$, $\mathrm{st}_K(v_i)$ désigne l'étoile ouverte de v_i dans K*).

Démonstration. – Nous écartons le cas trivial où $r = 0$ et v_0 est un point isolé dans $|K|$ (en particulier le cas où K est réduit à un point). Clairement, B est la réunion des simplexes ouverts dont les simplexes (abstraits) associés ont le simplexe (abstrait) $\{v_0,\dots,v_r\}$ comme face. Nous notons $\overline{B}$ la réunion des simplexes fermés dont les simplexes (abstraits) associés ont le simplexe (abstrait) $\{v_0,\dots,v_r\}$ comme face. Clairement, $\overline{B}$ est l'espace d'un sous-complexe simplicial fini de K. Soit x un point du simplexe ouvert $o(v_0,\dots,v_r)$. D'après [11], theorem 3.2.9, il existe un plongement *affine* de $\overline{B}$ dans un certain $\mathbb{R}^n$, où x s'envoie sur l'origine 0. *Nous identifierons désormais $\overline{B}$ avec son image par ce plongement.* Pour tout point $y \in \overline{B}$, le segment de droite fermé $[0,y]$ est contenu dans $\overline{B}$ (remarquons que la même assertion est vraie avec B à la place de $\overline{B}$, ce qui donne la contractilité de B). On a le lemme suivant :

LEMME 1.8. – *Pour tout point $y \in \overline{B} \smallsetminus \{0\}$, la demi-droite $[0,y)$ issue de 0 et passant par y, rencontre $\overline{B} \smallsetminus B$ en un point et un seul.*

Avant de démontrer le lemme 1.8, nous terminons la démonstration de la proposition 1.7. Pour tout point $y \in B \smallsetminus \{0\}$, on note y_0 l'unique point d'intersection de la demi-droite $[0,y)$ avec $\overline{B} \smallsetminus B$ et on note $d(y)$ la longueur du segment de droite $[0,y_0]$. La fonction $d: y \mapsto d(y)$ est clairement continue. Comme dans [10] (II-B, preuve de la proposition 3), nous posons :

$$F: B \times [0,1[\longrightarrow B,$$
$$(y,t) \longmapsto \begin{cases} \inf\left(1, \dfrac{(1-t)\,d(y)}{\|y\|}\right) \cdot y & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

où $\|y\|$ est la distance euclidienne de y à 0. On montre aisément que F est continue et vérifie les conditions (i) à (iv) du lemme 1.5 avec $X = \overline{B}$, $Y = \overline{B} \cap |L|$ et $U = B$. On en déduit la proposition 1.7. □

Pour démontrer complètement la proposition 1.7, il reste à prouver le lemme 1.8.

Démonstration du lemme 1.8. – Soit y un point de $\overline{B} \smallsetminus \{0\}$. On note $a_0 := \sup\{\|y'\|\,;\ y' \in [0,y) \cap \overline{B}\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Comme $\overline{B}$ est compact, il existe $y_0 \in [0,y) \cap \overline{B}$ tel que $a_0 = \|y_0\|$. Le point y_0 appartient à un simplexe ouvert η de $\overline{B}$. Le simplexe (abstrait) associé $\{w_0,\ldots,w_q\}$ n'admet pas $\{v_0,\ldots,v_r\}$ comme face, car sinon 0 appartiendrait au simplexe fermé et on pourrait prolonger légèrement $[0,y_0]$ au-delà de y_0 sans quitter η. Donc $y_0 \in \overline{B} \smallsetminus B$. L'ensemble $[0,y) \cap (\overline{B} \smallsetminus B)$ est donc non vide. Par ailleurs, si y_1 est un point de $[0,y) \cap \overline{B}$ tel que $y_1 \neq 0$ et $y_1 \neq y_0$, nécessairement y_1 appartient au segment de droite ouvert $]0,y_0[$ puisque $\|y_0\|$ est maximal. Ce segment de droite est clairement contenu dans le simplexe ouvert dont le simplexe (abstrait) associé s est la réunion des simplexes (abstraits) $\{v_0,\ldots,v_r\}$ et $\{w_0,\ldots,w_q\}$ (s est bien un simplexe de $\overline{B}$ car $\{w_0,\ldots,w_q\}$ est une face d'un simplexe (abstrait) s' de $\overline{B}$ tel que $v_0,\ldots,v_r$ soient des sommets de s'). Donc $]0,y_0[$ est contenu dans B et $y_1 \notin \overline{B} \smallsetminus B$. On a finalement $[0,y) \cap (\overline{B} \smallsetminus B) = \{y_0\}$. Le lemme 1.8 est démontré. □

Remarques. – (1) Il résulte de la proposition 1.7 que si (X,Y) est un couple polyédral, alors tout point de Y admet un très bon voisinage dans X relativement à Y qui soit contractile.

(2) Plus généralement, on peut montrer que si X est un polyèdre et Y une réunion de « simplexes ouverts » de X, alors tout point de Y admet un très bon voisinage dans X relativement à Y qui soit contractile.

La proposition suivante affirme l'existence de très bons voisinages contractiles pour les espaces analytiques réels (et donc aussi complexes) :

PROPOSITION 1.9. – *Soient X un espace analytique réel (resp. complexe) paracompact de dimension finie et Y un sous-espace analytique réel (resp. complexe) localement fermé de X. Tout point de Y admet un très bon voisinage dans X relativement à Y qui soit contractile.*

Démonstration. – Soit $y \in Y$. Comme Y est localement fermé dans X, il existe un voisinage ouvert U de y dans X tel que $U \cap \overline{Y} = U \cap Y$. Alors, U est un espace analytique réel paracompact de dimension finie et $U \cap Y$ est un sous-espace analytique réel fermé de U. D'après [8], theorem 3, p. 215, le couple $(U, U \cap Y)$ est triangulable. On applique alors la remarque 1 ci-dessus. □

Remarque. – Le theorem 3, p. 215, de [8] et la remarque 2 ci-dessus montrent que la proposition 1.9 peut être généralisée aux ensembles sous-analytiques. Précisément, si X est un ensemble sous-analytique fermé dans un espace analytique réel paracompact de dimension finie M et si Y est un sous-ensemble de X sous-analytique dans M, alors tout point de Y admet un très bon voisinage dans X relativement à Y qui soit contractile.

2. Profondeur homotopique et théorème principal

Si (X, Y) est un couple polyédral, alors tout point de Y admet un (très) bon voisinage dans X relativement à Y qui soit contractile (*voir* la remarque 1 qui suit la démonstration de la proposition 1.7). La définition originale de la profondeur homotopique donnée par A. Grothendieck dans [5] (exposé XIII, § 6, définition 1) peut donc être simplifiée, dans le cas polyédral, de la façon suivante :

DÉFINITION 2.1. – Soient (X, Y) un couple polyédral et n un entier naturel. On dit que la profondeur homotopique $\mathrm{hd}_Y(X)$ de X le long de Y est supérieure ou égale à n, si pour tout point $y \in Y$ il existe un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de y dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, le couple $(U_\alpha, U_\alpha \setminus Y)$ soit $(n-1)$-connexe.

Naturellement, la profondeur homotopique $\mathrm{hd}_Y(X)$ de X le long de Y est définie comme étant le maximum de l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathrm{hd}_Y(X) \geqslant n$.

PROPOSITION 2.2. – *Soient* (X, Y) *un couple polyédral et* n *un entier naturel. La profondeur homotopique* $\mathrm{hd}_Y(X)$ *de* X *le long de* Y *est supérieure ou égale à* n *si et seulement si pour tout point* $y \in Y$ *et pour tout très bon voisinage* V *de* y *dans* X *relativement à* Y*, le couple* $(V, V \setminus Y)$ *est* $(n-1)$*-connexe.*

Le théorème suivant donne une réponse positive à une conjecture de Grothendieck (*voir* [5], exposé XIII, p. 15 ligne -11, p. 26 ligne 6 et p. 27 ligne 1) dans le cas particulier d'un couple polyédral.

THÉORÈME 2.4. – *Soit* (X, Y) *un couple polyédral tel que* X *admette une base dénombrable d'ouverts et soit* n *un entier naturel. Si* $\mathrm{hd}_Y(X) \geqslant n$*, alors le couple* $(X, X \setminus Y)$ *est* $(n-1)$*-connexe.*

Nous donnerons deux démonstrations différentes de ce théorème un peu plus loin (§§ 4 et 5). Auparavant, nous donnons une application de celui-ci (§ 3).

3. Profondeurs homotopiques rectifiées ordinaire et globale

Convention. – Par *espace analytique complexe* nous entendons toujours un espace analytique complexe (au sens ensembliste de [13], chap. 5, § 1) séparé (conformément à la convention (b)), de dimension finie et admettant une base dénombrable d'ouverts.

Le théorème 2.4 permet de relier la profondeur homotopique rectifiée (ordinaire ou locale) de Grothendieck–Hamm–Lê ([5], [7]) à la profondeur homotopique rectifiée globale [2] des espaces analytiques complexes.

Définition de la profondeur homotopique rectifiée (ordinaire ou locale)

Si X est espace analytique complexe et Y un sous-espace analytique complexe localement fermé de X, alors tout point de Y admet un (très) bon voisinage dans X relativement à Y qui soit contractile (*voir* proposition 1.9). La définition originale de la profondeur homotopique rectifiée donnée par A. Grothendieck dans [5] (exposé XIII, § 6, définition 2) peut donc être simplifiée comme suit (définitions 3.1 et 3.3 ci-dessous) :

DÉFINITION 3.1. – Soient X un espace analytique complexe, Y un sous-espace analytique complexe localement fermé de X et n un entier naturel. On dit que la profondeur homotopique rectifiée $\mathrm{rhd}_Y(X)$ de X le long de Y est supérieure ou égale à n, si pour tout point $y \in Y$ il existe un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de y dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, le couple $(U_\alpha, U_\alpha \smallsetminus Y)$ soit $(n-1-\dim_y Y)$-connexe (où $\dim_y Y$ désigne la dimension complexe de Y en y).

Naturellement, la profondeur homotopique rectifiée $\mathrm{rhd}_Y(X)$ de X le long de Y est définie comme étant le maximum de l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathrm{rhd}_Y(X) \geqslant n$.

PROPOSITION 3.2. – *Soient X un espace analytique complexe, Y un sous-espace analytique complexe localement fermé de X et n un entier naturel. La profondeur homotopique rectifiée* $\mathrm{rhd}_Y(X)$ *de X le long de Y est supérieure ou égale à n si et seulement si pour tout point $y \in Y$ et pour tout très bon voisinage V de y dans X relativement à Y, le couple $(V, V \smallsetminus Y)$ est $(n-1-\dim_y Y)$-connexe.*

DÉFINITION 3.3. – Soient X un espace analytique complexe et n un entier naturel. On dit que la profondeur homotopique rectifiée $\mathrm{rhd}(X)$ de X est supérieure ou égale à n, si pour tout sous-espace analytique complexe localement fermé Y de X, on a $\mathrm{rhd}_Y(X) \geqslant n$.

Naturellement, la profondeur homotopique rectifiée $\mathrm{rhd}(X)$ de X est définie comme étant le maximum de l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathrm{rhd}(X) \geqslant n$.

OBSERVATION 3.4. – *Soit X un espace analytique complexe. On a toujours* $\mathrm{rhd}(X) \leqslant \dim X$ *(où* $\dim X$ *désigne la dimension complexe de X).*

Caractérisation de la profondeur homotopique rectifiée

Dans [7], Hamm et Lê étudient la profondeur homotopique rectifiée des espaces analytiques complexes et démontrent plusieurs conjectures formulées par Grothendieck dans [5] (exposé XIII) en relation avec cette notion et les théorèmes du type de Lefschetz. Dans [6] (theorem 2.1.4), ils démontrent, en utilisant la profondeur homotopique rectifiée, un théorème du type de Lefschetz pour les variétés quasi projectives singulières. Pour prouver ce théorème et les conjectures de [5], ils utilisent la caractérisation suivante de la profondeur homotopique rectifiée (*voir* [7], theorem 1.4) :

THÉORÈME 3.5. – *Soient X un espace analytique complexe et n un entier naturel. Les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\mathrm{rhd}(X) \geqslant n$;

(ii) *si $\mathcal{S}$ est une stratification de Whitney analytique complexe* (voir [9], *définition* (1.2.6)) *de X, pour toute strate S de $\mathcal{S}$ de dimension complexe i et pour tout point $y \in S$, il existe un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de y dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, le couple $(U_\alpha, U_\alpha \smallsetminus S)$ soit $(n-1-i)$-connexe.*

Exemples

PROPOSITION 3.6 (*voir* [7], example 1.2). – *Si X est un espace analytique complexe lisse non vide de dimension complexe pure n, alors* $\mathrm{rhd}(X) = n$.

PROPOSITION 3.7 (*voir* [7], corollary 3.2.2). – *Si un espace analytique complexe X est localement une intersection complète non vide de dimension complexe pure n, alors* $\mathrm{rhd}(X) = n$.

Définition de la profondeur homotopique rectifiée globale

Nous rappelons maintenant la définition de la profondeur homotopique rectifiée globale introduite dans [2], définition 1.4 :

DÉFINITION 3.8. – Soient X un espace analytique complexe, Y un sous-espace analytique complexe localement fermé de X et n un entier naturel. On dit que la profondeur homotopique rectifiée globale $\mathrm{grhd}_Y(X)$ de X le long de Y est supérieure ou égale à n, si le couple $(X, X \setminus Y)$ est $(n-1-\dim Y)$-connexe (où $\dim Y$ désigne la dimension complexe de Y).

Naturellement, la profondeur homotopique rectifiée globale $\mathrm{grhd}_Y(X)$ de X le long de Y est définie comme étant le maximum de l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathrm{grhd}_Y(X) \geqslant n$.

Exemples

PROPOSITION 3.9. – *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \geqslant 2)$ *des points de l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. *La profondeur homotopique rectifiée globale de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *le long de* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *est égale à* 2.

Démonstration. – Nous posons $\mathbb{P}^1_* := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Le couple $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{P}^1_*)$ est clairement 1-connexe. Il n'est pas 2-connexe, car sinon l'application naturelle (i.e. induite par inclusion) $\pi_1(\mathbb{P}^1_*, x) \to \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), x)$ serait un isomorphisme pour $x \in \mathbb{P}^1_*$ (il suffit, pour le voir, d'écrire la suite exacte d'homotopie du couple $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{P}^1_*)$), ce qui n'est pas. D'où, finalement : $\mathrm{grhd}_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 2$. □

Dans [3] (théorème 4.2), nous démontrons beaucoup plus généralement, mais sans avoir l'égalité :

PROPOSITION 3.10. – *Soient X et Y deux sous-espaces analytiques complexes fermés d'une variété analytique complexe compacte M. On note d la dimension complexe de Y et n celle de M. On suppose qu'il existe des stratifications de Whitney analytiques complexes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de X et Y, respectivement, telles que les strates de $\mathcal{S}$ intersectent transversalement, dans M, celles de $\mathcal{S}'$ (nous convenons que deux strates qui ne s'intersectent pas sont transverses). Alors,* $\mathrm{grhd}_{X \cap Y}(X) \geqslant 2n - d$.

Précisons que par variété analytique complexe nous entendons un espace analytique complexe non vide non singulier de dimension pure.

Nous démontrons également dans [3] (théorème 4.3) que la profondeur homotopique rectifiée globale d'une variété analytique complexe (non nécessairement compacte) de dimension complexe n, le long d'un sous-espace analytique complexe fermé de dimension complexe d, est supérieure ou égale à $2n-d$. En particulier, la profondeur homotopique rectifiée globale d'une variété analytique complexe de dimension complexe n, le long d'une sous-variété analytique complexe fermée de codimension complexe c, est supérieure ou égale à $n+c$ (*voir* [3], théorème 4.4).

Rappelons que nous avons introduit la notion de profondeur homotopique rectifiée globale, dans [2], pour démontrer un théorème du type de Lefschetz pour les variétés quasi projectives singulières (*voir* [2], théorème 2.5) qui généralise dans une certaine direction le theorem 2.1.4 de [6]. Pour comparer le théorème de Lefschetz singulier de [2] à celui de [6], nous avions déjà, dans [2], établi un premier lien entre la profondeur homotopique rectifiée et la profondeur homotopique rectifiée globale le long des ensembles *finis* (*voir* [2], proposition 1.6). Nous allons voir, ci-dessous, que le théorème 2.4 permet de relier la profondeur homotopique rectifiée à la profondeur homotopique rectifiée globale dans le cas général.

Lien entre la profondeur de Grothendieck–Hamm–Lê et la profondeur globale

Le lien entre $\mathrm{rhd}(X)$, $\mathrm{rhd}_Y(X)$ et $\mathrm{grhd}_Y(X)$, pour Y fermé, est précisé par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.11. – *Soient X un espace analytique complexe, Y un sous-espace analytique complexe fermé de X et n un entier naturel. On a les implications suivantes* :

$$\mathrm{rhd}(X) \geqslant n \Longrightarrow \mathrm{rhd}_Y(X) \geqslant n \Longrightarrow \mathrm{grhd}_Y(X) \geqslant n.$$

Démonstration. – L'implication $\mathrm{rhd}(X) \geqslant n \Rightarrow \mathrm{rhd}_Y(X) \geqslant n$ est triviale. L'implication $\mathrm{rhd}_Y(X) \geqslant n \Rightarrow \mathrm{grhd}_Y(X) \geqslant n$ est une conséquence immédiate du théorème 2.4 : en effet, d'après [8], theorem 3 p. 215, il existe une triangulation du couple (X, Y) ; on peut alors appliquer le théorème 2.4. □

Dans la suite de l'article nous démontrons, par deux voies différentes, le théorème 2.4. La première démonstration (§ 4) repose sur le théorème d'excision homotopique de Blakers–Massey (*voir* [4], corollary 16.27). La seconde (§ 5) repose sur un résultat de Eilenberg et Wilder qui relie la connexité locale absolue des espaces métriques séparables aux problèmes d'extension et d'approximation des applications continues (*voir* [1], theorems 1 et 2).

4. Première démonstration du théorème 2.4

Elle repose sur deux lemmes topologiques généraux que nous donnons au § 4.1 ci-après. Ces lemmes sont tous deux des conséquences du théorème d'excision homotopique de Blakers–Massey (*voir* [4], corollary 16.27). La démonstration proprement dite du théorème 2.4 est donnée au § 4.2.

4.1. Deux lemmes topologiques

Nous rappelons d'abord deux définitions :

DÉFINITION 4.1.1. – Une *triade* $(X; A, B)$ est un triplet constitué d'un espace topologique non vide X et de deux sous-espaces topologiques non vides A et B de X tels que $X = A \cup B$ et $A \cap B \neq \emptyset$.

DÉFINITION 4.1.2. – Soit $(X; A, B)$ une triade. On dit que le couple (A, B) est *excisif* dans X, si $X = (\mathrm{int}_X A) \cup (\mathrm{int}_X B)$, où $\mathrm{int}_X A$ et $\mathrm{int}_X B$ désignent, respectivement, l'intérieur de A dans X et l'intérieur de B dans X.

LEMME 4.1.3. – *Soit k un entier naturel. Soit $(X; A, B)$ une triade telle que le couple (A, B) soit excisif dans X. Si $(A, A \cap B)$ est k-connexe, alors (X, B) est k-connexe.*

Démonstration. – C'est une conséquence du théorème d'excision homotopique de Blakers–Massey (*voir* [4], corollary 16.27). □

LEMME 4.1.4. – *Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique fermé de X et k un entier naturel. Soient U et U' deux sous-ensembles ouverts de X tels que les couples $(U, U \smallsetminus Y)$ et $(U', U' \smallsetminus Y)$ soient k-connexes et tels que le couple $(U \cap U', (U \cap U') \smallsetminus Y)$ soit $(k-1)$-connexe. Alors le couple $(U \cup U', (U \cup U') \smallsetminus Y)$ est k-connexe.*

Démonstration. – Si l'un des deux ensembles U ou U' est vide, le lemme est vrai. À partir de maintenant, nous supposons U et U' non vides. Le couple $(U \cup U', (U \cup U') \smallsetminus Y)$ est trivialement

0-connexe. Supposons désormais $k \geqslant 1$ et montrons que $\pi_q(U \cup U', (U \cup U') \smallsetminus Y, x) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant k$ et pour tout $x \in (U \cup U') \smallsetminus Y$. Puisque $(U, U \smallsetminus Y)$ est k-connexe, en appliquant le lemme 4.1.3 à la triade

$$\big(U \cup (U' \smallsetminus Y); U, (U \cup U') \smallsetminus Y\big),$$

on montre que $(U \cup (U' \smallsetminus Y), (U \cup U') \smallsetminus Y)$ est aussi k-connexe. La suite exacte d'homotopie du triplet

$$\big(U \cup U', U \cup (U' \smallsetminus Y), (U \cup U') \smallsetminus Y\big)$$

permet alors de montrer que l'application naturelle (i.e. induite par inclusion)

$$\pi_q\big(U \cup U', (U \cup U') \smallsetminus Y, x\big) \longrightarrow \pi_q\big(U \cup U', U \cup (U' \smallsetminus Y), x\big)$$

est un isomorphisme pour $2 \leqslant q \leqslant k$ (lorsque $k \geqslant 2$) et pour tout $x \in (U \cup U') \smallsetminus Y$ et un morphisme de noyau nul pour $q = 1$ et pour tout $x \in (U \cup U') \smallsetminus Y$. Ainsi donc, pour démontrer que $\pi_q(U \cup U', (U \cup U') \smallsetminus Y, x) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant k$ et pour tout $x \in (U \cup U') \smallsetminus Y$, il suffit de montrer que $\pi_q(U \cup U', U \cup (U' \smallsetminus Y), x) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant k$ et pour tout $x \in (U \cup U') \smallsetminus Y$. Nous allons en fait prouver que $(U \cup U', U \cup (U' \smallsetminus Y))$ est k-connexe. D'après le lemme 4.1.3 appliqué à la triade

$$\big(U \cup U'; U', U \cup (U' \smallsetminus Y)\big),$$

il suffit pour cela de prouver que le couple $(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y))$ est k-connexe. Si $U \cap U'$ est vide, alors $U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y) = U' \smallsetminus Y$ et le couple $(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y)) = (U', U' \smallsetminus Y)$ est k-connexe par hypothèse. Supposons désormais $U \cap U' \neq \emptyset$. Le couple $(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y))$ est 0-connexe car le couple $(U', U' \smallsetminus Y)$ l'est. Montrons que $\pi_q(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y), x) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant k$ et pour tout $x \in U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y)$. Le couple $(U', U' \smallsetminus Y)$ étant k-connexe, la suite exacte d'homotopie du triplet

$$\big(U', U' \smallsetminus \big((U' \smallsetminus U) \cap Y\big), U' \smallsetminus Y\big)$$

montre que le morphisme bord (*voir* [11], 7.2, pour la définition)

$$\partial_q : \pi_q\big(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y), x\big) \longrightarrow \pi_{q-1}\big(U' \smallsetminus \big((U' \smallsetminus U) \cap Y\big), U' \smallsetminus Y, x\big)$$

est un isomorphisme pour $2 \leqslant q \leqslant k$ (lorsque $k \geqslant 2$) et pour tout $x \in U' \smallsetminus Y$. Pour montrer que $\pi_q(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y), x) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant k$ et pour tout $x \in U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y)$, il suffit donc, puisque $(U \cap U', (U \cap U') \smallsetminus Y)$ est 0-connexe et $(U', U' \smallsetminus Y)$ est 1-connexe, de prouver les deux assertions suivantes :

(i) $\pi_q(U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y), U' \smallsetminus Y, x) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant k - 1$ (lorsque $k \geqslant 2$) et pour tout $x \in U' \smallsetminus Y$;

(ii) l'application naturelle $\pi_1(U', U' \smallsetminus Y, x) \to \pi_1(U', U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y), x)$ est surjective pour tout $x \in U' \smallsetminus Y$.

Le couple $(U \cap U', (U \cap U') \smallsetminus Y)$ étant $(k-1)$-connexe, en appliquant le lemme 4.1.3 à la triade

$$\big(U' \smallsetminus \big((U' \smallsetminus U) \cap Y\big); U \cap U', U' \smallsetminus Y\big),$$

on montre que $(U' \smallsetminus ((U' \smallsetminus U) \cap Y), U' \smallsetminus Y)$ est aussi $(k-1)$-connexe. Les assertions (i) et (ii) en résultent. $\square$

4.2. Démonstration du théorème 2.4

Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration proprement dite du théorème 2.4 par la méthode directe.

Si $n = 0$, le théorème est vrai (*voir* convention (d)). Supposons désormais $n \geqslant 1$. Soit $((K, L), f)$ une triangulation de (X, Y). Pour démontrer le théorème 2.4 il suffit, d'après le lemme 4.1.3, de prouver qu'il existe un voisinage ouvert V de $|L|$ dans $|K|$ tel que $(V, V \smallsetminus |L|)$ soit $(n-1)$-connexe (pour la preuve, appliquer le lemme 4.1.3 à la triade $(|K|; V, |K| \smallsetminus |L|)$). La suite du paragraphe est consacrée à la construction de V. L'idée est de recouvrir $|L|$ par des *étoiles ouvertes* (« basées » sur $|L|$) dans K et de prendre V égal à leur réunion.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets de L. Pour tout $v \in \mathcal{S}$, nous notons $\mathrm{st}_K(v)$ l'étoile ouverte de v dans K.

Notation 4.2.1. – Pour tout sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, nous posons $B(\mathcal{F}) := \bigcap_{v \in \mathcal{F}} \mathrm{st}_K(v)$.

LEMME 4.2.2. – *Pour tout sous-ensemble fini $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, le couple $(B(\mathcal{F}), B(\mathcal{F}) \smallsetminus |L|)$ est $(n-1)$-connexe.*

Démonstration. – Si $B(\mathcal{F}) \cap |L| = \emptyset$ (en particulier si $B(\mathcal{F}) = \emptyset$) le lemme est vrai. Sinon, d'après [11], lemma 3.1.25, $\mathcal{F}$ est un simplexe (abstrait) de L. D'après la proposition 1.7, pour tout point x appartenant au simplexe ouvert associé au simplexe (abstrait) $\mathcal{F}$, l'ensemble $B(\mathcal{F})$ est un très bon voisinage de x dans $|K|$ relativement à $|L|$. Comme $\mathrm{hd}_Y(X) \geqslant n$, le lemme résulte alors de la proposition 2.2. □

L'ensemble $\mathcal{E} := \{\mathrm{st}_K(v)\,;\, v \in \mathcal{S}\}$ est un recouvrement ouvert de $|L|$. Comme $|K|$ admet une base dénombrable d'ouverts, il existe un sous-recouvrement dénombrable $\{\mathrm{st}_K(v_p)\,;\, p \in \mathcal{D}\}$ de $\mathcal{E}$ ($\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ou $\mathcal{D} = \{0, \ldots, m\}$ avec $m \in \mathbb{N}$).

Notation 4.2.3. – Pour tout $p \in \mathcal{D}$, nous posons $A_p := \mathrm{st}_K(v_0) \cup \cdots \cup \mathrm{st}_K(v_p)$.

LEMME 4.2.4. – *Pour tout $p \in \mathcal{D}$, on a les deux assertions suivantes* :

(a$_p$) : *$(A_p, A_p \smallsetminus |L|)$ est $(n-1)$-connexe* ;

(b$_p$) : *$(A_p \cap B(\mathcal{F}), (A_p \cap B(\mathcal{F})) \smallsetminus |L|)$ est $(n-1)$-connexe pour tout sous-ensemble fini $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.*

Démonstration. – Par récurrence sur p. Pour $p = 0$, les assertions (a_0) et (b_0) résultent immédiatement du lemme 4.2.2. Supposons les assertions (a$_p$) et (b$_p$) vraies pour un entier naturel p (resp. pour un entier naturel p tel que $p \leqslant m-1$ si $\mathcal{D} = \{0, \ldots, m\}$ et $m > 0$) et montrons que (a$_{p+1}$) et (b$_{p+1}$) sont vraies. On a $A_{p+1} = A_p \cup \mathrm{st}_K(v_{p+1})$. Les couples $(A_p, A_p \smallsetminus |L|)$ et $(A_p \cap \mathrm{st}_K(v_{p+1}), (A_p \cap \mathrm{st}_K(v_{p+1})) \smallsetminus |L|)$ sont $(n-1)$-connexes (hypothèse de récurrence) et le couple $(\mathrm{st}_K(v_{p+1}), \mathrm{st}_K(v_{p+1}) \smallsetminus |L|)$ est $(n-1)$-connexe (*voir* lemme 4.2.2). L'assertion (a$_{p+1}$) résulte donc du lemme 4.1.4. Pour (b$_{p+1}$), on constate que pour tout sous-ensemble fini $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$:

$$A_{p+1} \cap B(\mathcal{F}) = \big(A_p \cap B(\mathcal{F})\big) \cup \big(\mathrm{st}_K(v_{p+1}) \cap B(\mathcal{F})\big).$$

Le couple $(A_p \cap B(\mathcal{F}), (A_p \cap B(\mathcal{F})) \smallsetminus |L|)$ est $(n-1)$-connexe (hypothèse de récurrence). Pour obtenir (b$_{p+1}$) il suffit donc, d'après le lemme 4.1.4, de montrer que les couples

$$\begin{cases} (\mathrm{st}_K(v_{p+1}) \cap B(\mathcal{F}), (\mathrm{st}_K(v_{p+1}) \cap B(\mathcal{F})) \smallsetminus |L|), \\ (A_p \cap B(\mathcal{F}) \cap \mathrm{st}_K(v_{p+1}), (A_p \cap B(\mathcal{F}) \cap \mathrm{st}_K(v_{p+1})) \smallsetminus |L|) \end{cases}$$

sont $(n-1)$-connexes. Pour le premier, c'est une conséquence immédiate du lemme 4.2.2. Pour le second, on applique l'hypothèse de récurrence. □

Conclusion. – Si $\mathcal{D} = \{0, \ldots, m\}$, on prend $V := A_m$ et le théorème 2.4 résulte immédiatement du lemme 4.2.4. Si $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, on prend $V := \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$. Vérifions, dans ce cas, que le couple $(V, V \setminus |L|)$ est bien $(n-1)$-connexe. Le couple $(V, V \setminus |L|)$ est 0-connexe : en effet, pour tout point $x \in V$ il existe $p(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{p(x)}$ et comme $(A_{p(x)}, A_{p(x)} \setminus |L|)$ est 0-connexe (*voir* lemme 4.2.4), le point x peut être joint, dans $A_{p(x)}$ (et donc dans V), à un point de $A_{p(x)} \setminus |L| \subset V \setminus |L|$. Supposons désormais $n \geqslant 2$. Soit q un entier tel que $1 \leqslant q \leqslant n-1$ et soit α un représentant d'un élément de $\pi_q(V, V \setminus |L|, x)$ où $x \in V \setminus |L|$. Comme l'image $\operatorname{im} \alpha$ de α est compacte, il existe $p(\alpha) \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{im} \alpha \subset A_{p(\alpha)}$. D'après le lemme 4.2.4, α est homotope à 0 dans $A_{p(\alpha)}$ modulo $A_{p(\alpha)} \setminus |L|$ et donc a fortiori dans V modulo $V \setminus |L|$.

Le théorème 2.4 est démontré. □

5. Deuxième démonstration du théorème 2.4

Elle repose sur un résultat de Eilenberg et Wilder qui relie la connexité locale absolue des espaces métriques séparables aux problèmes d'extension et d'approximation des applications continues (*voir* [1], theorems 1 et 2). Au § 5.1, nous donnons le lien entre la profondeur homotopique et la connexité locale absolue (lemme 5.1.2) qui permettra l'application des résultats de [1] à notre situation. Au § 5.2, nous donnons la démonstration proprement dite du théorème 2.4.

5.1. Profondeur homotopique et connexité locale absolue

On rappelle que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}^q := \{x \in \mathbb{R}^q \,;\, \|x\| \leqslant 1\}$ et $\mathrm{S}^{q-1} := \{x \in \mathbb{R}^q \,;\, \|x\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^q$ (B^0 est un singleton et $\mathrm{S}^{-1} = \emptyset$).

DÉFINITION 5.1.1. – Soient X un espace topologique, Y un sous-espace topologique de X et n un entier naturel. On dit que Y est localement n-connexe dans X, si pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant n$, pour tout point $x \in X$ et pour tout voisinage W de x dans X, il existe un voisinage V de x dans X contenu dans W tel que toute application continue $\mathrm{S}^q \to V \cap Y$ soit homotope à 0 dans $W \cap Y$.

Remarque. – Si X est un espace topologique localement contractile, alors X est localement n-connexe dans X pour tout entier naturel n. En particulier, tout polyèdre est localement n-connexe dans lui-même pour tout entier naturel n (*voir* [11], theorem 3.8.2).

Étant donné un couple polyédral (X, Y), le lemme suivant relie la profondeur homotopique de X le long de Y au degré de connexité locale de $X \setminus Y$ dans X :

LEMME 5.1.2. – *Soient (X, Y) un couple polyédral et n un entier supérieur ou égal à 2. Si $\operatorname{hd}_Y(X) \geqslant n$, alors $X \setminus Y$ est localement $(n-2)$-connexe dans X.*

Démonstration. – Soient q un entier naturel tel que $0 \leqslant q \leqslant n-2$, x un point de X et W un voisinage de x dans X. Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage V de x dans X contenu dans W tel que toute application continue $\mathrm{S}^q \to V \setminus Y$ soit homotope à 0 dans $W \setminus Y$. Si $x \in X \setminus Y$, cela résulte immédiatement de la remarque qui suit la définition 5.1.1 et du fait que Y est fermé dans X. Supposons désormais que $x \in Y$. Comme $\operatorname{hd}_Y(X) \geqslant n$, il existe un voisinage U de x dans X tel que $U \subset W$ et tel que $(U, U \setminus Y)$ soit $(n-1)$-connexe. D'après la remarque qui suit la définition 5.1.1, X est localement q-connexe dans X ; il existe donc un voisinage V de x dans X contenu dans U tel que toute application continue $\mathrm{S}^q \to V$ soit homotope à 0 dans U. Ainsi, si $f : \mathrm{S}^q \to V \setminus Y$ est une application continue alors, d'après [11], theorem 1.3.12, f peut être étendue en une application continue $F : \mathrm{B}^{q+1} \to U$. Comme $(U, U \setminus Y)$ est $(n-1)$-connexe,

F est homotope relativement à S^q à une application continue $F' : \mathrm{B}^{q+1} \to U \smallsetminus Y$. L'application f, égale à la restriction de F' à S^q, est donc (d'après [11], theorem 1.3.12) homotope à 0 dans $U \smallsetminus Y \subset W \smallsetminus Y$. $\square$

5.2. Démonstration du théorème 2.4

Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration proprement dite du théorème 2.4 en faisant apparaître ce dernier comme un corollaire de [1].

Si $n = 0$, le théorème est vrai (*voir* convention (d)). Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons désormais $n \geqslant 2$. Soit q un entier naturel tel que $0 \leqslant q \leqslant n-1$ et soit $f : (\mathrm{B}^q, \mathrm{S}^{q-1}) \to (X, X \smallsetminus Y)$ une application continue. Il s'agit de montrer que f est homotope, relativement à S^{q-1}, à une application continue de B^q dans $X \smallsetminus Y$. L'hypothèse de profondeur homotopique implique que $\overline{X \smallsetminus Y} = X$ (où $\overline{X \smallsetminus Y}$ désigne l'adhérence de $X \smallsetminus Y$) : en effet, s'il existait un élément $x \in X$ tel que $x \notin \overline{X \smallsetminus Y}$, il existerait également un voisinage ouvert U de x dans X qui serait contenu dans Y ; comme $\mathrm{hd}_Y(X) \geqslant n$, on peut trouver un système fondamental de voisinages $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de x dans X tel que, pour tout $\alpha \in A$, le couple $(U_\alpha, U_\alpha \smallsetminus Y)$ soit $(n-1)$-connexe ; si l'on considère alors un indice $\alpha_0 \in A$ tel que $U_{\alpha_0} \subset U \subset Y$, le couple $(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_0} \smallsetminus Y) = (U_{\alpha_0}, \emptyset)$ ne serait pas 0-connexe ! On a donc bien $\overline{X \smallsetminus Y} = X$. D'autre part, d'après le lemme 5.1.2, $X \smallsetminus Y$ est localement $(n-2)$-connexe dans X. En remarquant alors qu'un polyèdre admettant une base dénombrable d'ouverts est un espace métrique séparable (*voir* [11], theorem 3.2.8), on en déduit, d'après le théorème 2 de [1] appliqué au sous-espace $X \smallsetminus Y$ de X, qu'il existe une application continue $f^* : (\mathrm{B}^q, \mathrm{S}^{q-1}) \to (X, X \smallsetminus Y)$ telle que $f^*(\mathrm{B}^q) \subset X \smallsetminus Y$ et $f^*(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{S}^{q-1}$. De plus, étant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$, le théorème 2 de [1] dit que l'on peut choisir une telle application f^* de sorte que $\mathrm{dist}(f(x), f^*(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{B}^q$, où dist est la distance sur X. En remarquant alors que $f(\mathrm{B}^q)$ est compact, il est aisé de montrer (en utilisant [11], theorem 3.2.9 et [12], 3.2.3) qu'il existe une telle application f^* qui soit homotope à f relativement à S^{q-1}. Le théorème 2.4 est démontré. $\square$

Remerciements

Je remercie D. Chéniot, J.-M. Lemaire et A. Parusiński pour les discussions que nous avons eues, qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Je remercie également le rapporteur pour toutes les remarques dont il m'a fait part.

RÉFÉRENCES

[1] EILENBERG S., WILDER R.L., Uniform local connectedness and contractibility, *Amer. J. Math.* **64** (1942) 613–622.

[2] EYRAL C., Tomographie des variétés singulières et théorèmes de Lefschetz, *Prépublication 97-22 du LATP*, UMR CNRS 6632, Marseille, 1997.

[3] EYRAL C., Sur l'homotopie des espaces stratifiés, *Int. Math. Research Notices* **13** (1999) 717–734.

[4] GRAY B., *Homotopy Theory. An Introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, New York, 1975.

[5] GROTHENDIECK A., *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, (SGA2), Adv. Stud. Pure Math., Vol. **2**, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[6] HAMM H.A., LÊ D.T., Lefschetz theorems on quasi projectives varieties, *Bull. Soc. Math. France* **113** (1985) 123–142.

[7] HAMM H.A., LÊ D.T., Rectified homotopical depth and Grothendieck conjectures, in: *The Grothendieck Festschrift*, Progr. Math. 87, Vol. **II**, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 311–351.

[8] HARDT R., Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps, *Invent. Math.* **38** (1977) 207–217.

[9] LÊ D.T., TEISSIER B., Cycles évanescents, sections planes et condition de Whitney, II, in: *Singularities, Part* 2, (Arcata, CA, 1981), Proc. Sympos. Pures Math., Vol. **40**, Amer. Math. Soc., Providence, 1983, pp. 65–103.

[10] PRILL D., Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups, *Duke Math. J.* **34** (1967) 375–386.

[11] SPANIER E.H., *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1989; (Corrected reprint of the 1966 original).

[12] STALLINGS J., *Lectures on Polyhedral Topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1968.

[13] WHITNEY H., *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

(Manuscrit reçu le 14 mai 1999 ;
accepté, après révision, le 26 avril 2000.)

Christophe EYRAL
Laboratoire d'analyse, topologie et probabilités
(UMR CNRS 6632)
Centre de mathématiques et d'informatique
Université de Provence
39, rue Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13, France
E-mail: eyral@cmi.univ-mrs.fr