BRUNO COLBOIS
GILLES COURTOIS

Petites valeurs propres et classe d'Euler des $S1-$ fibrés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 33, nº 5 (2000), p. 611-645
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_2000_4_33_5_611_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 33, 2000, p. 611 à 645.

PETITES VALEURS PROPRES ET CLASSE D'EULER DES S^1-FIBRÉS

PAR BRUNO COLBOIS ET GILLES COURTOIS

ABSTRACT. – Soit $\mathcal{M}(n,a,d)$ l'ensemble des variétés riemanniennes compactes (M,g) de dimension n dont la courbure sectionnelle K_g et le diamètre $d(g)$ vérifient $|K_g| \leqslant a$ et $d(g) \leqslant d$. Soit $\mathcal{M}(n,a,d,\rho)$ le sous-ensemble des variétés (M,g) de $\mathcal{M}(n,a,d)$ dont le rayon d'injectivité est supérieur ou égal à ρ. Lorsque $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$ et $(N,h) \in \mathcal{M}(n,a',d')$ sont suffisamment proches au sens de Gromov–Hausdorff, M est un fibré en cercles au-dessus de N d'après un théorème de K. Fukaya. Lorsque la distance de Gromov–Hausdorff entre (M,g) et (N,h) est assez petite, il y a exactement $m_p = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) - \mathrm{b}_p(M)$ petites valeurs propres pour le Laplacien agissant sur les p-formes différentielles de M, $1 < p < n+1$, où b_p désigne le p-ième nombre de Betti. Nous donnons des bornes uniformes de ces valeurs propres en fonction de la classe d'Euler du fibré $\mathrm{S}^1 \to M \to N$ et de la distance de Gromov–Hausdorff entre (M,g) et (N,h). © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

RÉSUMÉ. – Let $\mathcal{M}(n,a,d)$ be the set of compact oriented Riemannian manifolds (M,g) of dimension n whose sectional curvature K_g and diameter $d(g)$ satisfy $|K_g| \leqslant a$ and $d(g) \leqslant d$. Let $\mathcal{M}(n,a,d,\rho)$ be the subset of $\mathcal{M}(n,a,d)$ of those manifolds (M,g) such that the injectivity radius is greater than or equal to ρ. If $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$ and $(N,h) \in \mathcal{M}(n,a',d')$ are sufficiently close in the sense of Gromov–Hausdorff, M is a circle bundle over N according to a theorem of K. Fukaya. When the Gromov–Hausdorff distance between (M,g) and (N,h) is small enough, we show that there exists $m_p = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) - \mathrm{b}_p(M)$ small eigenvalues of the Laplacian acting on differential p-forms on M, $1 < p < n+1$, where b_p denotes the p-th Betti number. We give uniform bounds of these eigenvalues depending on the Euler class of the circle bundle $\mathrm{S}^1 \to M \to N$ and the Gromov–Hausdorff distance between (M,g) and (N,h). © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

AMS classification: 58A07; 58C40

Mots Clés: valeurs propres; formes différentielles; classe d'Euler

1. Introduction

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe et orientable. On considère le Laplacien $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\,\mathrm{d}$ agissant sur l'espace $\Omega^p(M)$ des p-formes différentielles de classe C^∞ de M. Le spectre de cet opérateur forme un ensemble discret de nombres positifs ou nuls qui sera noté

$$0 = \lambda_{0,p}(M,g) < \lambda_{1,p}(M,g) \leqslant \lambda_{2,p}(M,g) \leqslant \cdots. \tag{1.1}$$

Dans (1.1), nous avons fait la convention suivante : $\lambda_{0,p}(M,g) = 0$ de multiplicité égale au p-ième nombre de Betti de M ; en particulier, cette multiplicité peut être nulle. Ainsi, $\lambda_{1,p}(M,g)$ représente la première valeur propre non nulle pour les p-formes différentielles. À partir de $\lambda_{1,p}(M,g)$, on répète les valeurs propres s'il y a multiplicité.

Dans cet article, nous nous intéressons au comportement des premières valeurs propres, et particulièrement de $\lambda_{1,p}(M,g)$, en fonction de la géométrie et de la topologie de (M,g). Cette question a été beaucoup étudiée dans le cas des fonctions, i.e. $p=0$, alors que peu de choses sont connues dans le cas des formes différentielles. Rappelons cependant quelques résultats permettant de situer le cadre de notre travail.

Soit n un entier non nul et a, d, v des constantes positives.

Notons $\mathcal{M}(n+1,a,d)$ l'ensemble des variétés riemanniennes (M,g), compactes, connexes, orientables de dimension $n+1$ dont la courbure sectionnelle $K(M,g)$ et le diamètre $\operatorname{diam}(M,g)$ vérifient $|K(M,g)| \leqslant a$ et $\operatorname{diam}(M,g) \leqslant d$.

Notons également $\mathcal{M}(n+1,a,d,v)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(n+1,a,d)$ formé des variétés (M,g) dont le volume $\operatorname{vol}(M,g)$ vérifie $\operatorname{vol}(M,g) \geqslant v$.

THÉORÈME 1.2 ([17,20]). – *Il existe une constante explicite $C=C(n,a,d)>0$ telle que si $(M,g)\in\mathcal{M}(n+1,a,d)$, alors $\lambda_{1,0}(M,g)\geqslant C(n,a,d)$ et par dualité, $\lambda_{1,n+1}(M,g)\geqslant C(n,a,d)$.*

THÉORÈME 1.3 ([9]). – *Il existe une constante $C(n,a,d,v)>0$ telle que si $(M,g)\in\mathcal{M}(n+1,a,d,v)$ et $1\leqslant p\leqslant n$, alors $\lambda_{1,p}(M,g)\geqslant C(n,a,d,v)$.*

Ce théorème est une conséquence directe du théorème de compacité de S. Peters d'après lequel $\mathcal{M}(n+1,a,d,v)$ est compact. Récemment, S. Chanillo et F. Trèves ont donné une minoration de $\lambda_{1,p}(M,g)$ en fonction d'une borne sur la courbure sectionnelle de (M,g), du rayon d'injectivité r de (M,g) et du nombre N de boules d'un recouvrement de M par des boules géodésiques de rayon r.

Précisément, si (M,g) est une variété compacte de dimension $n+1$ dont la courbure sectionnelle vérifie $|K(M,g)|\leqslant a$, ils obtiennent le :

THÉORÈME 1.4 ([3]). – *$\lambda_{1,p}(M,g)\geqslant Cr^{-2}N^{-4(n+2)}$, où $C=:C(n,a)$ est une constante positive.*

Lorsque $(M,g)\in\mathcal{M}(n,a,d)$, le nombre N de boules d'un recouvrement de M par des boules géodésiques de rayon r vérifie (*cf.* [17])

$$N\leqslant\frac{C'(n,a,d)}{r^{n+1}}. \tag{1.5}$$

Le théorème 1.4 et l'inégalité (1.5) donne ainsi une minoration de $\lambda_{1,p}(M,g)$ à l'aide du rayon d'injectivité M de (M,g),

$$\lambda_{1,p}(M,g)\geqslant C''(n,a,d)r^{4(n+1)(n+2)-2}. \tag{1.6}$$

Par ailleurs, on a le :

THÉORÈME 1.7 ([9]). – *Pour tout $n\geqslant 2$, il existe une variété compacte M de dimension $n+1$ et des constantes $a,d>0$, telles que*

$$\inf\{\lambda_{1,p}(M,g)\mid (M,g)\in\mathcal{M}(n+1,a,d)\}=0\quad \textit{si } 1\leqslant p\leqslant n.$$

Ainsi, le comportement de $\lambda_{1,p}$ sur $\mathcal{M}(n+1,a,d)$ est très différent selon que $p=0,\ n+1$ ou non. En effet, le théorème 1.7 fournit une variété compacte M de dimension $n+1$ et une suite $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ de métriques sur M telles que $(M,g_i)\in\mathcal{M}(n+1,a,d)$ et

$$\lim_{i\to\infty}\lambda_{1,p}(M,g_i)=0,\quad 1\leqslant p\leqslant n.$$

Cela signifie en particulier que $\mathrm{vol}(M,g_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini (*cf.* théorèmes 1.3 et 1.4). Dans ce cas, M est une variété admettant un effondrement, ce qui a des implications de nature topologique très forte, [5], [6].

Inversement, une question est de savoir si une variété de $\mathcal{M}(n+1,a,d)$ ayant un petit volume possède des petites valeurs propres pour les p-formes différentielles, $1 \leqslant p \leqslant n$, et plus généralement de comprendre la relation entre le volume et le spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles.

Dans cet article, nous nous intéressons à un cas particulier très simple d'éléments de $\mathcal{M}(n+1,a,d)$ ayant un petit volume : celui des variétés riemanniennes $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$ situées à petite distance de Hausdorff d'une variété riemannienne fixée, (N,h), de dimension n. Il n'y a a priori aucune relation entre M et N ; cependant, un théorème de K. Fukaya, ([15]), affirme que lorsque la distance de Hausdorff $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h))$ entre (M,g) et (N,h) est assez petite, alors M est un S^1-fibré au-dessus de N. Les fibres sont alors de longueur de l'ordre de $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h))$ et il en est de même de $\mathrm{vol}(M,g)$ et du rayon d'injectivité $r(M,g)$ de (M,g). On va donc chercher à estimer $\lambda_{1,p}(M,g)$ en fonction de la variété fixée (N,h) et de la distance de Hausdorff $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h))$ entre (M,g) et (N,h) lorsque celle-ci est assez petite. Cela revient à expliciter le rôle de $v=\mathrm{vol}(M,g)$ dans la constante $C(n,a,d,v)$ du théorème 1.3. L'estimation (1.6) qui se déduit du théorème 1.4 répond à cette question mais de façon non optimale dans le cas particulier qui nous intéresse, comme nous allons le voir dans les exemples ci-dessous.

Exemple 1.8. – Soient (N,h) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 2$ et $(M,g_\varepsilon)=(N,h)\times \mathrm{S}^1_\varepsilon$ le produit riemannien de (N,h) avec le cercle de rayon ε. On voit que $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h))$ est de l'ordre de ε et on vérifie facilement que le spectre des p-formes différentielles de (M,g_ε) est donné par

$$\{\lambda_{k,p}(M,g_\varepsilon)\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\lambda_{k,p}(N,h)+\frac{\ell^2}{\varepsilon^2}\right\}_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \ell\in\mathbb{Z}}} \cup \left\{\lambda_{k,p-1}(N,h)+\frac{\ell^2}{\varepsilon^2}\right\}_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \ell\in\mathbb{Z}}}.$$

En particulier, $\lambda_{1,p}(M,g_\varepsilon)$ est minoré indépendamment de ε si $\varepsilon\in\,]0,1]$.

Exemple 1.9. – On considère sur la sphère canonique (S^{2n+1},g) la fibration de Hopf définie par l'action isométrique de S^1,

$$\mathrm{e}^{i\theta}(z_1,\ldots,z_{n+1}) = (\mathrm{e}^{i\theta}z_1,\ldots,\mathrm{e}^{i\theta}z_{n+1}),$$

où S^{2n+1} a été identifié avec la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour la métrique canonique. Les métriques de Berger g_ε sur S^{2n+1} sont définies pour X,Y dans TS^{2n+1}, X tangent à l'action de S^1 et $g(X,Y)=0$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} g_\varepsilon(X,X)=\varepsilon^2 g(X,X),\\ g_\varepsilon(Y,Y)=g(Y,Y),\\ g_\varepsilon(X,Y)=0.\end{array}\right. \tag{1.10}$$

Les métriques $(g_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ sont à courbure sectionnelle et diamètre uniformément bornés (*cf.* [5, 6]), et $(\mathrm{S}^{2n+1},g_\varepsilon)$ est à distance de Hausdorff de l'ordre de ε de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ lorsque ε tend vers 0. On vérifie aisément que $\lambda_{1,p}(\mathrm{S}^{2n+1},g_\varepsilon)=\varepsilon^2$, $1\leqslant p\leqslant 2n$.

Exemple 1.11. – Soit $L_{2n+1,k}$ l'espace lenticulaire défini comme le quotient de (S^{2n+1},g) par le groupe cyclique d'isométries de (S^{2n+1},g) engendré par I_k, où $I_k(z_1,\ldots,z_{n+1}) = (\mathrm{e}^{2i\pi/k}z_1,\ldots,\mathrm{e}^{2i\pi/k}z_{n+1})$. On obtient ainsi un S^1-fibré riemannien $(L_{2n+1,k},g)$ au-dessus de

$(\mathbb{P}^n\mathbb{C}, g_0)$, où g_0 est la métrique canonique de $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ normalisée par $1 \leqslant K(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), g_0) \leqslant 4$. La courbure sectionnelle de $(L_{2n+1,k}, g)$ est constante égale à 1, son diamètre est inférieur ou égal à π et la distance de Hausdorff δ entre $(L_{2n+1,k}, g)$ et $(\mathbb{P}^n\mathbb{C}, g_0)$ est de l'ordre de $1/k$.

Comme il est toujours possible de relever une forme propre de $(L_{2n+1,k}, g)$ en une forme propre de (S^{2n+1}, g), on a

$$\lambda_{1,p}(L_{2n+1,k}, g) \geqslant \lambda_{1,p}(\mathrm{S}^{2n+1}, g). \tag{1.12}$$

Ainsi, $\lambda_{1,p}(L_{2n+1,k}, g)$ est minoré indépendamment de k alors que $\mathrm{vol}(L_{2n+1,k}, g)$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

On peut considérer sur $L_{2n+1,k}$ les métriques de Berger g_ε et on a

$$\lambda_{1,p}(L_{2n+1,k}, g_\varepsilon) = \varepsilon^2, \tag{1.13}$$

$$\mathrm{vol}(L_{2n+1,k}, g_\varepsilon) = \frac{2\pi\varepsilon}{k}\,\mathrm{vol}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}, g_0). \tag{1.14}$$

Ces exemples sont élémentaires mais décrivent tous les cas de figure. Ainsi, l'exemple 1.8 montre qu'une variété de $\mathcal{M}(n+1, a, d)$ ayant un petit volume et qui est un S^1-fibré au-dessus d'une variété N n'a pas nécessairement de petite valeur propre non nulle pour les p-formes différentielles, $1 \leqslant p \leqslant n$.

L'exemple 1.11 montre que $\lambda_{1,p}(L_{m+1,k}, g_\varepsilon)$ est proche de zéro si et seulement si

$$k\,\mathrm{vol}(L_{2n+1,k}, g_\varepsilon)$$

est proche de zéro (*cf.* 1.13).

Dans toute la suite, on fixe une variété riemannienne compacte orientée (N, h) de dimension n et on considère $(M, g) \in \mathcal{M}(n+1, a, d)$. Rappelons que M est un S^1-fibré au-dessus de N, lorsque la distance de Hausdorff $\delta_{\mathcal{H}}((M, g), (N, h))$ entre (M, g) et (N, h) est assez petite (*cf.* [15]).

On note $\mathcal{M}_N(n+1, a, d)$ l'ensemble des variétés riemanniennes $(M, g) \in \mathcal{M}(n+1, a, d)$ telles que M est un S^1-fibré orienté au-dessus de N.

On suppose à partir de maintenant que $(M, g) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$.

On note $\mathrm{b}_k(N)$ (resp. $\mathrm{b}_k(M)$) les k-ièmes nombres de Betti de N (resp. M). On déduit facilement de la suite de Gysin du S^1-fibré M au-dessus de N (*cf.* lemme 4.29) que

$$\mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) \geqslant \mathrm{b}_p(M), \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \tag{1.15}$$

et on pose,

$$m_p(M) = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) - \mathrm{b}_p(M). \tag{1.16}$$

À chaque S^1-fibré orienté M au-dessus de N est associée sa classe d'Euler $[e] \in \mathrm{H}^2(N, \mathbb{Z})$ (*cf.* [2], p. 72). On note $\mathrm{e}(M) \in \Omega^2(M)$ le représentant harmonique de $[e]$ par rapport à la métrique h sur N. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera m_p et e au lieu de $m_p(M)$ et $\mathrm{e}(M)$. Dans la suite, si $\psi \in \Omega^p(M)$ (resp. $\varphi \in \Omega^p(N)$) est une p-forme différentielle sur M (resp. N) on notera $|\psi(x)|$ (resp. $|\varphi(y)|$) la norme de $\psi(x)$ par rapport à g (resp. de $\varphi(y)$ par rapport à h) et $\|\psi\|_\infty$, $\|\psi\|_2$ (resp. $\|\varphi\|_\infty$, $\|\varphi\|_2$) les normes L^∞ et L^2 correspondantes sur (M, g) (resp. (N, h)).

THÉORÈME 1.17. – *Il existe des constantes positives $C_i =: C_i(n, a, d, (N, h))$, $i = 1, 2$, et*

$\delta_0 =: \delta_0(n,a,d,(N,h))$ *telles que pour* $(M,g) \in \mathcal{M}_N(n+1,a,d)$, *si* $\delta =: \delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta_0$, *alors pour* $1 \leqslant p \leqslant n$,

$$\text{(i)} \qquad 0 < \lambda_{k,p}(M,g) \leqslant C_1 \|\mathrm{e}(M)\|_2^2 \delta^2, \quad 1 \leqslant k \leqslant m_p,$$

$$\text{(ii)} \qquad \lambda_{m_p+1,p}(M,g) \geqslant C_2.$$

Remarque 1.18. – Lorsque $e = 0$, alors $m_p = 0$ et le théorème 1.17 se réduit à (ii). Dans ce cas nous avons $\lambda_{1,p}(M,g) \geqslant C_2$ et on voit que $\lambda_{1,p}(M,g)$ est minoré indépendamment de δ.

Lorsque $p = 1$, $m_p = 0$ ou 1 selon que $e = 0$ ou $e \neq 0$, *cf.* 1.15 et le lemme 4.19. Dans le cas où $e \neq 0$, la première valeur propre non nulle $\lambda_{1,1}(M,g)$ de (M,g) donnée par le théorème 1.17 (i) est en fait de l'ordre de $\|\mathrm{e}(M)\|_2^2 \delta^2$:

THÉORÈME 1.19. – *Il existe des constantes positives* $C_i =: C_i(n,a,d,(N,h))$, $i = 1, 2$, *et* $\delta_0 =: \delta_0(N,a,d,(N,h))$ *telles que pour* $(M,g) \in \mathcal{M}_N(n+1,a,d)$, *si* $\delta =: \delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta_0$ *et* $\mathrm{e}(M) \neq 0$, *alors*

$$C_1 \|\mathrm{e}(M)\|_2^2 \delta^2 \leqslant \lambda_{1,1}(M,g) \leqslant C_2 \|\mathrm{e}(M)\|_2^2 \delta^2.$$

Lorsque $1 < p < n$, il n'est pas possible de minorer $\lambda_{1,p}(M,g)$ par $C\|\mathrm{e}(M)\|_2^2\delta^2$ comme c'est le cas pour $p = 1$. En effet, il existe une variété riemannienne orientée compacte (N,h) et une suite $\{(M_i,g_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de variétés dans $\mathcal{M}_N(n+1,a,d)$ telles que pour $1 < p < n$,

$$\text{(1.20)} \qquad \begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \delta_{\mathcal{H}}\big((M_i,g_i),(N,h)\big) = 0, \\ &\lim_{i\to\infty} \lambda_{1,p}(M_i,g_i)\|\mathrm{e}(M_i)\|_2^{-2}\delta^{-2} = 0. \end{aligned}$$

Un tel exemple est construit en (5.18).

Cependant, si $\dim \mathrm{H}^2(N,\mathbb{R}) = 1$, nous avons l'analogue du théorème 1.18 pour $1 < p < n$.

THÉORÈME 1.21. – *Soit* (N,h) *une variété riemannienne compacte orientée. On suppose que*

$$\dim \mathrm{H}^2(N,\mathbb{R}) = 1.$$

Il existe des constantes positives $C_i =: C_i(n,a,d,(N,h))$, $i = 1, 2$, $\delta_0 =: \delta_0(n,a,d,(N,h))$ *telles que pour* $(M,g) \in \mathcal{M}_N(n+1,a,d)$, *si* $\delta =: \delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta_0$ *et* $\mathrm{e}(M) \neq 0$, *alors*

$$C_1 \|\mathrm{e}(M)\|_2^2 \delta^2 \leqslant \lambda_{k,p}(M,g) \leqslant C_2 \|\mathrm{e}(M)\|_2^2 \delta^2,$$

pour $1 \leqslant k \leqslant m_p$.

Remarque 1.22. – Dans les théorèmes 1.17, 1.19 et 1.21, les estimations sont uniformes pour $M \in \mathcal{M}_N(n+1,a,d)$ et les constantes $C_i(n,a,d,(N,h))$ sont explicitables. Les constantes C_1, C_2 de ces théorèmes dépendent de la courbure et du diamètre de (M,g) et de (N,h) mais ne dépendent ni de $\mathrm{vol}(M,g)$ ni de la classe d'Euler $\mathrm{e}(M)$.

En particulier, ces théorèmes isolent le rôle de $\mathrm{vol}(M,g)$ ou de $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h))$ et $\mathrm{e}(M)$ dans l'estimation des premières valeurs propres du spectre des p-formes différentielles de (M,g). En effet, lorsque δ est assez petit, le spectre de (M,g) pour les p-formes différentielles contient exactement m_p petites valeurs propres inférieures à (ou de l'ordre de) $C\|\mathrm{e}(M)\|_2^2\delta^2$, les autres valeurs propres étant minorées indépendamment de $\|\mathrm{e}(M)\|_2$ et δ.

L'exemple des variétés $(M_i, g_i) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \delta_{\mathcal{H}}\big((M_i, g_i), (N, h)\big) = 0$$

et

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_{1,p}(M_i, g_i)\big\|\mathrm{e}(M_i)\big\|_2^{-2}\delta^{-2} = 0$$

pour un entier p, $1 < p < n$, est obtenu en choisissant de façon adéquate la classe d'Euler $e_i = \mathrm{e}(M_i)$ du fibré M_i (*cf.* 5.18). Cependant, si l'on fixe un S^1-fibré orienté au-dessus de N, et si on considère l'ensemble des métriques riemanniennes g sur M telles que $(M, g) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$, nous avons le :

THÉORÈME 1.23. – *Soit (N, h) une variété riemannienne compacte orientée et M un S^1-fibré orienté non trivial au-dessus de N. Il existe des constantes $C_i = C_i(n, a, d, \mathrm{e}(M), (N, h))$, $i = 1, 2$, et $\delta_0 =: (n, a, d, (N, h))$ telles que pour $(M, g) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$, si $\delta =: \delta_{\mathcal{H}}((M, g), (N, h)) \leqslant \delta_0$, alors*

$$C_1\delta^2 \leqslant \lambda_{k,p}(M, g) \leqslant C_2\delta^2,$$

pour $1 \leqslant k \leqslant m_p$, $1 \leqslant p \leqslant n$.

Remarque 1.24. – D'après le théorème 1.23, il existe exactement m_p petites valeurs propres non nulles de l'ordre de δ^2 pour le Laplacien des p-formes différentielles, $1 \leqslant p \leqslant n$, dès que δ est assez petit. En particulier, le nombre de ces petites valeurs propres non nulles ne dépend pas de la métrique mais seulement de la topologie du fibré. Dans le cas d'un fibré M de fibre compacte F au-dessus de N et de métriques g_ε sur M obtenues à partir d'une métrique fixée g_1 sur M en multipliant g_1 par ε^2 dans la direction de la fibre et en laissant g_1 inchangée dans les directions orthogonales à la fibre, R. Forman et R. Mazzeo, R. Melrose ont montré que la dimension de l'espace des formes propres de valeurs propres de l'ordre de ε^2 se calcule à l'aide de la suite spectrale de Leray, [13], [14], [21]. Dans le présent article, notre but est plutôt de donner des bornes explicites et uniformes de ces petites valeurs propres en fonction de ε et de la classe d'Euler dans le cas des S^1-fibrés.

1.25. – Dans le cas particulier suivant, on obtient un équivalent asymptotique des petites valeurs propres pour les p-formes à l'aide de la suite de Gysin du S^1-fibré. Précisément, on considère un S^1-fibré principal $\mathrm{S}^1 \to M \xrightarrow{\pi} N$ et deux métriques g_ε et h sur M et N respectivement. On dira que le couple de métriques (g_ε, h) est adapté au fibré principal si $(M, g_\varepsilon) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ est une riemannienne à fibres totalement géodésiques de longueur ε dont la connexion associée a une forme de courbure proportionnelle au relevé de $\mathrm{e}(M)$ (*cf.* définition 2.1). On note $\mathcal{H}^p(N, h)$ l'espace des p-formes harmoniques de (N, h) et $\Lambda_p : \mathcal{H}^p(N, h) \to \mathcal{H}^{p+2}(N, h)$ l'opérateur qui associe à chaque $a \in \mathcal{H}^p(N, h)$ le représentant harmonique de $a \wedge e$, où $e \in \mathcal{H}^2(N, h)$ est le représentant harmonique de la classe d'Euler du fibré $\mathrm{S}^1 \to M \to N$. On note q_1 (resp. q_2) la forme quadratique définie pour $a \in F_1 =: (\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1})^\perp$ (resp. $\alpha \in F_2 =: (\operatorname{Ker} \Lambda_{n-p})^\perp$) par

$$\begin{aligned} q_1(a) &= \big\|\Lambda_{p-1}(a)\big\|_2^2, \\ q_2(\alpha) &= \big\|\Lambda_{n-p}(\alpha)\big\|_2^2. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Soit $m_p = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) - \mathrm{b}_p(M)$ (*cf.* (1.16)). On verra que $m_p = \dim(F_1 \oplus F_2)$ (*cf.* lemme 4.32).

THÉORÈME 1.27. – *Soit (N,h) une variété riemannienne compacte orientée. Soit $\mathrm{S}^1 \to M \to N$ un S^1-fibré principal et g_ε une métrique sur M telle que le couple (g_ε, h) soit adapté. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant m_p$, on a*

$$\lambda_{j,p}(M, g_\varepsilon) = \varepsilon^2 \nu_j + \mathrm{o}(\varepsilon^2),$$

où $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \leqslant \nu_{m_p}$ sont les valeurs propres de la forme quadratique $q_1 \oplus q_2$.

Les preuves des théorèmes 1.17, 1.19 et 1.21 comportent chacune deux parties.

Dans la première partie on se ramène au cas d'un S^1-fibré principal $\mathrm{S}^1 \to M \to N$ et d'un couple (g_ε, h) de métriques adaptées au sens de la définition 2.1.

Dans la seconde partie, on fait la preuve des théorèmes dans le cas des métriques adaptées.

Plus précisément, dans la première partie on considère $(M, g) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$.

À l'aide d'un théorème de J. Cheeger, K. Fukaya, M. Gromov, on montre l'existence de $\delta_0 =: \delta_0(n, a, d, (N, h))$ et $\tau =: (n, a, d, (N, h))$ tels que pour tout $(M, g) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$ vérifiant

$$\delta =: \delta_{\mathcal{H}}\big((M, g), (N, h)\big) \leqslant \delta_0,$$

il existe une fibration $\pi : M \to N$ et un couple de métriques (g_δ, h_δ) adaptées à la fibration tel que g_δ et h_δ sont τ-proches de g et h respectivement, où τ-proche signifie ici que $\frac{1}{\tau}\, g \leqslant g_\delta \leqslant \tau g$ et $\frac{1}{\tau}\, h \leqslant h_\delta \leqslant \tau h$ (*cf.* théorème 2.5). La preuve du théorème 2.5 est assez technique et nous la donnons dans l'appendice. Elle résulte en grande partie des arguments de [4].

Un théorème de J. Dodziuk permet alors d'estimer $\lambda_{k,p}(M, g)$ en fonction de $\lambda_{k,p}(M, g_\delta)$.

Dans le cas des métriques adaptées, on montre d'abord qu'il suffit de considérer les p-formes S^1-invariantes (*cf.* § 3). On montre ensuite les estimations des théorèmes 1.17, 1.19, 1.21 à l'aide d'un lemme d'approximation de valeurs propres dû à Y. Colin de Verdière appliqué à un espace test déterminé en considérant la suite de Gysin du S^1-fibré $\mathrm{S}^1 \to M \to N$ (*cf.* § 4).

Dans le § 5, on prouve la formule asymptotique 5.3 et nous donnons un exemple montrant que l'on ne peut pas améliorer le théorème 1.21.

Nous remercions J. Lannes de nous avoir suggéré la construction de l'exemple 5.18.

2. Réduction à une situation géométriquement plus simple

Le but de ce paragraphe est de ramener les estimations de $\lambda_{k,p}(M, g)$ pour $(M, g) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$ à un cas où g est une métrique géométriquement plus simple.

Soient $\mathrm{S}^1 \to M^{n+1} \xrightarrow{\pi} N^n$ un S^1-fibré principal et h une métrique riemannienne sur N^n. Soient $\varepsilon > 0$, et g_ε une métrique riemannienne sur M.

Définition 2.1. – On dit que le couple de métriques (g_ε, h) est *adapté* à la fibration $\mathrm{S}^1 \to M \xrightarrow{\pi} N$ si :

- (i) $\pi : (M, g_\varepsilon) \to (N, h)$ est une submersion riemannienne ;
- (ii) les fibres sont des géodésiques de longueur ε ;
- (iii) l'action de S^1 sur (M, g_ε) est isométrique ;
- (iv) si ω est la 1-forme verticale de norme 1 associée à l'action de S^1 sur (M, g_ε), on a $\mathrm{d}\omega = \varepsilon \pi^*(\mathrm{e}(M))$, où $\mathrm{e}(M)$ est le représentant harmonique de la classe d'Euler du fibré.

Remarque 2.2. – Étant donné un S^1-fibré principal M au-dessus de N, il existe toujours des couples de métriques adaptées (g_ε, h) pour tout $\varepsilon > 0$.

Les théorèmes 2.4, 2.5 suivants permettent de réduire les preuves des théorèmes 1.17, 1.19, 1.21 et 1.23 au cas des métriques adaptées.

Définition 2.3. – Soient g, $\bar{g}$ deux métriques riemanniennes sur M^{n+1} et τ une constante positive. On dit que g et $\bar{g}$ sont *τ-proches* si $\frac{1}{\tau} g \leqslant \bar{g} \leqslant \tau g$.

THÉORÈME 2.4 ([12, p. 441, Proposition 2.3]). – *Soient g, $\bar{g}$ deux métriques riemanniennes sur une variété compacte M^{n+1} orientable. Soient $\{\lambda_{k,p}(M,g)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_{k,p}(M,\bar{g})\}_{k\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres des p-formes différentielles de (M,g) et $(M,\bar{g})$. Si g et $\bar{g}$ sont τ-proches, alors*

$$\frac{1}{\tau^{n+2p+1}}\,\lambda_{k,p}(M,g) \leqslant \lambda_{k,p}(M,\bar{g}) \leqslant \tau^{n+2p+1}\lambda_{k,p}(M,g).$$

THÉORÈME 2.5. – *Soit (N,h) une variété orientée compacte. Il existe des constantes positives δ_0, τ, K_0, r_0 qui dépendent de n, a, d, (N,h) telles que pour tout $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$ vérifiant*

$$\delta =: \delta_{\mathcal{H}}\big((M,g),(N,h)\big) \leqslant \delta_0,$$

il existe une fibration principale $\mathrm{S}^1 \to M^{n+1} \xrightarrow{\pi} N$ et un couple de métriques adaptées (g_δ, h_δ) vérifiant :

(a) $$\tau^{-1} g_\delta \leqslant g \leqslant \tau g_\delta, \qquad \tau^{-1} h_\delta \leqslant h \leqslant \tau h_\delta,$$

(b) $$|K(g_\delta)| \leqslant K_0, \qquad |K(h_\delta)| \leqslant K_0,$$

(c) $$r(N,h_\delta) \geqslant r_0,$$

où $r(N,h_\delta)$ désigne le rayon d'injectivité de (N,h_δ) et K la courbure sectionnelle.

La preuve du théorème 2.5 est donnée dans l'appendice.

Remarque 2.9. – Il est fondamental dans ce théorème que τ, K_0, r_0 ne dépendent ni de δ ni de la topologie du fibré.

3. Réduction aux formes S^1-invariantes

Dans ce paragraphe on considère un S^1-fibré orienté $\mathrm{S}^1 \to M^{n+1} \to N^n$. On a fixé une métrique h sur N et on considère une métrique g_ε sur M^{n+1} telle que $(M^{n+1}, g_\varepsilon) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$. On suppose que (g_ε, h) est un couple de métriques adaptées (*cf.* définition 2.1). En particulier, les fibres de la fibration sont les orbites d'une action libre et isométrique de S^1 sur M^{n+1} et sont toutes de même longueur ε.

Lorsque ε tend vers 0, nous allons montrer à présent que seules les formes différentielles S^1-invariantes peuvent intervenir comme formes propres associés à des valeurs propres bornées. Bien que cette propriété soit connue dans le cas des fonctions (*cf.* [16]), nous n'avons pas pu la localiser dans la littérature dans le cas des formes différentielles.

Définition 3.1. – Une forme différentielle ψ sur M^{n+1} est S^1-*invariante* si pour tout $t \in \mathrm{S}^1$, $(\varphi_t)^*\psi = \psi$, où $\{\varphi_t\}_{t\in\mathrm{S}^1}$ désigne l'action de S^1 sur M^{n+1}.

L'espace des p-formes différentielles $\Omega^p(M)$ se décompose en somme orthogonale $\Omega^p(M) = H_0 \oplus H_\infty$ pour la q-norme définie par :

(3.2) $$\|\psi\|_q^2 = \int_M |\psi|^2 \,\mathrm{d}v_g + \int_M \big(|\mathrm{d}\psi|^2 + |\delta\psi|^2\big)\,\mathrm{d}v_g,$$

où H_0 désigne le sous-espace de $\Omega^p(M)$ des formes S^1-invariantes et H_∞ l'orthogonal de H_0 dans $\Omega^p(M)$.

Remarque 3.3. – La décomposition ci-dessus étant q-orthogonale, toute p-forme propre est somme d'une p-forme propre de H_0 et d'une p-forme propre de H_∞. On a le :

THÉORÈME 3.4. – *Soit (N^n, h) une variété compacte. Soit $\mathrm{S}^1 \to M^{n+1} \to N^n$ un S^1-fibré principal. On considère une métrique g_ε sur M^{n+1} telle que $(M^{n+1}, g_\varepsilon) \in \mathcal{M}(n+1, a, d)$ et on suppose que (g_ε, h) est un couple de métriques adaptées. Soit ε la longueur de chaque fibre. Il existe des constantes $C = C(n, a, d, (N, h))$ et $\rho = \rho(n)$ telles que toute p-forme différentielle propre de valeur propre $\lambda \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{1/2\rho}}$ est de projection nulle sur H_∞.*

Démonstration. – L'idée de la preuve est de généraliser aux coefficients des formes différentielles le fait suivant bien connu pour les fonctions : sur un fibré en cercle, une fonction d'intégrale nulle sur chaque fibre et de norme égale à 1 a une grande énergie si la longueur de la fibre est petite. Soit ψ une p-forme différentielle propre de valeur propre λ. Nous allons d'abord écrire ψ localement à l'aide d'un repère mobile S^1-invariant. Précisément, soit U un ouvert de N^n difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et tel que $\pi^{-1}U \cong U \times \mathrm{S}^1$. On considère un repère mobile $\{Y_i\}_{i=1}^n$ sur U, c'est-à-dire un champ de repères orthonormés pour la métrique h sur U. Soit $\{Z_i\}_{i=1}^n$ le champ de repères orthonormés sur $\pi^{-1}U$ obtenu en relevant horizontalement $\{Y_i\}_{i=1}^n$. On complète $\{Z_i\}_{i=1}^n$ en ajoutant Z_{n+1} le champ de vecteurs unitaires tangent à l'action de S^1 et on obtient ainsi sur $\pi^{-1}U = U \times \mathrm{S}^1$ un repère mobile S^1-invariant. Soit $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n+1}$ les 1-formes duales de $\{Z_i\}_{i=1}^{n+1}$. Sur $\pi^{-1}U$, une p-forme ψ s'écrit :

$$\psi = \sum \alpha_{i_1 \cdots i_p} \gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{i_p}. \quad \square \tag{3.5}$$

On considère une p-forme propre ψ sur (M^{n+1}, g) de valeur propre λ et de L^2-norme égale à 1 sur (M^{n+1}, g). Avec les notations précédentes, on a le lemme suivant :

LEMME 3.6. – *Il existe une constante $C' =: C'(n, a, (N, h))$ et un entier $\rho = \rho(n)$ tels que pour tout $x \in \pi^{-1}U$,*

$$\left|Z_j \alpha_{i_1 \cdots i_p}(x)\right| \leqslant \frac{C'}{\varepsilon^{1/2}} \left(\sum_{k=0}^{\rho} \lambda^k\right), \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

On considère une p-forme $\psi \in H_\infty$ de L^2-norme égale à 1. On a le :

LEMME 3.7. – *Il existe une constante $C'' = C''(n, a, d, (N, h))$, un ouvert $U \subset N$ et un point $x \in \pi^{-1}(U)$ tels que*

$$\left|Z_{n+1} \alpha_{i_1 \cdots i_p}(x)\right| \geqslant \frac{C''}{\varepsilon^{3/2}}$$

pour un coefficient $\alpha_{i_1 \cdots i_p}$ de $\psi = \sum_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{i_p}$.

Le théorème 3.4 découle de ces deux lemmes de la façon suivante :

Soit ψ une p-forme propre de valeur propre λ sur (M^{n+1}, g). Soit φ la projection de ψ sur H_∞. On suppose que $\varphi \neq 0$. D'après la remarque 3.3, φ est une p-forme propre de valeur propre λ. D'après les deux lemmes précédents on a donc $\sum_{k=0}^{\rho} \lambda^k \geqslant \frac{C''}{C' \varepsilon}$, ce qui entraîne $\lambda \geqslant \frac{C}{\varepsilon^{1/\rho}}$.

Démonstration du lemme 3.6. – Le lemme provient essentiellement des inégalités de Sobolev. Afin que la constante C' qui intervient dans l'inégalité du lemme 3.6 ne dépende pas de ε, on n'applique pas directement l'inégalité de Sobolev à ψ dans l'ouvert $\pi^{-1}U$ (dont le rayon d'injectivité est ε) mais à un revêtement de $\pi^{-1}U$ de degré égal à la partie entière $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Soit $L = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ et $\widetilde{U}$ le revêtement cyclique de degré L au-dessus de $\pi^{-1}(U)$, construit à partir de l'action de S^1 sur $\pi^{-1}U$.

Soit $f : \widetilde{U} \to \pi^{-1}$ l'application de revêtement. En relevant par f la métrique g de $\pi^{-1}U$, on obtient une métrique $\tilde{g}$ sur $\widetilde{U}$ dont le rayon d'injectivité est minoré indépendamment de ε.

Les inégalités de Sobolev appliquées à $f^*\psi$ donnent pour tout $\tilde{x}$ de $\widetilde{U}$ (*cf.* [19]),

$$|\widetilde{Z}_j \alpha_{i_1 \cdots i_p}(\tilde{x})| \leqslant C \sum_{k=0}^{\rho} \|\Delta^k (f^*\psi)\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{U})}, \tag{3.8}$$

où $\widetilde{Z}_j$ est le relevé de Z_j, $j = 1, \ldots, n+1$, et $\rho = \rho(n)$, $C = C(n, a, (N, h))$.

Comme f est un revêtement riemannien et $f^*(\psi)$ est propre pour la valeur propre λ, on obtient pour tout $x \in \pi^{-1}U$:

$$|Z_j \alpha_{i_1 \cdots i_p}(x)| \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{\rho} \lambda^k \right) \|f^*(\psi)\|_{\mathrm{L}^2(\widetilde{U})} \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{\rho} \lambda^k \right) \mathrm{L}^{1/2} \|\psi\|_{\mathrm{L}^2(\pi^{-1}U)}; \tag{3.9}$$

d'où l'on déduit le lemme 3.6 puisque $L = [\frac{1}{\varepsilon}]$. □

Démonstration du lemme 3.7. – Soit ψ une p-forme différentielle sur (M^{n+1}, g) telle que $\int_M |\psi|^2 = 1$.

On fixe un recouvrement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de N par des ouverts trivialisants.

On note

$$C_1 = \sup_{i \in I} \operatorname{vol} U_i, \qquad C_2 = \operatorname{card} I. \tag{3.10}$$

Il existe $i \in I$ tel que

$$\int_{\pi^{-1}U_i} |\psi|^2 \, \mathrm{d}v_g \geqslant \frac{1}{C_2}. \tag{3.11}$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\pi^{-1}U_i} |\psi|^2 \, \mathrm{d}v_g = \int_{U_i} \left(\int_{\pi^{-1}(q)} |\psi|^2 \right) \mathrm{d}v_h(q), \tag{3.12}$$

donc il existe $q \in U_i$ tel que

$$\int_{\pi^{-1}q} |\psi|^2 \geqslant \frac{1}{C_2(N,h) \operatorname{vol} U_i} \geqslant \frac{1}{C_1(N,h) C_2(N,h)}. \tag{3.13}$$

On fixe un repère mobile $\{Z_j\}_{j=1}^{n+1}$ sur $\pi^{-1}U_i$ comme ci-dessus dans lequel α s'écrit (*cf.* (3.5)) :

$$\psi = \sum \alpha_{i_1 \cdots i_p} \gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{i_p}.$$

L'inégalité (3.13) s'écrit :

$$\sum_{i_1\cdots i_p}\int_{\pi^{-1}(q)} \alpha^2_{i_1\cdots i_p} \geqslant \frac{1}{C_1C_2}, \tag{3.14}$$

donc il existe un coefficient $\alpha_{i_1\cdots i_p}$, tel que

$$\int_{\pi^{-1}(q)} \alpha^2_{i_1\cdots i_p} \geqslant C_3. \tag{3.15}$$

Comme $\psi = \sum \alpha_{i_1\cdots 1_p}\gamma_{i_1}\wedge\cdots\wedge\gamma_{1p} \in H_\infty$, on a $\int_{\pi^{-1}q}\alpha_{i_1\cdots i_p} = 0$ et

$$\int_{\pi^{-1}(q)} |Z_{n+1}\alpha_{i_1\cdots i_p}|^2 \geqslant \frac{4\pi^2C_3}{\varepsilon^2},$$

d'où l'on déduit l'existence d'un point $x\in\pi^{-1}(q)$ tel que $|Z_{n+1}\alpha_{i_p\cdots i_p}(x)|^2 \geqslant \frac{C''}{\varepsilon^3}$, ce qui achève la preuve du lemme 3.7. □

4. Démonstration des théorèmes 1.17, 1.19, 1.21

Rappelons que $\mathcal{M}(n,a,d,r)$ désigne l'ensemble des variétés riemanniennes compactes orientées (N,h) dont la courbure sectionnelle $K(N,h)$, le diamètre $d(N,h)$ et le rayon d'injectivité $r(N,h)$ vérifient $|K(N,h)|\leqslant a$, $d(N,h)\leqslant d$ et $r(N,h)\geqslant r$.

On considère $S^1\to M\to N$ un S^1-fibré principal. Nous allons d'abord montrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 4.1. – *Il existe des constantes positives $C_i =: C_i(n,a,d,r)$, $i=1,2$, et $\varepsilon_0 =: \varepsilon_0(n,a,d,r)$ telles que pour tout couple de métriques (g_ε,h) adaptées au fibré principal $S^1\to M\to N$ telles que $(N,h)\in\mathcal{M}(n,a,d,r)$ et $(M,g_\varepsilon)\in\mathcal{M}(n+1,a,d)$, si $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, alors*

$$0<\lambda_{k,p}(M,g_\varepsilon)\leqslant C_1\cdot\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^2,\quad 1\leqslant k\leqslant m_p \tag{i}$$

$$\lambda_{m_p+1,p}(M,g_\varepsilon)\geqslant C_2. \tag{ii}$$

THÉORÈME 4.2. – *Il existe des constantes positives $C_i =: C_i(n,a,d,r)$, $i=1,2$, et $\varepsilon_0 =: \varepsilon_0(n,a,d,r)$ telles que pour tout couple de métriques (g_ε,h) adaptées au fibré principal $S^1\to M\to N$ telles que $(N,h)\in\mathcal{M}(n,a,d,r)$ et $(M,g_\varepsilon)\in\mathcal{M}(n+1,a,d)$, si $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ et $e(M)\neq 0$, alors*

$$C_1\big(\varepsilon\|e\|\big)^2\leqslant\lambda_{1,1}(M,g_\varepsilon)\leqslant C_2\cdot\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^2.$$

THÉORÈME 4.3. – *On suppose que* $\dim H^2(N,\mathbb{R})=1$.

Il existe des constantes positives $C_i =: C_i(n,a,d,r)$, $i=1,2$, et $\varepsilon_0 =: \varepsilon_0(n,a,d,r)$ telles que pour tout couple de métriques (g_ε,h) adaptées au fibré principal $S^1\to M\to N$ telles que $(N,h)\in\mathcal{M}(n,a,d,r)$ et $(M,g_\varepsilon)\in\mathcal{M}(n+1,a,d)$, si $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ et $e(M)\neq 0$, alors

$$C_1\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^2\leqslant\lambda_{k,p}(M,g_\varepsilon)\leqslant C_2\cdot\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^2,\quad 1\leqslant k\leqslant m_p,\ 1\leqslant p\leqslant n.$$

Les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 ci-dessus correspondent aux théorèmes 1.17, 1.19, 1.21 dans le cas des métriques adaptées. Il est facile alors d'en déduire les théorèmes 1.17, 1.19, 1.21. En effet, soient (N,h) une variété riemannienne compacte orientée et $\delta_0 =: \delta_0(n,a,d,(N,h))$ et $\tau =: \tau(n,a,d,(N,h))$ les constantes intervenant dans le théorème 2.5.

Soit $(M,g) \in \mathcal{M}_N(n+1,a,d)$ vérifiant $\delta = \delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta_0$. Il existe une fibration $\pi : M \to N$ et des métriques h_δ et g_δ sur N et M τ-proches de h et g respectivement telles que (g_δ, h_δ) est un couple de métriques adaptées. D'après le théorème 2.4, les valeurs propres $\lambda_{k,p}(M,g)$ et $\lambda_{k,p}(M,g_\delta)$ vérifient

$$\frac{1}{\tau^{n+2p+1}}\lambda_{k,p}(M,g_\delta) \leqslant \lambda_{k,p}(M,g) \leqslant \tau^{n+2p+1}\lambda_{k,p}(M,g_\delta).$$

Les théorèmes 1.17, 1.19 et 1.21 se déduisent alors directement des théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 2.5. En effet, les constantes C_i intervenant dans les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 dépendent des bornes sur la courbure $K(N,h_\delta)$, le diamètre $d(N,h_\delta)$, et le rayon d'injectivité $r(N,h_\delta)$ et ces bornes s'expriment en fonction de n, a, d, (N,h) d'après le théorème 2.5(b), (c) ; de plus, les représentants harmoniques de la classe d'Euler de M par rapport aux métriques h (resp. h_δ) ont des normes $\mathrm{L}^2(N,h)$ (resp. $\mathrm{L}^2(N,h_\delta)$) qui restent dans un rapport borné à cause du théorème de Hodge.

4.4. Démonstration des théorèmes 4.1, 4.2, 4.3

On a vu au paragraphe 3 qu'il suffisait de considérer les p-formes différentielles S^1-invariantes pour contrôler les valeurs propres bornées (*cf.* théorème 3.4).

On notera dans ce paragraphe $\Omega_0^p(M)$ les p-formes différentielles S^1-invariantes sur M.

Nous commençons par rappeler quelques faits.

Soit $\psi \in \Omega^p(M)$, $\psi \neq 0$. Son quotient de Rayleigh pour la métrique g_ε sur M est donné par

$$R(\psi) = \int_M \left(|\mathrm{d}\psi|^2 + |\delta\psi|^2\right) \mathrm{d}v_{g_\varepsilon} \Big/ \int_M |\psi|^2 \, \mathrm{d}v_{g_\varepsilon}, \tag{4.5}$$

où $|\mathrm{d}\psi|^2$, $|\delta\psi|^2$ désignent les normes de $\mathrm{d}\psi$, $\delta\psi$ pour la métrique g_ε.

On notera

$$q(\psi) = \int_M \left(|\mathrm{d}\psi|^2 + |\delta\psi|^2\right) \mathrm{d}v_{g_\varepsilon}. \tag{4.6}$$

Les formules suivantes qui résultent de calculs simples et directs permettent de ramener l'estimation des quotients de Rayleigh des éléments de $\Omega_0^p(M)$ à des calculs sur (N,h).

LEMME 4.7. – *Soient $\psi \in \Omega_0^p(M)$, $\psi = \pi^*\alpha + \pi^*a \wedge \omega$, où $\alpha \in \Omega^p(N)$ et $a \in \Omega^{p-1}(N)$. On a*

(i) $\|\psi\|_2^2 = \varepsilon(\|\alpha\|_2^2 + \|a\|_2^2)$;

(ii) $\mathrm{d}\psi = \pi^*(\mathrm{d}\alpha + (-1)^{p-1}\varepsilon(a \wedge e)) + \pi^*(da) \wedge \omega$,

$$\|\mathrm{d}\psi\|_2^2 = \varepsilon\left(\|\mathrm{d}\alpha + (-1)^{p-1}\varepsilon(a\wedge e)\|_2^2 + \|da\|_2^2\right);$$

(iii) $\delta\psi = \pi^*(\delta\alpha) + \pi^*(\delta a + (-1)^{pn}\varepsilon * (*\alpha \wedge e)) \wedge \omega$,

$$\|\delta\psi\|_2^2 = \varepsilon\left(\|\delta\alpha\|_2^2 + \left\|\delta a + (-1)^{np}\varepsilon * (*\alpha\wedge e)\right\|_2^2\right).$$

Dans ce lemme, $\|\psi\|_2$ (resp. $\|\mathrm{d}\psi\|_2$, $\|\delta\psi\|_2$) désigne la L^2-norme de ψ (resp. $\mathrm{d}\psi$, $\delta\psi$) dans (M, g_ε), et $\|a\|_2$ (resp. $\|\alpha\|_2$) la L^2-norme de a (resp. α) dans (N, h). On désigne aussi l'opérateur de Hodge de (N, h) par $*$.

Nous allons nous ramener à la preuve du résultat suivant.

4.8. – *Il existe des constantes $C_i(n, a, d, r)$, $i = 1, 2$, et $\varepsilon_1 =: \varepsilon_1(n, a, d, r)$ telles que pour tout $(M, g_\varepsilon) \in \mathcal{M}(n+1, a, d)$ et $(N, h) \in \mathcal{M}(n, a, d, r)$, où (g_ε, h) est un couple de métriques adaptées à la fibration principale $\mathrm{S}^1 \to M \to N$, si $\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1$, alors les conclusions des théorèmes* 4.1, 4.2, 4.3 *sont vraies.*

La constante ε_1 sera choisie dans 4.8 de telle sorte que les valeurs propres de (N, h) n'interfèrent pas avec les petites valeurs propres de (M, g_ε).

Les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 se déduisent alors de 4.8 et du lemme suivant.

LEMME 4.9. – *Il existe des constantes $\varepsilon_2 =: \varepsilon_2(n, a, d)$ et $C_0 =: C_0(n, a, d)$ telles que pour tout fibré principal $\mathrm{S}^1 \to M \to N$ et tout couple de métriques adaptées (g_ε, h) telles que $(M, g_\varepsilon) \in \mathcal{M}_N(n+1, a, d)$ et $(N, h) \in \mathcal{M}(n, a, d, r)$, si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, alors $(\varepsilon\|e\|_2)^2 \leqslant C_0$, où e est le représentant harmonique par rapport à h de la classe d'Euler de $\mathrm{S}^1 \to M \to N$.*

Démonstration. – Appendice, A.26. □

Les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 se déduisent de 4.8 et 4.9 de la façon suivante. On pose $\overline{C} = (\varepsilon_1 C_0^{-1})^{1/2}$, où ε_1 et C_0 sont les constantes intervenant dans 4.8 et 4.9 respectivement. Le couple de métriques $(g_{\overline{C}\varepsilon}, h)$ est adapté et pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, on a $(\overline{C}\varepsilon\|e\|_2)^2 \leqslant \varepsilon_1$ d'après le lemme 4.9. D'après 4.8, les valeurs propres $\lambda_{k,p}(M, g_{\overline{C}\varepsilon})$, $1 \leqslant k \leqslant m_p$, de $(M, g_{\overline{C}\varepsilon})$ vérifient les conclusions des théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3. Comme g_ε est $\overline{C}$-proche de $g_{\overline{C}\varepsilon}$, ces mêmes conclusions restent vraies pour les valeurs propres $\lambda_{k,p}(M, g_\varepsilon)$ de (M, g_ε), $1 \leqslant k \leqslant m_p$, grâce au théorème 2.4.

Démonstration du théorème 4.1 *sous l'hypothèse* $\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1$. – On considère le sous-espace test $E_p \subset \Omega_0^p(M)$ de dimension $\mathrm{b}_{p-1}(N) + \mathrm{b}_p(N)$ obtenu en relevant par π l'espace des formes harmoniques de degré $(p-1)$ et p de (N, h) :

$$E_p = \{\psi = \pi^*\alpha + \pi^* a \wedge \omega,\ \alpha \in \mathcal{H}^p(N, h),\ a \in \mathcal{H}^{p-1}(N, h)\}, \tag{4.10}$$

où $\mathcal{H}^p(N, h)$ désigne l'espace des p-formes différentielles harmoniques de (N, h).

Soit $\psi \in E_p$. On déduit du lemme 4.7,

$$\begin{cases} \|\psi\|_2^2 = \varepsilon(\|\alpha\|_2^2 + \|a\|_2^2), \\ \|\mathrm{d}\psi\|_2^2 = \varepsilon^3\|a \wedge e\|_2^2, \\ \|\delta\psi\|_2^2 = \varepsilon^3\| * \alpha \wedge e\|_2^2. \end{cases} \tag{4.11}$$

La norme ponctuelle d'un produit extérieur vérifie pour $u \in \Omega^*(N)$, $v \in \Omega^*(N)$,

$$|u \wedge v| \leqslant C(n)|u||v|, \quad \text{où } C(n) > 0. \tag{4.12}$$

Comme a, α, e sont harmoniques sur (N, h), on déduit de [19] l'existence d'une constante $C =: C(n, a, d, r)$ telle que pour tout $\psi \in E_p$,

$$R(\psi) \leqslant C\varepsilon^2\|e\|_2^2, \tag{4.13}$$

ce qui entraîne par le principe du min-max la majoration du théorème 4.1 puisque $m_p = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) - \mathrm{b}_p(M)$ (*cf.* (1.16)). Montrons à présent que $\lambda_{m_p+1,p}(M,g)$ est minorée indépendamment de ε.

D'après le principe du max-min, il suffit de vérifier que tout élément de $\Omega_0^p(M)$ orthogonal à E_p a un quotient de Rayleigh minoré indépendamment de ε.

Soit $\psi \in \Omega_0^p$, $\psi \perp E_p$. On écrit $\psi = \pi^*\alpha + \pi^* a \wedge \omega$.

On a

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{d}\alpha + (-1)^{p-1}\varepsilon(a \wedge e)\right\|_2 &\geqslant \|\mathrm{d}\alpha\|_2 - C\varepsilon\|a\|_2\|e\|_2, \\ \left\|\delta a + (-1)^{np}\varepsilon * (*\alpha \wedge e)\right\|_2 &\geqslant \|\delta a\|_2 - C\varepsilon\|\alpha\|_2\|e\|_2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

on en déduit, en utilisant le lemme 4.7,

$$\|\mathrm{d}\psi\|_2 + \|\delta\psi\|_2 \geqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\big(\|\mathrm{d}\alpha\|_2 + \|\delta\alpha\|_2 + \|da\|_2 + \|\delta a\|_2 - C\varepsilon\|e\|_2\big(\|a\|_2 + \|\alpha\|_2\big)\big). \tag{4.15}$$

Par ailleurs, comme ψ est orthogonale à E_p, α et a sont orthogonales respectivement à $\mathcal{H}^p(N,h)$ et $\mathcal{H}^{p-1}(N,h)$ et donc

$$\begin{aligned} \big(\|\mathrm{d}\alpha\|_2 + \|\delta\alpha\|_2\big)^2 &\geqslant \|\mathrm{d}\alpha\|_2^2 + \|\delta\alpha\|_2^2 \geqslant \lambda_{1,p}(N,h)\|\alpha\|_2^2, \\ \big(\|\mathrm{d}a\|_2 + \|\delta a\|_2\big)^2 &\geqslant \|\mathrm{d}a\|_2^2 + \|\delta a\|_2^2 \geqslant \lambda_{1,p-1}(N,h)\|a\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On déduit de (4.15) et (4.16)

$$\begin{aligned} \big(\|\mathrm{d}\psi\|_2 + \|\delta\psi\|_2\big) \geqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\big(\|a\|_2 + \|\alpha\|_2\big) \cdots \\ \times \big[\min\big(\lambda_{1,p}(N,h)^{1/2}, \lambda_{1,p-1}(N,h)^{1/2}\big) - C(N,h)\varepsilon\|e\|_2\big]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ainsi, sous la condition suivante, qui assure que les valeurs propres de (N,h) n'interfèrent pas avec les petites valeurs propres de (M,g_ε),

$$\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1 := \frac{1}{2C}\min\big(\lambda_{1,p}(N,h)^{1/2}, \lambda_{1,p-1}(N,h)^{1/2}\big),$$

on obtient

$$\|\mathrm{d}\psi\|_2^2 + \|\delta\psi\|_2^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{8}\varepsilon_1^2\big(\|a\|_2^2 + \|\alpha\|_2^2\big) = \frac{\varepsilon_1^2}{8}\|\psi\|_2^2, \tag{4.18}$$

d'où la minoration du théorème 4.1 en remarquant que $\lambda_{1,p}(N,h)$ et $\lambda_{1,p-1}(N,h)$ sont bornés en fonction de n, a, d, r (*cf.* théorème 1.3). □

La preuve des théorèmes 4.2 et 4.3 sous l'hypothèse $\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1$ repose sur le lemme 4.19 (lemme des petites valeurs propres). Ce lemme dit que, L étant un entier donné, les L premières valeurs propres pour les p-formes de (M,g_ε) sont « bien approximées » par les valeurs propres de la forme quadratique $q(\psi) = \int_M \big(|\mathrm{d}\psi|^2 + |\delta\psi|^2\big)\,\mathrm{d}v_g$ définie sur un sous-espace ξ_0 de $\Omega_0^p(M)$ de dimension L qui est « presque orthogonal » à $\Omega_0^p(M)$.

Précisément, on note D un sous-espace de $\Omega_0^p(M)$ stable par le Laplacien. En fait, dans la suite, on aura $D = \Omega_0^p(M)$ ou bien $D = \mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)^\perp$. Dans le deuxième cas, $\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)^\perp$ désigne l'orthogonal de $\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)$ dans $\Omega_0^p(M)$.

On note également pour simplifier $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ les valeurs propres du Laplacien agissant sur D.

LEMME 4.19 ([7, théorème 1.7], [8, lemme 4.1]). – *Soient L un entier positif et $C_1 > 0$. Il existe $\rho_0 = \rho_0(C_1, L)$ et $C = C(C_1, L)$ tels que pour tout $\rho < \rho_0$, si les conditions suivantes* (i) *et* (ii) *sont réalisées :*

(i) *le nombre de valeurs propres du Laplacien agissant sur D contenues dans l'intervalle $[0, C_1]$ est égal à L ;*

(ii) *il existe un sous-espace test $\xi_0 \subset D$ de dimension L tel que pour tout $\psi_0 \in \xi_0$, $\psi \in D$, on a*

$$\left|q(\psi, \psi_0)\right| \leqslant \rho\|\psi_0\|_2\left(\|\psi\|_2^2 + q(\psi)\right)^{1/2},$$

alors

$$\mu_i - C\rho^2 \leqslant \lambda_i \leqslant \mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, L,$$

où $\{\mu_i\}_{i=1}^L$ désigne les valeurs propres de la forme quadratique q définie sur ξ_0.

Les preuves des théorèmes 4.2 et 4.3 sont semblables mais le cas des 1-formes différentielles (*cf.* théorème 4.2) est plus simple et nous commençons par celui-là.

Démonstration du théorème 4.2 *sous l'hypothèse $\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1$.* – Comme $e \neq 0$, $m_1 = 1$ et on sait d'après le théorème 4.1 qu'il existe une unique 1-forme propre de valeur propre $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon)$ vérifiant

$$0 < \lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^2\|e\|_2^2 \tag{4.20}$$

dès que $\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1$.

Nous allons appliquer le lemme 4.19 au sous-espace vectoriel $\xi_0 \subset D =: \mathcal{H}^1(M, g_\varepsilon)^\perp \subset \Omega_0^1(M)$ de dimension 1 défini par $\xi_0 = \mathbb{R}\omega$, où ω est la 1-forme verticale du fibré normalisée pour que $|\omega| = |\omega|_{g_\varepsilon} \equiv 1$.

Vérifions d'abord que $\omega \in D = \mathcal{H}^1(M, g_\varepsilon)^\perp$, i.e. ω est orthogonal à l'espace des 1-formes harmoniques. Cela provient du fait que ces dernières sont horizontales, ce qui découle du :

LEMME 4.21. – *Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}^1(N, h)$, où $k = \mathrm{b}_1(N)$. Alors $\{\pi^*\alpha_1, \ldots, \pi^*\alpha_k\}$ est une base de $\mathcal{H}^1(M, g_\varepsilon)$.*

Démonstration. – On montre d'abord que $\pi^*\alpha_i \in \mathcal{H}^1(M, g_\varepsilon)$. Comme $d\pi^*\alpha_i = \pi^*(\mathrm{d}\alpha_i) = 0$, il suffit de vérifier que $\delta(\pi^*\alpha_i) = 0$. On a (*cf.* lemme 4.7),

$$\delta(\pi^*\alpha_i) = \pi^*(\delta\alpha_i) + (-1)^p\varepsilon\pi^*\big(*(*\alpha_i \wedge e)\big).$$

Comme α_i est harmonique sur (N, h) et $*\alpha_i \wedge e$ est une $(n+1)$-forme sur N, on en déduit que $\delta(\pi^*\alpha_i) = 0$. De plus, si $i \neq j$,

$$\langle \pi^*\alpha_i, \pi^*\alpha_j\rangle_{\mathrm{L}^2(M, g_\varepsilon)} = \varepsilon\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle_{\mathrm{L}^2(N,h)} = 0.$$

Ainsi, $\{\pi^*\alpha_1, \ldots, \pi^*\alpha_k\}$ est bien une base de $\mathcal{H}^1(M, g_\varepsilon)$ puisque $\mathrm{b}_1(M) = \mathrm{b}_1(N)$, i.e. $e \neq 0$.

D'après le théorème 4.1 le nombre de valeurs propres du Laplacien agissant sur D contenues dans l'intervalle $[0, C(N, h)]$ est égal à 1, où $C(N, h)$ est la constante C_2 du théorème 4.1. L'hypothèse (i) du lemme 4.19 est donc vérifiée.

Vérifions l'hypothèse (ii).

Soient $\psi_0 = \omega$ et $\psi = \pi^*\alpha + \pi^*a \wedge \omega \in D$.

On a :

$$q(\psi_0, \psi) = \int_M \langle \mathrm{d}\psi_0, \mathrm{d}\psi\rangle\,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} + \int_M \langle \delta\psi_0, \delta\psi\rangle\,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} \tag{4.22}$$

et comme $\delta\omega = 0$, on déduit du lemme 4.7,

$$q(\psi_0, \psi) = \varepsilon \int_M \langle \pi^* e, \pi^*(\mathrm{d}\alpha) + \varepsilon(a \circ \pi)\pi^* e\rangle \, \mathrm{d}v_{g_\varepsilon} = \varepsilon^2 \int_N \langle e, \mathrm{d}\alpha + \varepsilon a e\rangle \, \mathrm{d}v_h. \tag{4.23}$$

On en déduit

$$\left|q(\psi_0, \psi)\right| \leqslant \varepsilon^3 C \cdot \mathrm{vol}(N,h)^{1/2} \|a\|_2 \|e\|_\infty \tag{4.24}$$

et en utilisant à nouveau [19],

$$\left|q(\psi_0, \psi)\right| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2 \|e\|_2^2 \|\psi_0\|_2 \, \|\psi\|_2. \tag{4.25}$$

L'hypothèse (ii) du lemme 4.19 est vérifiée avec $\rho_0 = C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2$.

Comme $R(\psi_0) = \frac{q(\psi_0)}{\|\psi_0\|_2^2} = \mu_1 = \varepsilon^2\|e\|_2^2$, on déduit du lemme 4.19.

$$\varepsilon^2\|e\|_2^2 - C\varepsilon^4\|e\|_2^4 \leqslant \lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2\|e\|_2^2, \tag{4.26}$$

ce qui prouve le théorème 4.2. □

Démonstration du théorème 4.3 *sous l'hypothèse* $\varepsilon\|e\|_2 \leqslant \varepsilon_1$. – Nous allons à nouveau appliquer le lemme 4.19. Nous avons à définir un espace test ξ_0.

Dans le cas précédent des 1-formes différentielles, ξ_0 était engendré par ω, c'est-à-dire le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{H}^1(M, g_\varepsilon)$ dans E_1 (*cf.* 4.10). En fait, pour tout p, E_p est l'espace qui approche bien la somme des sous-espaces propres associés aux « petites valeurs propres », nulles et non nulles (*cf.* 4.13).

Dans le cas $p = 1$, $\xi_0 = \mathbb{R}\omega \subset E_1$ correspond à l'unique petite valeur propre non nulle.

Dans le cas $p \neq 0, 1, n, n+1$, l'espace E_p ne contient pas $\mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$ en général et le choix de ξ_0 en est rendu plus délicat.

En fait, $\mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$ se détermine à l'aide de la suite de Gysin du fibré $\mathrm{S}^1 \to M^{n+1} \to N^n$ ([2, p. 179]). Nous allons choisir le sous-espace test ξ_0 également à l'aide de la suite de Gysin.

Grâce à l'action isométrique de S^1 sur (M^{n+1}, g_ε), on peut représenter la suite de Gysin de la façon suivante. Soit α une p-forme différentielle fermée sur (M, g_ε) (resp. (N,h)). On peut décomposer α de façon unique en $\alpha = a + db$, où $a \in \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$ (resp. $a \in \mathcal{H}^p(N,h)$) et b est une $(p-1)$-forme co-exacte de (M, g_ε) (resp. (N,h)). On notera η_p le projecteur

$$\eta_p(\alpha) = a \tag{4.27}$$

et γ_p l'opérateur linéaire défini par

$$\gamma_p(\alpha) = b. \tag{4.28}$$

Nous adopterons par abus les mêmes notations pour M et N lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

La suite de Gysin du fibré s'écrit ([2], p. 179, Proposition 14-33)

$$\cdots \mathcal{H}^{p-2}(N,h) \xrightarrow{\Lambda_{p-2}} \mathcal{H}^p(N,h) \xrightarrow{s_p} \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon) \xrightarrow{r_p} \mathcal{H}^{p-1}(N,h) \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\Lambda_{p-1}} \mathcal{H}^{p+1}(N,h) \longrightarrow \cdots \tag{4.29}$$

où les applications Λ_p, s_p, r_p sont définies de la façon suivante.

Si $a \in \mathcal{H}^{p-2}(N,h)$, $b \in \mathcal{H}^p(N,h)$, alors

$$\begin{aligned} \Lambda_{p-2}(a) &= \eta_p(a \wedge e), \\ s_p(b) &= \eta_p(\pi^* b). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Si $\psi \in \mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)$, on a vu que ψ s'écrit $\psi = \pi^*\alpha + \pi^* a \wedge \omega$ avec $\alpha \in \Omega^p(N)$, $a \in \Omega^{p-1}(N)$ et a fermée. On pose alors

$$r_p(\psi) = \eta_{p-1}(a). \quad \square \tag{4.31}$$

Le lemme 4.32 suivant, qui provient de l'exactitude de la suite de Gysin, permet d'identifier $\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)$ à un sous-espace de $\mathcal{H}^{p-1}(N,h) \oplus \mathcal{H}^{n-p}(N,h)$, et par dualité, à un sous-espace de $\mathcal{H}^{p-1}(N,h) \oplus \mathcal{H}^p(N,h)$. Cela nous permettra par la suite de définir l'espace test ξ_0.

LEMME 4.32. – *$\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)$ est isomorphe à* $\operatorname{Ker} \Lambda_{n-p} \oplus \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}$.

Démonstration. – On a :

$$\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon) \simeq \operatorname{Ker} r_p \oplus (\operatorname{Ker} r_p)^\perp. \tag{4.33}$$

Comme la suite (4.29) est exacte, on obtient immédiatement que $(\operatorname{Ker} r_p)^\perp$ est isomorphe à $\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}$.

Il reste donc à prouver que $\operatorname{Ker} r_p$ est isomorphe à $\operatorname{Ker} \Lambda_{n-p}$. Par exactitude, on a $\operatorname{Ker} r_p \simeq \operatorname{Im} s_p \simeq (\operatorname{Ker} s_p)^\perp = (\operatorname{Im} \Lambda_{p-2})^\perp$. Il faut donc vérifier que $(\operatorname{Im} \Lambda_{p-2})^\perp$ est isomorphe à $\operatorname{Ker} \Lambda_{n-p}$, ce qui découle du lemme suivant.

LEMME 4.34. – *Soit $b \in \mathcal{H}^{n-p}(N,h)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :
(i) $b \in \operatorname{Ker} \Lambda_{n-p}$;
(ii) $*b \perp \nu \wedge e$ *pour tout* $\nu \in \mathcal{H}^{p-2}(N,h)$.

Démonstration. – Soit $b \in \operatorname{Ker} \Lambda_{n-p}$.
On a, pour $\nu \in \mathcal{H}^{p-2}(N,h)$

$$\langle *b, \nu \wedge e \rangle = (-1)^{p(n-p)} \int_N \nu \wedge e \wedge b. \tag{4.35}$$

Si $b \in \operatorname{Ker} \Lambda_{n-p}$, $b \wedge e$ est exacte, i.e. $b \wedge e = \mathrm{d}\varphi$. On déduit alors de (4.35),

$$\langle *b, \nu \wedge e \rangle = (-1)^{p(n-p+1)} \int_N \mathrm{d}\varphi \wedge \nu = (-1)^{p(n-p+1)} \int_N \mathrm{d}(\varphi \wedge \nu) = 0. \tag{4.36}$$

Inversement, supposons que $*b \perp \nu \wedge e$ pour tout $\nu \in \mathcal{H}^{p-2}(N,h)$. Posons $b \wedge e = \eta_{n-p+2}(b \wedge e) + \mathrm{d}\varphi$.
On a :

$$\langle *b, \nu \wedge e \rangle = (-1)^{p(n-p+1)} \int_N b \wedge e \wedge \nu. \tag{4.37}$$

En choisissant $\nu = *\eta_{n-p+2}(b \wedge e)$, on obtient

$$(4.38)\qquad 0=\langle *b,\,\nu\wedge e\rangle=(-1)^{p(n-p+1)}\int\limits_N \eta_{n-p+2}(b\wedge e)\wedge *\eta_{n-p+2}(b\wedge e),$$
$$=(-1)^{p(n-p+1)}\big\|\eta_{n-p+2}(b\wedge e)\big\|_2^2,$$

ce qui entraîne $\eta_{n-p+2}(b\wedge e)=0$ et $b\in\operatorname{Ker}\Lambda_{n-p}$.

La suite exacte de Gysin, le lemme 4.32, suggèrent que le sous-espace $\bar\xi$ de $\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)$ défini en 4.39 ci-dessous « correspond » aux petites valeurs propres non nulles des p-formes de (M^{n+1},g_ε).

$$(4.39)\qquad \bar\xi=\bar\xi_1\oplus\bar\xi_2,\quad \text{où},$$
$$\bar\xi_1=\big\{\psi=\pi^*a\wedge\omega,\ a\in(\operatorname{Ker}\Lambda_{p-1})^\perp\big\},$$
$$\bar\xi_2=\big\{\psi=\pi^*\alpha,\ \ *\alpha\in(\operatorname{Ker}\Lambda_{n-p})^\perp\big\}.$$

En fait, pour appliquer le lemme 4.19, nous devons modifier légèrement ce choix de l'espace test. L'idée est de faire en sorte que la différentielle des éléments de ξ_1 et la codifférentielle des éléments de ξ_2 soient le « pull-back » de formes harmoniques de (N,h). C'est cette propriété qui permet de vérifier l'hypothèse (ii) du lemme 4.19.

On pose pour $a\in\mathcal{H}^{p-1}(N,h)$, $\alpha\in\mathcal{H}^p(N,h)$,

$$(4.40)\qquad \begin{aligned}\psi_a&=\pi^*a\wedge\omega+(-1)^p\varepsilon\pi^*\big(\gamma_{p+1}(a\wedge e)\big),\\ \psi_\alpha&=\pi^*\alpha-\varepsilon\pi^*\big(*\gamma_{n-p+2}(*\alpha\wedge e)\big)\wedge\omega.\end{aligned}$$

On pose également

$$(4.41)\qquad \xi=\xi_1\oplus\xi_2,$$

où

$$\xi_1=\big\{\psi_a,\ a\in(\operatorname{Ker}\Lambda_{p-1})^\perp\big\},$$
$$\xi_2=\big\{\psi_\alpha,\ *\alpha\in(\operatorname{Ker}\Lambda_{n-p})^\perp\big\}.$$

On pose enfin

$$(4.42)\qquad \xi_0=\mathcal{H}^p(M,g_\varepsilon)\oplus\xi.$$

Le sous-espace $\xi_0\subset D=\Omega_0^p(M)$ ainsi défini est l'espace test auquel on appliquera le lemme 4.19.

Le lemme suivant découle directement du lemme 4.7.

LEMME 4.43. – *Soient $\psi_a\in\xi_1$, $\psi_\alpha\in\xi_2$. On a :*
(i) $\mathrm{d}\psi_a=\varepsilon\pi^*(\eta_{p+1}(a\wedge e))$,
$\delta\psi_a=(-1)^{(n+1)p}\varepsilon^2\pi^*(*(*\gamma_{p+1}(a\wedge e)\wedge e))\wedge\omega$,
(ii) $\delta\psi_\alpha=\varepsilon(-1)^{np}\pi^*(*\eta_{n-p+2}(*\alpha\wedge e))\wedge\omega$,
$\mathrm{d}\psi_\alpha=(-1)^p\varepsilon^2\pi^*(*\gamma_{n-p+2}(*\alpha\wedge e)\wedge e)$.

Le lemme suivant dit que les sous-espaces test ξ_1 et ξ_2 sont L^2 proches des sous-espaces test $\bar\xi_1$ et $\bar\xi_2$ si $\varepsilon\|e\|_2$ est assez petit.

LEMME 4.44. – *Il existe une constante positive $C=C(N,h)$ telle que pour tout $\psi_a\in\xi_1$, $\psi_\alpha\in\xi_2$, on a :*
(i) $\|\psi_a-\pi^*a\wedge\omega\|_2\leqslant C\varepsilon\|e\|_2\|\pi^*a\|_2$,
(ii) $\|\psi_\alpha-\pi^*\alpha\|_2\leqslant C\varepsilon\|e\|_2\|\pi^*\alpha\|_2$.

On en déduit en particulier le :

COROLLAIRE 4.45. – *Lorsque* $\varepsilon\|e\|_2$ *est assez petit,*

$$\dim \xi_0 = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N), \qquad \dim \xi_1 \oplus \xi_2 = m_p.$$

Démonstration du corollaire 4.45. – D'après le lemme 4.44, si $\varepsilon\|e\|_2$ est assez petit $\dim \xi_i = \dim \bar{\xi}_i$, et on conclut avec le lemme 4.32 et (4.39). □

Démonstration du lemme 4.44. – On fait la preuve dans le cas (i), le cas (ii) est identique. On a :

$$\psi_a - \pi^* a \wedge \omega = (-1)^p \varepsilon \pi^* \big(\gamma_{p+1}(a \wedge e)\big). \tag{4.46}$$

Rappelons que $\gamma_{p+1}(a \wedge e)$ est une p-forme différentielle co-exacte vérifiant

$$\mathrm{d}\gamma_{p+1}(a \wedge e) + \eta_{p+1}(a \wedge e) = a \wedge e. \tag{4.47}$$

On a :

$$\lambda_{1,p+1}(N,h)\big\|\gamma_{p+1}(a \wedge e)\big\|_2^2 \leqslant \big\|\mathrm{d}\gamma_{p+1}(a \wedge e)\big\|_2^2 \leqslant C(N,h)\|a\|_2^2\|e\|_2^2. \tag{4.48}$$

Ainsi, on obtient en utilisant (4.46), (4.48)

$$\big\|\psi_a - \pi^* a \wedge \omega\big\|_2^2 \leqslant C\varepsilon^2 \|\pi^* a\|_2^2 \|e\|_2^2. \quad \square \tag{4.49}$$

Le lemme suivant dit que ξ_1 et ξ_2 sont L^2-orthogonaux et presque q-orthogonaux.

LEMME 4.50. – *Soient* $\psi_a \in \xi_1$, $\psi_\alpha \in \xi_2$. *On a* :
(i) $\langle \psi_a, \psi_\alpha \rangle = 0$,
(ii) $|q(\psi_a, \psi_\alpha)| \leqslant C(N,h)(\varepsilon\|e\|_2)^3 \|\pi^* a\|_2 \|\pi^* \alpha\|_2$.

Démonstration. – (i) On a :

$$\langle \psi_a, \psi_\alpha \rangle = -\varepsilon^2 \langle a, *\gamma_{n-p+1}(*\alpha \wedge e)\rangle_{\mathrm{L}^2(N,h)} + (-1)^p \varepsilon^2 \langle \gamma_{p+1}(a \wedge e), \alpha \rangle_{\mathrm{L}^2(N,h)}. \tag{4.51}$$

On conclut $\langle \psi_a, \psi_\alpha \rangle = 0$ car a, α sont harmoniques et $\gamma_{n-p+1}(*\alpha \wedge e)$, $\gamma_{p+1}(a \wedge e)$ sont co-exactes.

(ii) À l'aide du lemme 4.43, on obtient

$$\begin{aligned} q(\psi_a, \psi_\alpha) &= \varepsilon^3 \big\langle \pi^* \eta_{p+1}(a \wedge e), (-1)^p \pi^* (*\gamma_{n-p+2}(*\alpha \wedge e) \wedge e\big\rangle_{\mathrm{L}^2(M,g_\varepsilon)} \\ &\quad + (-1)^{(n+1)p+np} \varepsilon^3 \big\langle \pi^* \big(* (*\gamma_{p+1}(a \wedge e) \wedge e)\big), \pi^* \big(* \eta_{n-p+2}(*\alpha \wedge e)\big)\big\rangle_{\mathrm{L}^2(M,g_\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwartz, (4.48) et [19], on déduit

$$|q(\psi_a, \psi_\alpha)| \leqslant C(N,h)\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^3 \|\pi^* a\|_2 \|\psi^* \alpha\|_2. \quad \square \tag{4.53}$$

LEMME 4.54. – *Soit* $\psi = \pi^* u + \pi^* v \wedge \omega \in \Omega_0^p(M)$. *Alors,*

$$\big\|\pi^*(\delta v)\big\|_2 \leqslant C(N,h)\varepsilon\|e\|_2\|\pi^* u\|_2 + \|\delta\psi\|_2.$$

Démonstration. – À l'aide du lemme 4.7 on a :

$$\|\delta\psi\|_2^2 = \big\|\pi^*(\delta u)\big\|_2^2 + \big\|\pi^*\big(\delta v + (-1)^{np}\varepsilon * (*u \wedge e)\big)\big\|_2^2. \tag{4.55}$$

Ainsi, on obtient

$$\big\|\pi^*\big(\delta v + (-1)^{np}\varepsilon * (*u \wedge e)\big)\big\|_2 \leqslant \|\delta\psi\|_2; \tag{4.56}$$

d'où

$$\big\|\pi^*(\delta v)\big\|_2 \leqslant \|\delta\psi\|_2 + \varepsilon\big\|\pi^*\big(*\big(*u \wedge e\big)\big)\big\|_2. \tag{4.57}$$

En utilisant [19] et (4.12), on obtient l'inégalité du lemme 4.54. □

Nous sommes à présent en mesure d'appliquer le lemme 4.19 au Laplacien agissant sur les p-formes différentielles $\Omega_0^p(M, g_\varepsilon)$ et à l'espace test ξ_0. Nous noterons pour simplifier

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \tag{4.58}$$

les valeurs propres du Laplacien agissant sur $\Omega_0^p(M)$ et

$$0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_\ell \tag{4.59}$$

les valeurs propres de la forme quadratique q restreinte au sous-espace ξ_0.

Les valeurs propres λ_0 et μ_0 sont de multiplicité

$$\mathrm{b}_p(M) = \mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) - \ell,$$

où $\ell = \dim \xi_1 \oplus \xi_2 = m_p$.

D'après le théorème 4.1, on a

$$\lambda_{\ell+1} \geqslant C(N,h) > 0, \tag{4.60}$$

et le nombre de valeurs propres λ_i dans l'intervalle $[0, C(N,h)]$ est égal à $\mathrm{b}_p(N) + \mathrm{b}_{p-1}(N) = \dim \xi_0$. La condition (i) du lemme 4.19 est donc vérifiée.

Vérifions maintenant la condition (ii) du lemme 4.19, i.e. pour tout $\psi_0 \in \xi_0$ et $\psi \in \Omega_0^p(M)$:

$$\big|q(\psi_0, \psi)\big| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\psi_0\|_2\big(\|\psi\|_2^2 + q(\psi)\big)^{1/2}. \tag{4.61}$$

Si $\psi_0 \in \mathcal{H}^p(M,g)$, $q(\psi_0,\psi) = 0$ et (4.61) est vérifiée. Il reste donc à montrer (4.61) pour $\psi_0 \in \xi_1 \oplus \xi_2$. Grâce au lemme 4.50, il suffit de vérifier (4.61) pour $\psi_0 \in \xi_1$ ou $\psi_0 \in \xi_2$. On va vérifier (4.61) pour $\psi_0 \in \xi_1$, le cas $\psi_0 \in \xi_2$ est semblable.

Soient $\psi_a \in \xi_1$ et $\psi = \pi^*u + \pi^*v \wedge \omega \in \Omega_0^p(M)$.

On a d'après 4.43 et 4.7,

$$\int_M \langle \mathrm{d}\psi_a, \mathrm{d}\psi\rangle\, \mathrm{d}v_{g_\varepsilon} = (-1)^p\varepsilon^2 \int_M \big\langle \pi^*(\eta_{p+1}(a \wedge e),\ \pi^*(v \wedge e)\big\rangle\, \mathrm{d}v_{g_\varepsilon}. \tag{4.62}$$

En remarquant que $\|\eta_{p+1}(a \wedge e)\|_2 \leqslant \|a \wedge e\|_2$, on obtient

$$\left|\int_M \langle \mathrm{d}\psi_a, \mathrm{d}\psi\rangle\, \mathrm{d}v_{g_\varepsilon}\right| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\pi^*a\|_2\|\pi^*v\|_2 \tag{4.63}$$

et donc

$$\left|\int_M \langle d\psi_a, d\psi\rangle \, dv_{g_\varepsilon}\right| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\psi_a\|_2\|\psi\|_2. \tag{4.64}$$

On a également d'après 4.43 et 4.7,

$$\int_M \langle \delta\psi_a, \delta\psi\rangle \, dv_{g_\varepsilon} = (-1)^{(n+1)p}\varepsilon^2 \int_M \Big\langle \pi^*\big({*}\,({*}\gamma_{p+1}(a\wedge e)\wedge e)\big), \pi^*\big(\delta v + (-1)^{np}\varepsilon \,{*}\,({*}u\wedge e)\big)\Big\rangle \, dv_{g_\varepsilon}. \tag{4.65}$$

On en déduit en utilisant (4.12) et [19],

$$\left|\int_M \langle \delta\psi_a, \delta\psi\rangle \, dv_{g_\varepsilon}\right| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\pi^* a\|_2\big(\|\pi^*(\delta v)\|_2 + \varepsilon\|\pi^*(u)\|_2\|e\|_2\big). \tag{4.66}$$

À l'aide du lemme 4.54, on en déduit

$$\left|\int_M \langle \delta\psi_a, \delta\psi\rangle \, dv_{g_\varepsilon}\right| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\psi_a\|_2\big(C(N,h)\varepsilon\|e\|_2\|\psi\|_2 + q(\psi)^{1/2}\big), \tag{4.67}$$

d'où, lorsque $\varepsilon\|e\|_2$ est assez petit,

$$\left|\int_M \langle \delta\psi_a, \delta\psi\rangle \, dv_{g_\varepsilon}\right| \leqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\psi_a\|_2\big(\|\psi\|_2^2 + q(\psi)\big)^{1/2}. \tag{4.68}$$

La condition (ii) du lemme 4.19, i.e. (4.61) découle de (4.64) et (4.68).
Le lemme 4.19 donne alors

$$\mu_i - C(N,h)\|e\|_2^4\varepsilon^4 \leqslant \lambda_i \leqslant \mu_i, \quad i = 0,\ldots,\ell. \tag{4.69}$$

Il reste à estimer μ_i, i.e. le spectre de q restreint à ξ_0.

Rappelons que $\mu_0 = \lambda_0 = 0$ de multiplicité égale à $\dim \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$. Il faut donc estimer μ_i, $i = 1,\ldots,\ell$, c'est-à-dire les $\ell = m_p$ dernières valeurs propres de q restreinte à ξ_0. La majoration des μ_i, $i = 1,\ldots,\ell = m_p$, découle du théorème 4.1, et la minoration va découler du principe du max-min et du lemme suivant :

LEMME 4.70. – *Soit $F = \xi_1 \oplus \zeta_2$. Pour $\psi \in F$, on a $q(\psi) \geqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\psi\|_2^2$, où $C(N,h)$ est une constante positive.*

Démonstration. – Grâce au lemme 4.50, il suffit de montrer 4.70 lorsque $\psi = \psi_a \in \xi_1$ ou $\psi = \psi_\alpha \in \xi_2$. On le fait pour ψ_a, le cas de ψ_α est similaire.

D'après le lemme 4.43, on a

$$q(\psi_a) = \varepsilon^2\big\|\pi^*\big(\eta_{p+1}(a\wedge e)\big)\big\|_2^2 + \varepsilon^4\big\|\pi^*\big({*}\,({*}\gamma_{p+1}(a\wedge e)\wedge e)\big)\big\|_2^2. \tag{4.71}$$

Par ailleurs, on a

$$\varepsilon^4\big\|\pi^*\big({*}\,({*}\gamma_{p+1}(a\wedge e)\wedge e)\big)\big\|_2^2 \leqslant C(N,h)\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^4\|\pi^* a\|_2^2, \tag{4.72}$$

et comme $\|\pi^* a\|_2 \leqslant C(N,h)\|\psi_a\|_2$ lorsque $\varepsilon\|e\|_2$ est assez petit d'après le lemme 4.44, on déduit de (4.72),

$$\varepsilon^4 \big\|\pi^*\big(*(*\gamma_{p+1}(a\wedge e)\wedge e)\big)\big\|_2^2 \leqslant C(N,h)\big(\varepsilon\|e\|_2\big)^4\|\psi_a\|_2^2. \tag{4.73}$$

Comme $\dim \mathrm{H}^2(N,\mathbb{R}) = 1$, e est multiple d'un générateur e_0 de $\mathrm{H}^2(N,\mathbb{Z})$, donc $a\wedge e = ka\wedge e_0$.

De plus, pour tout $a \in (\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1})^\perp$, on a

$$\eta_{p+1}(a\wedge e) = k\eta_{p+1}(a\wedge e_0) \neq 0 \tag{4.74}$$

et par compacité, il existe $C = C(N,h) > 0$ telle que

$$\big\|\eta_{p+1}(a\wedge e_0)\big\|_2 \geqslant C(N,h)\|a\|_2, \tag{4.75}$$

et

$$\big\|\eta_{p+1}(a\wedge e)\big\|_2 \geqslant C(N,h)\|a\|_2\|e\|_2. \tag{4.76}$$

On en déduit

$$\varepsilon^2\big\|\pi^*\big(\eta_{p+1}(a\wedge e)\big)\big\|_2^2 \geqslant C(N,h)\varepsilon^2\|\pi^* a\|_2^2\|e\|_2^2. \tag{4.77}$$

Le lemme 4.44 entraîne alors

$$\varepsilon^2\big\|\pi^*\big(\eta_{p+1}(a\wedge e)\big)\big\|_2^2 \geqslant C(N,h)\varepsilon^2\|\psi_a\|_2^2\|e\|_2^2 \tag{4.78}$$

et on déduit de (4.71), (4.78) et (4.73)

$$q(\psi_a) \geqslant C(N,h)\varepsilon^2\|e\|_2^2\|\psi_a\|_2^2 - C(N,h)\varepsilon^4\|e\|_2^4\|\psi_a\|_2^2, \tag{4.79}$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.70 et du théorème 4.3. □

5. Formule asymptotique et exemple

Soit $\mathrm{S}^1 \to (M^{n+1}, g_{\varepsilon_0}) \xrightarrow{\pi} (N^n, h)$ un fibré riemannien, où (g_{ε_0}, h) est un couple de métriques adaptées (*cf.* définition 2.1). On peut choisir par exemple $\varepsilon_0 = 1$. On note e le représentant harmonique de la classe d'Euler de ce fibré. On suppose $e \neq 0$.

On considère la famille de métriques g_ε sur M^{n+1} définie par :

$$g_\varepsilon = \varepsilon^2 g_T + g_{T^\perp}, \tag{5.1}$$

où g_T est la restriction de g_{ε_0} aux fibres et $g_{T^\perp}$ la restriction de g_{ε_0} aux directions perpendiculaires aux fibres.

On fixe p, $1 \leqslant p \leqslant n = \dim N$, et on considère les formes quadratiques q_1 et q_2 définies sur $F_1 = (\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1})^\perp$ et $F_2 = (\operatorname{Ker} \Lambda_{n-p})^\perp$ respectivement par :

$$\begin{cases} q_1(a) = \|\eta_{p+1}(a\wedge e)\|_2^2, & a \in F_1,\\ q_2(\alpha) = \|\eta_{n-p+2}(\alpha\wedge e)\|_2^2, & \alpha \in F_2. \end{cases} \tag{5.2}$$

Soit $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \leqslant \nu_\ell$, $\ell = m_p$, les valeurs propres de la forme quadratique $q_1 \oplus q_2$ définie sur $F_1 \oplus F_2$.

Nous allons prouver le théorème 1.27 que nous rappelons à présent.

THÉORÈME 5.3. – *Sous les hypothèses précédentes, les ℓ premières valeurs propres non nulles*

$$0 < \lambda_{1,p}(M, g_\varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{\ell,p}(M, g_\varepsilon)$$

vérifient

$$\lambda_{j,p}(M, g_\varepsilon) = \varepsilon^2 \nu_j + \mathrm{o}(\varepsilon^2)$$

lorsque ε tend vers 0, $j = 1, 2, \ldots, \ell = m_p$.

Remarque 5.4. – L'existence d'une forme quadratique Q définie sur un espace de dimension $\ell = m_p$ dont les valeurs propres $\{\nu_i\}_{i=1}^{\ell}$ vérifient la formule asymptotique du théorème 5.3 peut se déduire de [13,14,11]. Dans le théorème 5.3, nous explicitons ν_j en fonction de la classe d'Euler e du fibré.

Démonstration du théorème 5.3. – La preuve est identique à celle du théorème 4.3 et consiste à appliquer le lemme 4.19 au Laplacien agissant sur $\Omega_0^p(M)$ et à l'espace test $\xi_0 = \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon) \oplus \xi_1 \oplus \xi_2$ défini en (4.41), (4.42). On obtient encore comme en (4.69),

$$\mu_j - C(N, h)\big(\|e\|_2\, \varepsilon\big)^4 \leqslant \lambda_{j,p}(M, g_\varepsilon) \leqslant \mu_j, \quad j = 0, 1, \ldots, \ell, \tag{5.5}$$

où $\mu_0, \ldots, \mu_\ell$ désignent les valeurs propres de la restriction de q à ξ_0. Comme, cette fois, la classe d'Euler e est fixée on obtient

$$\mu_j - C'\varepsilon^4 \leqslant \lambda_{j,p}(M, g_\varepsilon) \leqslant \mu_j, \quad j = 0, \ldots, \ell. \tag{5.6}$$

Le théorème 5.3 découlera alors du :

LEMME 5.7. – *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\mu_j = \nu_j \varepsilon^2 + \mathrm{o}(\varepsilon^2)$$

lorsque ε tend vers 0, $j = 1, \ldots, \ell = m_p$.

Démonstration. – Comme $\mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$ est l'espace propre de q/ξ_0 associé à la valeur propre $\mu_0 = 0$, les espaces propres de q/ξ_0 associés aux valeurs propres $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_\ell$ sont contenus dans $\mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)^\perp$. Par ailleurs, $\xi_1 \oplus \xi_2$ est asymptotiquement contenu dans $\mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)^\perp$ lorsque ε tend vers 0 à cause du :

LEMME 5.8. – *Soient $\psi_a \in \xi_1$, $\psi_\alpha \in \xi_2$, $\psi \in \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$. On a :*
(i) $|\langle \psi_a, \psi\rangle_{L^2(M, g_\varepsilon)}| \leqslant C(N, h)\varepsilon \|\psi_a\|_2 \|\psi\|_2 \|e\|_2$;
(ii) $|\langle \psi_\alpha, \psi\rangle|_{L^2(M, g_\varepsilon)}| \leqslant C(N, h)\varepsilon \|\psi_\alpha\|_2 \|\psi\|_2 \|e\|_2$.

Il découle du lemme 5.8 que la projection orthogonale $\xi_1 \oplus \xi_2 \to (\mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon))^\perp$ est une quasi-isométrie de rapport $(1 + \mathrm{o}(\varepsilon))$ lorsque ε tend vers 0. De plus, cette projection est une isométrie pour la forme quadratique q et donc, lorsque ε tend vers 0, on a

$$\rho_j\big(1 - \mathrm{o}(\varepsilon)\big) \leqslant \mu_j \leqslant \rho_j\big(1 + \mathrm{o}(\varepsilon)\big), \quad j = 1, \ldots, \ell = m_p, \tag{5.9}$$

où $\{\rho_j\}_{j=1}^{\ell}$ désignent les valeurs propres de q définie sur $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Enfin, les valeurs propres de $q/\xi_1 \oplus \xi_2$ vérifient

$$\rho_j = \nu_j \varepsilon^2 + \mathrm{o}(\varepsilon^2) \tag{5.10}$$

car nous avons d'après le lemme 4.43, pour $\psi_a \in \xi_1$, $\psi_\alpha \in \xi_2$:

$$\begin{aligned} q(\psi_a) &= \varepsilon^2 \big\|\pi^* \eta_{p+1}(a \wedge e)\big\|_2^2 + \varepsilon^4 \big\|\pi^*\big(* (*\gamma_{p+1}(a \wedge e) \wedge e)\big)\big\|_2^2, \\ q(\psi_\alpha) &= \varepsilon^2 \big\|\pi^* \eta_{n-p+2}(*\alpha \wedge e)\big\|_2^2 + \varepsilon^4 \big\|\pi^*\big(* \gamma_{n-p+2}(*\alpha \wedge e) \wedge e\big)\big\|_2^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

et ξ_1 et ξ_2 sont ε^3-presque orthogonaux (*cf.* lemme 4.50).

Démonstration du lemme 5.8. – Soient $\psi_a \in \xi_1$ et $\psi \in \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$. On a (*cf.* (4.40)) :

$$\psi_a = \pi^* a \wedge \omega + (-1)^p \varepsilon \pi^*\big(\gamma_{p+1}(a \wedge e)\big), \tag{5.12}$$

où $a \in (\mathrm{Ker}\, \Lambda_{p-1})^\perp$.

On pose pour $\psi \in \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$,

$$\psi = \pi^* u + \pi^* v \wedge \omega. \tag{5.13}$$

Rappelons que d'après l'exactitude de la suite de Gysin, $v \in \mathrm{Ker}\, \Lambda_{p-1}$. On a

$$\int_M \langle \psi_a, \psi\rangle \,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} = \int_M \langle \pi^* a, \pi^* v\rangle \,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} + (-1)^p \varepsilon \int_M \big\langle \pi^*\big(\gamma_{p+1}(a \wedge e)\big), \pi^* u\big\rangle \,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon}. \tag{5.14}$$

Comme $a \in (\mathrm{Ker}\, \Lambda_{p-1})^\perp$ et $v \in \mathrm{Ker}\, \Lambda_{p-1}$, on obtient

$$\Big| \int_M \langle \psi_a, \psi\rangle \,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} \Big| \leqslant \varepsilon \big\|\gamma_{p+1}(a \wedge e)\big\|_2 \|\pi^* u\|_2, \tag{5.15}$$

d'où l'on déduit, en utilisant [19] et le lemme 4.44,

$$\Big| \int_M \langle \psi_a, \psi\rangle \,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} \Big| \leqslant C(N, h) \varepsilon \|e\|_2 \|\psi_a\|_2 \|\psi\|_2. \tag{5.16}$$

De même, on prouve que si $\psi_\alpha \in \xi_2$, $\psi \in \mathcal{H}^p(M, g_\varepsilon)$,

$$\Big| \int_M \langle \psi_\alpha, \psi\rangle \,\mathrm{d}v_{g_\varepsilon} \Big| \leqslant C(N, h) \varepsilon \|e\|_2 \|\psi_\alpha\|_2 \|\varphi\|_2. \tag{5.17}$$

Ceci achève la preuve du lemme 5.8 et du théorème 5.2. □

L'exemple suivant a pour but de montrer que l'hypothèse $\dim \mathrm{H}^2(N, \mathbb{R}) = 1$ dans le théorème 1.21 est nécessaire pour assurer l'uniformité de la minoration.

Exemple 5.18. – On considère une suite de fibrés riemanniens

$$\mathrm{S}^1 \longrightarrow \big(M_k^{n+1}, g_k\big) \xrightarrow{\pi_k} \big(N^n, h\big), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

où (g_k, h) est un couple de métriques adaptées (*cf.* définition 2.1). On note ω_k la 1-forme verticale par rapport à g_k sur (M_k^{n+1}, g_k) telle que $|\omega_k| = 1$, où $|\omega_k|$ est la norme de ω_k par rapport à g_k. On note également $e_k \in \mathcal{H}^2(N,h)$ le représentant harmonique de la classe d'Euler du fibré $\mathrm{S}^1 \to M_k^{n+1} \to N$.

Dans la suite, on fixe p, $2 \leqslant p \leqslant n-2$. On note

$$\Lambda_p^k : \mathcal{H}^p(N,h) \to \mathcal{H}^{p+2}(N,h)$$

l'application définie par $\Lambda_p^k(a) = \eta_{p+2}(a \wedge e_k)$ (*cf.* 4.31).

Pour $e \in \mathrm{H}^2(N,\mathbb{R})$, on note $\Lambda_p^e : \mathcal{H}^p(N,h) \to \mathcal{H}^{p+2}(N,h)$ l'application, définie par :

$$\Lambda_p^e(a) = \eta_{p+2}(a \wedge e). \tag{5.19}$$

Supposons que cette suite $\mathrm{S}^1 \to (M_k, g_k) \to (N,h)$ de fibrés vérifie les hypothèses $(\mathrm{H}_1), \ldots, (\mathrm{H}_5)$ suivantes :

$$\mathrm{d}\omega_k = \varepsilon_k \pi^*(e_k) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \tag{H_1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k \|e_k\|_2 = 0, \tag{H_2}$$

$$\text{il existe } e \in \mathcal{H}^2(N,h) \text{ telle que} \quad \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{e_k}{\|e_k\|_2} - e \right\|_2 = 0, \tag{H_3}$$

$$\dim \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^k = q, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{H_4}$$

$$\dim \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^e = q+1. \tag{H_5}$$

Nous allons montrer que sous les hypothèses $(\mathrm{H}_1), \ldots, (\mathrm{H}_5)$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{1,p}(M_k, g_k)}{\varepsilon_k^2 \|e_k\|_2^2} = 0. \tag{5.20}$$

Intuitivement, $\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^k$ tend à gagner une dimension lorsque k tend vers $+\infty$. Cela produit une valeur propre non nulle satisfaisant (5.20).

Démonstration de (5.20). – On considère la suite $\{\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^k\}_{k=1}^\infty$ de sous-espaces de $\mathcal{H}^{p-1}(N,h)$. Une sous-suite que l'on écrit encore $\{\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^k\}_{k=1}^\infty$ converge vers un sous-espace F de $\mathcal{H}^{p-1}(N,h)$. On a $\dim F = \dim \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^k = q$ d'après (H_4). Par continuité, nous avons

$$F \subset \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^e. \tag{5.21}$$

Comme $\dim \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^e = q+1$ (*cf.* (H_5)), il existe $b \in \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^e$ et $b \perp F$. On considère la p-forme différentielle ψ_k sur (M_k, g_k)

$$\psi_k = \pi_k^*(b) \wedge \omega_k + (-1)^p \varepsilon_k \pi_b^*\big(\gamma_{p+1}(b \wedge e_k)\big). \tag{5.22}$$

De la même façon que dans la preuve du lemme 5.8, on obtient en utilisant le fait que les sous-espaces $\operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^{k}$ convergent vers F et que $b \perp F$, pour tout $\psi \in \mathcal{H}^p(M_k, g_k)$

$$|\langle \psi_k, \psi \rangle_{\mathrm{L}^2(M_k, g_k)}| \leqslant C' \varepsilon_k \|\psi_k\|_2 \|\psi\|_2. \tag{5.23}$$

D'autre part, nous avons sur (M_k, g_k)

$$\begin{aligned} q(\psi_k) &= \varepsilon_k^2 \left\| \pi_k^*\big(\eta_{p+1}(b \wedge e_k)\big)\right\|_2^2 + \varepsilon_k^4 \left\| \pi_k^*\big(* (* \gamma_{p+1}(b \wedge e_k) \wedge e_k)\big)\right\|_2^2, \\ \|\psi_k\|_2^2 &= \|\pi_k^* b\|_2^2 + \varepsilon_k^2 \left\| \pi_k^*\big(\gamma_{p+1}(b \wedge e_k)\big)\right\|_2^2. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Comme $b \in \operatorname{Ker} \Lambda_{p-1}^{e}$, on a $\eta_{p+1}(b \wedge e) = 0$ et ainsi

$$\pi_k^*\big(\eta_{p+1}(b \wedge e_k)\big) = \|e_k\|_2 \pi_k^* \left(\eta_{p+1} \left(b \wedge \left(\frac{e_k}{\|e_k\|_2} - e \right) \right) \right). \tag{5.25}$$

On déduit de (5.24) et (5.25) que le quotient de Rayleigh de ψ_k sur (M_k, g_k) vérifie

$$R(\psi_k) = \frac{q(\psi_k)}{\|\psi_k\|_2^2} \leqslant \varepsilon_k^2 \|e_k\|_2^2 r(\varepsilon_k), \tag{5.26}$$

avec $\lim_{\varepsilon_k \to 0} r(\varepsilon_k) = 0$.

De (5.23) et (5.26) on déduit que

$$\lambda_{1,p}(M_k, g_k) \leqslant C' \big(\varepsilon_k \|e_k\|_2\big)^2 r(\varepsilon_k), \tag{5.27}$$

où $\lim_{k \to \infty} r(\varepsilon_k) = 0$, ce qui achève la preuve de (5.20).

Nous donnons à présent un exemple de variété (N, h) et d'une suite de fibrés $\mathrm{S}^1 \to (M_k, g_k) \to (N, h)$ vérifiant les hypothèses (H_1), ..., (H_5).

Soit N une variété compacte. On suppose que $\mathrm{H}^4(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Notons $i : \mathrm{H}_2(N, \mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_2(N, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ la forme d'intersection définie par $i(a, b) = \langle a \cup b, u \rangle$, où $a \cup b$ désigne le cup-produit de a et b et u un générateur de $\mathrm{H}^4(N, \mathbb{Z})$.

LEMME 5.28. – *Il existe une variété compacte N telle que* $\mathrm{H}^4(N, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_2(N, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^3$ *et la forme d'intersection*

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. – On considère le CW-complexe $P = \mathbb{CP}^2 \vee \mathrm{S}^2 \vee \mathrm{S}^2$, où $\vee$ désigne le bouquet. On a

$$\mathrm{H}^2(P, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^3, \qquad \mathrm{H}^4(P, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}. \tag{5.29}$$

Soient a, b, c les générateurs de $\mathrm{H}^2(P, \mathbb{Z})$ tels que a est un générateur de $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^2\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ et b, c engendrent chacun des deux facteurs $\mathrm{H}^2(\mathrm{S}^2, \mathbb{Z})$. On voit aisément que $a \cup b = a \cup c = b \cup c = 0$ et que $a \cup a$ est un générateur de $\mathrm{H}^4(P, \mathbb{Z})$. On en déduit que la forme d'intersection i de P s'écrit dans la base (a, b, c) comme dans le lemme 5.28. Nous construisons à présent une variété N compacte, homotopiquement équivalente à P, ce qui établira le lemme 5.28.

Le CW-complexe P peut se plonger dans $\mathbb{R}^\ell$ pour ℓ assez grand. On considère un ε-voisinage tubulaire P_ε de $P \subset \mathbb{R}^\ell$ pour ε assez petit, et on pose N égal au double de P_ε,

$$N = P_\varepsilon \bigcup_{\partial P_\varepsilon} P_\varepsilon. \tag{5.30}$$

On a

$$\mathrm{H}_k(N,\mathbb{Z}) \approx \mathrm{H}_k(P_\varepsilon,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}_k(P_\varepsilon,\partial P_\varepsilon,\mathbb{Z}), \tag{5.31}$$

et par dualité,

$$\mathrm{H}_k(N,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}_k(P_\varepsilon,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}_{\ell-k}(P_\varepsilon,\mathbb{Z}). \tag{5.32}$$

Comme P est un retract de P_ε, on a $\mathrm{H}_{\ell-k}(P_\varepsilon,\mathbb{Z}) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant 4$ lorsque ℓ est assez grand, et on obtient ainsi

$$\mathrm{H}_k(N,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}_k(P_\varepsilon,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}_k(P,\mathbb{Z}) \tag{5.33}$$

et la forme d'intersection i de N vérifie la relation

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui achève la preuve du lemme 5.28.

Soit N une variété compacte telle que $\mathrm{H}_2(N,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^3$, $\mathrm{H}_4(N,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et forme d'intersection

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dans une base (a,b,c) de $\mathrm{H}_2(N,\mathbb{Z})$.

On considère $\rho_k = a + kc \in \mathrm{H}_2(N,\mathbb{Z}),\ k = 1, 2, \ldots$. Soit h une métrique riemannienne sur N. On note e_k, u, v, w les 2-formes harmoniques associées à ρ_k, a, b, c par dualité. On a

$$e_k = u + kw. \tag{5.34}$$

On considère le S^1-fibré $\mathrm{S}^1 \to M_k \to N$ dont le représentant harmonique de la classe d'Euler est e_k, et on choisit un couple (g_k, h) de métriques adaptées sur M_k, tel que

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k \|e_k\|_2 = 0, \tag{5.35}$$

où ε_k désigne la longueur des fibres (*cf.* définition 2.1). Les propriétés (H_1) et (H_2) sont vérifiées par construction. Par ailleurs, on voit d'après (5.34) que

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{e_k}{\|e_k\|_2} - \frac{w}{\|w\|_2} \right\|_2 = 0, \tag{5.36}$$

ce qui correspond à l'hypothèse (H_3). Par ailleurs, comme la forme d'intersection i de N est donnée par la matrice

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base a, b, c, on voit que

$$\text{(5.37)}\qquad \begin{aligned} &\operatorname{Ker} \Lambda_2^k = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w,\\ &\operatorname{Ker} \Lambda_2^e = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w, \end{aligned}$$

où $e = w/\|w\|_2$, ce qui correspond aux hypothèses (H_4) et (H_5). □

6. Annexe

Nous donnons une preuve du théorème 2.5 que nous rappelons. Soient M, N deux variétés compactes de dimensions $n+1$ et n respectivement.

THÉORÈME A.1. – *Soit (N,h) une variété riemannienne compacte orientable. Il existe des constantes positives δ_0, τ, K_0, r_0 qui dépendent de n, a, d, (N,h) telles que pour tout $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$ vérifiant $\delta =: \delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta_0$, il existe une fibration principale $\mathrm{S}^1 \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ et un couple de métriques adaptées (g_δ, h_δ) vérifiant :*

$$\text{(a)}\qquad \tau^{-1} g_\delta \leqslant g \leqslant \tau g_\delta, \qquad \tau^{-1} h_\delta \leqslant h \leqslant \tau h_\delta,$$

$$\text{(b)}\qquad \left|K(g_\delta)\right| \leqslant K_0, \qquad \left|K(h_\delta)\right| \leqslant K_0,$$

$$\text{(c)}\qquad r(N, h_\delta) \geqslant r_0,$$

où $r(N,h_\delta)$ désigne le rayon d'injectivité de (N,h_δ) et K la courbure sectionnelle.

Rappelons qu'un couple de métriques (g_δ, h_δ) est adapté à la fibration principale $\mathrm{S}^1 \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ si

A.2. –
- (i) $\pi : (M, g_\delta) \to (N, h_\delta)$ *est une submersion riemannienne* ;
- (ii) *les fibres sont des géodésiques de longueur* δ ;
- (iii) *l'action de* S^1 *sur* (M, g_δ) *est isométrique* ;
- (iv) *si* ω *est la* 1*-forme verticale de norme* 1 *associée à l'action de* S^1 *sur* (M, g_δ)*, on a* $\mathrm{d}\omega = \varepsilon \pi^*(\mathrm{e}(M))$*, où* $\mathrm{e}(M)$ *est le représentant harmonique de la classe d'Euler du fibré.*

Remarque. – En fait, le théorème A.1 est vrai en supposant au départ seulement que $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$, i.e. sans supposer que M est un S^1-fibré au-dessus de N, cette propriété étant une conséquence des autres hypothèses du théorème (*cf.* théorème principal de [15]).

Dans la suite, le symbole ∇^i désignera la dérivée covariante appliquée i fois.

Définition A.3 ([4], 1.11.1, 2.5.2). –
- (i) Soit $A = (A_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de nombres positifs. Une variété riemannienne (M,g) est A_i-régulière si le tenseur de courbure R^g de g vérifie $\|\nabla^i R^g\| \leqslant A_i$ pour tout i.
- (ii) Soit $B = (B_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de nombres positifs. Une application $f : (M,g) \to (N,h)$ est B_i-régulière si $\|\nabla^i f\| \leqslant B_i$.

Définition A.4 ([4], 2.5.1). – Soit $c \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : (M,g) \to (N,h)$ est une c-presque submersion riemannienne si pour tout $p \in M$, $X \in \mathrm{T}_p M$, X g-orthogonal à la fibre passant par p, on a

$$\mathrm{e}^{-c} \left|\mathrm{d}f(p)(X)\right|_h \leqslant |X|_g \leqslant \mathrm{e}^{c} \left|\mathrm{d}f(p)(X)\right|_h.$$

Le théorème suivant est contenu dans le théorème principal de [15] et le théorème 2.6 de [4].

THÉORÈME A.5. – *Soit (N,h) une variété compacte orientable A-régulière, où $A=(A_i)_{i=1}^{\infty}$. Il existe $\delta_0 =: \delta_0(n,a,d,A,(N,h)) > 0$ telle que pour $(M,g) \in \mathcal{M}(n+1,a,d)$, (M,g) A-régulière, telle que $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta_0$, il existe une fibration en cercle $\pi : M \to N$ telle que* :

(i) *π est une $C(n,A)\delta_0$-presque submersion riemannienne* ;
(ii) *π est $C_i(n,A,\delta_0)$-régulière, $i=1,2,\ldots$* ;
(iii) *la deuxième forme fondamentale* II *des fibres vérifie* $\|\mathrm{II}\| \leqslant C(n,A)$;
(iv) *les fibres sont de longueur inférieure à $C(n,A)\delta$,*

où $C(n,A)$ (resp. $C_i(n,A,\delta_0)$) sont des constantes positives qui dépendent de n, A (resp. n, A, δ_0).

Démonstration. – Le théorème principal de [15] donne l'existence d'un $\delta =: \delta(n,a,d,(N,h))$ tel que si $\delta_{\mathcal{H}}((M,g),(N,h)) \leqslant \delta$, alors il existe une fibration en cercles $\pi : M \to N$ dont les fibres sont de longueur inférieure à $C(n,a,d)\delta$ (*cf.* [15], lemme 5.1).

Comme M et N sont orientables, la fibration $\pi : M \to N$ est une fibration principale. Le théorème A.5 est alors une partie du théorème 2.6 de [4] appliqué à $\pi : M \to N$, $G = S^1$ et $W = M$ (puisque M est sans bord). □

Il suffit de montrer le théorème A.1 dans le cas où (M,g) et (N,h) sont A-régulières en vertu du théorème d'approximation suivant, dû à U. Abresch (*cf.* [4], théorème 1.12).

THÉORÈME A.6. – *Soit $\mathcal{M}(n,a)$ l'ensemble des variétés riemanniennes (M,g) complètes de dimension n avec $|K(M,g)| \leqslant a$. Pour tout $\kappa > 0$ donné, il existe un opérateur de « lissage » $g \to S_\kappa(g) = \overline{g}$ tel que* :

(i) $e^{-\kappa} g \leqslant \overline{g} \leqslant e^{\kappa} g$;
(ii) $|\nabla - \overline{\nabla}|_g \leqslant \kappa$ (∇, $\overline{\nabla}$ *sont les connexions de Levi-Civita de g, $\overline{g}$*) ;
(iii) $|\overline{\nabla}^i R^{\overline{g}}| \leqslant A_i(n,\kappa)$, *où $R^{\overline{g}}$ est le tenseur de courbure de $\overline{g}$ et $A_i(n,\kappa)$ des constantes ne dépendant que de n et κ.*

La preuve du théorème A.1 comporte deux parties. Dans la première partie, nous montrons l'existence d'une fibration $\pi : M \to N$ et d'un couple de métriques (g_δ, h_δ) sur M et N vérifiant les propriétés (a), (b), (c) et les propriétés (i), (ii) (iii) de la définition A.2. La preuve de cette partie repose essentiellement sur le théorème A.5 de J. Cheeger, K. Fukaya et M. Gromov et nous n'en donnons que les grandes lignes. Dans la seconde partie, nous prouvons que l'on peut modifier les métriques (g_δ, h_δ) afin d'obtenir également la propriété (iv) de la définition A.2.

A.7. Construction de $(\tilde{g}_\delta, \tilde{h}_\delta)$ vérifiant les propriétés (a), (b), (c) du théorème A.1 et (i), (ii), (iii) de la définition A.2

On choisit δ_0 comme dans le théorème A.5. Nous avons alors une fibration $\pi : M \to N$ vérifiant les propriétés (i)–(iv) du théorème A.5. À l'aide de cette fibration nous allons construire une action $(\phi_t)_{t\in S^1}$ de S^1 sur M dont les orbites sont les fibres de π et on considère la métrique définie par (*cf.* [4], 4.8),

$$\bar{g} = \int_{S^1} \phi_t^* g \, \mathrm{d}t. \tag{A.8}$$

Les propriétés de π permettent alors de modifier $\bar{g}$ et la métrique h sur N et d'obtenir les métriques $(\tilde{g}_\delta, \tilde{h}_\delta)$ sur M et N vérifiant les propriétés (a), (b), (c) du théorème A.1 et (i), (ii), (iii) de la définition A.2.

L'action $(\phi_t)_{t\in S^1}$ est le flot d'un champ de vecteurs X sur M défini de la façon suivante. On considère la 1-forme différentielle

$$\varpi = *(\pi^* \Omega_N), \tag{A.9}$$

où Ω_N est la forme volume de (N,h) et $*$ l'opérateur de Hodge de (M,g) et on note $\overline{X}$ le champ de vecteurs dual de ϖ pour la métrique g.

On pose

$$X = \frac{\overline{X}}{|\overline{X}|}. \tag{A.10}$$

On définit le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ sur M pour tout $p \in M$ par :

$$\widetilde{X}(p) = l(p)X(p), \tag{A.11}$$

où $l(p)$ est la longueur de la fibre passant par p.

Le flot de $\widetilde{X}$ définit alors une action $(\phi_t)_{t\in S^1}$ de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Cette action est isométrique pour la métrique $\bar{g}$ définie par (A.8).

On définit $\tilde{g}$ par :

$$\begin{cases} \tilde{g}_\delta(X,X) = (\delta/l(p))^2, & \\ \tilde{g}_\delta(Y,Y) = \bar{g}(Y,Y) & \text{si } \bar{g}(X,Y) = 0, \\ \tilde{g}_\delta(X,Y) = 0 & \text{si } \bar{g}(X,Y) = 0. \end{cases} \tag{A.12}$$

L'action $(\phi_t)_{t\in S^1}$ est isométrique pour $\tilde{g}_\delta$ et on définit $\tilde{h}_\delta$ sur N comme quotient de $\tilde{g}_\delta$ par cette action. Le couple $(\tilde{g}_\delta, \tilde{h}_\delta)$ vérifie par construction les propriétés (i), (ii), (iii) des métriques adaptées (*cf.* A.2).

Le fait que les métriques $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ vérifient les propriétés (a), (b), (c) du théorème A.1 découle du lemme suivant.

LEMME A.13. – *Soit $(\phi_t)_{t\in S^1}$ le flot de $\widetilde{X}$. Il existe $C_k = C_k(n,a,d,(N,h)) > 0$ tel que*

$$\|D^k\phi_t\| \leqslant C_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

où D^k désigne la dérivation covariante associée à g.

Démonstration. – Le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ s'écrit

$$\widetilde{X}(p) = l(p)X(p) = \frac{l(p)}{|\overline{X}(p)|}\,\overline{X}(p),$$

où $\overline{X} = *(\pi^*\Omega_N)$ (*cf.* A.9, A.10, A.11).

Il découle du théorème A.5(ii) que

$$|D^k\overline{X}| \leqslant C_k. \tag{A.14}$$

De plus, il découle aisément de A.12 et de A.5(ii) que

$$|D^k\mathrm{II}| \leqslant C_k, \tag{A.15}$$

où II est la deuxième forme fondamentale des fibres de sorte que

$$|D^k l| \leqslant C_k. \tag{A.16}$$

On déduit de ce qui précède que

$$\left|D^k \widetilde{X}\right| \leqslant C_k. \tag{A.17}$$

Des calculs directs et standard permettent alors d'en déduire que

$$\left|D^k \phi_t\right| \leqslant C_k. \quad \square$$

COROLLAIRE A.18. – *Les métriques* $\tilde{g}$ *et* $\tilde{h}$ *vérifient les hypothèses* (a), (b), (c) *du théorème* A.1.

A.19 *Construction de* (g_δ, h_δ). – D'après ce qui précède nous avons en particulier une submersion riemannienne à fibres géodésiques $\pi : (M, \tilde{g}_\delta) \to (N, \tilde{h}_\delta)$.

Nous posons $h_\delta = \tilde{h}_\delta$.

La métrique g_δ s'obtient à partir de $\tilde{g}_\delta$ en changeant l'horizontale. Pour cela, on considère le champ de vecteurs vertical X_δ sur M défini pour tout $p \in M$ par :

$$X_\delta(p) = \frac{l(p)}{\delta} X(p), \tag{A.20}$$

où X est défini en A.10. D'après A.9, X_δ est unitaire pour $\tilde{g}_\delta$,

$$\tilde{g}_\delta(X_\delta, X_\delta) = 1. \tag{A.21}$$

Soit ω_δ la 1-forme duale de X_δ. Nous avons (*cf.* [2], p. 72),

$$\mathrm{d}\omega_\delta = \pi^*(\delta e + \mathrm{d}\gamma), \tag{A.22}$$

où $e = \mathrm{e}(M)$ est la forme harmonique de $(N, \tilde{h}_\delta)$ représentant la classe d'Euler du S^1-fibré M au-dessus de N et γ est l'unique 1-forme coexacte de $(N, \tilde{h}_\delta)$ telle que

$$\pi^*(\mathrm{d}\gamma) = \omega_\delta - \delta\pi^*(e). \tag{A.23}$$

Soit g_δ la métrique sur M telle que $\pi : (M, g_\delta) \to (N, h_\delta)$ est une submersion riemannienne telle que $g_\delta = \tilde{g}_\delta$ dans la direction verticale et dont les sous-espaces horizontaux sont donnés par $\operatorname{Ker}\omega$, où

$$\omega = \omega_\delta - \pi^*\gamma. \tag{A.24}$$

Les sous-espaces horizontaux sont S^1-invariants, donc l'action de S^1 est isométrique pour g_δ. De plus, les fibres ont même longueur δ, donc elles sont géodésiques. Par ailleurs, ω vérifie

$$\mathrm{d}\omega = \delta\pi^* e. \tag{A.25}$$

Ainsi, le couple de métriques $(g_\delta, h_\delta) = (g_\delta, \tilde{h}_\delta)$ est adapté au sens de la définition A.2. Il reste à vérifier que g_δ vérifie les propriétés (a), (b) du théorème A.1, i.e. la courbure de g_δ est bornée et g_δ est proche de g. Pour cela nous allons montrer le :

LEMME A.26. – *Il existe* $C =: C(n, a, d, (N, h))$ *tel que*

$$\delta^2 \|e\|^2_{\mathrm{L}^2(N, h_\delta)} \leqslant C.$$

Démonstration. – Nous avons, d'après le théorème A.5(ii) et A.16,

$$\left\|D^k\omega_\delta\right\|_\infty \leqslant C(n,a,d,k), \tag{A.27}$$

où D et $\| \, \|_\infty$ désignent la dérivée covariante et la norme par rapport à la métrique g et k un entier positif. La forme $\mathrm{d}\omega_\delta$ est S^1-invariante et horizontale pour $\tilde{g}_\delta$ et peut donc être considérée comme forme sur N. Comme les métriques g et $\tilde{g}_\delta$ sont τ-proches (où $\tau = \tau(n, A, d, (N,h))$), on a

$$\|\mathrm{d}\omega_\delta\|_{\mathrm{L}^\infty(h_\delta)} \leqslant C\big(n,a,d,(N,h)\big). \tag{A.28}$$

Par ailleurs, $\mathrm{e}(M)$ et $\mathrm{d}\gamma$ sont L^2-orthogonales sur (N,h_δ) donc d'après (A.22) on a sur N

$$\delta^2\|e\|^2_{\mathrm{L}^2(N,h_\delta)} \leqslant \|\mathrm{d}\omega_\delta\|^2_{\mathrm{L}^2(N,h_\delta)}, \tag{A.29}$$

d'où l'on déduit, avec A.28,

$$\delta^2\|e\|^2_{\mathrm{L}^2(N,h_\delta)} \leqslant C\big(n,a,d,(N,h)\big), \tag{A.30}$$

ce qui achève la preuve du lemme A.26. □

Nous pouvons à présent montrer que g_δ vérifie (a) et (b).

A.31 *g_δ vérifie (a).* – Cela résulte directement du fait que la forme γ qui mesure l'écart entre les sous-espaces horizontaux de $\tilde{g}_\delta$ et g_δ (*cf.* A.24) est bornée.

LEMME A.32. – *Il existe une constante $C = C(N,h)$ telle que $\|\gamma\|_\infty \leqslant C(N,h)$.*

Démonstration. – Rappelons que γ est l'unique 1-forme co-exacte vérifiant l'équation (A.23). Soit β la 2-forme exacte de N telle que

$$\gamma = \delta\beta. \tag{A.33}$$

D'après les inégalités de Sobolev sur (N,h) (*cf.* [19]), on a

$$\|\gamma\|_\infty = \|\delta\beta\|_\infty \leqslant C(N,h)\|\beta\|_{\mathrm{C}^1} \leqslant C'(N,h)\|\beta\|_{\mathrm{H}^s}, \tag{A.34}$$

pour $s = s(n)$ assez grand, où $\|\beta\|_{\mathrm{C}^1}$ (resp. $\|\beta\|_{\mathrm{H}^s}$) désigne la norme C^1 de β (resp. la norme de Sobolev) sur (N,h).

Par ailleurs, le Laplacien Δ est un isomorphisme de l'espace des formes C^∞ orthogonales aux formes harmoniques dont l'inverse Δ^{-1} est continu par rapport aux normes H^{s-1} à la source et H^{s+1} au but. Il existe donc une constante $C' = C'(N,h)$ telle que

$$\|\beta\|_{\mathrm{H}^{s+1}} \leqslant C'\|\Delta\beta\|_{\mathrm{H}^{s-1}} = C'\|\mathrm{d}\gamma\|_{\mathrm{H}^{s-1}}, \tag{A.35}$$

d'où on déduit avec (A.23)

$$\|\beta\|_{\mathrm{H}^{s+1}} \leqslant C'\|\mathrm{d}\omega_\delta - \delta e\|_{\mathrm{H}^{s-1}}, \tag{A.36}$$

où l'on considère par abus de langage $\mathrm{d}\omega_\delta$ comme une 2-forme définie sur N. On a donc

$$\|\beta\|_{\mathrm{H}^{s+1}} \leqslant C''\big(\|\mathrm{d}\omega_\delta\|_{\mathrm{H}^{s-1}} + \delta\|e\|_{\mathrm{H}^{s-1}}\big). \tag{A.37}$$

On déduit de (A.37), de [19] et de (A.27)

$$\|\beta\|_{H^{s+1}} \leqslant C''(n,a,d,s), \tag{A.38}$$

où $s = s(n)$ et donc, d'après (A.34),

$$\|\gamma\|_\infty \leqslant C'''(n,a,d). \tag{A.39}$$

Ceci achève la preuve du lemme A.32. □

A.40 g_δ *vérifie (b)*. – Calculons les courbures sectionnelles de g_δ.

Soient X, Y deux vecteurs horizontaux g_δ-orthonormés et U un vecteur unitaire vertical tangent en un point x de M.

Pour tout vecteur Z tangent à M, on note Z^{V} et Z^{H} les parties verticale et horizontale de Z.

On note A le tenseur défini par :

$$A_X Y = (D_X Y)^{\mathrm{V}}, \qquad A_X U = (D_X U)^{\mathrm{H}}, \qquad A_U Z = 0, \tag{A.41}$$

où D désigne la connexion de Levi-Civita de (M, g_δ) (*cf.* [1], 9-20).

Les courbures sectionnelles pour (M, g_δ) des plans engendrés par (X, U) et (X, Y) sont données par [1] (9-29 b), (9-29 c) et en remarquant que certains termes s'annulent (*cf.* [1], 9.26), on obtient

$$\begin{cases} K(M,g_\delta)(X,Y) = K(N,h)(\pi_* X, \pi_* Y) - 3|A_X Y|^2_{g_\delta}, \\ K(M,g_\delta)(X,U) = |A_X U|^2_{g_\delta}. \end{cases} \tag{A.42}$$

Nous avons de plus (*cf.* [1], 9.24),

$$A_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]^{\mathrm{V}}. \tag{A.43}$$

Par ailleurs, si ω désigne la 1-forme verticale de norme 1, on a (*cf.* [1], 1.5 a),

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\omega([X,Y]). \tag{A.44}$$

On en déduit

$$g_\delta([X,Y]^{\mathrm{V}}, U) = \omega([X,Y]) = -\mathrm{d}\omega[X,Y] \tag{A.45}$$

et d'après la propriété (iv) de la définition 2.1.

$$\left|g_\delta([X,Y]^{\mathrm{V}}, U)\right| = \delta\left|e(X,Y)\right| \leqslant \delta\|e\|_\infty. \tag{A.46}$$

De (A.43) et (A.46) on déduit

$$|A_X Y|_{g_\delta} \leqslant \frac{\delta}{2}\|e\|_\infty, \tag{A.47}$$

et en utilisant le lemme 2.4 on obtient

$$|A_X Y|_{g_\delta} \leqslant C(N,h)\delta\|e\|_2. \tag{A.48}$$

Par ailleurs, $A_X U$ est horizontal et on a $\langle A_X Y, U\rangle = -\langle A_X U, Y\rangle$ (*cf.* [1], (9.21 d)). On en déduit avec (A.43),

$$|A_X U|^2_{g_\delta} = \sum_{i=1}^{n} g_\delta\big([X, Y_i], U\big)^2, \tag{A.49}$$

où $(Y_i)_{i=1}^n$ est un repère g_δ-orthonormé horizontal. On déduit de (A.46) et (A.49)

$$|A_X U|^2_{g_\delta} = \delta^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}(X, Y_i)^2 \leqslant n\,\delta^2 \|e\|^2_\infty, \tag{A.50}$$

et en utilisant le lemme 2.4,

$$|A_X U|^2_{g_\delta} \leqslant C(N,h)\delta^2 \|e\|^2_2. \tag{A.51}$$

De (A.42), (A.47) et (A.50), on déduit que

$$\|K(M, g_\delta)\|_\infty \leqslant \big\|K(N,h)\big\|_\infty + C'(N,h)\delta^2\|e\|^2_2. \tag{A.52}$$

En posant $a = a(N,h) = \|K(N,h)\|_\infty + C'(N,h)C$ et $d = d(N,h) = \mathrm{diam}(N,h)$, on déduit de (A.26) que $(M, g_\delta) \in \mathcal{M}_N(n, a, d)$.

RÉFÉRENCES

[1] BESSE A.L., *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete Band 10, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1987.

[2] BOTT R., TU L.W., *Differential Form in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer-Verlag, 1982.

[3] CHANILLO S., TRÈVES F., On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian, *J. Differential Geom.* **45** (2) (1997) 273–287.

[4] CHEEGER J., FUKAYA K., GROMOV M., Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **5**, 327–372.

[5] CHEEGER J., GROMOV M., Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I, *J. Differential Geom.* **23** (1986) 309–346.

[6] CHEEGER J., GROMOV M., Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I, II, *J. Differential Geom.* **32** (1990) 269–298.

[7] COLIN DE VERDIÈRE Y., Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien, *Comment. Math. Helv.* **61** (1986) 254–270.

[8] COLBOIS B., COLIN DE VERDIÈRE Y., Sur la multiplicité d'une surface de Riemann, *Comment. Math. Helv.* **63** (1988) 194–208.

[9] COLBOIS B., COURTOIS G., A note on the first non-zero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms, *Manuscr. Math.* **68** (1990) 143–160.

[10] COURTOIS G., Spectrum of manifolds with holes, *J. Funct. Anal.* **134** (1) (1995) 194–221.

[11] DAI X., Adiabatic limits, non-multiplicativity of signature and Leray spectral sequence, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (2) (1991) 265–321.

[12] DODZIUK J., Eigenvalues of the Laplacian on forms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **85** (1982) 438–443.

[13] FORMAN R., Spectral sequences and adiabatic limits, *Comm. Math. Phys.* **168** (1) (1995) 57–116.

[14] FORMAN R., Hodge theory and spectral sequences, *Topology* **33** (3) (1994) 591–611.

[15] FUKAYA K., Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimension, *J. Differential Geom.* **25** (1987) 139–156.

[16] FUKAYA K., Collapsing Riemannian manifolds and eigenvalues of the Laplace operator, *Invent. Math.* **87** (1987) 517–547.

[17] GROMOV M., *Paul Levy's isoperimetric inequality*, Institut des Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, France, 1980, Preprint.
[18] GROMOV M., Curvature diameter and Betti numbers, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981) 179–195.
[19] LI P., On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **13** (1980) 451–469.
[20] LI P., YAU S.T., Eigenvalues of a compact Riemannian manifold, in: Proceedings Symposium on Pure Math., 1980, pp. 205–239.
[21] MAZZEO R., MELROSE R., The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration, *J. Differential Geom.* **31** (1990) 185–213.
[22] WARNER F.W., *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company Glenview, London, 1971.

(Manuscrit reçu le 4 février 1999.)

Bruno COLBOIS
Institut de mathématiques,
Université de Neuchâtel,
rue Émile-Argand II,
CH-2007 Neuchâtel, Suisse
E-mail: colbois@unine.ch

Gilles COURTOIS
Centre de mathématiques,
UMR 7640, CNRS,
École polytechnique,
91128 Palaiseau, France
E-mail: courtois@math.polytechnique.fr