C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 357 (2019) 897–906

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Intégrales orbitales semi-simples et centre de l'algèbre enveloppante

Semi-simple orbital integrals and center of the enveloping algebra

Jean-Michel Bismut [a], Shu Shen [b]

[a] *Institut de mathématique d'Orsay, Université Paris-Sud, bâtiment 307, 91405 Orsay, France*
[b] *Institut de mathématiques de Jussieu – Paris rive gauche, Sorbonne Université, case courrier 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 4 novembre 2019
Accepté le 4 novembre 2019
Disponible sur Internet le 12 novembre 2019

Présenté par Jean-Michel Bismut

R É S U M É

Dans une Note antérieure, le premier auteur a donné une formule locale explicite pour les intégrales orbitales semi-simples associées au Casimir. Dans cette Note, nous étendons cette formule à tous les éléments du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie considérée.

A B S T R A C T

In a previous Note, the first author has established an explicit local formula for semi-simple orbital integrals associated with the Casimir. In this Note, we extend the formula to all elements of the center of the Lie algebra.

Abridged English version

In the Note [3], and in the book [4], the first named author has established an explicit formula for the semi-simple orbital integrals associated with a real reductive group for suitable smooth kernels that are functions of the Casimir. The purpose of this Note is to extend this formula to the case of the composition of such kernels with arbitrary elements of the center of the enveloping algebra.

1. Introduction

Dans la Note [3] et dans le livre [4], le premier auteur a établi une formule explicite pour les intégrales orbitales semi-simples associées à un groupe réductif réel pour les noyaux convenables qui sont des fonctions du Casimir. Dans la présente

Adresses e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut), shu.shen@imj-prg.fr (S. Shen).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2019.11.001

Note, on étend ces résultats aux noyaux composés des noyaux précédents avec des éléments arbitraires du centre de l'algèbre enveloppante.

Plus précisément, soit G un groupe de Lie réel réductif connexe, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit θ une involution de Cartan sur G, et soit $K \subset G$ le sous-groupe fixé par θ. Soit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de K, et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit B une forme quadratique sur $\mathfrak{g}$, invariante par G et θ, qui est positive sur $\mathfrak{p}$, et négative sur $\mathfrak{k}$. Soit $X = G/K$ l'espace symétrique associé, qui est une variété riemannienne muni d'une métrique à courbure parallèle négative ou nulle, et soit $p : G \to X$ la projection canonique. On pose :

$$x_0 = p1. \tag{1.1}$$

Soit $\rho^E : K \to U(E)$ une représentation unitaire de K. Alors, $F = G \times_K E$ est un fibré hermitien sur X muni d'une connexion canonique ∇^F. Si $E = \mathfrak{p}$, le fibré correspondant est le fibré euclidien TX muni de sa connexion de Levi-Civita.

Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, qui s'identifie à l'algèbre $D_L(G)$ des opérateurs différentiels réels sur G invariants à gauche. Alors $\mathfrak{g}$ agit comme dérivation sur $U(\mathfrak{g})$. Le centre de l'algèbre enveloppante $Z(\mathfrak{g})$ est le noyau de ces dérivations. Soit $D_R(G)$ l'algèbre des opérateurs différentiels réels sur G invariants à droite. Alors $Z(\mathfrak{g}) = D_L(G) \cap D_R(G)$.

Soit $S^{\cdot}(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, qui est aussi l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. Alors $\mathfrak{g}$ agit encore comme une algèbre de dérivations sur $S^{\cdot}(\mathfrak{g})$. Soit $I^{\cdot}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des éléments invariants, qui sont exactement les éléments de $S^{\cdot}(\mathfrak{g})$ annulés par ces dérivations. Dans [6, Théorème V.1], Duflo a défini un isomorphisme canonique d'algèbres filtrées $\tau_D : I^{\cdot}(\mathfrak{g}) \simeq Z(\mathfrak{g})$.

Soit $C^{\mathfrak{g}} \in Z(\mathfrak{g})$ le Casimir. On pose $n = \dim \mathfrak{g}$. Si $e_1, \dots, e_n$ est une base de $\mathfrak{g}$, et si $e_1^*, \dots, e_n^*$ est la base duale de $\mathfrak{g}$ relativement à B, alors

$$C^{\mathfrak{g}} = -\sum_{i=1}^{n} e_i^* e_i. \tag{1.2}$$

Soit B^* la forme quadratique sur $\mathfrak{g}^*$ duale de la forme B. Alors, $B^* \in I^{\cdot}(\mathfrak{g})$.

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan θ-stable de $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$ sa décomposition de Cartan. Soit $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ le système de racines correspondant, soit R_+ un système de racines positives, et soit $\rho^{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ la demi-somme des racines positives. Alors, $\rho^{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}^* \oplus i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}^*$, de telle sorte que $B^*(\rho^{\mathfrak{g}}, \rho^{\mathfrak{g}}) \geq 0$.

On sait que

$$\tau_D B^* = -C^{\mathfrak{g}} + B^*\left(\rho^{\mathfrak{g}}, \rho^{\mathfrak{g}}\right). \tag{1.3}$$

On désigne par $C^{\mathfrak{g},X}$ l'action de $C^{\mathfrak{g}}$ sur $C^{\infty}(X, F)$. Plus généralement, si $L \in Z(\mathfrak{g})$, L agit naturellement sur $C^{\infty}(X, F)$.

Soit P un noyau G-invariant agissant sur $C^{\infty,b}(X, F)$, qui est une fonction convenable de $C^{\mathfrak{g},X}$, et soit $L \in Z(\mathfrak{g})$. Alors LP est encore un noyau G-invariant agissant sur $C^{\infty,b}(X, F)$. Dans [3,4], on avait donné une formule locale explicite pour les intégrales orbitales semi-simples associées à P. L'objet de la présente Note est d'étendre ces résultats aux intégrales orbitales semi-simples associées à LP. On vérifie la compatibilité de nos formules avec les résultats d'Harish-Chandra [8–10] sur ces intégrales orbitales, ainsi qu'aux résultats d'Atiyah–Schmid [1] sur les séries discrètes, ainsi qu'à la conjecture de Vogan sur la cohomologie de Dirac démontrée par Huang–Pandžić [11]. Les preuves sont développées dans [5].

2. Les intégrales orbitales semi-simples

Soit $\mathcal{S}^{\mathrm{paire}}(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions réelles paires sur $\mathbf{R}$ qui appartiennent à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Soit $\mu \in \mathcal{S}^{\mathrm{paire}}(\mathbf{R})$ telle que si $\widehat{\mu} \in \mathcal{S}^{\mathrm{paire}}(\mathbf{R})$ est sa transformée de Fourier, il existe $C > 0$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $c_k > 0$ tels que

$$\left|\widehat{\mu}^{(k)}(y)\right| \leq c_k \exp\left(-Cy^2\right). \tag{2.1}$$

Si $A \in \mathbf{R}$, $\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)$ est un opérateur bien défini agissant sur $C^{\infty,b}(X, F)$, qui a un noyau C^{∞} $\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)(x, x')$ sur X relativement à la mesure dx', qui commute avec G. Soit d la distance riemannienne dans X. Des résultats de [4, Section 6.2], démontrés grâce à la propriété de vitesse finie de propagation de l'équation des ondes, on déduit qu'il existe $C > 0$, $c > 0$ tels que si $x, x' \in X$, alors

$$\left|\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)(x, x')\right| \leq C\, e^{-cd^2(x,x')}. \tag{2.2}$$

L'inégalité (2.2) reste valable pour les dérivées partielles de tous ordres par rapport à x, x'. On en déduit facilement que, si $L \in Z(\mathfrak{g})$, l'opérateur $L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)$ possède toutes les propriétés indiquées précédemment.

Soit $\gamma \in G$ un élément semi-simple. Comme on l'explique dans [4, Section 6.2], l'intégrale orbitale

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right]$$

peut être définie géométriquement, et elle dépend seulement de la classe de conjugaison de γ dans G.

Si $\gamma \in G$, soit en effet d_γ la fonction déplacement sur X associée à γ, i.e.

$$d_\gamma(x) = d(x, \gamma x). \tag{2.3}$$

On pose

$$m_\gamma = \inf d_\gamma. \tag{2.4}$$

Soit $X(\gamma) \subset X$ l'ensemble fermé où d_γ atteint son minimum. Par [2, p. 78 et Section 1.2], $X(\gamma)$ est un ensemble fermé convexe. Par [7, Définition 2.19.21], γ est semi-simple si et seulement si $X(\gamma)$ est non vide.

On suppose désormais que γ est semi-simple. Après conjugaison par un élément de G, on peut supposer que

$$\gamma = e^a k^{-1}, \qquad a \in \mathfrak{p}, \qquad k \in K, \qquad \mathrm{Ad}(k)a = a. \tag{2.5}$$

Soit $Z(\gamma) \subset G$ le centralisateur de γ. Alors θ préserve $Z(\gamma)$. Si $Z^0(\gamma) \subset Z(\gamma)$ est la composante connexe de l'identité, $Z^0(\gamma)$ est encore un groupe réductif, et $K^0(\gamma) = Z^0(\gamma) \cap K$ est un compact maximal. Soit $\mathfrak{z}(\gamma)$ l'algèbre de Lie de $Z(\gamma)$, et soit $\mathfrak{z}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma) \oplus \mathfrak{k}(\gamma)$ sa décomposition de Cartan. Soit $\mathfrak{z}^\perp(\gamma) = \mathfrak{p}^\perp(\gamma) \oplus \mathfrak{k}^\perp(\gamma)$ l'orthogonal à $\mathfrak{z}(\gamma)$ pour B.

Notons que

$$\mathfrak{z}(\gamma) = \{f \in \mathfrak{g}, [a, f] = 0, \mathrm{Ad}(k) f = f\}. \tag{2.6}$$

On pose

$$\mathfrak{z}_a = \ker \mathrm{ad}(a). \tag{2.7}$$

Alors $\mathfrak{z}_a$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de a. Soit $\mathfrak{z}_a^\perp(\gamma)$ l'orthogonal à $\mathfrak{z}(\gamma)$ dans $\mathfrak{z}_a$. On a le scindage :

$$\mathfrak{z}_a^\perp(\gamma) = \mathfrak{p}_a^\perp(\gamma) \oplus \mathfrak{k}_a^\perp(\gamma). \tag{2.8}$$

Par [4, Théorème 3.3.1], on a l'identification canonique

$$X(\gamma) = Z^0(\gamma)/K^0(\gamma). \tag{2.9}$$

Soit $N_{X(\gamma)/X}$ le fibré orthogonal $TX(\gamma)$ dans TX. Par [4, eq. (3.4.1)], on a

$$N_{X(\gamma)/X} = Z^0(\gamma) \times_{K^0(\gamma)} \mathfrak{p}^\perp(\gamma). \tag{2.10}$$

Soit $\mathcal{N}_{X(\gamma)/X}$ l'espace total de $N_{X(\gamma)/X}$. Par [4, Théorème 3.4.1], le système de coordonnées géodésiques normales de base $X(\gamma)$ donne une identification de $\mathcal{N}_{X(\gamma)/X}$ avec X. Soit dx, dy, df les volumes riemanniens sur X, $X(\gamma)$, $N_{X(\gamma)/X}$. Alors $dy\,df$ est une forme volume sur $\mathcal{N}_{X(\gamma)/X}$. Soit $r(f)$ le jacobien correspondant, de telle sorte qu'on a l'identité de formes volume sur X,

$$dx = r(f)\,dy\,df. \tag{2.11}$$

Par [4, eq. (3.4.36)], il existe $C > 0$, $C' > 0$ tels que

$$r(f) \le C\, e^{C'|f|}. \tag{2.12}$$

Rappelons que $x_0 \in X$ est donné par (1.1). Par [4, Théorème 3.4.1], il existe $C_\gamma > 0$ tel que pour $f \in \mathfrak{p}^\perp(\gamma)$, $|f| \ge 1$, on a

$$d_\gamma\left(e^f x_0\right) \ge |a| + C_\gamma |f|. \tag{2.13}$$

De (2.2), (2.13), on tire comme dans [4, eq. (4.2.6)] le fait qu'il existe $C_\gamma > 0$, $c_\gamma > 0$ tels que si $f \in \mathfrak{p}^\perp(\gamma)$, alors

$$\left| L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\left(\gamma^{-1} e^f x_0, e^f x_0\right)\right| \le C_\gamma \exp\left(-c_\gamma |f|^2\right). \tag{2.14}$$

Soit γ_* le relevé de l'action de γ à F. Dans [4, Définition 4.2.2], l'intégrale orbitale

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right]$$

est définie par la formule

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right] = \int_{\mathfrak{p}^\perp(\gamma)} \mathrm{Tr}\left[\gamma_* L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\left(\gamma^{-1} e^f x_0, e^f x_0\right)\right] r(f)\,df. \tag{2.15}$$

Des équations (2.12), (2.14), on tire que l'intégrale (2.15) converge.

L'intégrale orbitale de [4] est la même que celle qui a été définie par Selberg [14, p. 66].

3. La fonction $\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)$

On pose

$$\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)=\mathfrak{p}(\gamma)\oplus \mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma). \tag{3.1}$$

Alors $B|_{\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)}$ fait de $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$ un espace vectoriel euclidien.

On utilise les notations de [4, Théorème 5.5.1].

Définition 3.1. Si $Y_0^{\mathfrak{k}}\in \mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)$, on pose

$$\mathcal{L}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)=\frac{\det\left(1-\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\mathrm{e}^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right)|_{\mathfrak{k}_a^{\perp}(\gamma)}}{\det\left(1-\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\mathrm{e}^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right)|_{\mathfrak{p}_a^{\perp}(\gamma)}}. \tag{3.2}$$

Soit $\mathcal{M}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)$ la fonction donnée par

$$\mathcal{M}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)=\left[\frac{1}{\det\left(1-\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right)\right)|_{\mathfrak{z}_a^{\perp}(\gamma)}}\mathcal{L}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\right]^{1/2}. \tag{3.3}$$

Dans [4, Chapitre 5], on a montré que la racine carrée dans (3.3) est définie sans ambiguïté.

Rappelons que

$$\widehat{A}(x)=\frac{x/2}{\sinh(x/2)}. \tag{3.4}$$

Plus généralement, si V est un espace vectoriel euclidien et si $M\in \mathrm{End}(V)$ est antisymétrique, on pose

$$\widehat{A}(M)=\left[\det\left(\frac{M/2}{\sinh(M/2)}\right)\right]^{1/2}. \tag{3.5}$$

Dans (3.5), on peut remplacer M par $\mathrm{i}M$.

Définition 3.2. Soit $\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)$ la fonction C^∞ de $Y_0^{\mathfrak{k}}\in \mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)$,

$$\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)=\frac{1}{\left|\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma))|_{\mathfrak{z}^{\perp}(a)}\right|^{1/2}}\frac{\widehat{A}\left(\mathrm{ad}\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)|_{\mathfrak{p}(\gamma)}\right)}{\widehat{A}\left(\mathrm{ad}\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)|_{\mathfrak{k}(\gamma)}\right)}\mathcal{M}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right). \tag{3.6}$$

Avec les conventions de [4, Chapitre 5], où une fonction $J_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)$ est définie sur $\mathfrak{k}(\gamma)$, on a

$$J_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)=\mathcal{J}_\gamma\left(iY_0^{\mathfrak{k}}\right). \tag{3.7}$$

Par [4, eq. (5.5.11)] ou par (3.6), si $Y_0^{\mathfrak{k}}\in \mathrm{i}\mathfrak{k}$, alors

$$\mathcal{J}_1\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)=\frac{\widehat{A}\left(\mathrm{ad}\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)|_{\mathfrak{p}}\right)}{\widehat{A}\left(\mathrm{ad}\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)|_{\mathfrak{k}}\right)}. \tag{3.8}$$

Par [4, eq. (6.1.1)], il existe $c>0$, $C>0$ tel que si $Y_0^{\mathfrak{k}}\in \mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)$,

$$\left|\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\right|\le c\exp\left(C\left|Y_0^{\mathfrak{k}}\right|\right). \tag{3.9}$$

Dans la suite, $\int_{\mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)}$ désigne l'intégration sur $\mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)$.

4. Une formule pour les intégrales orbitales semi-simples pour le Casimir

Soit $\gamma\in G$ un élément semi-simple qu'on choisit comme dans (2.5). Soit $\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)}$ le laplacien sur $\mathfrak{z}(\gamma)$ associé à $B|_{\mathfrak{z}(\gamma)}$. Alors $\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)}$ s'étend en un opérateur différentiel sur $\mathfrak{z}(\gamma)_{\mathbf{C}}$, qui se restreint au Laplacien usuel sur $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$. Alors

$$\mu\left(\sqrt{-\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)}+B^*\left(\rho^{\mathfrak{g}},\rho^{\mathfrak{g}}\right)+A}\right)$$

est un noyau de convolution C^∞ sur $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$, tel que, si $f \in \mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$, alors

$$\left|\mu\left(\sqrt{-\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)} + B^*(\rho^{\mathfrak{g}}, \rho^{\mathfrak{g}}) + A}\right)(f)\right| \le C\mathrm{e}^{-c|f|^2}. \tag{4.1}$$

Soit δ_a la masse de Dirac en $a \in \mathfrak{p}(\gamma)$. Alors, $\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\delta_a$ est une distribution sur $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$.

Dans [3, Théorème 3.4], [4, Théorème 6.2.2], on a établi une formule explicite pour les intégrales orbitales semi-simples associées au Casimir.

Théorème 4.1. *On a l'identité :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right] &= \mu\left(\sqrt{-\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)} + B^*(\rho^{\mathfrak{g}}, \rho^{\mathfrak{g}}) + A}\right)\left[\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\mathrm{Tr}^E\left[\rho^E\left(k^{-1}\mathrm{e}^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right]\delta_a\right](0)\\ &= \int_{\mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)} \mu\left(\sqrt{-\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)} + B^*(\rho^{\mathfrak{g}}, \rho^{\mathfrak{g}}) + A}\right)\left(-Y_0^{\mathfrak{k}}, -a\right)\\ &\qquad \mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\mathrm{Tr}^E\left[\rho^E\left(k^{-1}\mathrm{e}^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right]\mathrm{d}Y_0^{\mathfrak{k}}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

5. Intégrales orbitales semi-simples associées au centre de l'algèbre enveloppante

Soit $D^{\cdot}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{g}$, et soit $D_I(\mathfrak{g})$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$ qui commutent avec les dérivations induites par $\mathfrak{g}$. Alors, on a des isomorphismes canoniques d'algèbres,

$$S^{\cdot}(\mathfrak{g}) \simeq D^{\cdot}(\mathfrak{g}), \qquad I^{\cdot}(\mathfrak{g}) \simeq D_I^{\cdot}(\mathfrak{g}). \tag{5.1}$$

Naturellement, les éléments de $I^{\cdot}(\mathfrak{g})$ définissent des éléments correspondants dans $I^{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, et les opérateurs différentiels dans $D_I^{\cdot}(\mathfrak{g})$ s'étendent en opérateurs différentiels dans $D_I^{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. L'involution $f \to -f$ de $\mathfrak{g}$ induit une involution correspondante de $S^{\cdot}(\mathfrak{g})$ et de $I^{\cdot}(\mathfrak{g})$. Soit σ l'involution correspondante de $Z(\mathfrak{g})$ via l'isomorphisme de Duflo.

Alors $B|_{\mathfrak{z}(\gamma)}$ est non dégénérée. Du scindage $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\gamma) \oplus \mathfrak{z}^{\perp}(\gamma)$, on tire une projection naturelle $\mathfrak{g} \to \mathfrak{z}(\gamma)$. Cette projection induit une projection $S^{\cdot}(\mathfrak{g}) \to S^{\cdot}(\mathfrak{z}(\gamma))$, et donc une projection $I^{\cdot}(\mathfrak{g}) \to I^{\cdot}(\mathfrak{z}(\gamma))$.

Soit $L \in Z(\mathfrak{g})$. Alors $\tau_{\mathrm{D}}^{-1}L \in I^{\cdot}(\mathfrak{g})$. On désigne par $L^{\mathfrak{z}(\gamma)}$ la projection de $\tau_{\mathrm{D}}^{-1}L$ sur $I^{\cdot}(\mathfrak{z}(\gamma))$. Quand cela sera nécessaire, en utilisant (5.1), on considèrera $L^{\mathfrak{z}(\gamma)}$ comme un élément de $D_I^{\cdot}(\mathfrak{z}(\gamma))$. Les éléments de $D_I^{\cdot}(\mathfrak{z}(\gamma))$ induisent des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$. En particulier, $L^{\mathfrak{z}(\gamma)}$ pourra être considéré comme un opérateur différentiel sur $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$. Par (1.3), à une constante près, $-(C^{\mathfrak{g}})^{\mathfrak{z}(\gamma)}$ induit sur $\mathfrak{z}_{\mathrm{i}}(\gamma)$ le laplacien euclidien correspondant.

Compte tenu de (1.3), le résultat principal de cette Note est une extension du Théorème 4.1. On prend encore $\gamma \in G$ semi-simple comme dans (2.5). Soit $L \in Z(\mathfrak{g})$.

Théorème 5.1. *On a l'identité :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right] &= L^{\mathfrak{z}(\gamma)}\mu\left(\sqrt{(C^{\mathfrak{g}})^{\mathfrak{z}(\gamma)} + A}\right)\left[\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\mathrm{Tr}^E\left[\rho^E\left(k^{-1}\mathrm{e}^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right]\delta_a\right](0)\\ &= \int_{\mathrm{i}\mathfrak{k}(\gamma)} L^{\mathfrak{z}(\gamma)}\mu\left(\sqrt{(C^{\mathfrak{g}})^{\mathfrak{z}(\gamma)} + A}\right)\left(-Y_0^{\mathfrak{k}}, -a\right)\mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right)\mathrm{Tr}^E\left[\rho^E\left(k^{-1}\mathrm{e}^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right]\mathrm{d}Y_0^{\mathfrak{k}}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Principe de la preuve

La preuve du Théorème 5.1 est détaillée dans [5]. Nous allons ici en dégager les grandes lignes. L'idée principale consiste à utiliser le Théorème 4.1 établi dans [4, Théorème 6.2.2] et à le combiner avec des résultats établis par Harish-Chandra. Plus précisément ;

1. On commence par établir notre théorème pour γ régulier, par dérivation par rapport à γ de la formule (4.2).
2. Pour γ non régulier, on utilise des résultats sur les limites d'intégrales orbitales dus à Harish-Chandra, qui permettent, en principe, d'obtenir les intégrales orbitales semi-simples non régulières comme des limites convenables d'intégrales régulières.

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une algèbre de Cartan θ-stable. Soit $I^{\cdot}(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ la sous-algèbre des éléments de $S^{\cdot}(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$ qui sont invariants par le groupe de Weyl algébrique $W(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. On a l'isomorphisme d'algèbres d'Harish-Chandra [12, Théorème 8.18] $\phi_{\mathrm{HC}} : Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \simeq I^{\cdot}(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Par [6, Lemme V.1], on sait que, quand on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, les isomorphismes de Duflo et d'Harish-Chandra sont compatibles.

Nous commençons par démontrer que $I^{\cdot}(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}},\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est stable par conjugaison, et donc que cete algèbre est la complexification d'une algèbre réelle $I^{\cdot}(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$. On montre alors que ϕ_{HC} induit un isomorphisme d'algèbres réelles $\phi_{\mathrm{HC}}: Z(\mathfrak{g}) \simeq I^{\cdot}(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$, qui est compatible avec la forme réelle de l'isomorphisme de Duflo.

La réalisation technique de la preuve est rendue possible grâce à des propriétés cachées de la fonction $\mathcal{J}_\gamma$ qui permettent de l'exprimer à l'aide des racines imaginaires, et d'en déduire des propriétés de dépendance régulière par rapport à γ, insoupçonnables au premier abord.

Nous allons décrire plus en détail certaines étapes de la preuve. Soit, en effet, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une algèbre de Cartan θ-stable, et soit $H \subset G$ le groupe de Cartan associé. Il y a un nombre fini de tels groupes de Cartan θ-stables non conjugués par K. Alors $\gamma \in G$ est semi-simple si et seulement si il est conjugué à un élément d'un tel groupe de Cartan.

Dans la suite, on suppose que $\gamma \in H$. Soit $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ le système de racines associé à $(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$, et soit R^{re}, R^{im}, R^{c} les racines réelles, imaginaires et complexes, de telle sorte que $R = R^{\mathrm{re}} \cup R^{\mathrm{im}} \cup R^{\mathrm{c}}$. Alors θ préserve R. Soit $R_+ \subset R$ un système de racines positives. On pose :

$$R_+^{\mathrm{re}} = R_+ \cap R^{\mathrm{re}}, \qquad R_+^{\mathrm{im}} = R_+ \cap R^{\mathrm{im}}, \qquad R_+^{\mathrm{c}} = R_+ \cap R^{\mathrm{c}}. \tag{6.1}$$

On peut supposer que $-\theta$ préserve $R_+ \setminus R_+^{\mathrm{im}}$. De manière équivalente, si $\alpha \in R_+ \setminus R_+^{\mathrm{im}}$, alors $\overline{\alpha} \in R_+$.

Si $\alpha \in R$, soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ le sous-espace propre de dimension 1 associé à α, de telle sorte que

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbf{C}} \bigoplus \oplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{6.2}$$

Pour $\alpha \in R^{\mathrm{im}}$, soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$, soit $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$. On désigne par $R_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{im}}$, $R_{\mathfrak{k}}^{\mathrm{im}}$ les racines correspondantes, de telle sorte que $R^{\mathrm{im}} = R_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{im}} \cup R_{\mathfrak{k}}^{\mathrm{im}}$.

Alors H préserve la décomposition (6.2). Si $\alpha \in R$, soit ξ_α le caractère de H correspondant à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. Si $\alpha \in R$, $\gamma \in H$, alors

$$\xi_{-\theta\alpha}(\gamma) = \overline{\xi_\alpha(\gamma)}. \tag{6.3}$$

Si $\alpha \in R^{\mathrm{re}}$, $\xi_\alpha(\gamma) \in \mathbf{R}^*$, et si $\alpha \in R^{\mathrm{im}}$, alors $\left|\xi_\alpha(\gamma)\right| = 1$.

7. Fonction $\mathcal{J}_\gamma$ et système de racines

On fixe maintenant $\gamma \in H$, qu'on écrit sous la forme (2.5). Ici, $a \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, et $k \in K \cap H$. Alors, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan θ stable de $\mathfrak{z}(\gamma)$. Soit $R(\gamma)$ le système de racines associé à $(\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma))$. Alors

$$R(\gamma) = \left\{\alpha \in R, \xi_\alpha(\gamma) = 1\right\}, \tag{7.1}$$

et $R_+(\gamma) = R_+ \cap R(\gamma)$ est un système de racines positives pour $(\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma))$. De même

$$R^{\mathrm{re}}(\gamma) = R(\gamma) \cap R^{\mathrm{re}}, \qquad R^{\mathrm{im}}(\gamma) = R(\gamma) \cap R^{\mathrm{im}}, \qquad R^{\mathrm{c}}(\gamma) = R(\gamma) \cap R^{\mathrm{c}}. \tag{7.2}$$

On obtient, de la même manière, $R_+^{\mathrm{re}}(\gamma)$, $R_+^{\mathrm{im}}(\gamma)$, $R_+^{\mathrm{c}}(\gamma)$.

Si $\alpha \in R_+$, on choisit une racine carrée $\xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right)$ de $\xi_\alpha\left(k^{-1}\right)$. Comme $-\theta$ agit sans points fixes sur R_+^{c}, de (6.3), on tire que si $\alpha \in R_+^{\mathrm{c}}$, on peut supposer que

$$\xi_{-\theta\alpha}^{1/2}\left(k^{-1}\right) = \overline{\xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right)}. \tag{7.3}$$

Pour $\alpha \in R_+$, on choisit la racine carrée $\xi_\alpha^{1/2}(\gamma)$ de telle sorte que

$$\xi_\alpha^{1/2}(\gamma) = \mathrm{e}^{\langle\alpha,a\rangle/2}\xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right). \tag{7.4}$$

Par (7.3), (7.4), si $\alpha \in R_+^{\mathrm{c}}$, on a

$$\xi_{-\theta\alpha}^{1/2}(\gamma) = \overline{\xi_\alpha^{1/2}(\gamma)}. \tag{7.5}$$

Définition 7.1. On pose

$$\epsilon_{\mathrm{D}}(\gamma) = \operatorname{sgn} \prod_{\alpha \in R_+^{\mathrm{re}} \setminus R_+^{\mathrm{re}}(\gamma)} \left(1 - \xi_\alpha^{-1}(\gamma)\right). \tag{7.6}$$

On a un premier résultat exprimant la fonction $\mathcal{J}_\gamma(h_{\mathfrak{k}})$ à l'aide du système de racines R_+.

Théorème 7.1. *Pour $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$, on a*

$$\mathcal{J}_\gamma\left(h_{\mathfrak{k}}\right) = \frac{(-1)^{\left|R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}\backslash R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}(k)\right|}\epsilon_{\mathrm{D}}(\gamma)\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{re}}_{+}\backslash R^{\mathrm{re}}_{+}(\gamma)}\xi^{1/2}_\alpha\left(k^{-1}\right)}{\prod_{\alpha\in R_+\backslash R_+(\gamma)}\left(\xi^{1/2}_\alpha(\gamma)-\xi^{-1/2}_\alpha(\gamma)\right)}\frac{\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}(k)}\widehat{A}\left(\langle\alpha,h_{\mathfrak{k}}\rangle\right)}{\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{k},+}(k)}\widehat{A}\left(\langle\alpha,h_{\mathfrak{k}}\rangle\right)}$$
$$\frac{\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{k},+}\backslash R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{k},+}(k)}\left(\xi^{1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)-\xi^{-1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)\right)}{\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}\backslash R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}(k)}\left(\xi^{1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)-\xi^{-1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)\right)}. \tag{7.7}$$

Le fait remarquable est que $\mathcal{J}_\gamma\left(h_{\mathfrak{k}}\right)$ s'exprime essentiellement à l'aide des racines imaginaires.

Soit H^{reg} l'ensemble des éléments réguliers, c'est-à-dire l'ensemble des $\gamma \in H$ tels que $\mathfrak{z}(\gamma) = \mathfrak{h}$. De manière équivalente, pour tout $\alpha \in R$, on a $\xi_\alpha(\gamma) \neq 1$.

Si $\gamma \in H^{\mathrm{reg}}$, on pose

$$D_{\mathrm{H}}(\gamma) = \prod_{\alpha\in R_+}\left(\xi^{1/2}_\alpha(\gamma)-\xi^{-1/2}_\alpha(\gamma)\right). \tag{7.8}$$

Alors,

$$\epsilon_{\mathrm{D}}(\gamma) = \operatorname{sgn}\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{re}}_+}\left(1-\xi^{-1}_\alpha(\gamma)\right). \tag{7.9}$$

Théorème 7.2. *Si $\gamma \in H^{\mathrm{reg}}$, $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$, alors,*

$$\mathcal{J}_\gamma\left(h_{\mathfrak{k}}\right) = \frac{(-1)^{\left|R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}\right|}\epsilon_{\mathrm{D}}(\gamma)\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{re}}_+}\xi^{1/2}_\alpha\left(k^{-1}\right)}{D_{\mathrm{H}}(\gamma)}\frac{\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{k},+}}\left(\xi^{1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)-\xi^{-1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)\right)}{\prod_{\alpha\in R^{\mathrm{im}}_{\mathfrak{p},+}}\left(\xi^{1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)-\xi^{-1/2}_\alpha\left(k^{-1}e^{-h_{\mathfrak{k}}}\right)\right)}. \tag{7.10}$$

La fonction $(\gamma, h_{\mathfrak{k}}) \in H^{\mathrm{reg}} \times i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} \to \mathcal{J}_\gamma\left(h_{\mathfrak{k}}\right) \in \mathbf{C}$ est C^∞.

Le dernier énoncé du théorème est surprenant, puisque la dépendance de $\mathcal{J}_\gamma\left(h_{\mathfrak{k}}\right)$ en $a \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ est devenue triviale.

Soit $\mathscr{S}$ l'algèbre des opérateurs différentiels agissant sur $C^\infty(X, F)$ à coefficients uniformément bornés ainsi que leurs dérivées covariantes de tous ordres.

Définition 7.2. Soit $\mathcal{Q}$ l'algèbre des noyaux C^∞ $Q\left(x, x'\right)|_{x,x'\in X}$ agissant sur $C^{\infty,b}(X, F)$ et commutant avec G, tels qu'il existe $C > 0$, et que pour $S, S' \in \mathscr{S}$, il existe $C_{S,S'} > 0$ pour lesquels

$$\left|S\,Q\,S'\left(x, x'\right)\right| \leq C_{S,S'}\exp\left(-Cd^2\left(x, x'\right)\right). \tag{7.11}$$

Alors $D_{\mathrm{R}}(G)$ commute avec Q, et donc $Z(\mathfrak{g})$ commute avec Q.

Proposition 7.3. *Si $L \in Z(\mathfrak{g})$, $Q \in \mathcal{Q}$, alors $LQ \in \mathcal{Q}$.*

Rappelons un résultat d'Harish-Chandra [8, Théorème 3], [9, Section 18], [12, Proposition 11.9]. Si $L \in Z(\mathfrak{g})$, alors $\sigma L \in Z(\mathfrak{g})$. On désigne par $(\sigma L)_\gamma$ l'action de l'opérateur différentiel σL sur des fonctions C^∞ de $\gamma \in G^{\mathrm{reg}}$.

Proposition 7.4. *Si $Q \in \mathcal{Q}$, l'application $\gamma \in G^{\mathrm{reg}} \to \mathrm{Tr}^{[\gamma]}[Q]$ est C^∞. Si $L \in Z(\mathfrak{g})$, on a l'identité de fonctions C^∞ sur G^{reg} :*

$$\mathrm{Tr}^{[\gamma]}[LQ] = (\sigma L)_\gamma\,\mathrm{Tr}^{[\gamma]}[Q]. \tag{7.12}$$

Des Théorèmes 4.1, 7.2 et de la Proposition 7.4, on déduit sans difficulté le Théorème 5.1 quand γ est régulier.

On va maintenant étendre le Théorème 5.1 quand γ est arbitraire comme dans (2.5). Soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan θ-stable de $\mathfrak{z}(\gamma)$, qui est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et soit $H \subset G$ le groupe de Cartan associé. Alors $\gamma \in H$. On étend la définition de $D_{\mathrm{H}}(\gamma)$ par la formule

$$D_{\mathrm{H}}(\gamma) = \prod_{\alpha\in R_+\backslash R_+(\gamma)}\left(\xi^{1/2}_\alpha(\gamma)-\xi^{-1/2}_\alpha(\gamma)\right). \tag{7.13}$$

Si $\alpha \in R_+^{\mathrm{re}}(\gamma) \cup R_+^{\mathrm{im}}(k)$, alors $\xi_\alpha\left(k^{-1}\right) = 1$, et $\xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right) = \xi_\alpha^{-1/2}\left(k^{-1}\right) = \pm 1$, de telle sorte que $\prod_{\alpha \in R_+^{\mathrm{re}}(\gamma) \cup R_+^{\mathrm{im}}(k)} \xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right)$ est égal à ± 1.

Définition 7.5. On dit qu'un élément $h \in \mathfrak{h}$ est γ-régulier si pour $\alpha \in R(\gamma)$, $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$.

Pour $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$, on pose

$$\pi^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}(h) = \prod_{\alpha \in R_+(\gamma)} \langle \alpha, h \rangle . \tag{7.14}$$

Alors $h \in \mathfrak{h}$ est γ-régulier si et seulement si $\pi^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}(h) \neq 0$.

Proposition 7.6. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $b \in \mathfrak{h}$ est γ-régulier, et si $|b| \leq \epsilon$, si $\gamma' = \gamma e^b$, alors $\gamma' \in H^{\mathrm{reg}}$.*

Définition 7.7. Un élément $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$ est dit γ im-régulier si pour $\alpha \in R^{\mathrm{im}}(k)$, $\langle \alpha, h_{\mathfrak{k}} \rangle \neq 0$.

On suppose pour l'instant que $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Cartan fondamentale dans $\mathfrak{z}(\gamma)$, i.e. que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}(\gamma)$. La fonction $\left[\pi^{\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}},\mathfrak{k}(\gamma)}\right]^2(h_{\mathfrak{k}})$ est alors définie sans ambiguïté sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k},\mathbf{C}}$.

Théorème 7.3. *Pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe $c > 0$, $C > 0$ tels que pour $b \in \mathfrak{h}$ γ-régulier tel que $|b| \leq \epsilon$, $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$, alors*

$$\left| \pi^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}\left(b_{\mathfrak{p}} + h_{\mathfrak{k}}\right) D_{\mathrm{H}}\left(\gamma'\right) \mathcal{J}_{\gamma'}(h_{\mathfrak{k}}) \right| \leq C \exp\left(c\,|h_{\mathfrak{k}}|\right). \tag{7.15}$$

Si $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$ n'est pas γ im-*régulier, le membre de gauche de (7.15) s'annule.*

Si $\mathfrak{h}$ n'est pas l'algèbre de Cartan fondamentale dans $\mathfrak{z}(\gamma)$, pour $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$, quand $b \in \mathfrak{h}$ γ-régulier tend vers 0,

$$\pi^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}\left(b_{\mathfrak{p}} + h_{\mathfrak{k}}\right) D_{\mathrm{H}}\left(\gamma'\right) \mathcal{J}_{\gamma'}(h_{\mathfrak{k}}) \to 0. \tag{7.16}$$

Si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Cartan fondamentale dans $\mathfrak{z}(\gamma)$, si $h_{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$ est γ im-*régulier, quand $b \in \mathfrak{h}$ γ-régulier tend vers 0,*

$$\pi^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}\left(b_{\mathfrak{p}} + h_{\mathfrak{k}}\right) D_{\mathrm{H}}\left(\gamma'\right) \mathcal{J}_{\gamma'}(h_{\mathfrak{k}}) \to (-1)^{\frac{1}{2}\left|R_+^{\mathrm{c}}(\gamma)\right| + \left|R_{\mathfrak{k},+}^{\mathrm{im}}(k)\right|} \left[\pi^{\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}},\mathfrak{k}(\gamma)}(h_{\mathfrak{k}})\right]^2 \prod_{\alpha \in R_+^{\mathrm{im}}(k)} \xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right) D_{\mathrm{H}}(\gamma) \mathcal{J}_\gamma(h_{\mathfrak{k}}). \tag{7.17}$$

Rappelons que $\mathrm{Tr}^{[\gamma']}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right]$ est une fonction C^∞ de $\gamma' \in H^{\mathrm{reg}}$. Soit $\overline{\pi}^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}$ l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ associé au polynôme $\pi^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}$.

Soit $T(\gamma)$ un tore maximal dans $K^0(\gamma)$, soit $\mathfrak{t}(\gamma) \subset \mathfrak{k}(\gamma)$ son algèbre de Lie, et soit $W(\mathfrak{t}(\gamma) : \mathfrak{k}(\gamma))$ le groupe de Weyl.

Théorème 7.4. *Si $\mathfrak{h}$ n'est pas l'algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{z}(\gamma)$, quand $b \in \mathfrak{h}$ γ-régulier tend vers 0, alors*

$$\overline{\pi}^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}\left[D_{\mathrm{H}}\left(\gamma'\right) \mathrm{Tr}^{[\gamma']}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right]\right] \to 0. \tag{7.18}$$

Si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{z}(\gamma)$, quand $b \in \mathfrak{h}$ γ-régulier tend vers 0, alors

$$\begin{aligned} &\overline{\pi}^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}\left[D_{\mathrm{H}}\left(\gamma'\right) \mathrm{Tr}^{[\gamma']}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X} + A}\right)\right]\right] \\ &\quad \to (-1)^{\frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{p}(\gamma) - \dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}\right)} \frac{\left|W\left(\mathfrak{t}(\gamma) : \mathfrak{k}(\gamma)\right)\right|}{\mathrm{Vol}\left(K^0(\gamma)/T(\gamma)\right)} \\ &\qquad \prod_{\alpha \in R_+^{\mathrm{im}}(k)} \xi_\alpha^{1/2}\left(k^{-1}\right) D_{\mathrm{H}}(\gamma) (2\pi)^{|R_+(\gamma)|} \int_{i\mathfrak{k}(\gamma)} L^{\mathfrak{z}(\gamma)}\mu\left(\sqrt{\left(C^{\mathfrak{g}}\right)^{\mathfrak{z}(\gamma)} + A}\right)\left(-a, -Y_0^{\mathfrak{k}}\right) \\ &\qquad \mathcal{J}_\gamma\left(Y_0^{\mathfrak{k}}\right) \mathrm{Tr}^E\left[\rho^E\left(k^{-1} e^{-Y_0^{\mathfrak{k}}}\right)\right] dY_0^{\mathfrak{k}}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Par ailleurs, un résultat d'Harish-Chandra [9, Lemme 28] affirme que si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{z}(\gamma)$, il existe $c_\gamma \in \mathbf{C}$ tel que quand $b \in \mathfrak{h}$ γ-régulier tend vers 0, si $\gamma' = \gamma e^b$, alors

$$\overline{\pi}^{\mathfrak{h},\mathfrak{z}(\gamma)}\left[D_{\mathrm{H}}(\gamma')\,\mathrm{Tr}^{[\gamma']}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X}+A}\right)\right]\right] \to c_\gamma \mathrm{Tr}^{[\gamma]}\left[L\mu\left(\sqrt{C^{\mathfrak{g},X}+A}\right)\right]. \tag{7.20}$$

Quand $L = 1$, du Théorème 4.1, on tire un calcul explicite de la constante c_γ (déjà obtenue par Harish-Chandra quand $\gamma = 1$ dans [10, Section 37, Théorème 1]). En utilisant la formule de Rossmann [13,15] et les formules d'intégration de Weyl, on tire le Théorème 5.1 en toute généralité.

8. Intégrales orbitales et conjecture de Vogan

On suppose ici que K est simplement connexe, et que $\mathfrak{p}$ est de dimension paire et est orientée. Soit $S^{\mathfrak{p}} = S^{\mathfrak{p}}_+ \oplus S^{\mathfrak{p}}_-$ l'espace des $\left(\mathfrak{p}, B|_{\mathfrak{p}}\right)$ spineurs. Alors la représentation $K \to \mathrm{Aut}\left(\mathfrak{p}, B|_{\mathfrak{p}}\right)$ se relève en une représentation unitaire $K \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{pair}}\left(S^{\mathfrak{p}}\right)$. Soit $S^{TX} = S^{TX}_+ \oplus S^{TX}_-$ le fibré des spineurs correspondant sur X. On suppose également que la représentation $\rho^E : K \to U(E)$ est irréductible. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Cartan, soit $\rho^{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{t}^*$ la demi-somme des racines positives associé, et soit $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$ le poids dominant associé à la représentation ρ^E.

Soit D^X l'opérateur de Dirac sur X, qui agit sur $C^\infty\left(X, S^{TX} \otimes F\right)$. Soit $C^{\mathfrak{g},X}$ l'action du Casimir sur cette espace. Alors

$$D^{X,2} = C^{\mathfrak{g},X} - B^*\left(\rho^{\mathfrak{g}}, \rho^{\mathfrak{g}}\right) + B^*\left(\rho^{\mathfrak{k}} + \lambda, \rho^{\mathfrak{k}} + \lambda\right). \tag{8.1}$$

On désigne par Tr_{s} la supertrace. Dans [4, Chapitre 7], si $\gamma \in G$ est semi-simple, pour $t > 0$, on a calculé explicitement les intégrales orbitales $\mathrm{Tr_s}^{[\gamma]}\left[\exp\left(-tD^{X,2}\right)\right]$, on a montré que ces intégrales ne dépendent pas de t, et on a vérifié la compatibilité du calcul avec le théorème de l'indice pour les opérateurs de Dirac et avec les formules de point fixe. On a montré, en particulier, que, si γ n'est pas elliptique, ces intégrales orbitales sont nulles.

Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Cartan, et soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ le commutant de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{p}$. Alors, $\mathfrak{h} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale dans $\mathfrak{g}$, et $\dim \mathfrak{b}$ est la différence des rangs complexes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$.

Si $\dim \mathfrak{b} = 0$, alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ est une algèbre de Cartan fondamentale dans $\mathfrak{k}$ et dans $\mathfrak{g}$. Les racines pour $(\mathfrak{t}, \mathfrak{g})$ sont imaginaires, de telle sorte que $R = R^{\mathrm{im}}$. Soit $R \subset i\mathfrak{t}^*$ le système de racines associé à $(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Alors $R = R_{\mathfrak{p}} \cup R_{\mathfrak{k}}$, où $R_{\mathfrak{p}}$, $R_{\mathfrak{k}}$ sont les ensembles de racines non compactes et compactes. Soit $R_+ = R_{\mathfrak{p},+} \cup R_{\mathfrak{k},+}$ un système de racines positives. On note encore par $\rho^{\mathfrak{g}} \in i\mathfrak{t}^*$ la demi-somme des racines dans R_+, et par $\rho^{\mathfrak{k}} \in i\mathfrak{t}^*$ la demi-somme des racines dans $R_{\mathfrak{k},+}$. Soit $\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{g}}$, $\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{k}}$ les polynômes π sur $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$ associés à $(\mathfrak{t}, \mathfrak{k})$, $(\mathfrak{t}, \mathfrak{g})$.

Si $\dim \mathfrak{b} = 0$, soit $T \subset K$ le tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Si $k \in K$, après conjugaison, on peut supposer que $k \in T$, de telle sorte qu'il existe $\kappa \in \mathfrak{t}$ tel que $k = e^\kappa$. Soit $\mathfrak{z}(k) \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}(k) \subset \mathfrak{k}$ les algèbres de Lie des centralisateurs de k dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$. Alors $\mathfrak{t}$ est une algèbre de Cartan dans $\mathfrak{k}(k)$. On peut encore définir des polynômes $\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{z}(k)}$, $\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{k}(k)}$ sur $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$. Les groupes de Weyl $W(\mathfrak{t};\mathfrak{k})$ et $W(\mathfrak{t}:\mathfrak{k}(k))$ sont tels que $W(\mathfrak{t}:\mathfrak{k}(k)) \subset W(\mathfrak{t}:\mathfrak{k})$. Si w appartient à l'un de ces groupes de Weyl, soit $\epsilon_w = \pm 1$ le déterminant de l'action de w sur $i\mathfrak{t}^*$.

Nous allons étendre les résultats de [4, Chapitre 7] aux intégrales orbitales $\mathrm{Tr_s}^{[\gamma]}\left[L\exp\left(-tD^{X,2}\right)\right]$.

Théorème 8.1. *Si γ est non elliptique, pour $t > 0$,*

$$\mathrm{Tr_s}^{[\gamma]}\left[L\exp\left(-tD^{X,2}\right)\right] = 0. \tag{8.2}$$

Si $\dim \mathfrak{b} > 0$, pour $t > 0$,

$$\mathrm{Tr_s}^{[1]}\left[L\exp(-tD^{X,2})\right] = 0. \tag{8.3}$$

Si $\dim \mathfrak{b} = 0$, pour $t > 0$,

$$\mathrm{Tr_s}^{[1]}\left[L\exp\left(-tD^{X,2}\right)\right] = \phi_{\mathrm{HC}} L\left(-\rho^{\mathfrak{k}} - \lambda\right)(-1)^{\dim \mathfrak{p}/2} \frac{\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{g}}\left(\frac{\rho^{\mathfrak{k}}+\lambda}{2\pi}\right)}{\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{k}}\left(\frac{\rho^{\mathfrak{k}}}{2\pi}\right)}. \tag{8.4}$$

Plus généralement, si $\gamma = k^{-1}|_{k\in K}$, si $\dim \mathfrak{b} > 0$, alors

$$\mathrm{Tr_s}^{[\gamma]}\left[L\exp\left(-tD^{X,2}\right)\right] = 0. \tag{8.5}$$

Si $\gamma = k^{-1}|_{k\in T}$, si $\dim \mathfrak{b} = 0$, alors

$$\mathrm{Tr_s}^{[\gamma]}\left[L\exp\left(-tD^{X,2}\right)\right] = \phi_{\mathrm{HC}} L\left(-\rho^{\mathfrak{k}} - \lambda\right)(-1)^{\dim \mathfrak{p}(k)/2} \frac{1}{\pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{k}(k)}\left(\frac{\rho^{\mathfrak{k}(k)}}{2\pi}\right)} \frac{1}{\prod_{\alpha \in R^{\mathrm{im}}_+ \setminus R^{\mathrm{im}}_+(k)} 2\sinh\left(-\langle \alpha, \kappa\rangle/2\right)}$$
$$\sum_{w \in W(\mathfrak{t}:\mathfrak{k}(k))\backslash W(\mathfrak{t}:\mathfrak{k})} \epsilon_w \pi^{\mathfrak{t},\mathfrak{z}(k)}\left(\frac{w\left(\rho^{\mathfrak{k}}+\lambda\right)}{2\pi}\right) e^{-\langle w(\rho^{\mathfrak{k}}+\lambda),\kappa\rangle}. \tag{8.6}$$

Quand $\gamma = 1$, on retrouve ainsi des résultats d'Atiyah-Schmid [1]. Le théorème qui précède est également compatible avec la conjecture de Vogan démontrée par Huang–Pandžić [11].

Nous remercions Laurent Clozel pour les nombreuses remarques qu'il nous a faites sur ce travail, jusque dans sa mise au point.

Références

[1] M.F. Atiyah, W. Schmid, A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, Invent. Math. 42 (1977) 1–62.
[2] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, Manifolds of Nonpositive Curvature, Progress in Mathematics, vol. 61, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, USA, 1985.
[3] J.-M. Bismut, Laplacien hypoelliptique et intégrales orbitales, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (19–20) (2009) 1189–1195.
[4] J.-M. Bismut, Hypoelliptic Laplacian and Orbital Integrals, Annals of Mathematics Studies, vol. 177, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2011.
[5] J.-M. Bismut, S. Shen, Geometric orbital integrals and the center of the enveloping algebra, arXiv:1910.11731, October 2019.
[6] M. Duflo, Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 3 (1970) 23–74.
[7] P.B. Eberlein, Geometry of Nonpositively Curved Manifolds, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, USA, 1996.
[8] Harish-Chandra, A formula for semisimple Lie groups, Amer. J. Math. 79 (1957) 733–760.
[9] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups. II. Explicit determination of the characters, Acta Math. 116 (1966) 1–111.
[10] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. I. The theory of the constant term, J. Funct. Anal. 19 (1975) 104–204.
[11] J.-S. Huang, P. Pandžić, Dirac cohomology, unitary representations and a proof of a conjecture of Vogan, J. Amer. Math. Soc. 15 (1) (2002) 185–202.
[12] A.W. Knapp, Representation Theory of Semisimple Groups, Princeton Mathematical Series, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1986, An overview based on examples.
[13] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive Lie groups, Invent. Math. 48 (3) (1978) 207–220.
[14] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47–87.
[15] M. Vergne, On Rossmann's character formula for discrete series, Invent. Math. 54 (1) (1979) 11–14.