C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 357 (2019) 737–742

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Topologie

Théorème de Whitehead stratifié et invariants de nœuds

Stratified Whitehead's theorem and knot invariants

Sylvain Douteau

Université de Picardie-Jules-Verne, 33, rue Saint-Leu, 80000 Amiens, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 3 avril 2019
Accepté après révision le 17 septembre 2019
Disponible sur Internet le 26 septembre 2019

Présenté par Claire Voisin

RÉSUMÉ

En considérant des homotopies préservant la stratification, on obtient une notion naturelle d'homotopie pour les espaces stratifiés. Dans cette note, on présente des invariants d'homotopie stratifiée, les groupes d'homotopie stratifiés. On montre que ces groupes d'homotopie stratifiés vérifient un analogue stratifié au théorème de Whitehead. Comme illustration, on présente un invariant de nœud complet défini à partir des groupes d'homotopie stratifiés.

ABSTRACT

By considering homotopies that preserve the stratification, one obtains a natural notion of homotopy for stratified spaces. In this short note, we introduce invariants of stratified homotopy, the stratified homotopy groups. We show that they satisfy a stratified version of Whitehead's theorem. As an example, we introduce a complete knot invariant defined via the stratified homotopy groups.

1. Introduction

Un espace stratifié est un espace topologique muni d'une décomposition en strates. Ces décompositions apparaissent lors de l'étude d'objets singuliers. H. Whitney [10] a, par exemple, montré que, pour toute variété algébrique complexe V, il existait une décomposition de V en strates telle que chaque strate est une variété algébrique lisse et telle que les strates satisfont des conditions de recollement. En abstrayant ces conditions de recollements, on aboutit à la notion de pseudo-variété topologique. Une pseudo-variété topologique est un espace topologique X muni d'une décomposition en strates telle que chaque strate est une variété topologique et telle que chaque point admet un voisinage conique. (Pour une présentations des différentes notions de pseudo-variétés, voir, par exemple, [6]). L'ensemble des strates de X, noté P_X, est naturellement muni d'une relation d'ordre (partielle). En effet, si $S, T \subset X$ sont deux strates de X, on a $S \cap \bar{T} \neq \emptyset \Leftrightarrow S \subset \bar{T}$, et on définit la relation d'ordre par $S \leq T$ si et seulement si la condition précédente est vérifiée. La notion de

Adresse e-mail : sylvain.douteau@u-picardie.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2019.09.001
1631-073X/

pseudo-variété elle-même est trop rigide pour permettre une étude homotopique, mais on peut définir une notion générale d'espace stratifié à partir de la notion d'ensemble ordonné de strates (Voir, par exemple, [11] ou [7].)

Définition 1.1. Un espace stratifié est la donnée d'un triplet (X, P_X, φ_X), où

- X est un espace topologique,
- P_X est un ensemble ordonné de strates,
- $\varphi_X\colon X \to P_X$ est une application continue, où l'ensemble ordonné P_X est muni de la topologie d'Alexandroff.

Une application stratifiée $f\colon (X, P_X, \varphi_X) \to (Y, P_Y, \varphi_Y)$ est la donnée d'une paire d'applications continues f, $\widehat{f}$ telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & Y \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ P_X \arrow[r, "\widehat{f}"'] & P_Y \end{tikzcd}$$

Ceci définit la catégorie des espaces stratifiés Strat.

Les invariants utilisés pour l'étude des espaces stratifiés, tels que la cohomologie d'intersection [3] ou la ∞-catégorie des chemins sortants [8,11,7] sont des invariants du **type d'homotopie stratifié**.

Définition 1.2. Soient $f, g\colon (X, P_X, \varphi_X) \to (Y, P_Y, \varphi_Y)$ deux applications stratifiées. On dit que f et g sont homotopes par une homotopie stratifiée s'il existe une application stratifiée H

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\varphi_X \circ \mathrm{pr}_X"'] & Y \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ P_X \arrow[r, "\widehat{H}"'] & P_Y \end{tikzcd}$$

telle que $H_{|X\times\{0\}} = f$ et $H_{|X\times\{1\}} = g$. On dit que $f\colon (X, \varphi_X) \to (Y, \varphi_Y)$ est une équivalence d'homotopie stratifiée s'il existe une application stratifiée $g\colon (Y, \varphi_Y) \to (X, \varphi_X)$ telle qu'il existe des homotopies stratifiées entre $f \circ g$ et Id_Y et entre $g \circ f$ et Id_X. On dira, dans ce cas, que (X, P_X, φ_X) et (Y, P_Y, φ_Y) ont le même type d'homotopie stratifié.

L'objet de cette note est de présenter un invariant du type d'homotopie stratifié, les groupes d'homotopie stratifiés. On en présente une application à la théorie des espaces stratifiés et une indépendante de cette dernière.

Dans [1], l'auteur a défini la catégorie modèle des ensembles simpliciaux filtrés et en a déduit une version filtré du théorème de Whitehead [1, Theorem 4.23]. Dans les sections 2 et 3, on rappelle la définition des groupes d'homotopie stratifiés ainsi que les notions nécessaires pour énoncer une reformulation de ce théorème (Théorème 3.1). On en fournit aussi une preuve élémentaire.

Dans la section 4, on présente une application originale de la théorie homotopique des espaces stratifiés à l'étude des nœuds. Celle-ci vient illustrer comment la notion d'espaces stratifiés permet d'étudier des plongements. On montre qu'à chaque nœud on peut associer une stratification de la sphère et que le type d'homotopie stratifié de cette dernière fournit un invariant complet du nœud.

2. Pointages et groupes d'homotopie stratifiés d'un espace stratifié

Remarque 1. Si f et g sont deux applications stratifiées homotopes par une homotopie stratifiée, alors $\widehat{f} = \widehat{g}$. En particulier, si f est une équivalence d'homotopie stratifiée, $\widehat{f}$ est un isomorphisme. Pour cette raison, il est commode de fixer un ensemble ordonné P et de considérer des applications stratifiées $f\colon (X, P, \varphi_X) \to (Y, P, \varphi_Y)$ telles que $\widehat{f} = \mathrm{Id}_P$. On note Top/P la sous catégorie de Strat correspondante. Dans ce contexte, on omettra l'ensemble ordonné P et on notera simplement (X, φ_X). On parlera alors d'espaces et d'applications **filtrées**, pour éviter l'ambiguïté.

Pour pouvoir définir la notion de pointage d'un espace stratifié, il est nécessaire d'introduire la catégorie des ensembles simpliciaux filtrés. On rappelle les définitions suivantes, issues de [1].

Définition 2.1. On définit la catégorie $\Delta(P)$ des P-simplexes filtrés comme suit :

- les objets sont les morphismes d'ensembles simpliciaux $\psi\colon \Delta^n \to N(P)$, où Δ^n est un simplexe et $N(P)$ est le nerf de l'ensemble ordonné P,

- les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}(\psi\colon \Delta^n \to N(P), \mu\colon \Delta^m \to N(P)) = \{f\colon \Delta^n \to \Delta^m \mid \mu \circ f = \psi\}.$$

On définit la catégorie $R(P)$ des P-simplexes réduits comme la sous-catégorie pleine de $\Delta(P)$ contenant les objets tels que $\psi\colon \Delta^n \to N(P)$ est un monomorphisme. Pour alléger les notations, on note Δ^ψ le simplexe filtré $\psi\colon \Delta^n \to N(P)$.

Remarque 2. Par des arguments généraux, on a l'équivalence de catégorie

$$\mathrm{Fun}(\Delta(P)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) \simeq s\mathrm{Set}/N(P)$$

où $s\mathrm{Set}/N(P)$ est la catégorie des ensembles simpliciaux au-dessus de $N(P)$. Un ensemble simplicial filtré est un objet de $s\mathrm{Set}/N(P)$, c'est-à-dire un ensemble simplicial K muni d'une application simpliciale $\varphi_K\colon K \to N(P)$.

Remarque 3. Si $\varphi_K\colon K \to N(P)$ est un ensemble simplicial filtré, on peut considérer sa réalisation géométrique $||\varphi_K||\colon ||K|| \to ||N(P)||$. En composant avec l'application canonique

$$\varphi_P\colon ||N(P)|| \to P.$$

On obtient l'espace filtré $||(K, \varphi_K)||_P = (||K||, \varphi_P \circ ||\varphi_K||)$. Ceci définit un foncteur

$$||-||_P\colon s\mathrm{Set}/N(P) \to \mathrm{Top}/P.$$

Proposition 2.2. *Le foncteur $||-||_P$ admet un adjoint à droite :*

$$\mathit{Sing}_P\colon \mathit{Top}/P \to \mathit{sSet}/N(P).$$

De plus, les foncteurs Sing_P et $||-||_P$ préservent les homotopies stratifiées.

Démonstration. L'existence d'un adjoint à droite est une conséquence générale de la théorie des catégories de préfaisceaux (voir la remarque 2). On pourra consulter [7, Definition A.6.2 et Remark A.6.3] pour une définition explicite du foncteur Sing_P. Les affirmations suivantes proviennent respectivement de l'isomorphisme naturel $||K \times \Delta^1|| \simeq ||K|| \times [0,1]$, et de l'existence d'une application simpliciale naturelle

$$i_X\colon \mathrm{Sing}_P(X, \varphi_X) \times \Delta^1 \to \mathrm{Sing}_P(X \times [0,1], \varphi_X \circ \mathrm{pr}_X). \quad \square$$

Pour définir les groupes d'homotopie stratifiés, il est nécessaire d'introduire une notion de pointage adaptée aux espaces stratifiés. Un pointage d'un espace stratifié $\varphi_X\colon X \to P$ sera donc la donnée de points dans les strates $X_p = \varphi_X^{-1}(p)$ de X ainsi que de chemins (et de simplexes de dimensions plus grandes) reliant ces points.

Définition 2.3. Soit (X, φ_X) un espace filtré. Un pointage de (X, φ_X) est la donnée d'un sous-ensemble simplicial $V \subseteq N(P)$ et d'une application filtrée

$$\phi\colon ||V||_P \to (X, \varphi_X).$$

Quelques définitions intermédiaires sont encore nécessaires pour définir les groupes d'homotopie stratifiés.

Définition 2.4. Soient (X, φ_X), (Y, φ_Y) deux espaces filtrés. On munit l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}/P}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$ de la topologie induite par l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}/P}((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y)) \subset C^0(X, Y),$$

et on note $C^0_P((X, \varphi_X), (Y, \varphi_Y))$ l'espace topologique correspondant.

Remarque 4. On a en fait un bi-foncteur $C^0_P\colon \mathrm{Top}/P^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Top}/P \to \mathrm{Top}$.

Définition 2.5. Soit (X, φ_X) un espace filtré. On définit le foncteur d'entrelacs homotopiques généralisés de (X, φ_X) comme

$$\begin{aligned} \mathrm{Holink}(X, \varphi_X)\colon R(P)^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Top} \\ \Delta^\psi &\mapsto C^0_P\left(||\Delta^\psi||_P, (X, \varphi_X)\right). \end{aligned}$$

Remarque 5. On remarque que si $\psi\colon \Delta^0 \to N(P)$ correspond à l'inclusion du sommet $\{p\}$ dans $N(P)$, alors $\mathrm{Holink}(X,\varphi_X)(\Delta^\psi)$ est simplement la p-strate de X, $X_p = \varphi_X^{-1}(p)$. De même, si $\psi\colon \Delta^1 \to N(P)$ est l'inclusion du 1-simplexe correspondant à $p<q$, l'espace topologique $\mathrm{Holink}(X,\varphi_X)(\Delta^\psi)$ est l'entrelacs homotopique de la strate X_p dans la strate X_q, c'est-à-dire l'espace des chemins $\gamma\colon [0,1] \to X$ vérifiant $\gamma(0) \in X_p$, $\gamma(t) \in X_q$, $\forall\ 0 < t \leq 1$.

Définition 2.6. Soit (X,φ_X) un espace filtré, l'ensemble des composantes connexes stratifiées de (X,φ_X) est le foncteur défini sur les objets par

$$\begin{aligned} s\pi_0(X,\varphi_X)\colon R(P)^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Set} \\ \Delta^\psi &\mapsto \pi_0(\mathrm{Holink}(X,\varphi_X)(\Delta^\psi)). \end{aligned}$$

Soient $n \geq 1$ et $\phi\colon ||V||_P \to (X,\varphi_X)$ un pointage, le n-ième groupe d'homotopie stratifié de (X,φ_X) relativement au pointage ϕ est le foncteur défini sur les objets par

$$\begin{aligned} s\pi_n((X,\varphi_X),\phi)\colon R(P)^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Grp} \\ \Delta^\psi &\mapsto \begin{cases} \pi_n\left(\mathrm{Holink}(X,\varphi_X)(\Delta^\psi), \phi_{|\Delta^\psi}\right) & \text{si } \Delta^\psi \subseteq V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où Grp est la catégorie des groupes. Pour ces deux foncteurs, l'image des morphismes provient de la fonctorialité de $C^0_P(-,(X,\varphi_X))$ (voir la remarque 4) et de π_n.

Remarque 6. Si $P=\{*\}$, tout espace topologique X admet une unique stratification $\varphi_X\colon X \to \{*\}$. Dans ce cas, la catégorie $R(P)$ ne contient qu'un objet, $\psi\colon \Delta^0 \xrightarrow{\simeq} N(\{*\})$ et on a bien $s\pi_n(X,x)(\Delta^\psi) \simeq \pi_n(X,x)$.

3. Théorème de Whitehead stratifié

Théorème 3.1. *Soient X et Y deux pseudo-variétés triangulables, et $f\colon X \to Y$ une application continue préservant les strates. Alors, f admet un inverse à homotopie stratifiée près si et seulement si $\widehat{f}$ induit un isomorphisme entre P_X et P_Y et si, pour tout pointage $\phi\colon ||V||_{P_X} \to (X,\varphi_X)$ et pour tout $n \geq 0$, f induit des isomorphismes*

$$s\pi_n((X,\varphi_X),\phi) \to s\pi_n((Y,\varphi_Y), f\circ\phi).$$

Par la remarque 1, on se ramène au cas où les ensembles ordonnés de strates P_X et P_Y sont égaux, et on note simplement P cet ensemble ordonné. La preuve de ce théorème découle ensuite du résultat suivant.

Théorème 3.2 *([1, Theorem 3.19]). Il existe une structure de catégorie modèle sur $sSet/N(P)$ où les cofibrations sont les monomorphismes et où les équivalences d'homotopie sont les équivalences d'homotopie stratifiées. De plus, les équivalences faibles entre objets fibrants sont exactement les morphismes induisant des isomorphismes entre groupes d'homotopie stratifiés.*

Démonstration. Le sens direct du Théorème 3.1 est une conséquence de la définition de $s\pi_n$. L'idée de la preuve de la réciproque est contenue dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & {||\mathrm{Sing}_P Y||_P} \arrow[r, "||\widetilde{g}||_P"] & {||\mathrm{Sing}_P X||_P} \arrow[r, "||\mathrm{Sing}_P(f)||_P"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_X"] & {||\mathrm{Sing}_P Y||_P} \arrow[d, "\mathrm{ev}_Y"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[u, "i_Y"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
{||\mathrm{Sing}_P X||_P} \arrow[r, "||\widetilde{h}||_P"] & {||\mathrm{Sing}_P Y||_P} \arrow[r, "||\mathrm{Sing}_P(g)||_P"] \arrow[u, "\mathrm{ev}_Y"] & {||\mathrm{Sing}_P X||_P} \arrow[u, "\mathrm{ev}_X"] &
\end{tikzcd}$$

On suppose que f induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie stratifiés. C'est donc aussi le cas pour $\mathrm{Sing}_P(f)$ (voir [1]). De plus, par [7, Theorem A.6.4] $\mathrm{Sing}_P(X)$ et $\mathrm{Sing}_P(Y)$ sont des quasi-catégories. On en déduit que ce sont des objets fibrants pour la catégorie modèle du Théorème 3.2. Finalement, $\mathrm{Sing}_P(f)$ est une équivalence faible entre objets fibrants et cofibrants, c'est donc une équivalence d'homotopie stratifiée. On note $\widetilde{g}$ un inverse à homotopie stratifiée près. Comme Y est triangulable, il existe $\varphi_L\colon L \to N(P)$ tel que $(Y,\varphi_Y) \simeq ||(L,\varphi_L)||_P$. En réalisant l'unité de l'adjonction $(||-||_P, \mathrm{Sing}_P)$, on obtient l'application stratifiée $i_Y\colon Y \to ||\mathrm{Sing}_P(Y)||_P$, qui permet de définir g. Comme $\widetilde{g}$ est un inverse de $\mathrm{Sing}_P(f)$, et que l'adjonction $||-||_P$, Sing_P préserve les homotopies stratifiées, on a que g est un inverse à gauche de f à homotopie stratifiée près. On en déduit, en particulier, que g induit des isomorphismes sur tous les groupes d'homotopie stratifiés. En répétant la construction pour g, on obtient h un inverse à gauche de g à homotopie stratifiée près. Puisque g admet un inverse à gauche et à droite, c'est une équivalence d'homotopie stratifiée, d'inverse f. □

4. Application à l'étude des nœuds

Le complémentaire d'un nœud dans S^3 est un invariant important de la théorie des nœuds classique. Son type d'homéomorphisme est un invariant complet du nœud [2]. Le groupe fondamental du complémentaire, (appelé groupe du nœud) muni du sous-groupe périphérique permettent de retrouver le type d'homéomorphisme du complémentaire [9]. (On se réfère à [4,5] pour une exposition de ces résultats classiques.) Dans cette section, on montre comment cette donnée algébrique – caractérisant complètement un nœud – peut s'interpréter comme la donnée d'un type d'homotopie stratifié.

Définition 4.1. Soit $\gamma\colon S^1 \to S^3$ un nœud lisse. On note $K = \gamma(S^1)$. On voit S^3 comme un espace stratifié au-dessus de $P = \{0 < 1\}$ en définissant $\varphi\colon S^3 \to P$ comme

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ 1 & \text{si } x \in S^3 \setminus K. \end{cases}$$

On note X_γ l'espace stratifié correspondant.

Remarque 7. l'espace topologique $C^0_P([0,1], X_\gamma)$ est l'espace des applications $f\colon [0,1] \to S^3$ telles que $f(0) \in K$, et $f(t) \in S^3 \setminus K$, $t > 0$. Il est faiblement équivalent au bord d'un voisinage tubulaire de K, *i.e.* à un tore.

Fixons un pointage de X_γ, $\phi\colon [0,1] \to X_\gamma$ et calculons son premier groupe d'homotopie stratifié. D'après la remarque précédente, on obtient le diagramme suivant :

$$s\pi_1(X_\gamma, \phi) = \begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{Z} & & G_\gamma \end{tikzcd}$$

où G_γ est le groupe fondamental du complémentaire du nœud, et f est induit par l'inclusion du bord d'un voisinage tubulaire de K dans le complémentaire de K. En particulier, $f(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \subset G_\gamma$ est le sous-groupe périphérique. Finalement, on a le résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soient $\gamma_1, \gamma_2\colon S^1 \to S^3$ deux nœuds lisses. Il existe un homéomorphisme $f\colon S^3 \to S^3$ tel que $f(\gamma_1(S^1)) = \gamma_2(S^1)$ si et seulement s'il existe une équivalence d'homotopie stratifiée $g\colon X_{\gamma_1} \to X_{\gamma_2}$.*

Démonstration. Tout homéomorphisme vérifiant les hypothèses du théorème précédent est en particulier une équivalence d'homotopie stratifiée. Réciproquement, une équivalence d'homotopie stratifiée induit un isomorphisme entre les groupes de nœuds préservant les sous-groupes périphériques. Par les résultats de [9] et de [2], cela implique qu'il existe un homéomorphisme vérifiant les hypothèses du théorème. □

5. Exemple

Soit $V \subset \mathbb{CP}^n$ une variété algébrique projective lisse. Son cône projectif, $\mathbb{P}_c(V)$, est une variété singulière, avec une singularité isolée. C'est donc naturellement un espace stratifié sur l'ensemble ordonné $P = \{0 < 1\}$. On l'obtient comme l'espace de Thom de la restriction à V du fibré tautologique de $\mathbb{CP}^n$. Sa partie régulière est homéomorphe à l'espace total de ce fibré. En particulier, elle est homotopiquement équivalente à V. Sa partie singulière est réduite à un point, et l'entrelacs homotopique est – comme pour toute pseudo-variété – faiblement équivalent à un entrelacs, c'est-à-dire à l'espace total du fibré en sphère, que l'on notera $E(V)$. On fixe un pointage $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{P}_c(V)$, et on obtient, pour tout $n \geq 1$:

$$s\pi_n(\mathbb{P}_c(V), \phi) \simeq \begin{tikzcd} & \pi_n(E(V), \phi) \arrow[dl] \arrow[dr, "f_*"] & \\ 0 & & \pi_n(V, \phi(1)) \end{tikzcd}$$

où le morphisme f_* est induit par l'inclusion du fibré en sphère dans le fibré en disques.

Références

[1] S. Douteau, A simplicial approach to stratified homotopy theory, arXiv:1801.04797, 2018.
[2] C. Gordon, J. Luecke, Knots are determined by their complements, J. Amer. Math. Soc. 2 (2) (1989) 371–415.
[3] M. Goresky, R. MacPherson, Intersection homology theory, Topology 19 (2) (1980) 135–162.

[4] A. Gramain, Rapport sur la théorie classique des nœuds. I, in : Séminaire Bourbaki, Vol. 1975/76, 28^{e} année, Exp. No. 485, in : Lecture Notes Math., vol. 567, 1977, pp. 222–237.

[5] A. Gramain, Rapport sur la théorie classique des nœuds. II, in : Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/1991, Number 201–203, Exp. No. 732, 1992, pp. 89–113.

[6] B. Kloeckner, Quelques notions d'espaces stratifiés, in : Actes du séminaire de théorie spectrale et géométrie, Vol. 26, année 2007–2008, in : Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 26, Université Grenoble-I, Saint-Martin-d'Hères, France, 2009, pp. 13–28.

[7] J. Lurie, Higher algebra, http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf.

[8] D. Treumann, Exit paths and constructible stacks, Compos. Math. 145 (6) (2009) 1504–1532.

[9] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. (2) 87 (1968) 56–88.

[10] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. (2) 81 (1965) 496–549.

[11] J. Woolf, The fundamental category of a stratified space, J. Homotopy Relat. Struct. 4 (1) (2009) 359–387.