C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 1125–1130

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie analytique

Approximation polynomiale des jets de Whitney $\overline{\partial}$-plats de classe M

Approximation by polynomials of Whitney $\overline{\partial}$-flat jets of class M

Moulay Taïb Belghiti, Boutayeb El Ammari, Laurent P. Gendre

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 9 juin 2018
Accepté après révision le 8 novembre 2018
Disponible sur Internet le 16 novembre 2018

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Nous étudions le problème d'approximation polynomiale globale dans des classes de jets de Whitney $\overline{\partial}$-plats sur des compacts irréguliers de $\mathbb{C}^N$.

A B S T R A C T

We study the problem of global approximation by polynomials in Whitney $\overline{\partial}$-flat jet classes on irregular compacts of $\mathbb{C}^N$.

1. Motivations, notations et résultats

Dans cette note, nous généralisons à $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, les résultats de *Baouendi* et *Goulaouic* [1], obtenus pour les classes de Gevrey sur des compacts K de $\mathbb{R}^N$ à bords analytiques. Ces compacts constituent une partie de l'ensemble des compacts, de $\mathbb{C}^N$, réguliers au sens de Whitney, pour lesquels la classe des jets $\mathcal{H}_M(K)$ (cf. ci-après) s'identifie à une sous-classe des fonctions holomorphes à l'intérieur de K et $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord. Ici, nous considérons des classes $\mathcal{H}_M(K)$ beaucoup plus larges que la classe de Gevrey et sur des compacts très irréguliers de $\mathbb{C}^N$, pour lesquels l'identification précédente n'a pas forcément lieu.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$. La fonction extrémale de Siciak–Zaharjuta de K est définie par : $V_K(z) := \sup\{u(z) : u \in L_K(\mathbb{C}^N)\}$, $z \in \mathbb{C}^N$, où $L_K(\mathbb{C}^N) := \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : (\exists C \in \mathbb{R}), (\forall z \in \mathbb{C}^N), u(z) \leqslant C + \log(1+|z|), u|_K \leqslant 0\}$ est la classe de Lelong de K. Suivant [3] et [2], K vérifie la condition (**ŁS**) (Łojasiewicz–Siciak) s'il existe δ_0, C, $\beta > 0$ telles que : $(\forall z \in \mathbb{C}^N, d(z,K) \leqslant \delta_0)$, $V_K(z) \geqslant C d(z,K)^\beta$.

Pour $t_0 >> 0$, soit $\mu :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} \mu(t) = +\infty$, $\mu'(t) > 0$, et μ appartient à un corps de Hardy. On pose $M(t) := t^t e^{t\mu(t)}$. Rappelons qu'un jet $F := (F^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$ de Whitney $\overline{\partial}$-plat vérifie la propriété suivante : il existe une extension de Whitney $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}^N)$ de F telle que, pour $t > 0$, il existe $c_t > 0$ telle que $|\bar{\partial} f(\zeta)| \leqslant c_t d(\zeta, K)^t$, ζ dans $\mathbb{C}^N$,

Adresses e-mail : belghititaib@yahoo.fr (M.T. Belghiti), elammari@hotmail.fr (B. El Ammari), lgendre@math.univ-toulouse.fr (L.P. Gendre).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.11.005
1631-073X/

(cf. [4], [5] et [3]). Un jet F $\overline{\partial}$-plat est dit de la classe M, et on écrit $F \in \mathcal{H}_M(K)$ s'il existe deux constantes $\rho, C > 0$ telles que

1) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, avec $|\alpha| > t_0$, $\|F^\alpha\|_K \leqslant C\rho^{|\alpha|}M(|\alpha|)$,
2) pour tout $j \in \mathbb{N}$ avec $j+1 > t_0$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, tels que $|\alpha| \le j$, et ξ, $z \in K$, on a $\left|\left(R_\xi^j F\right)^\alpha(z)\right| \leqslant C\rho^{j+1}\frac{M(j+1)}{(j-|\alpha|+1)!}|z-\xi|^{j-|\alpha|+1}$, où

$$\left(R_\xi^j F\right)^\alpha(z) = F^\alpha(z) - \sum_{|\beta|\leqslant j-|\alpha|} F^{\alpha+\beta}(\xi)\frac{(z-\xi)^\beta}{\beta!}, \text{ pour } (j,\alpha,\xi,z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{2N}\times K\times K, \text{ avec } |\alpha| \le j.$$

La quantité $e^{t\mu(t)}$ mesure le défaut d'analyticité de la classe $\mathcal{H}_M(K)$.

Pour $\lambda > 0$ et $\tau \ge 0$, $M_{(\mu_{\lambda,\tau})}$ est la fonction associeé à $\mu_{\lambda,\tau}(t) := \mu(\lambda.t+\tau)$. Soient $\Omega_{(\mu_{\lambda,\tau})}$, $\overline{\Omega}_{(\mu_{\lambda,\tau})}$ les poids définis par : $\Omega_{(\mu_{\lambda,\tau})}(x) = \inf_{t\gg 0} x^{-t}\frac{M_{(\mu_{\lambda,\tau})}(t)}{t^t}$, $\overline{\Omega}_{(\mu_{\lambda,\tau})}(x) = \inf_{t\gg 0} x^{-t}M_{(\mu_{\lambda,\tau})}(t)$ et on pose $\omega_{(\mu_{\lambda,\tau})}(x) = -\log\Omega_{(\mu_{\lambda,\tau})}(x)$, $\overline{\omega}_{(\mu_{\lambda,\tau})}(x) = -\log\overline{\Omega}_{(\mu_{\lambda,\tau})}(x)$, $x >> 0$.

Nous avons les résultats suivants.

Théorème 1. *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant la condition (**ŁS**). On suppose que V_K est Hölder continue. Soit $F := \left(F^\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ un jet de $\mathcal{H}_M(K)$. Alors il existe $s, r \ge 1$, $D > 0$ dépendant de K et une suite $(\mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$ avec $\deg(\mathbf{P}_n) \le n$ tels que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, il existe $C_\alpha > 0$, vérifiant*

$$\left\|F^\alpha - D_z^\alpha \mathbf{P}_n\right\|_K \le C_\alpha e^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ assez grand}, \tag{1}$$

où $\|\cdot\|_K$ est la norme uniforme sur K.

Les fonctions $e^\alpha := F^\alpha - (D^\alpha h)\restriction K$ sont les composantes du jet d'incertitude $e := F - \left((D^\alpha h)\restriction K\right)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ d'un jet $F := (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ sur K par rapport à h de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N)$.

Théorème 2. *Avec les hypothèses du Théorème 1, il existe $s, r \ge 1$, $D > 0$ dépendant de K et une suite $(\mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$ avec $\deg(\mathbf{P}_n) \le n$ tels que, si l'on pose : $\mathbf{e}_n^\alpha(z) := F^\alpha(z) - D_z^\alpha\mathbf{P}_n(z)$, pour $(n,\alpha,z) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^{2N}\times K$, alors, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$ avec $|\alpha| \le l$, il existe $C_l > 0$ tel qu'on a :*

$$\frac{\left|\left(R_\xi^l \mathbf{e}_n\right)^\alpha(z)\right|}{|\xi - z|^{l-|\alpha|}} \le C_l e^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n)}, \tag{2}$$

pour tout $\xi, z \in K$ tels que $\xi \neq z$ et pour tout n entier assez grand.

Théorème 3. *Avec les hypothèses du Théorème 1, il existe $s, r \ge 1$, $D > 0$ dépendant de K et une suite $(\mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$ avec $\deg(\mathbf{P}_n) \le n$, tels que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C_l > 0$, telle que pour tout $n >> 0$, on a :*

$$\|F - \Pi_n\|_l^K \leqslant C_l e^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n)}, \tag{3}$$

où Π_n désigne le jet $\left(D^\alpha P_n \restriction K\right)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ et où les $\|\cdot\|_l^K$ sont les semi-normes de Whitney sur K (cf. [3], p. 706).

2. Démonstration des résultats

Le schéma général suit une démarche analogue à celle de [3]. Les différences sont liées à l'aspect quantitatif et concernent les degrés d'approximation, les zones de niveaux de la fonction de Green et le formalisme à poids associés à la classe ultradifférentiable en question.

2.1. Preuve du Théorème 1

La condition (**ŁS**) et la propriété de continuité de Hölder entrainent que K est s-H convexe pour un $s \ge 1$. La proposition 3 de [5] stipule que, pour $\rho > 0$, il existe B, C, $0 < B < 1 < C$, dépendant de K, ρ, s, N, et qu'il existe des fonctions w_i $i = 1,\dots,N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $O(B,s) := \{(\zeta,z) \in (\mathcal{V}(K)\setminus K)\times\mathbb{C}^N : d(z,K) < B{\cdot}d(\zeta,K)^s\}$ et holomorphes en z dans $O(B,s,\zeta) := \{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < B{\cdot}d(\zeta,K)^s\}$, pour $\zeta \in V(K)\setminus K$, où $\mathcal{V}(K) := \{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < 1\}$. Comme $F \in \mathcal{H}_M(K)$, il existe une extension f de Whitney de F et deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que, pour $t > 0$, on ait

$$\left|\overline{\partial} f(\zeta)\right| \le a.b^t e^{t\mu(t)} d(\zeta,K)^t, \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K. \tag{4}$$

On pose $r := (Ns+\rho)(2N-2)+1$. Le théorème 18 de [4] et la proposition 3 de [2] assurent que, dans $\mathcal{H}_{M_{(\mu_{s,r})}}(K)$, chaque composante F^α possède la représentation intégrale

$$F^\alpha(z) = \int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)} \bar\partial f(\zeta)\wedge D_z^\alpha H(z,\zeta) = \sum_{j=1}^N F_j^\alpha(z),\ \text{avec}$$
$$F_j^\alpha(z) = \int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)} (-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta) D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)$$

où $H(z,\zeta) = \sum_{j=1}^N H_j(z,\zeta)\bigwedge_{k\neq j} \mathrm{d}\overline{\zeta}_k\wedge\omega(\zeta)$ est le noyau de Chaumat–Chollet, ce qui est compatible avec l'injection $\mathcal{H}_{M_{(\mu)}}(K)\hookrightarrow \mathcal{H}_{M_{(\mu_{s,r})}}(K)$.

Pour $T>0$ et $\varepsilon\in\,]0,1[$, on définit les zones de niveaux L_n, $(n\in\mathbb{N}^*)$, par :

$$L_n := \left\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K : \tilde{R}(\zeta)\geqslant 1+T\left(\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{nd_n}\right)^\varepsilon\right\},\ \text{où } \tilde{R} = 1+\sigma\,(R-1)^\eta\ \ (\sigma,\eta>0)$$

et $R(\zeta) := \sup\{\lambda>1 : \mathcal{U}_K(\lambda)\subset O(B,s,\zeta)\}$, avec $\mathcal{U}_K(\lambda) := \left\{z\in\mathbb{C}^N : V_K(z)<\log(\lambda)\right\}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers positifs. On considère le polynôme :

$$P_{nd_n} = \sum_{j=1}^N P_{nd_n,j},\ \text{avec } P_{nd_n,j}(z) := \int_{\zeta\in L_n} (-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\mathbf{L}_{nd_n}\left(H_j(\cdot,\zeta)\right)(z)\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\ (z\in K),$$

où $\mathbf{L}_{nd_n}$ est l'opérateur d'interpolation polynomiale de Lagrange associé à un sytème de $m_{n\cdot d_n}\left(:=\binom{N+n\cdot d_n}{n\cdot d_n}\right)$ points extrémaux de Fekete–Leja du compact K.

Estimons $\left|F_j^\alpha(z)-D_z^\alpha P_{nd_n,j}(z)\right|$. Pour tout $z\in K$ on a,

$$\begin{aligned}\left|F_j^\alpha(z)-D_z^\alpha P_{n\cdot d_n,j}(z)\right| &\leq \int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_n}\left|\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\right|\left|\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\right| \\ &\quad + \int_{L_n}\left|\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{n\cdot d_n}\left(H_j(.,\zeta)\right)(z)\right|\left|\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\right| \\ &= \int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus L_n} I_1(z,\zeta) + \int_{\zeta\in L_n} I_2(z,\zeta).\end{aligned}$$

D'après [5], il existe $E>0$ tel que $\left|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\right|\leq E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!d(\zeta,K)^{-r-|\alpha|.s}$, de sorte que

$$I_1(z,\zeta)\leqslant a.E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!\left(\frac{1}{d(\zeta,K)^{\frac{r}{s}+|\alpha|}}\Omega_{(\mu_{s,r})}\left(\frac{1}{b\cdot d(\zeta,K)}\right)\right)^s,\ (z,\zeta,\alpha)\in K\times(\mathcal{V}(K)\setminus K)\times\mathbb{N}^{2N}.$$

La propriété d'absorption de $\Omega_{(\mu_{r,s})}$ et l'inclusion

$$(\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n\subset U_n := \left\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K : d(\zeta,K)<\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{Cnd_n}\right\}\ \text{(dûe à } (\mathbf{ŁS})\text{) donnent}$$
$$I_1(z,\zeta)\leqslant C_1E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!\left(\Omega_{s,r}\left(\frac{nd_n}{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}\right)\right)^s\leqslant C_1E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!\mathrm{e}^{-s\overline{\omega}_{(\mu_{r,s})}(nd_n)}\ \text{pour}$$
$$\zeta\in(\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n \text{ et } z\in K,\ \text{de sorte que} \int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K} I_1(z,\zeta)\leqslant CE^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!\mathrm{e}^{-s\overline{\omega}_{(\mu_{r,s})}(nd_n)}.$$

Estimons $I_2(z,\zeta)$, en commençant par estimer $\left|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(z)\right|$, pour $(z,\zeta)\in K\times(\mathcal{V}(K)\setminus K)$. Les inégalités de Markov donnent :

$$\begin{aligned}&\left|D_z^\alpha\mathbf{L}_{(n+1)d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(z)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(z)\right| \\ &\quad\leq C((n+1)d_{n+1})^{r|\alpha|}\left\|\mathbf{L}_{(n+1)d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(\cdot)-\mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(\cdot)\right\|_K.\end{aligned}$$

Pour chaque $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$ fixé, la fonction $H_j(.,\zeta)$ est holomorphe en $z \in O(B,s,\zeta)$, de sorte qu'un schéma analogue à celui de [6] permet d'aboutir à

$$\left\| \mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(\cdot) - H_j(.,\zeta) \right\|_K \leqslant C_{M,N}(nd_n)^N \widetilde{R}(\zeta)^{2dn(N+M)} \left(\frac{1+(N+M)\widetilde{R}(\zeta)^{d_n}}{1+\widetilde{R}(\zeta)^{\delta d_n}} \right)^n \times \frac{\left(1+\widetilde{R}(\zeta)^{d_n}\right)^{N+M}}{\left(\widetilde{R}(\zeta)^{\delta d_n}-1\right)^{2(N+M)}} \times \frac{1}{\left(\widetilde{R}(\zeta)-1\right)^{\frac{q}{\eta\kappa}}}. \tag{5}$$

On pose $D := \frac{2\delta-1}{4}$. Lorsque ζ décrit L_n, l'estimation (5) donne

$$\left\| \mathbf{L}_{nd_n}(H_j(\zeta,\cdot))(\cdot) - H_j(.,\zeta) \right\|_K \leqslant \widetilde{C}_{M,N} \frac{1}{\left(e^{\delta \frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)}{n}} - 1 \right)^{2(M+N)}} (nd_n)^N \times \left(\frac{nd_n}{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)} \right)^{\frac{q}{\eta\kappa}} \times \left(\frac{2(1+M+N)}{\left(1+T\left(\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{nd_{d_n}}\right)^{\varepsilon}\right)^{Dd_n}} \right)^n e^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}.$$

On choisit d_n de sorte que $\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n) \geq n$, pour $n >> 0$. Ce choix entraîne que $e^{\delta \frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)}{n}} \geq e^{\delta}$ et que les quantités $a' := \limsup_{n\to+\infty} (nd_n)^{\frac{1}{n}}$ et $b' := \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{nd}{\omega_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}\right)^{\frac{1}{n}}$ sont finies. Posons $a := a'^N$ et $b := b'^{\frac{q}{\eta\kappa}}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \log \left(\frac{2\,a\,b\,(1+N+M)}{\left(1+T\left(\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{nd_n}\right)^{\varepsilon}\right)^{Dd_n}} \right) = -\infty.$$

En fixant $\rho_1 \in]0,1[$, on aura, pour $n >> 0$, $\frac{2ab(1+N+M)}{\left(1+T\left(\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{nd_n}\right)^{\varepsilon}\right)^{Dd_n}} \leqslant \rho_1$. Pour $\rho_2 \in]\rho_1, 1[$ fixé, l'inégalité triangulaire et les inégalités de Markov donnent, pour $n >> 0$ et $\zeta \in L_n$:

$$\left\| D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{(n+1)d_{(n+1)}}(H_j(.,\zeta))(\cdot) - D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(\cdot) \right\|_K \leqslant C_{\alpha} \rho_2^n e^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n)} \leqslant C_{\alpha}\rho_2^n,$$

donc $\sum_{n\geqslant n_0} \sup_{\zeta\in L_n} \left\| D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{(n+1)d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(\cdot) - D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(\cdot) \right\|_K < +\infty$. Il s'ensuit que, pour $z \in K$ et $\zeta \in L_n$,

$$\begin{aligned} \left| D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(z) - D_z^{\alpha} H_j(z,\zeta) \right| &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left| D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{kd_k}(H_j(.,\zeta)(z)) - D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{(k+1)d_{(k+1)}}(H_j(.,\zeta))(z) \right| \\ &\leq \left| D_z^{\alpha} \mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(z) - D_z^{\alpha} H_j(z,\zeta) \right| \leqslant \frac{\widetilde{C}_{\alpha}}{1-\rho_2} \rho_2^n e^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}. \end{aligned}$$

Ces estimations donnent

$$\left| F_j^{\alpha}(z) - D_z^{\alpha} P_{n\cdot d_n,j}(z) \right| \leq A_1' e^{-A_2' \cdot \overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)},$$

où $A_1' (= A_1'(\alpha)) > 0$ et $A_2' (= A_2'(K)) > 0$. Par ailleurs, pour $n >> 0$, il existe un unique k tel que $kd_k \leq n < (k+1)d_{k+1}$. On pose $\mathbf{P}_n := P_{k\cdot d_k}$. On aura alors $\deg(\mathbf{P}_n) \leq n$ et $\left\| F^{\alpha} - D_z^{\alpha}\mathbf{P}_n \right\|_K \leq A_{1,\alpha} e^{-A_2\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n)}$. □

2.2. Preuve du Théorème 2

Avec les notations de la preuve du Théorème 1, et $e_{nd_n}^{\alpha}(z) := F^{\alpha}(z) - D_z^{\alpha} P_{nd_n}(z)$, on a :

$$e_{nd_n}^{\alpha}(z) = \int_{L_n} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^{\alpha} \left(H(z,\zeta) - \mathbf{L}_{nd_n}(H(.,\zeta)(z)) \right) + \int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_n} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^{\alpha} H(z,\zeta) = I_{nd_n}^{\alpha}(z) + J_{nd_n}^{\alpha}(z).$$

Les coefficients de la forme différentielle $a^{\alpha}(z,\zeta) = \begin{cases} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^{\alpha} H(z,\zeta) & \text{si } \zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K \\ 0 & \text{si } \zeta \in K \end{cases}$ sont continues dans $O(B,s) \cup (K \times K)$. Pour $(l,\alpha,\zeta,\xi,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{2N} \times \mathcal{V}(K) \times K \times K$ tel que $|\alpha| \leq l$, on pose :

$$\left(R_{\xi}^{l} \mathbb{A}\right)^{\alpha}(z,\zeta) = a^{\alpha}(z,\zeta) - \sum_{|\nu|\leqslant l-|\alpha|} \frac{(z-\xi)^{\nu}}{\nu!} a^{\alpha+\nu}(\xi,\zeta).$$

On a l'estimation suivante

$$\left|\left(R_\xi^l \mathbb{A}\right)^\alpha(z,\zeta)\right| \leq a.C_1 C_2^{l+1}\,|\alpha|!\,|\xi-z|^{l-|\alpha|+1}\left(\frac{1}{d(\zeta,K)^{(l+1)+\frac{r}{s}}}\Omega_{(\mu_{s,r})}\left(\frac{1}{b\cdot d(\zeta,K)}\right)\right)^s,$$

où $C_i>0$. La condition (**ŁS**) fournit $(\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n \subseteq \left\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K : d(\zeta,K)<\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{C_2 nd_n}\right\}$, de sorte que pour $(z,\xi,n,\zeta)\in K\times K\times\mathbb{N}\times(\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n$, on a

$$\left|\left(R_\xi^l \mathbb{A}\right)^\alpha(z,\zeta)\right| \leq a.C_1 C_1' C_2^{l+1}\,|\alpha|!\,|\xi-z|^{l-|\alpha|+1}\,\mathrm{e}^{-s\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}.$$

Par suite,

$$\frac{\left|\left(R_\xi^l J_{nd_n}\right)^\alpha(z)\right|}{|\xi-z|^{l-|\alpha|}} \leqslant C_l'\,|\xi-z|\,\mathrm{e}^{-s\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)} \leqslant C_l \mathrm{e}^{-s\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}.$$

Pour $\alpha\in\mathbb{N}^{2N}$, on pose $b_{nd_n}^\alpha(z,\zeta) := \begin{cases}\bar\partial f(\zeta)\wedge D_z^\alpha\left(H(z,\zeta)-\mathbf{L}_{nd_n}(H(.,\zeta))(z)\right)\\ 0,\ \text{si } \zeta\in K,\end{cases}$ et $\left(R_\xi^l B_{nd_n}\right)^\alpha(z,\zeta) := b_{nd_n}^\alpha(z,\zeta) - \sum_{|\nu|\leqslant l-|\alpha|}\frac{(z-\xi)^\nu}{\nu!}b_{nd_n}^{\alpha+\nu}(\xi,\zeta)$. Avec le même choix de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait dans la démonstration du Théorème 1 et pour $(z,\xi,\zeta,\alpha)\in K\times K\times L_n\times\mathbb{N}^{2N}$ et $n>>0$, on obtient $\left|D_z^\alpha\mathbf{L}_{nd_n}(H_j(.,\zeta))(z)-D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\right| \leqslant C_\alpha\rho_2^n\mathrm{e}^{-D\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}d(\zeta,K)^{-|\alpha|s}$. Si $t\in]0,s[$, on déduit que

$$\int_{L_n}\left|\left(R_\xi^l\mathbb{B}_{n\cdot d_n}\right)^\alpha(z,\zeta)\right|\mathrm{d}\lambda_{2N}(\zeta) \leq C''_1 C''^{\,l+1}_2\,|\alpha|!\,|\xi-z|^{l-|\alpha|+1}\,\varrho_2^n$$

$$\times\,\mathrm{e}^{-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)}c_t\int_{L_n}d(\zeta,K)^{t-(l+1)s}\mathrm{d}\lambda_{2N}(\zeta),$$

pour $z,\ \xi\in K$, $l\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{N}^{2N}$ et $n>>0$. La propriété de continuité de Hölder de V_K fournit

$$L_n\subset\left\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K : d(\zeta,K)\geqslant\left(\frac{T}{\sigma C_h^\eta}\right)^{\frac{1}{\eta\kappa}}\left(\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(nd_n)}{nd_n}\right)^{\frac{\varepsilon}{\eta\kappa}}\right\}.$$

Ce qui donne

$$\int_{L_n}\left|\left(R_\xi^l\mathbb{B}_{n\cdot d_n}\right)^\alpha(z,\zeta)\right|\mathrm{d}\lambda_{2N}(\zeta) \leq C''_1 C''^{\,l+1}_2\,|\alpha|!\,|\xi-z|^{l-|\alpha|+1}\,\varrho_2^n\mathrm{e}^{-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)}\,\times$$

$$\times\, c(t)\lambda_{2N}(\mathcal{V}(K))\times\left(\frac{T}{\sigma C_h^\eta}\right)^{\frac{1}{\eta\kappa}(t-(l+1)s)}\left(\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)}{n\cdot d_n}\right)^{\frac{\epsilon}{\eta\kappa}(t-(l+1)s)}.$$

Pour $a\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ fixé, il existe $\varsigma_a>0$ tel que, $\mathrm{e}^{-\varsigma_a\cdot(\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(x))^a}\leq\frac{\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(x)}{x}$, $x>>0$. Comme $t-(l+1)s<0$, on a

$$\int_{L_n}\left|\left(R_\xi^l\mathbb{B}_{n\cdot d_n}\right)^\alpha(z,\zeta)\right|\mathrm{d}\lambda_{2N}(\zeta) \leq \widetilde{c}(t)\,\widetilde{C}_1\,\widetilde{C}_2^{l+1}\,|\alpha|!\times|\xi-z|^{l-|\alpha|+1}$$

$$\times\,\mathrm{e}^{-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)-n\log(\varrho_2^{-1})+\frac{\epsilon}{\eta\kappa}((l+1)s-t)\varsigma_a\cdot(\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n))^a}$$

pour $(z,\zeta,\alpha,l,n)\in K^2\times\mathbb{N}^{2N}\times\mathbb{N}^2$, où $\widetilde{c}(t),\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2$ sont des constantes, de sorte que

$$\frac{\left|\left(R_\xi^l I_{n\cdot d_n}\right)^\alpha(z)\right|}{|\xi-z|^{l-|\alpha|}} \leq \widetilde{C}_l\cdot\mathrm{e}^{-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)-n\log(\varrho_2^{-1})+\varsigma_a\cdot\frac{\epsilon}{\eta\kappa}.((l+1)s-t)(\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n))^a}.$$

Par ailleurs, il existe $\widetilde{D}>0$ vérifiant $-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)-n\log(\varrho_2^{-1})+\varsigma_a\cdot\frac{\epsilon}{\eta\kappa}.((l+1)s-t)(\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n))^a\leq-\widetilde{D}\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)$, de sorte que

$$\frac{\left|\left(R_\xi^l I_{n\cdot d_n}\right)^\alpha(z)\right|}{|\xi-z|^{l-|\alpha|}} \leq \widetilde{C}_l\cdot\mathrm{e}^{-\widetilde{D}\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)}.$$

Par suite,

$$\frac{\left|\left(R^l_\xi e_{n\cdot d_n}\right)^\alpha (z)\right|}{|\xi - z|^{l-|\alpha|}} \le C_l \cdot \mathrm{e}^{-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n\cdot d_n)} \text{ pour } n >> 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $jd_j \le n < (j+1)d_{j+1}$; comme dans la preuve du Théorème 1, on a : $\mathbf{P}_n := P_{j\cdot d_j}$, donc $\deg(\mathbf{P}_n) \le n$ et $\mathbf{e}^\alpha_n = e^\alpha_{j\cdot d_j} = \widetilde{D}'^{\alpha} F(z) - D^\alpha_z \mathbf{P}_n(z)$. Donc, pour $(l, \alpha, \xi, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{2N} \times k \times K$ avec $|\alpha| \le l$, $\xi \ne z$ et pour $n >> 0$, on a : $\dfrac{\left|\left(R^l_\xi \mathbf{e}_n\right)^\alpha (z)\right|}{|\xi - z|^{l-|\alpha|}} \le C_l \cdot \mathrm{e}^{-D\cdot\overline{\omega}_{(\mu_{s,r})}(n)}$. □

2.3. Preuve du Théorème 3

Elle résulte des Théorèmes 1 et 2, ainsi que de la définition des semi-normes de Whitney. □

Remarques. 1. Pour $k > 0$, si $\mu(t) = \frac{1}{k}\log(t)$, alors $\overline{\Omega}(x) \simeq \mathrm{e}^{-x^{\frac{k}{k+1}}}$ (classe de Gevrey). Si K est un compact de e^N à bord analytique lisse, nos résultats contiennent et précisent les résultats de Baouendi et Goulaouic [1].

2. Si $K \subset \mathbb{C}^N$ est Whitney 1-régulier, nos résultats s'énoncent sans perte de régularité. Le Théorème 1 contient les résultats des auteurs [1] et [2] annoncés sous une forme plus faible (cf. [3]) et le Théorème 3 de [2].

3. Dans le cas de la convexité au sens de Chirka, i.e. $s = 1$, on a $\overline{\Omega}_{\mu_{s,r}} \simeq \overline{\Omega}_\mu$, et les Théorèmes 1, 2 et 3 s'énoncent sans perte de régularité.

Références

[1] S. Baouendi, C. Goulaouic, Approximation polynomiale de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (4) (1971) 149–173.
[2] M.T. Belghiti, B. Elammari, P.L. Gendre, Approximation polynômiale dans des classes de jets, Banach Center Publications, vol. 107, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warsaw, 2015.
[3] M.T. Belghiti, P.L. Gendre, B. Elammari, Approximation polynômiale des jets de Whitney $\overline{\partial}$-plats, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (8) (2015) 705–709.
[4] J. Chaumat, A.-M. Chollet, Représentation intégrale de certaines classes de jets de whitney, Contemp. Math. 137 (1992) 133–153.
[5] J. Chaumat, A.-M. Chollet, Noyaux pour résoudre l'équation $\overline{\partial}$ dans les classes ultradifférentiables sur des compacts irréguliers de $\mathbb{C}$, in: Sev complex var, Stockholm, 1987/1988, in: Math. Notes, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1993, pp. 205–226.
[6] A. Zeriahi, Meilleure approximation polynomiale et croissance des fonctions entières sur certaines variétés algébriques affines, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37 (2) (1987) 79–104.