C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 887–891

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Physique mathématique

# Propagation des singularités et résonances

## *Propagation of singularities and resonances*

Jean-François Bony [a], Setsuro Fujiié [b], Thierry Ramond [c], Maher Zerzeri [d]

[a] *IMB, CNRS (UMR 5251), université de Bordeaux, 33405 Talence, France*
[b] *Department of Mathematical Sciences, Ritsumeikan University, 1-1-1 Noji-Higashi, Kusatsu, 525-8577 Japan*
[c] *Laboratoire de mathématiques d'Orsay, université Paris-Sud, CNRS, université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*
[d] *Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), 93430 Villetaneuse, France*

INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*
Reçu le 13 avril 2017
Accepté après révision le 26 juin 2017
Disponible sur Internet le 10 juillet 2017

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans le cadre de l'étude des résonances semiclassiques, on précise le lien entre majoration polynomiale du prolongement de la résolvante et propagation des singularités à travers l'ensemble capté. Cette approche permet d'éliminer l'infini et de concentrer l'étude près de l'ensemble capté. Nous l'avons utilisée dans des travaux antérieurs pour obtenir l'asymptotique des résonances dans diverses situations géométriques.



ABSTRACT

In the framework of semiclassical resonances, we make more precise the link between the polynomial estimates of the extension of the resolvent and the propagation of the singularities through the trapped set. This approach makes it possible to eliminate infinity and to concentrate the study near the trapped set. It has allowed us in previous papers to obtain the asymptotic of resonances in various geometric situations.



## 1. Introduction

Dans cette note, on considère un opérateur de Schrödinger semiclassique sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$,

$$P = -h^2 \Delta + V(x), \tag{1}$$

avec $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Plus généralement, on peut traiter le cas des opérateurs pseudodifférentiels rentrant dans le cadre des opérateurs « black box » de Sjöstrand et Zworski (voir par exemple [12]). La résolvante $(P - z)^{-1}$ est alors bien définie pour $\operatorname{Im} z > 0$ et admet, en tant qu'opérateur de $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, un prolongement méromorphe à un secteur angulaire

*Adresses e-mail :* bony@math.u-bordeaux.fr (J.-F. Bony), fujiie@fc.ritsumei.ac.jp (S. Fujiié), thierry.ramond@math.u-psud.fr (T. Ramond), zerzeri@math.univ-paris13.fr (M. Zerzeri).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.06.008
1631-073X/

$\{z \in \mathbb{C};\ -\theta_0 < \arg z \leq 0\}$ avec $\theta_0 > 0$. On appelle résonances de $P$ les pôles de ce prolongement. Nous renvoyons le lecteur à [12] pour une présentation détaillée de cette théorie.

On fixe une énergie $E_0 > 0$ et on s'intéresse aux résonances $z = z_h$ dans $B(E_0, Ch|\ln h|) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - E_0| < Ch|\ln h|\}$ avec $C > 0$, qui est le domaine naturel d'étude des résonances dans le cadre $C^\infty$ (voir par exemple [9]). On dit que *la résolvante tronquée de $P$ vérifie une estimation polynomiale dans $\Omega = \Omega_h \subset B(E_0, Ch|\ln h|)$* lorsque $P$ n'a pas de résonance dans $\Omega$ pour $h$ assez petit et, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe $N > 0$ tel que

$$\left\| \chi (P - z)^{-1} \chi \right\| \lesssim h^{-N}, \tag{2}$$

uniformément pour $z \in \Omega$ et $h$ assez petit. Ici, $(P - z)^{-1}$ désigne le prolongement de la résolvante mentionné ci-dessus. Pour que cela soit vrai, il suffit d'ailleurs que (2) soit satisfaite pour une seule fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 dans un compact assez grand. Néanmoins $N$ dépend de $\chi$. En fait, cette propriété est équivalente à une majoration polynomiale de la résolvante de $P_\theta$, l'opérateur distordu d'angle $\theta = Mh|\ln h|$ avec $M \gg 1$. Ce genre d'estimation correspond donc à l'absence de pseudospectre semiclassique polynomial pour l'opérateur non autoadjoint $P_\theta$. Les remarques précédentes découlent de la proposition D.1 de [2] étendue au cas $|\operatorname{Im} z| \lesssim h|\ln h|$.

Soit $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$ le symbole semiclassique de $P$ et $H_p = \partial_\xi p \cdot \partial_x - \partial_x p \cdot \partial_\xi = 2\xi \cdot \partial_x - \nabla V \cdot \partial_\xi$ son champ hamiltonien. Pour $E \in \mathbb{R}$, on note

$$\Gamma_\pm(E) = \{\rho \in p^{-1}(E);\ \exp(tH_p)(\rho) \not\to \infty \text{ quand } t \to \mp\infty\},$$

les ensembles sortant/entrant à l'infini. L'ensemble capté à énergie $E$ est défini par $K(E) = \Gamma_-(E) \cap \Gamma_+(E)$. On sait que $\Gamma_\pm(E)$ est fermé et que $K(E)$ est compact (voir [6, Appendix]).

Toutes les fonctions $u = u_h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ considérées dans la suite seront supposées polynomialement bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe $N \in \mathbb{R}$ avec $\|u\| \lesssim h^{-N}$. Pour $K \subset T^*\mathbb{R}^n$ un compact et $u$ une fonction polynomialement bornée, on dit que $u = 0$ microlocalement près de $K$ s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi = 1$ près de $K$ tel que $\operatorname{Op}(\varphi)u = \mathcal{O}(h^\infty)$ en norme $L^2$. Le lecteur pourra se reporter à Dimassi et Sjöstrand [4], Martinez [8] ou Zworski [15] pour une présentation détaillée de l'analyse microlocale semiclassique. On considère le *problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble capté*, c'est-à-dire les solutions $u$ de

$$\begin{cases} (P - z)u = v & \text{microlocalement près de } K(E_0), \\ u = u_0 & \text{microlocalement près de tout point de } \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0). \end{cases} \tag{3}$$

Cette équation doit être vue comme une équation de propagation, $u_0$ étant la donnée initiale et $v$ le second membre. On parle d'unicité du problème de Cauchy microlocal si toute solution $u$ de (3) avec $v = u_0 = 0$ est microlocalement nulle près de $K(E_0)$. Dans la littérature, ce genre de résultat porte parfois le nom de propagation des singularités. On parle d'existence du problème de Cauchy microlocal si, pour toutes données $v$, $u_0$ vérifiant $(P - z)u_0 = v$ microlocalement près de tout point de $\Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0)$, il existe une fonction $u$ solution de (3).

Les notions introduites ci-dessus sont reliées par le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Sous les hypothèses précédentes, sont équivalentes :*

*(i) une estimation polynomiale dans $\Omega$ de la résolvante tronquée,*
*(ii) l'unicité du problème de Cauchy microlocal (3) pour $z \in \Omega$.*

L'implication (ii)⇒(i) a déjà été prouvée dans [2]. Elle s'est révélée un argument clé pour le calcul asymptotique des résonances dans diverses situations géométriques (voir [1,2]). La réciproque est démontrée dans la section suivante. L'idée est d'étendre une solution du problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble capté, à l'aide du flot quantique associé à l'opérateur distordu $P_\theta$, afin de construire un quasimode de $P_\theta - z$.

À notre connaissance, dans tous les cas où la distribution des résonances a été établie, la résolvante tronquée est polynomialement bornée dès que l'on s'éloigne des résonances. Par ailleurs, Stefanov a démontré dans [13], sous des hypothèses très générales, que

$$\int_{[E_0 - \delta, E_0 + \delta]} \left\| \chi (P - z)^{-1} \chi \right\| \mathrm{d}z \lesssim h^{-N},$$

avec $N, \delta > 0$, et donc (i) est presque toujours vrai sur l'axe réel. Mais (i) est faux à distance $\mathcal{O}(h^\infty)$ des résonances. Comme on le voit, les assertions équivalentes du théorème peuvent être vraies pour certaines valeurs de $z$ et fausses pour d'autres valeurs de $z$ dans la région $|\operatorname{Im} z| \lesssim h|\ln h|$. En revanche, il n'est pas possible d'avoir une estimation polynomiale de la résolvante tronquée plus profondément dans le complexe (i.e. $\operatorname{Im} z \ll -h|\ln h|$), comme le montre la proposition 1.5 de [3].

Pour prouver l'existence de résonances très proches de l'axe réel, il est souvent fait usage de quasimodes de $P - z$ à support compact, comme par exemple dans Tang et Zworski [14]. De tels quasimodes n'existent pas lorsque $\operatorname{Im} z$ est d'ordre $h$ (voir [3]). Le théorème 1.1 permet de s'en passer, en transformant tout défaut d'unicité du problème de Cauchy microlocal en la production d'un quasimode global. De plus, comme le montre le résultat suivant, les deux implications du théorème 1.1 permettent parfois d'obtenir l'existence de résonances.

**Corollaire 1.2.** *Soit $D \subset B(E_0, Ch|\ln h|)$ un disque ouvert tel que l'unicité du problème de Cauchy microlocal (3) est vraie dans $\partial D$ mais pas dans $D$. Alors, $P$ a au moins une résonance dans $D$ pour $h$ assez petit.*

En effet, supposons que $P$ n'a pas de résonance dans $D$. Ainsi, $\chi(P-z)^{-1}\chi$ est holomorphe dans $D$ et continue dans $\overline{D}$. Comme on a unicité du problème de Cauchy microlocal (3), l'implication (ii)⇒(i) du théorème 1.1 montre que cette résolvante tronquée est polynomialement bornée dans $\partial D$. Par le principe du maximum, il en est de même dans $\overline{D}$. Par l'implication (i)⇒(ii) du théorème 1.1, on en déduit l'unicité du problème de Cauchy microlocal (3) dans $D$, ce qui contredit les hypothèses.

On donne maintenant quelques exemples d'application du théorème 1.1. Dans le cas non captif, c'est-à-dire $K(E_0) = \emptyset$, on a $\Gamma_-(E_0) = \Gamma_+(E_0) = \emptyset$ et l'unicité du problème de Cauchy microlocal est automatiquement vérifiée. Le théorème 1.1 implique donc qu'il n'y a pas de résonance proche de $E_0$ vérifiant $|\operatorname{Im} z| \leq Ch|\ln h|$. On retrouve ainsi un résultat de Martinez [9]. Par ailleurs, dans le cas d'un « puits dans l'isle », on a $\Gamma_-(E_0) = \Gamma_+(E_0) = K(E_0)$. Par conséquent, (3) devient $(P-z)u = v$ microlocalement près du puits (il n'y a plus de condition initiale). Soit $Q$ la réalisation de Dirichlet de l'opérateur $P$ restreint à un voisinage du puits. En utilisant la régularité elliptique hors du puits (c'est-à-dire dans la zone physiquement interdite), on montre facilement que l'unicité pour cette équation microlocale est vraie pour les $z$ suffisamment éloignés des valeurs propres de $Q$, mais est fausse sinon. Le corollaire 1.2 permet de conclure que les résonances de $P$ coïncident avec les valeurs propres de $Q$ modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$. On retrouve ainsi une version $C^\infty$ des résultats obtenus par Helffer et Sjöstrand [7] dans cette situation géométrique (voir aussi [5,10,11]). Le théorème 1.1 peut aussi être adapté au cadre de l'étude des valeurs propres d'un opérateur (1), avec $E_0 < 0$, par exemple. Comme dans le cas du puits dans l'isle, la condition initiale sur $\Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0)$ dans (3) disparaît. Le théorème 1.1 permet de caractériser l'absence de valeurs propres près de $E_0$ par : $(P-z)u = 0$ microlocalement près de $K(E_0) \Rightarrow u = 0$ microlocalement près de $K(E_0)$.

Dans [1] et [2], on a donné l'asymptotique des résonances dans le cas d'un point fixe hyperbolique et des trajectoires homoclines/hétéroclines. Pour ce faire, on a d'abord obtenu des zones sans résonances grâce à l'implication (ii)⇒(i) du théorème 1.1. Ensuite, on a démontré la présence des résonances en utilisant l'existence du problème de Cauchy microlocal près de l'ensemble capté et des « fonctions test » bien choisies. Pour prouver l'unicité du problème de Cauchy microlocal, on a suivi l'approche suivante : on considère une solution $u$ de (3) avec $v = u_0 = 0$. D'abord, on montre que $u$ possède une structure particulière (par exemple, $u$ est une distribution lagrangienne de variété associée bien déterminée). Ensuite, on projette l'équation (3) sur cette structure pour obtenir une équation réduite (par exemple, une équation de transport sur le symbole d'une distribution lagrangienne). Finalement, on résout cette équation simplifiée et on conclut que $u$ est nul microlocalement près de $K(E_0)$.

La propagation des singularités est une question classique de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Dans le cas présent, le défaut de propagation des singularités est dû à la « géométrie globale » de l'ensemble capté : le symbole $p$ peut très bien être réel de type principal (et donc vérifier le théorème classique d'Hörmander en tout point de $K(E_0)$) bien qu'il n'y ait pas unicité du problème de Cauchy microlocal (3). En revanche, la plupart des résultats obtenus dans ce domaine concernent des « situations irrégulières » (singularités des coefficients, obstacles, croisements de modes, ...). En adaptant la stratégie présentée dans cette note, il devrait être possible d'utiliser certains de ces résultats en théorie des résonances.

## 2. Preuve du théorème 1.1

L'implication (ii)⇒(i) a été démontrée dans la section 8 de [2]. Dans cet article, on supposait $|\operatorname{Im} z| \lesssim h$, mais la preuve s'étend sans modification au cas $|\operatorname{Im} z| \lesssim h|\ln h|$.

On montre maintenant l'implication (i)⇒(ii) par l'absurde. Supposons que (i) soit vrai et qu'il existe une solution $u$ de

$$\begin{cases} (P-z)u = 0 & \text{microlocalement près de } K(E_0), \\ u = 0 & \text{microlocalement près de tout point de } \Gamma_-(E_0) \setminus K(E_0), \end{cases} \tag{4}$$

avec $z \in \Omega$, $\|u\| = 1$ et telle que $u$ n'est pas nulle microlocalement près de $K(E_0)$. Notons que cette assertion n'a lieu que pour une suite de valeurs de $h$ qui tend vers 0. En particulier, il existe $1_{K(E_0)} \prec \psi \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\operatorname{Op}(\psi)(P-z)u = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{5}$$

La notation $f \prec g$ signifie que $g = 1$ au voisinage du support de $f$. On définit alors

$$v = \operatorname{Op}(\varphi)u, \tag{6}$$

pour $\varphi \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ avec $1_{K(E_0)} \prec \varphi \prec \psi$.

Soit $P_\theta$ l'opérateur distordu d'un angle $\theta = Mh|\ln h|$ à partir de $P$, avec $M > 0$ assez grand. On suppose que la distorsion a lieu en dehors d'un voisinage de $K(E_0)$. La définition précise de $P_\theta$ ainsi que ses principales propriétés se trouvent, par exemple, dans la section 3 de [12]. On cherche une paramétrixe $U(t)$ de $e^{-it(P_\theta - z)/h}\operatorname{Op}(\psi)$, même si ce dernier opérateur peut ne pas être bien défini, $P_\theta$ n'étant pas autoadjoint. En utilisant la méthode BKW, on peut construire une famille lisse d'opérateurs bornés $U(t)$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $U(0) = \operatorname{Op}(\psi) + \mathcal{O}(h^\infty)$ et

$$-ih\partial_t U + (P_\theta - z)U = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{7}$$

localement uniformément en $t \in \mathbb{R}$. De plus, $U(t)$ est un opérateur intégral de Fourier semiclassique de transformation canonique $\exp(tH_p)$ et d'ordre $h^{-C-Ct}$ avec $C > 0$. En effet, comme la partie imaginaire de $P_\theta - z$ est d'ordre $h|\ln h|$, l'équation eikonale pour (7) est la même que dans le cas autoadjoint et les équations de transport sont perturbées par des termes d'ordre $|\ln h|$, ce qui entraîne l'estimation non uniforme par rapport à $t$ du symbole. Comme d'habitude, la construction de $U(t)$ se fait sur un petit intervalle de temps puis, pour tout temps, par recollement. Par ailleurs,

$$(P_\theta - z)U(t)w = U(t)(P_\theta - z)w + \mathcal{O}(h^\infty), \tag{8}$$

pour toute fonction $w$ microsupportée à l'intérieur de $\psi^{-1}(1)$. En effet, les deux membres de cette égalité vérifient (7) avec même donnée initiale. Finalement, pour toute fonction à support compact $w$, microsupportée dans $p^{-1}(E_0)$ mais hors de $\Gamma_-(E_0)$, il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$U(t)w = \mathcal{O}(h^{-C+\varepsilon t}), \tag{9}$$

localement uniformément en $t \in \mathbb{R}$. C'est une conséquence du caractère dissipatif de $P_\theta - z$ en dehors d'un compact due à la distorsion. En effet, (7) donne

$$\partial_t \big\| U(t)w \big\|^2 = 2h^{-1} \operatorname{Im} \big( U(t)w, (P_\theta - z)U(t)w \big) + \mathcal{O}(h^\infty) \|w\|^2. \tag{10}$$

Les hypothèses sur $w$ garantissent que le microsupport de $U(t)w$ s'échappe à l'infini en restant dans la surface d'énergie $p^{-1}(E_0)$ quand $t$ tend vers $+\infty$. Comme le symbole de $P_\theta$ est de la forme $p_\theta(x,\xi) = p(x,\xi) - \mathrm{i}\theta H_p(x \cdot \xi) + \mathcal{O}(\theta^2 \langle \xi \rangle^2)$ pour $x$ assez grand, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{Im}(p_\theta - z) \leq -2\varepsilon h|\ln h|$ sur le microsupport de $U(t)w$ pour $t$ assez grand. En utilisant l'inégalité de Gårding, (10) devient

$$\partial_t \big\| U(t)w \big\|^2 \leq -2\varepsilon |\ln h| \big\| U(t)w \big\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty) \|w\|^2,$$

pour $t$ assez grand. Finalement, (9) découle du lemme de Gronwall.

Pour $t > 0$, on définit

$$v_t = U(t)v = U(t) \operatorname{Op}(\varphi)u.$$

On montre d'abord que $v_t$ est un quasimode pour $P_\theta - z$. En utilisant (5) et (8), on peut écrire

$$\begin{aligned}(P_\theta - z)v_t &= (P_\theta - z)U(t) \operatorname{Op}(\varphi)u \\ &= U(t)(P_\theta - z) \operatorname{Op}(\varphi)u + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= U(t)(P - z) \operatorname{Op}(\varphi)u + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= U(t)\big(\operatorname{Op}(\varphi)(P - z)u + [P, \operatorname{Op}(\varphi)]u\big) + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= U(t)[P, \operatorname{Op}(\varphi)]u + \mathcal{O}(h^\infty).\end{aligned} \tag{11}$$

Par régularité elliptique et (5), $[P, \operatorname{Op}(\varphi)]u$ est microlocalisé dans la surface d'énergie $p^{-1}(E_0)$. Par ailleurs, (4) et $1_{K(E_0)} \prec \varphi$ impliquent que cette fonction est nulle microlocalement près de tout point de $\Gamma_-(E_0)$. Donc, en combinant (9) et (11), il vient

$$(P_\theta - z)v_t = \mathcal{O}(h^{-C+\varepsilon t}), \tag{12}$$

localement uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

On minore maintenant la norme de $v_t$. Soit $\rho$ un point du microsupport de $[P, \operatorname{Op}(\varphi)]u$. On vient de démontrer que $p(\rho) = E_0$ et que $\rho \notin \Gamma_-(E_0)$. Ainsi, $\exp(tH_p)(\rho)$ s'échappe à l'infini pour $t \to +\infty$ et ne rencontre pas $K(E_0)$. Par compacité, il existe une fonction de troncature lisse $\chi$ indépendante de $\rho$ avec $1_{K(E_0)} \prec \chi \prec \varphi$ dont le support évite $\exp([0, +\infty[H_p)(\rho)$. En particulier,

$$\operatorname{Op}(\chi)U(t)[P, \operatorname{Op}(\varphi)]u = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{13}$$

puisque $U(t)$ est un opérateur intégral de Fourier de transformation canonique $\exp(tH_p)$. Les relations (7), (8), (11) et (13) impliquent

$$\begin{aligned}\partial_t \operatorname{Op}(\chi)v_t &= \partial_t \operatorname{Op}(\chi)U(t) \operatorname{Op}(\varphi)u \\ &= -\mathrm{i}h^{-1} \operatorname{Op}(\chi)(P_\theta - z)U(t) \operatorname{Op}(\varphi)u + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= -\mathrm{i}h^{-1} \operatorname{Op}(\chi)U(t)[P, \operatorname{Op}(\varphi)]u + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \mathcal{O}(h^\infty),\end{aligned}$$

localement uniformément en temps. En intégrant en temps, il vient

$$\operatorname{Op}(\chi)v_t = \operatorname{Op}(\chi)v + \mathcal{O}(h^\infty) = \operatorname{Op}(\chi)u + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Par ailleurs, comme $u$ n'est pas nul microlocalement près de $K(E_0)$, il existe $C > 0$ tel que $\|\operatorname{Op}(\chi)u\| \geq h^C$ pour $h$ assez petit. Ainsi, on a

$$\|v_t\| \gtrsim \|\operatorname{Op}(\chi)v_t\| \geq h^{C+1}, \tag{14}$$

pour tout $t$ fixé et $h$ assez petit.

D'après (i) et la proposition D.1 de [2], il existe $N > 0$ tel que

$$\left\|(P_\theta - z)^{-1}\right\| \lesssim h^{-N}. \tag{15}$$

En combinant (12), (14) et (15), on obtient

$$h^{C+1} \lesssim \|v_t\| \leq \left\|(P_\theta - z)^{-1}\right\| \mathcal{O}(h^{-C+\varepsilon t}) \lesssim h^{-N-C+\varepsilon t},$$

pour tout $t$ fixé et $h$ assez petit. En choisissant $t$ assez grand, on obtient une contradiction en faisant tendre $h$ vers 0. Ceci conclut la preuve du théorème 1.1.

## Références


[1] J.-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond, M. Zerzeri, Barrier-top resonances for non globally analytic potentials, preprint, arXiv:1610.06384, 2016.
[2] J.-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond, M. Zerzeri, Resonances for homoclinic trapped sets, preprint, arXiv:1603.07517, 2016.
[3] J.-F. Bony, V. Petkov, Semiclassical estimates of the cut-off resolvent for trapping perturbations, J. Spectr. Theory 3 (3) (2013) 399–422.
[4] M. Dimassi, J. Sjöstrand, Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 268, Cambridge University Press, 1999.
[5] S. Fujiié, A. Lahmar-Benbernou, A. Martinez, Width of shape resonances for non globally analytic potentials, J. Math. Soc. Jpn. 63 (1) (2011) 1–78.
[6] C. Gérard, J. Sjöstrand, Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 391–421.
[7] B. Helffer, J. Sjöstrand, Résonances en limite semi-classique, Mém. Soc. Math. Fr. (24–25) (1986) iv+228 p.
[8] A. Martinez, An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis, Universitext, Springer, 2002.
[9] A. Martinez, Resonance free domains for non globally analytic potentials, Ann. Henri Poincaré 3 (4) (2002) 739–756.
[10] S. Nakamura, Scattering theory for the shape resonance model. I. Nonresonant energies, Ann. Inst. Henri Poincaré A, Phys. Théor. 50 (2) (1989) 115–131.
[11] S. Nakamura, Scattering theory for the shape resonance model. II. Resonance scattering, Ann. Inst. Henri Poincaré A, Phys. Théor. 50 (2) (1989) 133–142.
[12] J. Sjöstrand, Resonances for bottles and trace formulae, Math. Nachr. 221 (2001) 95–149.
[13] P. Stefanov, Resonance expansions and Rayleigh waves, Math. Res. Lett. 8 (1–2) (2001) 107–124.
[14] S.-H. Tang, M. Zworski, From quasimodes to resonances, Math. Res. Lett. 5 (3) (1998) 261–272.
[15] M. Zworski, Semiclassical Analysis, Grad. Stud. Math., vol. 138, American Mathematical Society, 2012.