C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 268–271

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres/Géométrie algébrique

Dualité pour les groupes de type multiplicatif sur certains corps de fonctions

Duality theorem for groups of multiplicative type over some function fields

Diego Izquierdo

École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75005 Paris, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 2 décembre 2016
Accepté après révision le 17 janvier 2017
Disponible sur Internet le 4 février 2017

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Soit K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse X sur un corps local supérieur k. On définit les groupes de Tate–Shafarevich d'un schéma en groupes commutatif en considérant les classes de cohomologie qui deviennent triviales sur chaque complété de K provenant d'un point fermé de X. Dans cette note, on énonce et on esquisse la preuve d'un théorème de dualité arithmétique pour les groupes de Tate–Shafarevich des groupes de type multiplicatif sur K (ou encore de certains complexes à deux termes de tores sur K).

A B S T R A C T

Let K be the function field of a smooth projective curve X over a higher-dimensional local field k. We define Tate–Shafarevich groups of a commutative group scheme via cohomology classes locally trivial at each completion of K coming from a closed point of X. In this note, we state and sketch the proof of an arithmetic duality theorem for Tate–Shafarevich groups of groups of multiplicative type over K (and more generally of some two-term complexes of tori over K).

Le but de cette note est d'énoncer un théorème de dualité pour certains complexes à deux termes de tores sur le corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps de la forme $\mathbb{Q}_p((t_2))\dots((t_d))$ ou encore $\mathbb{C}((t_0))\dots((t_d))$. Il s'agit d'une généralisation du théorème 4.1 de [2], des théorèmes 7.1 et 7.2 de [1] et du théorème 3.10 de [5]. Comme cela est fait dans la section 2.2 de [3], il est possible d'appliquer cette généralisation à l'étude des obstructions au principe local–global pour les torseurs sous un groupe linéaire connexe sur le corps des fonctions d'une $\mathbb{C}((t))$-courbe.

Notations. Pour chaque groupe abélien A et chaque nombre premier l, on notera $\overline{A}$ le quotient de A par son sous-groupe divisible maximal, $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l-primaire de A et $A^{(l)}$ (resp. $A^\wedge$) la limite projective pour $n > 0$ des $A/l^n A$ (resp. A/nA).

Adresse e-mail : diego.izquierdo@ens.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.01.014

1. Cadre

Dans cette note, les corps 0-locaux sont, par définition, les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. Pour $d \geq 1$, un corps d-local est un corps de valuation discrète complet à corps résiduel $(d-1)$-local. On fixe pour la suite un entier naturel d et un corps d-local k de caractéristique nulle. *On suppose que le corps 1-local k_1 associé à k est aussi de caractéristique nulle :* cela signifie que k est de la forme $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ ou $k_1((t_2))...((t_d))$ avec k_1 corps p-adique. Soient X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k et K son corps des fonctions. On note $X^{(1)}$ l'ensemble des points de codimension 1 de X. Pour $v \in X^{(1)}$, soit K_v le complété de K par rapport à la valuation discrète v. Pour r un entier naturel et M un module galoisien sur K (ou encore un objet de la catégorie dérivée des modules galoisiens sur K), on note $H^r(K, M)$ le r-ième groupe de cohomologie galoisienne de M (ou le r-ième groupe d'hypercohomologie galoisienne si M est un complexe), et on pose :

$$Ш^r(K, M) := \mathrm{Ker}\left(H^r(K, M) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^r(K_v, M)\right).$$

On se donne $a \in \{0, 1, ..., d+1\}$, ainsi que $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$ deux $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules qui, comme groupes abéliens, sont libres de type fini. On note $\check{T}_1 = \mathrm{Hom}(\hat{T}_1, \mathbb{Z})$ et $\check{T}_2 = \mathrm{Hom}(\hat{T}_2, \mathbb{Z})$. On pose aussi $T_1 = \check{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$ et $T_2 = \check{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$, où $\mathbb{Z}(a)$ désigne le a-ième complexe motivique (cf paragraphe 0.6 de [5]). Dans le cas $a = 1$, les complexes T_1 et T_2 sont quasi-isomorphes à des tores. On introduit aussi $\tilde{T}_1 = \hat{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$ et $\tilde{T}_2 = \hat{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$.

On considère maintenant un morphisme $\hat{\rho} : \hat{T}_2 \to \hat{T}_1$. Un tel morphisme induit des morphismes $\rho : T_1 \to T_2$ et $\check{\rho} : \check{T}_1 \to \check{T}_2$. Soit $G = [T_1 \to T_2]$ le cône de ρ (où T_1 est placé en degré -1 et T_2 en degré 0), de sorte que l'on a un triangle distingué $T_1 \to T_2 \to G \to T_1[1]$. Soit $\tilde{G} = [\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1]$ le cône du morphisme $\tilde{\rho}$, de sorte que l'on a alors un triangle distingué $\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1 \to \tilde{G} \to \tilde{T}_2[1]$.

2. Énoncé du théorème

Théorème 1.

(i) Soit l un nombre premier. On fait l'une des deux hypothèses suivantes :

(H 1.1) *le morphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif,*
(H 1.2) *le groupe de K-théorie de Milnor $K_a^M(L)\{l\}$ est d'exposant fini pour tout corps $(d+1)$-local L dont le corps résiduel est une extension finie de k.*

On a alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{Ш^{a-1}(G)\{l\}} \times \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{G})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (H 1.1), on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{Ш^{a}(G)} \times Ш^{d+2-a}(\tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Corollaire 2.

(i) Soit l un nombre premier. On fait l'une des deux hypothèses suivantes :

(H 2.1) *le morphisme $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif,*
(H 2.2) *le groupe $K_{d+1-a}^M(L)\{l\}$ est d'exposant fini pour tout corps $(d+1)$-local L dont le corps résiduel est une extension finie de k.*

On a alors un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^{a+1}(G)\{l\}} \times \overline{Ш^{d+1-a}(\tilde{G})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (H 2.1), on a un accouplement parfait :

$$Ш^{a}(G) \times \overline{Ш^{d+2-a}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Notons $H = [\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1][1]$ et $\tilde{H} = [T_1 \to T_2][-1]$. En appliquant le théorème précédent à H au lieu de G, on obtient :

- sous (H 2.1) ou (H 2.2), un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^{d-a}(H)\{l\}} \times \overline{Ш^{a+2}(\tilde{H})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

- sous (H 2.1), un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^{d+1-a}(H)} \times Ш^{a+1}(\tilde{H}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

d'où le résultat. □

Remarque 3. L'hypothèse (H 1.2) est toujours vérifiée lorsque $a=0$, ainsi que lorsque k_1 est un corps p-adique et $l \neq p$. En effet, dans ce deuxième cas, en notant $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a)$ le complexe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}(a)$ (qui est quasi-isomorphe à $\varinjlim_n \mu_n^{\otimes a}$), le morphisme $H^{a-1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a))\{l\} \to H^a(L, \mathbb{Z}(a))\{l\}$ est surjectif et, si k_1 est p-adique et $l \neq p$, le groupe $H^{a-1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a))\{l\}$ est fini d'après la proposition 1.10 de [4]. Symétriquement, l'hypothèse (H 2.2) est toujours vérifiée lorsque $a = d+1$, ainsi que lorsque k_1 est un corps p-adique et $l \neq p$.

Remarque 4. Si Φ est un groupe de type multiplicatif sur K, il existe des tores Q_1 et Q_2 et un morphisme $r : Q_1 \to Q_2$ surjectif tels que Φ est isomorphe au noyau de r. On note $\hat{Q_1}$ (resp. $\hat{Q_2}$) le module des caractères de Q_1 (resp. Q_2). On note aussi $\hat{r} : \hat{Q_2} \to \hat{Q_1}$ le morphisme induit par r. Si l'on choisit $a=1$, $\hat{T_1} = \hat{Q_1}$, $\hat{T_2} = \hat{Q_2}$ et $\hat{\rho} = \hat{r}$, alors T_1 et T_2 sont quasi isomorphes à Q_1 et Q_2 respectivement, et $G[-1]$ est quasi isomorphe à Φ. Par conséquent, le théorème 1 et le corollaire 2 montrent que l'on a des accouplements parfaits :

$$Ш^1(\Phi) \times \overline{Ш^{d+2}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \overline{Ш^2(\Phi)} \times Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et si l'hypothèse (H 1.2) est vérifiée pour $a=d$ et un certain premier l, on a aussi un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^3(\Phi)\{l\}} \times \overline{Ш^d(\tilde{G})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

3. Grandes étapes de la preuve du théorème 1(i)

Soit U un ouvert non vide de X sur lequel T_1 (resp. T_2) s'étend en un tore $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) et ρ s'étend en un morphisme $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$, que l'on note toujours ρ. Soient $\mathcal{G}$ le complexe $[\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2]$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ le complexe $[\tilde{\mathcal{T}_2} \to \tilde{\mathcal{T}_1}]$. Fixons l un nombre premier. On procède alors par étapes.

A. On montre que, pour chaque entier r, il y a un accouplement parfait naturel de groupes finis :

$$H^r(U, \mathcal{G})\{l\}^{(l)} \times H_c^{d+2-r}(U, \tilde{\mathcal{G}})^{(l)}\{l\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Il s'agit d'un énoncé de dualité de type Artin–Verdier. Pour l'établir, on se ramène par dévissage à des modules galoisiens finis, pour lesquels on peut appliquer la proposition 2.1 de [5].

B. Soit $v \in X^{(1)}$. On montre que l'on a un accouplement naturel :

$$H^{a-1}(K_v, G) \times H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{2}$$

induisant un accouplement non dégénéré à gauche :

$$H^{a-1}(K_v, G)^{\wedge} \times H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Comme dans l'étape A, on prouve ce résultat en se ramenant par dévissage à des modules galoisiens finis, pour lesquels on peut appliquer le théorème I.2.17 de [8]. De plus, sous les hypothèses (H 1.1) et (H 1.2), on peut montrer que le groupe $H^{a-1}(K_v, G)$ est d'exposant fini, et donc que l'accouplement (2) est non dégénéré à gauche.

C. Introduisons maintenant les groupes :

$$\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}) = \mathrm{Im}\left(H_c^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}) \to H^{d+3-a}(K, \tilde{G})\right),$$

$$D_{sh}^{a-1}(U, \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}\left(H^{a-1}(U, \mathcal{G}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^{a-1}(K_v, G)\right).$$

On montre que $\overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})}$ s'insère dans une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} \overline{H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G})\{l\}} \to \overline{H_c^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \to \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \to 0. \tag{4}$$

Encore une fois, la preuve consiste à se ramener par dévissage à des modules galoisiens finis, pour lesquels on peut appliquer la proposition 2.3 de [5].

D. En combinant les dualités (1) et (2) et en utilisant la suite exacte (4), on montre que l'on a un accouplement naturel :

$$D^{a-1}_{sh}(U, \mathcal{G})\{l\} \times \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{5}$$

qui est non dégénéré à droite et dont le noyau à gauche est divisible.

E. On montre que si l'on rétrécit suffisamment l'ouvert U, on a :

$$\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\} = Ш^{d+3}(K, \tilde{G})\{l\}.$$

L'argument est ici très similaire à celui utilisé dans un contexte plus simple dans la proposition 3.6 de [2].

F. En tenant compte de l'étape E, un passage à la limite inductive sur U dans l'accouplement (5) permet d'obtenir le résultat souhaité.

4. Remarques supplémentaires

- La preuve du théorème 1(ii) est similaire. L'hypothèse (H 1.2) permet en plus de montrer que l'accouplement local (3) est aussi non dégénéré à droite, ainsi que de garantir la finitude du groupe $Ш^{d+2-a}(\tilde{G})$.
- La preuve complète et détaillée du théorème 1 peut être trouvée dans le paragraphe 4 du chapitre 1 de [7].
- Dans le cas où le corps k serait un corps d-local avec k_1 de caractéristique positive $p > 0$, il est possible d'établir des énoncés analogues au théorème 1 à condition de se restreindre aux parties l-primaires avec l différent de p.
- On peut montrer des variantes du théorème 1 dans le cas où $K = \mathbb{C}((x, y))$ (ou encore $K = \mathbb{C}((t))((x, y))$ ou $K = \mathbb{Q}_p((x, y))$) : le lecteur intéressé pourra aller voir la section 2 de [6].

Remerciements

Je tiens à remercier David Harari pour son soutien et ses conseils. Je voudrais également remercier l'École normale supérieure pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 110 (6) (2015) 1475–1516.
[2] D. Harari, T. Szamuely, Local–global principles for tori over p-adic function fields, J. Algebraic Geom. 25 (2016) 571–605.
[3] D. Izquierdo, Principe local–global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs II, A paraître dans Bull. Soc. Math. Fr. 145 (2) (2017).
[4] D. Izquierdo, Variétés abéliennes sur les corps de fonctions de courbes sur des corps locaux, Prépublication sur http://www.math.ens.fr/~izquierd/, 2015.
[5] D. Izquierdo, Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs, Math. Z. 284 (1–2) (2016) 615–642.
[6] D. Izquierdo, Dualité et principe local–global sur des corps locaux de dimension 2, Prépublication sur http://www.math.ens.fr/~izquierd/, 2016.
[7] D. Izquierdo, Dualité et principe local–global sur les corps de fonctions, thèse, http://www.math.ens.fr/~izquierd/, 2016.
[8] J.S. Milne, Arithmetic Duality Theorems, second edition, BookSurge, LLC, Charleston, SC, USA, 2006.