C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 304–309

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

Analyse *a posteriori* d'erreur par reconstruction pour un modèle d'écoulement dans un milieu poreux fracturé

A posteriori error analysis via post-processing for a model of flow in a fractured porous media

Zoubida Mghazli, Ilyas Naji

Université Ibn Tofaïl, Laboratoire interdisciplinaire en ressources naturelles et en environnement (LIRNE), Équipe d'ingénierie mathématique (EIMA), BP 133, Kénitra, Maroc

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 16 avril 2016
Accepté après révision le 9 décembre 2016
Disponible sur Internet le 13 février 2017

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Nous présentons dans cette note des estimations *a posteriori* d'erreur basées sur la technique de reconstruction, pour le modèle réduit de l'écoulement en milieux poreux fracturé introduit et analysé par V. Martin, J. Jaffré et J. Roberts. Ce modèle est approché par les éléments finis de Raviart–Thomas de plus bas degrés. Dans ce type d'approximation, la vitesse est bien approchée ; en revanche, la pression obtenue n'appartient pas à $H_0^1(\Omega)$. Nous considérons une reconstruction de la pression et nous donnons une borne supérieure de l'erreur dans la norme énergie, par des indicateurs dont certains sont exprimés en fonction de cette reconstruction. Des résultats numériques montrent que tous les indicateurs convergent vers zéro avec le pas du maillage, avec la même vitesse que l'erreur. L'un de ces indicateurs peut être interprété à la fois comme un indicateur de discrétisation et un indicateur de validité du modèle réduit.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We present in this note *a posteriori* error estimates based on the postprocessing technique for the reduced model of flow in fractured porous media, introduced and analysed by V. Martin, J. Jaffré, and J. Roberts. This model is approximated by the Raviart–Thomas finite elements of lowest order. In this type of approximation, the velocity is well approximated. A postprocessing of the pressure appears to be necessary since it does not belong to $H_0^1(\Omega)$. We give an upper bound for the error in the energy norm, with some indicators that are expressed in terms of the reconstruction of the pressure. Numerical results show that all indicators converge to zero when the mesh size goes to zero, with the same speed as the error. One of these indicators can be interpreted as both a discretization indicator and an indicator of the reduced model validity.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresses e-mail : mghazli_zoubida@yahoo.com (Z. Mghazli), i.naji.univ@gmail.com (I. Naji).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.12.006
1631-073X/© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Position du problème et résultats préliminaires

L'idée des estimations d'erreur *a posteriori* basées sur la reconstruction du potentiel et du flux équilibrés pour l'équation de Poisson $-\Delta p = f$ remonte à l'égalité de Prager–Synge [7]. Dans la technique de reconstruction, on peut distinguer deux possibilités. Le principe de la première consiste à reconstruire, à partir d'une approximation p_h, un flux $\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega)$ vérifiant la condition d'équilibre $\text{div}\,\mathbf{u} + f = 0$, qui soit le plus proche possible de $-\nabla p_h$. Depuis Ladevèze–Leguillon [5] jusqu'à Ern–Vohralík [1], de nombreux auteurs (voir les citations dans [1]) ont proposé différentes reconstructions. La deuxième possibilité est de considérer une approximation par une méthode d'éléments finis mixtes de type Raviart–Thomas. Elle permet d'avoir un flux $\mathbf{u}_h$ dans $H(\text{div}, \Omega)$ vérifiant la condition d'équilibre faible, qui n'a donc pas besoin de reconstruction. En revanche, le potentiel n'est pas dans $H_0^1(\Omega)$, et alors sa reconstruction sera faite à partir du flux. Dans cette note, nous utilisons la démarche de reconstruction de Vohralík [8] pour développer des estimations d'erreur *a posteriori* pour le modèle réduit de l'écoulement en milieux poreux fracturé donné dans [6] et défini par (pour $\xi = 1$ et où div_τ et ∇_τ représentent le gradient et la divergence tangentiels respectifs) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \nabla p_i \text{ dans } \Omega_i, & \text{div}\,\mathbf{u}_i = q_i \text{ dans } \Omega_i, \text{ pour } i = 1, 2, \\ u_f = -K_{f,\tau}\, d \nabla_\tau p_f \text{ dans } \gamma, & \text{div}_\tau u_f = q_f + \sum_{i=1}^{2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i|\gamma} \text{ dans } \gamma, \\ \alpha_f p_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = \alpha_f p_f \text{ dans } \gamma, & \text{pour } i = 1, 2, \\ p_i = \overline{p_i} \text{ sur } \Gamma_i, \text{ pour } i = 1, 2, & p_f = \overline{p}_f \text{ sur } \partial\gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω_i pour $i = 1, 2$ sont deux ouverts polygonaux de $\mathbb{R}^2$ séparés par une fracture unidimensionnelle représentée par la droite γ, approximation d'un domaine Ω_f de largeur d. On note $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \gamma$ le bord de Ω_i privé de γ pour $i = 1, 2$. $\mathbf{K}_i$, p_i et $\mathbf{u}_i$ sont respectivement la conductivité hydraulique, la pression et la vitesse de Darcy dans Ω_i pour $i = 1, 2$. On suppose que $\mathbf{K}_i$ est un tenseur diagonal de termes diagonaux K_{i1} et K_{i2} avec $0 < c_{K_i} \le K_{ij} \le C_{K_i}$, pour $i, j = 1, 2$. p_f et u_f sont respectivement la pression et la vitesse de Darcy dans la fracture γ, $\bar{p}_i$ est la pression donnée sur le bord Γ_i, $\mathbf{n}_i$ le vecteur normal sortant de Ω_i, $i = 1, 2$, $K_{f,n}$ et $K_{f,\tau}$ sont respectivement la composante suivant la normale et la composante suivant la tangente de la conductivité hydraulique K_f dans la fracture, avec $0 < c_f \le K_{fj} \le C_f$ pour $j = n, \tau$, et $\alpha_f = \frac{2K_{f,n}}{d}$, et les données aux limites $\bar{p}_i \in L^2(\Gamma_i)$, $p_f \in L^2(\partial\gamma)$. Rappelons que $H(\text{div}; \Omega) := \{\mathbf{q} \in (L^2(\Omega))^2 / \text{div}\,\mathbf{q} \in L^2(\Omega)\}$, où $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable. Une formulation mixte du problème (1) est donnée par

$$\begin{cases} \text{trouver } (\mathbf{u}, p) \in W \times M \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \beta(\mathbf{v}, p) = -L_d(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in W, \\ \beta(\mathbf{u}, r) = L_q(r), \quad \forall r \in M, \end{cases} \tag{2}$$

où $M = \{p = (p_1, p_2, p_f) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times L^2(\gamma)\}$ muni de la norme $\|p\|_M^2 = \sum_{i=1}^{2} \|p_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|p_f\|_{0,\gamma}^2$,

$$W = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, v_f) \in H(\text{div}, \Omega_1) \times H(\text{div}, \Omega_2) \times H(\text{div}_\tau, \gamma) \,|\, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \in L^2(\gamma)\,,\, i = 1, 2\}, \tag{3}$$

muni de la norme énergie

$$\|\mathbf{u}\|_{\text{div}}^2 = \sum_{i=1}^{2} \left(\|\mathbf{K}_i^{-1/2} \mathbf{u}_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|\text{div}\mathbf{u}_i\|_{0,\Omega_i}^2 \right) + \|(K_{f,\tau} d)^{-1/2} u_f\|_{0,\gamma}^2 + \|\text{div}_\tau u_f\|_{0,\gamma}^2 + \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i\|_{0,\gamma}^2. \tag{4}$$

Les formes bilinéaires $a : W \times W \to \mathbb{R}$ et $\beta : W \times M \to \mathbb{R}$ sont définies par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i + \int_\gamma (K_{f,\tau} d)^{-1} u_f v_f + \sum_{i=1}^{2} \int_\gamma \left(\frac{1}{\alpha_f} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i\right),$$

$$\beta(\mathbf{u}, r) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \text{div}\mathbf{u}_i\, r_i + \int_\gamma \text{div}_\tau u_f\, r_f - \sum_{i=1}^{2} \int_\gamma \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i r_f,$$

et $L_q(r) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} q_i r_i + \int_\gamma q_f r_f$, $L_d(v) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \overline{p}_i + \int_{\partial\gamma} v_f \cdot n_f \overline{p}_f$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (2) se démontre, comme dans [6], en utilisant les techniques standard. Soient $\mathcal{T}_{ih}$ une triangulation de Ω_i, de pas h_{T_i} pour $i = 1, 2$, et $\mathcal{T}_{fh}$ une triangulation de γ de pas h_{T_f}, P_0 l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 0, $P_0(\mathcal{T}_{ih}) = \{v \,|\, v_{|T} \in P_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_{ih}\}$, $i = 1, 2$, et $\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_{fh}) := \{v_f \in \mathcal{C}^0(\gamma) \,|\, v_f|_{T_f} \in$

$P_1(T_f), \forall T_f \in \mathcal{T}_{fh}\}$. L'espace de Raviart–Thomas de plus bas degré est donné par $RT_0(T) = \{q \in H(\mathrm{div}, T) | q \in (P_0(T))^2 \oplus xP_0(T)\}$, et on définit alors $RT_0(\mathcal{T}_{ih}) = \{\mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega_i) | \mathbf{q}_{|T} \in RT_0(T),\ \forall T \in \mathcal{T}_{ih}\}$, $i = 1, 2$. Une approximation du problème (2) basée sur les éléments finis de Raviart–Thomas de plus bas degré est donnée par :

$$\begin{cases} \text{trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times M_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \beta(\mathbf{v}_h, p_h) = -L_d(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in W_h, \\ \beta(\mathbf{u}_h, r_h) = L_q(r_h), \ \forall r_h \in M_h, \end{cases} \tag{5}$$

où $M_h = \{p = (p_1, p_2, p_f) \in P_0(\mathcal{T}_{1h}) \times P_0(\mathcal{T}_{2h}) \times P_0(\mathcal{T}_{fh})\}$, $W_h = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, v_f) \in RT_0(\mathcal{T}_{1h}) \times RT_0(\mathcal{T}_{2h}) \times \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_{fh})\ \}$. Les techniques standard (cf. [6]) permettent de montrer que le problème (5) admet une solution unique. Des estimations d'erreur *a posteriori* de type résidu ont été démontrées pour le même problème dans [2]. Pour pouvoir développer une estimation d'erreur *a posteriori* basée sur un post-traitement de la pression, en suivant la démarche de [8], nous allons d'abord considérer une formulation standard dont l'unique variable (principale) est la pression p ; ainsi, en éliminant dans le problème (1) la vitesse de Darcy, on obtient, en supposant maintenant que $\bar{p}_i \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\mathbf{K}_i \nabla p_i) = q_i \ \text{ dans } \Omega_i, \ \text{ pour } i = 1, 2, \\ -\mathrm{div}_\tau(K_{f,\tau} d \nabla_\tau p_f) + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \alpha_f (p_f - p_i) = q_f, \ \text{ dans } \gamma, \\ \mathbf{K}_i \nabla p_i \cdot \mathbf{n}_i + \alpha_f p_i = \alpha_f p_f \ \text{ dans } \gamma \ \text{ pour } i = 1, 2, \\ p_i = \overline{p_i} \ \text{ sur } \Gamma_i \ \text{ pour } i = 1, 2, \quad p_f = \overline{p}_f \ \text{ sur } \partial\gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Une formulation variationnelle standard est alors donnée par

$$\begin{cases} \text{trouver } p \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1(\gamma) \text{ tel que } p_{i|\Gamma_i} = \overline{p}_i,\ p_{f|\partial\gamma} = \overline{p}_f \text{ vérifiant} \\ B(p, \phi) = L(\phi), \quad \forall \phi \in V, \end{cases} \tag{7}$$

avec

$$B(p, \phi) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \mathbf{K}_i \nabla p_i \cdot \nabla \phi_i + \int_{\gamma} \alpha_f (p_i - p_f) \phi_i \right\} + \int_{\gamma} K_{f,\tau} d \nabla_\tau p_f \cdot \nabla_\tau \phi_f + \sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma} \alpha_f (p_f - p_i) \phi_f, \tag{8}$$

$$L(\phi) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} q_i \phi_i + \int_{\gamma} q_f \phi_f, \tag{9}$$

$$V = \{\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_f) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times H^1_0(\gamma) \,|\, \phi_{i|\Gamma_i} = 0, i = 1, 2\}, \tag{10}$$

muni de la norme d'énergie $|||.|||_1$ définie par $|||p|||_1^2 = \sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{K}_i^{1/2} \nabla p_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|(K_{f,\tau} d)^{1/2} \nabla_\tau p_f\|_{0,\gamma}^2$ où $H^1(D) := \{v \in L^2(D);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(D)\ \forall 1 \leq i \leq n\}$, pour $n = 1$ ou $n = 2$ et $H_0^1(\gamma) := \{v \in H^1(\gamma)/v_{|\partial\gamma} = 0\}$. Par le théorème de Lax–Milgram, le problème (7) admet une solution unique.

2. Estimation d'erreur *a posteriori*

2.1. Post-traitement

Dans (1), la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p sont liées par les relations $\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \nabla p_i$ pour $i = 1, 2$, et $u_f = -K_{f,\tau} d \nabla_\tau p_f$. Ces relations ne sont pas vérifiées par le problème discret (5) ; en effet, p_{ih} étant une constante par morceau, son gradient sera nul sur chaque élément et est une mesure de Dirac sur les inter-éléments. Pour « récupérer » la relation entre $\mathbf{u}_i$ et p_i, nous allons construire un post-traitement de p_h donnant une meilleure approximation de la pression exacte. Soit $\bar{p}_h = (\bar{p}_{1h}, \bar{p}_{2h}, \bar{p}_{fh})$ une fonction polynomiale par morceaux de degré ≤ 2 telle que l'on ait :

$$\begin{cases} -\mathbf{K}_i \nabla \bar{p}_{ih|T_i} = \mathbf{u}_{ih|T_i}, \quad \forall T_i \in \mathcal{T}_{ih}, \ i = 1, 2, \\ \dfrac{1}{|T_i|} \displaystyle\int_{T_i} \bar{p}_{ih} = p_{ih|T_i}, \quad \forall T_i \in \mathcal{T}_{ih}, \ i = 1, 2, \\ -K_{f\tau} \mathrm{d} \nabla_\tau \bar{p}_{fh|T_f} = u_{fh|T_f}, \quad \forall T_f \in \mathcal{T}_{fh}, \\ \dfrac{1}{|T_f|} \displaystyle\int_{T_f} \bar{p}_{fh} = p_{fh|T_f}, \quad \forall T_f \in \mathcal{T}_{fh}. \end{cases} \tag{11}$$

La fonction $\bar{p}_h$ ainsi construite n'est pas continue à travers les inter-éléments dans Ω_i, $i=1,2$ et γ. Nous lui associons une fonction continue qu'on note $\tilde{p}_h$, que l'on calcule à l'aide de l'opérateur d'Oswald :

$$\begin{cases} \tilde{p}_{ih}(x) = \displaystyle\sum_k \phi_{ki}\tilde{p}_{ih}(a), \\ \tilde{p}_{ih}(a) = \dfrac{1}{|\mathcal{T}_{ia}|} \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_{ia}} \bar{p}_{ih}|_K(a), \;\; i=1,2,f, \end{cases} \tag{12}$$

où ϕ_{ki}, pour $i=1,2$, sont les fonctions de base de Lagrange associées à $P_1(\mathcal{T}_{ih})\cap C^0(\Omega_i)$, et $\mathcal{T}_{ia}$ est l'ensemble des éléments qui partagent le nœud a. Pour pouvoir tenir compte de la condition de Dirichlet non homogène, on utilise la modification de l'opérateur d'Oswald, qu'on notera $\tilde{p}_{ih}^{\Gamma_i}$, introduite dans [4], et qui est telle que $\tilde{p}_{ih}^{\Gamma_i}(a)=\tilde{p}_{ih}(a)$ pour les nœuds qui ne sont pas sur Γ_i, et $\tilde{p}^{\Gamma_i}_{ih|\Gamma_i}=\bar{p}_i$ au sens de la trace. Cette transformation permet d'avoir $(p_i-\tilde{p}_{ih}^{\Gamma_i})|_{\Gamma_i}=0$. Nous considérons aussi une construction analogue à (12) pour $\tilde{p}_{fh}$, notée $\tilde{p}_{fh}^{\partial\gamma}$, et on note $\tilde{p}_h^{\Gamma} := (\tilde{p}_{1h}^{\Gamma_1}, \tilde{p}_{2h}^{\Gamma_2}, \tilde{p}_{fh}^{\partial\gamma})$.

2.2. Estimation d'erreur a posteriori par reconstruction

On définit maintenant la L^2-norme énergie pour les fonctions de $(L^2(\Omega_1))^2\times(L^2(\Omega_2))^2\times L^2(\gamma)$ par

$$|||\mathbf{w}|||_\star^2 = \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{K}_i^{-1/2}\mathbf{w_i}\|_{0,\Omega_i}^2 + \|(K_{f,\tau}d)^{-1/2}w_f\|_{0,\gamma}^2, \tag{13}$$

et pour $T_i\in\mathcal{T}_{ih}$, $i=1,2$ et $T_f\in\mathcal{T}_{fh}$, $|||\mathbf{w}_i|||_{\star,T_i} := \|\mathbf{K}_i^{-1/2}\mathbf{w_i}\|_{0,T_i}$ et $|||w_f|||_{\star,T_f} := \|(K_{f,\tau}d)^{-1/2}w_f\|_{0,T_f}$.

Nous commençons par donner une estimation *a posteriori* pour la pression.

Théorème 2.1. *Soient p la solution du problème (7), $(\mathbf{u}_h, p_h)$ la solution de (5) et $\tilde{p}_h$, $\tilde{p}_h^\Gamma$ définies dans §2.1, alors*

$$\begin{aligned} |||p-\tilde{p}_h|||_1 \le \sum_{i=1}^2 \left\{ \left\{ \sum_{T_i\in\mathcal{T}_{ih}} \xi_{R,T_i}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_i\in\mathcal{T}_{ih}} \eta_{R,T_i}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_f\in\mathcal{T}_{fh}} \xi_{RN,T_f}^2 \right\}^{1/2} \right\} \\ + \left\{ \sum_{T_f\in\mathcal{T}_{fh}} \xi_{R,T_f}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T_f\in\mathcal{T}_{fh}} \eta_{R,T_f}^2 \right\}^{1/2} + \eta_{os}, \end{aligned}$$

$$\text{où}\quad \xi_{R,T_i} = \frac{h_{T_i}}{\pi\sqrt{c_{K_i}}}\|q_i - \operatorname{div}\mathbf{u}_{ih}\|_{0,T_i}, \qquad \xi_{R,T_f} = \frac{h_{T_f}}{\pi\sqrt{dc_{K_f}}}\|q_f + \sum_{i=1}^2 \mathbf{u}_{ih}\cdot\mathbf{n}_i - \operatorname{div}_\tau u_{fh}\|_{0,T_f}, \tag{14}$$

$$\xi_{RN,T_f} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1+C_{\Omega_i}}{\sqrt{c_{K_i}}} + \frac{|\gamma|}{\pi\sqrt{dc_{K_f}}} \right) \|\alpha_f\tilde{p}_{fh} - \alpha_f\tilde{p}_{ih} + \mathbf{u}_{ih}\cdot\mathbf{n}_i\|_{0,T_f}, \tag{15}$$

$$\eta_{R,T_i} = |||\mathbf{u}_{ih} + \mathbf{K}_i\nabla\tilde{p}_{ih}|||_{\star,T_i} \qquad \eta_{R,T_f} = |||u_{fh} + K_{f,\tau}\mathrm{d}\nabla_\tau\tilde{p}_{fh}|||_{\star,T_f}. \tag{16}$$

$$\eta_{os} = \left\{ \frac{2C_{K_f}}{d}\left(\frac{C_\gamma}{\sqrt{dc_{K_f}}} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{c_{K_i}}}(1+\frac{\bar{h}_i}{\pi}) \right) + 2 \right\} (|||\tilde{p}_h - \tilde{p}_h^\Gamma|||_{1,D} + \|\tilde{p}_h - \tilde{p}_h^\Gamma\|_{0,D}), \tag{17}$$

où D est l'ensemble de tous les éléments qui ont une intersection avec Γ_i, $i=1,2$ ou $\partial\gamma$, $\bar{h}_i$ est le plus grand diamètre de ces éléments, et C_{Ω_i} est la constante de Poincaré dans Ω_i.

Démonstration. On montre que $|||p-\tilde{p}_h^\Gamma|||_1 \le \sup_{\phi\in V\,|||\phi|||=1} B(p-\tilde{p}_h^\Gamma,\phi)$, puis on calcule $B(p-\tilde{p}_h^\Gamma,\phi)$, en utilisant la bilinéarité de $B(\cdot,\cdot)$, puis le problème (7) et la formule de Green. □

Les estimations *a posteriori* sur les vitesses de Darcy sont démontrées en suivant des démarches analogues à celles utilisées pour la pression et sont données dans le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Soient $\mathbf{u}$ la solution du problème (2), $\mathbf{u}_h\in W_h$ la solution de (5) et $\tilde{p}_h$ défini dans (11) et (12), alors nous avons (avec les notations (14), (15) et (16))*

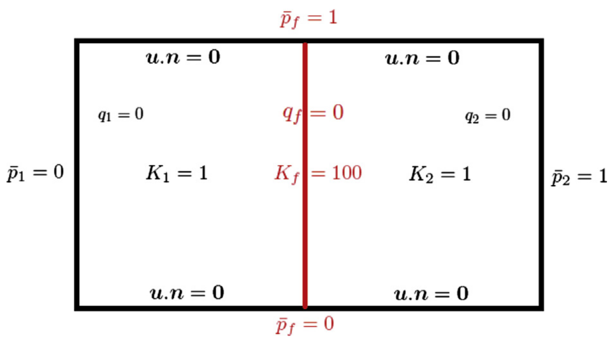
$$\||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\||_\star \le \sum_{i=1}^{2}\left\{\sum_{T_i\in\mathcal{T}_{ih}}(\eta_{R,T_i}+\xi_{R,T_i})^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{T_f\in\mathcal{T}_{fh}}(\eta_{R,T_f}+\xi_{R,T_f}+\xi_{RN,T_f})^2\right\}^{1/2}. \quad (18)$$

3. Résultats numériques

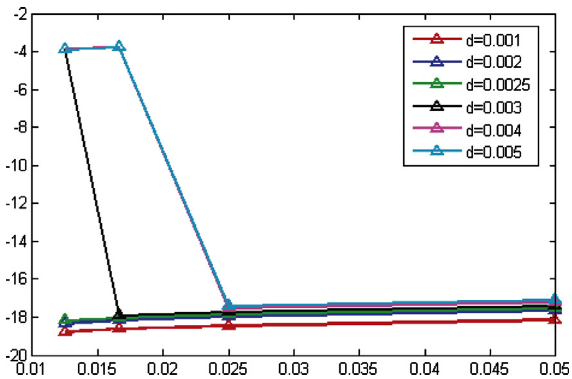
Soit $\Omega_1 =]-1,0[\times]0,1[$, $\Omega_2 =]0,1[\times]0,1[$, et $\gamma = \{0\}\times]0,1[$, et (1) avec les données de la Figure (a). Les calculs du tableau ci-dessous (où les colonnes des indicateurs représentent les moyennes, S est la somme de ces cinq moyennes) sont faits avec FreeFem++ [3] pour des pas de maillage de plus en plus petits (première colonne) et $d = 0.001$. D'une part, ces calculs montrent que S converge vers zéro quand le pas du maillage tend vers zéro avec une vitesse de convergence de l'ordre de 1 (dernière colonne). D'autre part, l'indicateur η_{R,T_f} défini dans (16) est relativement plus petit que η_{R,T_i} ceci étant dû au fait que u_{fh} est continue aux nœuds du maillage, ce qui n'est pas le cas de $\mathbf{u}_{ih}$. Par ailleurs, nous remarquons que c'est ξ_{R,T_f} qui est le plus sensible aux valeurs de d. Dans la figure (b), nous constatons une perte de convergence dès lors que h devient plus petit que d. En effet, l'analyse a priori (cf. [6]) prévoit une erreur en $O(\max\{h,d\})$ pour ce modèle, ce qui est confirmé par cet indicateur. Ce dernier peut donc être utilisé comme indicateur de validité du modèle réduit.

Notons enfin que, dans ce cas test, le terme d'oscillations est nul, puisque les données au bord étant constantes, les deux interpolées $\tilde{p}_h$ et $\tilde{p}_h^\Gamma$ coïncident.

h_1, h_2, h_f	$\sum_{i=1}^2 \xi_{R,T_i}$	ξ_{R,T_f}	$\xi_{RN,Tf}$	$\sum_{i=1}^2 \eta_{R,T_i}$	η_{R,T_f}	S	Ordre
1/10, 1/10, 1/10	4.79223e-010	1.63222e-009	5.14585e-005	0.0402548	0.00551547	0.0458217	–
1/20, 1/20, 1/20	2.4781e-010	6.89301e-010	1.84475e-005	0.0179922	0.00245363	0.0204643	1.1
1/30, 1/30, 1/30	1.76815e-010	4.16097e-010	9.74169e-006	0.0110688	0.00150971	0.0125883	1.2
1/40, 1/40, 1/40	1.2978e-010	2.90546e-010	6.09491e-006	0.00779804	0.0010658	0.00886994	1.2



(a) Données du problème.
(a) Data of the problem.



(b) $\max(\log(\xi_{RTf}))$ en fonction de h, pour différentes valeurs de d.
(b) $\max(\log(\xi_{RTf}))$ as a function of h for different values of d.

Remerciements

Les auteurs remercient les experts pour leurs commentaires pertinents et constructifs ainsi que pour leurs suggestions, qui ont permis d'améliorer de manière significative la qualité de cette note. Ils remercient aussi avec plaisir Frédéric Hecht pour l'aide apportée dans les calculs couplés 1D/2D avec FreeFem++.

Références

[1] A. Ern, M. Vohralík, Polynomial-degree-robust a posteriori estimates in a unified setting for conforming, nonconforming, discontinuous Galerkin, and mixed discretizations, SIAM J. Numer. Anal. 53 (2) (2015) 1058–1081.
[2] F. Hecht, Z. Mghazli, J. Roberts, A posteriori error estimates for a reduced model in porous media with fracture (en préparation).
[3] F. Hecht, O. Pironneau, J. Morice, FreeFEM++, v3.20, third edition, 2013, www.freefem.org.
[4] P. Jiránek, Z. Strakoš, M. Vohralík, A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers, SIAM J. Sci. Comput. 32 (3) (2010) 1567–1590.
[5] P. Ladevèze, D. Leguillon, Error estimate procedure in the finite element method and applications, SIAM J. Numer. Anal. 20 (1983) 485–509.
[6] V. Martin, J. Jaffré, J.E. Roberts, Modeling fractures as barriers and interfaces for flow in porous media, SIAM J. Sci. Comput. 26 (5) (2005) 1667–1691.
[7] W. Prager, J.L. Synge, Approximations in elasticity based on the concept of function space, Q. Appl. Math. 5 (1947) 241–269.
[8] M. Vohralík, Unified primal formulation-based a priori and a posteriori error analysis of mixed finite element methods, Math. Comput. 79 (2010) 2001–2032.