



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse mathématique/Géométrie

Une remarque à propos de l'équivalence bilipschitzienne entre des ensembles de Delone



A remark concerning bi-Lipschitz equivalence of Delone sets

Andrés Navas

Dpto. de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Alameda 3363, Santiago, Chile

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 1^{er} mars 2016

Accepté après révision le 11 août 2016

Disponible sur Internet le 22 septembre 2016

Présenté par Claire Voisin

RÉSUMÉ

Nous démontrons que tout ensemble de Delone linéairement répétitif est rectifiable par un homéomorphisme bilipschitzien de l'espace qui l'envoie sur l'ensemble des points à coordonnées entières.

© 2016 Publié par Elsevier Masson SAS au nom de Académie des sciences.

ABSTRACT

Linearly repetitive Delone sets are shown to be rectifiable by a bi-Lipschitz homeomorphism of the Euclidean space sending it to the standard lattice.

© 2016 Publié par Elsevier Masson SAS au nom de Académie des sciences.

Abridged English version

Over the last years, the study of *Delone sets* (that is, uniformly separated, uniformly discrete subsets of \mathbb{R}^d) has attracted the attention of many people, both because of their intrinsic geometric interest and their relation with mathematical models of quasi-crystals. One of the most basic questions concerns rectifiability, that is, bi-Lipschitz equivalence of such a set $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ with the standard lattice, which means the existence of a bi-Lipschitz map $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}^d$. Examples of non-rectifiable Delone sets (for $d \geq 2$) were independently shown to exist by Burago and Kleiner [4] and McMullen [8] (more concrete examples appear in [6]). *A priori*, the existence of a bi-Lipschitz homeomorphism $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ extending f above is a stronger condition. This problem was raised (in much more generality) in [1], where it is shown that such an F exists (which good control on the bi-Lipschitz constant) whenever the bi-Lipschitz constant of f is very close to 1. However, the general case remains open.

In this Note, we provide a quite short and elementary argument showing the existence of such an F for particular choices of f that are known to exist for a relevant class of rectifiable Delone sets (which includes, for instance, the set of vertices of Penrose tilings). Recall that a Delone set \mathcal{D} is said to be *repetitive* if for each $r > 0$ there exists $R = R(r) > 0$ such that for every pair of balls B_r, B_R of radii r and R , respectively, the intersection $B_R \cap \mathcal{D}$ contains a translated copy of $B_r \cap \mathcal{D}$. The

Adresse e-mail : andres.navas@usach.cl.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.08.010>

1631-073X/© 2016 Publié par Elsevier Masson SAS au nom de Académie des sciences.

set \mathcal{D} is said to be *linearly repetitive* if R can be taken to be linear as a function of r . Examples of linearly repetitive Delone sets include the set of vertices of substitution tilings and certain cut-and-project Delone sets; see [3].

Main Theorem. *If \mathcal{D} is a linearly repetitive Delone set in \mathbb{R}^d , then there exists a bi-Lipschitz homeomorphism $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ such that $F(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}^d$.*

This is an easy exercise for $d = 1$. For $d \geq 2$, the proof follows as a concatenation of results and remarks that are already known plus an elementary lemma, as next explained. First, Lagarias and Pleasants prove in [7] several ergodic type estimates for linearly repetitive Delone sets that imply in particular that Burago–Kleiner’s condition from [5] holds, as shown along the proof of Theorem 2.1 in [2] (see also [9] for the case of Penrose tilings). Thus, by a theorem first proved in [5] for $d = 2$, and later extended to $d > 2$ in [2], such a Delone set is rectifiable. However, a careful reading of the proof in Section 4 of [5] shows that a stronger statement holds: if \mathcal{D} satisfies the Burago–Kleiner condition, then there exists a bi-Lipschitz homeomorphism H of \mathbb{R}^d such that $H(\mathcal{D})$ is a boundedly displaced image of \mathbb{Z}^d . More precisely, there is a bijection $\Phi : H(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ such that $|\Phi(H(v)) - H(v)|$ is uniformly bounded on $v \in \mathcal{D}$. Knowing this, the Main Theorem follows from the next lemma applied to $\mathcal{D}' := \Phi(\mathcal{D})$.

Lemma. *If \mathcal{D}' is a Delone set in \mathbb{R}^d that is a boundedly displaced image of \mathbb{Z}^d , then there exists a bi-Lipschitz homeomorphism $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ for which $F(\mathcal{D}') = \mathbb{Z}^d$.*

Version française

Au cours des dernières années, l’étude des *ensembles de Delone* (c’est-à-dire des ensembles uniformément séparés et uniformément discrets de \mathbb{R}^d) a attiré beaucoup d’attention en raison de leur intérêt géométrique intrinsèque ainsi que de leur relation avec des modèles mathématiques des quasicristaux. L’une des questions basiques concerne la rectifiabilité, c’est-à-dire l’équivalence d’un tel ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ avec le réseau standard par une application bilipschitzienne $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}^d$. L’existence d’ensembles de Delone non rectifiables (pour $d \geq 2$) a été indépendamment montrée par Burago et Kleiner [4] et McMullen [8] (des exemples plus concrets apparaissent dans [6]). *A priori*, l’existence d’un homéomorphisme bilipschitzien $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui étend f ci-dessus est une condition plus forte. Ce problème a été soulevé (de façon beaucoup plus générale) dans [1], où il est montré qu’un tel F existe (avec un bon contrôle de la constante bilipschitzienne) lorsque la constante bilipschitzienne de f est très proche de 1. Cependant, le cas général reste ouvert.

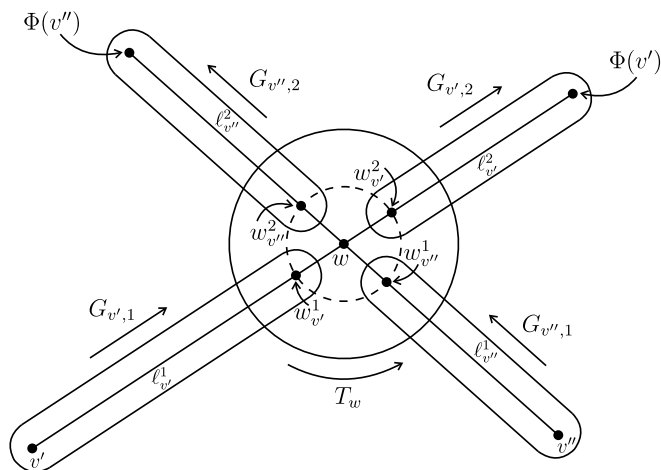
Dans cette Note, nous donnons un argument court et élémentaire montrant l’existence d’un tel F pour des choix particuliers de f dont on connaît déjà l’existence pour une classe importante d’ensembles de Delone rectifiables (qui comprend, par exemple, l’ensemble des sommets des pavages de Penrose). Rappelons qu’un ensemble de Delone \mathcal{D} est dit *répétitif* si, pour tout $r > 0$, il existe $R = R(r) > 0$ tel que pour chaque paire de boules B_r et B_R de rayons r et R respectivement, l’intersection $B_R \cap \mathcal{D}$ contient une copie translatée de $B_r \cap \mathcal{D}$. L’ensemble \mathcal{D} est dit *linéairement répétitif* si R peut être pris comme une fonction linéaire de r . Des exemples d’ensembles de Delone linéairement répétitifs sont l’ensemble des sommets des pavages de substitution et certains ensembles obtenus par coupure et projection ; voir [3].

Théorème principal. *Si \mathcal{D} est un ensemble de Delone linéairement répétitif dans \mathbb{R}^d , alors il existe un homéomorphisme bilipschitzien $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $F(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}^d$.*

Ceci est un exercice facile pour $d = 1$. Pour $d \geq 2$, la preuve résulte d’une concaténation de résultats et de remarques déjà connus plus un lemme élémentaire, comme nous l’expliquons à continuation. Tout d’abord, Lagarias et Pleasants montrent dans [7] plusieurs estimées de type ergodique pour les ensembles de Delone linéairement répétitifs, qui impliquent en particulier que la condition de Burago et Kleiner de [5] est satisfaite, comme le montre la preuve du Théorème 2.1 dans [2] (voir aussi [9] pour le cas des pavages de Penrose). Par conséquent, d’après un théorème d’abord démontré pour $d = 2$ dans [5], et puis étendu pour $d > 2$ dans [2], un tel ensemble de Delone est rectifiable. Toutefois, une lecture attentive de la preuve de la Section 4 de [5] montre qu’une conclusion plus forte est valable : si \mathcal{D} satisfait la condition de Burago et Kleiner, alors il existe un homéomorphisme bilipschitzien H de \mathbb{R}^d tel que $H(\mathcal{D})$ est une image à déplacement borné de \mathbb{Z}^d . Plus précisément, il existe une bijection $\Phi : H(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ telle que $|\Phi(H(v)) - H(v)|$ est uniformément borné sur $v \in \mathcal{D}$. Sachant cela, le Théorème principal découle du lemme suivant appliqué à $\mathcal{D}' := H(\mathcal{D})$.

Lemme. *Si \mathcal{D}' est un ensemble Delone dans \mathbb{R}^d qui est une image à déplacement borné de \mathbb{Z}^d , alors il existe un homéomorphisme bilipschitzien $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ pour lequel $F(\mathcal{D}') = \mathbb{Z}^d$.*

Preuve. Comme auparavant, notons $\Phi : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{Z}^d$ la bijection à déplacement borné. L’argument pour le cas $d \geq 3$ est très simple. En effet, pour chaque $\rho > 0$, le nombre de points de \mathcal{D}' contenus dans toute boule de rayon ρ est borné par une constante qui dépend de ρ . Par conséquent, si l’on bouge les points de \mathcal{D}' à une distance uniformément bornée (et très petite) par un homéomorphisme bilipschitzien, on peut supposer qu’il existe $\varepsilon > 0$ de telle sorte que les segments $\ell_{v'}$ qui



joignent les points v' et $\Phi(v')$, avec $v' \in \mathcal{D}'$, sont séparés d'une distance $\geq \varepsilon$. On peut donc considérer une famille d'homéomorphismes bilipschitziens $G_{v'}$ chacun supporté sur le $\varepsilon/2$ -voisinage $N_{\varepsilon/2}(\ell_{v'})$ de $\ell_{v'}$ et tel que $G_{v'}(v') = \Phi(v')$. Puisque les longueurs des $\ell_{v'}$ sont uniformément bornées, la constante bilipschitzienne de $G_{v'}$ peut être prise uniformément bornée. Par conséquent, si l'on définit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ en faisant $F(u) := G_{v'}(u)$ pour $u \in N_{\varepsilon/2}(\ell_{v'})$ et $F(u) := u$ pour u en dehors de la réunion des $N_{\varepsilon/2}(\ell_{v'})$, nous obtenons l'homéomorphisme désiré.

Pour le cas $d = 2$, nous ne pouvons certainement pas éviter les intersections des segments $\ell_{v'}$. Cependant, en faisant bouger les points de \mathcal{D}' à une distance uniformément bornée (et très petite) par un homéomorphisme bilipschitzien, on peut supposer que les points d'intersection sont à distance $\geq \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$. De plus, on peut supposer qu'ils sont à distance $\geq \varepsilon$ de tous les points v' et $\Phi(v')$, et que les angles d'intersection sont aussi $\geq \varepsilon$. En supposant tout ceci, pour chaque point d'intersection w , notons $B(w)$ le disque de centre w et rayon $\varepsilon/3$. Cela donne une famille de disques disjoints, chacun desquels est le support d'un homéomorphisme bilipschitzien T_w (qui jouit d'un contrôle uniforme de la constante bilipschitzienne) qui correspond à un demi-twist de Dehn, de telle sorte que sa restriction au cercle de centre w et rayon $\varepsilon/6$ coïncide avec la rotation d'angle π . Notons $w_{v'}^1$ et $w_{v'}^2$ les points d'intersection de ce cercle et le segment $\ell_{v'}$, avec $w_{v'}^1$ entre v' et $w_{v'}^2$. Remarquons que $T_w(w_{v'}^1) = w_{v'}^2$. Soit $\ell_{v'}^i$ le segment de $\ell_{v'}$ entre deux points consécutifs de la forme $w_{v'}^2$ et $w_{v'}^1$ (le premier commençant sur v' et le dernier finissant sur $\Phi(v')$). Soit $\varepsilon' > 0$ une constante (qui ne dépend que de ε) telle que les ε' -voisinages $N_{\varepsilon'}(\ell_{v'}^i)$ des segments $\ell_{v'}^i$ sont disjoints (pour tout i et tout v'). De nouveau, chaque $N_{\varepsilon'}(\ell_{v'}^i)$ est le support d'un homéomorphisme bilipschitzien $G_{v',i}$ qui envoie le point initial de $\ell_{v'}^i$ sur le point final. De plus, la constante bilipschitzienne de $G_{v',i}$ peut être prise uniformément bornée. L'homéomorphisme désiré F s'obtient alors en concaténant, dans l'ordre correct, toutes ses applications $G_{v',i}$ et T_w provenant des points d'intersection w le long de $\ell_{v'}$. Puisque le nombre de points d'intersection est uniformément borné, cette application F est un homéomorphisme bilipschitzien. \square

Remarque. Bien sûr, des calculs explicites suivant les arguments ci-dessus (en utilisant les estimées déjà connues pour l'application H) fourniraient une borne supérieure pour la constante bilipschitzienne de l'homéomorphisme F du Théorème principal en termes de la dimension $d \geq 2$ et de la géométrie de \mathcal{D} (plus précisément, des constantes de séparation des points et de densité relative). Néanmoins, nous ne voyons aucune application potentielle de ceci ; nous laissons donc ces calculs au soin du lecteur.

Remerciements

Je tiens à remercier B. Weiss pour son encouragement à rédiger cette Note, ainsi que tous les participants de la rencontre *Mathematical Quasicrystals* à Oberwolfach (octobre 2015). Ce travail a été financé par les projets de recherche ACT 1103, ACT 1415 (PIA CONICYT) et FONDECYT 1160541.

Références

[1] P. Alestalo, D.A. Trotsenko, J. Väisälä, Linear bilipschitz extension property, *Sib. Mat. Zh.* 44 (6) (1993) 1226–1238, English translation in : *Sib. Math. J.* 44 (6) (1993) 959–968.
 [2] J. Aliste-Prieto, D. Coronel, J.-M. Gambaudo, Linearly repetitive Delone sets are rectifiable, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* 30 (2) (2013) 275–290.
 [3] J. Aliste-Prieto, D. Coronel, M.I. Cortez, F. Durand, S. Petite, Linearly repetitive Delone sets, in: J. Kellendock, D. Lenz, J. Savinien (Eds.), *Mathematics of Aperiodic Order*, in: *Progress in Mathematics*, vol. 309, Birkhäuser, 2015, pp. 195–222.
 [4] D. Burago, B. Kleiner, Separated nets in Euclidean space and Jacobians of bi-Lipschitz maps, *Geom. Funct. Anal.* 8 (2) (1998) 273–282.
 [5] D. Burago, B. Kleiner, Rectifying separated nets, *Geom. Funct. Anal.* 12 (1) (2002) 80–92.

- [6] M.I. Cortez, A. Navas, Some examples of repetitive, nonrectifiable Delone sets, *Geom. Topology* 20 (2016) 1909–1939, 1939.
- [7] J.C. Lagarias, P.A. Pleasants, Repetitive Delone sets and quasicrystals, *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 23 (2003) 831–867.
- [8] C.T. McMullen, Lipschitz maps and nets in Euclidean space, *Geom. Funct. Anal.* 8 (2) (1998) 304–314.
- [9] Y. Solomon, Substitution tilings and separated nets with similarities to the integer lattice, *Isr. J. Math.* 181 (2011) 445–460.