C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 583–588

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie analytique

Extension de courants fermés à l'espace projectif

Extension of closed currents to the projective space

Michel Méo

IECL, boulevard des Aiguillettes, BP 70239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 8 février 2016
Accepté après révision le 17 mars 2016
Disponible sur Internet le 18 avril 2016

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

Une (q,q)-forme différentielle θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ fermée dans une variété projective complexe lisse X plongée dans l'espace projectif $\mathbb{P}_n$ donne naissance à une « extension » à l'espace projectif comme courant fermé. Ceci signifie que le nombre d'intersections de ce courant avec l'image directe par l'injection canonique de X d'une forme test $\mathcal{C}^\infty$ dans X est égal à la valeur de θ sur cette forme test, et que sa restriction à X s'obtient au moyen de l'éclatement de centre X. On définit ainsi une transformation intégrale donnée par un noyau qui est un courant fermé dans $\mathbb{P}_n \times X$, et qui est utilisée pour apporter une réponse à un problème de Grothendieck. Ce transformé est encore défini pour un cycle algébrique de codimension q au lieu de la (q,q)-forme différentielle. On obtient une caractérisation des intersections complètes par la positivité du transformé. On obtient aussi une version du théorème de Lefschetz sur la section hyperplane, qui dit que la classe de cohomologie provient de la section hyperplane lorsque l'intersection avec X est transverse en dehors de la section hyperplane.

ABSTRACT

A closed smooth differential (q,q)-form θ in a complex projective manifold X embedded in the projective space $\mathbb{P}_n$ gives rise to an "extension" to the projective space as a closed current. This means that the intersection number of this current with the direct image by the canonical injection of X of a smooth test form on X is equal to the value of θ on this test form, and that its restriction to X is obtained by means of the blow up with center X. We define in this way an integral transform given by a kernel which is a closed current in $\mathbb{P}_n \times X$, and which is used to bring an answer to a problem of Grothendieck. This transform is still defined for an algebraic cycle of codimension q instead of the differential (q,q)-form. We obtain a characterization of the complete intersections by the positivity of the transform. Moreover, we obtain a version of the Lefschetz theorem on the hyperplane section stating that the cohomology class arises from the hyperplane section when the intersection with X is transverse outside the hyperplane section.

Adresse e-mail : michel.meo@univ-lorraine.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.03.010

1. Extension en un courant fermé dans $\mathbb{P}_n$ avec Hahn–Banach

Soit X une sous-variété complexe fermée connexe de dimension p dans l'espace projectif $\mathbb{P}_n$ et θ une (q,q)-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ fermée dans X avec $q \geq 1$. Soit $i_0 : X \to \mathbb{P}_n$ l'injection canonique. Il existe un (q,q)-courant fermé S dans $\mathbb{P}_n$ possédant une « restriction » $S_{|X}$ égale à θ, c'est-à-dire que pour toute $(p-q, p-q)$-forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X, le courant S possède un nombre d'intersections avec l'image directe $i_{0*}u$ dans $\mathbb{P}_n$ égal au nombre d'intersections de θ avec u dans X. Cela signifie qu'il existe $\varphi_j : \mathcal{D}_{p-q,p-q}(X) \to \mathcal{D}_{n-q,n-q}(\mathbb{P}_n)$ vérifiant : $\varphi_j(u)$ converge faiblement dans $\mathbb{P}_n$ vers $i_{0*}u$ et $\int_{\mathbb{P}_n} S \wedge \varphi_j(u) \to \int_X \theta \wedge u$.

Notons que cela n'entraîne pas nécessairement l'égalité cohomologique $\{\theta\} = \{S\}_{|X} = (\deg S)\{\omega^q_{|X}\}$ où ω est la forme de Fubini–Study dans $\mathbb{P}_n$. En effet, cela signifierait que, pour toute $(p-q,p-q)$-forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\infty$ fermée dans X, on aurait l'égalité $\int_X \theta \wedge u = (\deg \mathrm{S}) \int_X \omega^q_{|X} \wedge u = \int_{\mathbb{P}_n} S \wedge i_{0*}u$. Ensuite, $i_{0*}u$ est fermée dans $\mathbb{P}_n$, donc on peut écrire $i_{0*}u = (\int_X \omega^q_{|X} \wedge u)\omega^{n-q} + dd^c w$. Mais w est seulement à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans $\mathbb{P}_n$ et donc $\int_{\mathbb{P}_n} S \wedge dd^c w$ n'est pas nécessairement nulle, le théorème de Stokes ne pouvant ici s'appliquer.

Lorsqu'elle existe, la restriction $S_{|X}$ se définit en utilisant l'éclatement $\mu : \tilde{\mathbb{P}}_n \to \mathbb{P}_n$ de $\mathbb{P}_n$ de centre X. D'après [1], l'image inverse $\mu^* S$ existe comme courant dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$, et on est ramené à intersecter $\mu^* S$ avec un diviseur, ce qui est possible avec le théorème de division de Hörmander–Lojasiewicz et la formule de Poincaré–Lelong écrite localement. Mais, comme dans le cas du transformé strict d'un cycle algébrique, on n'a pas nécessairement $\{\mu^* S\} = \mu^*\{S\}$. On observera que l'image inverse μ^* des courants ne commute pas a priori à dd^c, car μ n'est pas une submersion, de sorte que l'image directe μ_* d'une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas nécessairement lisse.

Nous construisons ici le courant fermé S en utilisant un argument de projection, la solution obtenue pouvant être d'ordre élevé.

Pour $u \in \mathcal{D}_{p-q,p-q}(X)$ de bidegré $(p-q, p-q)$ dans X, on doit avoir $\int_X \theta \wedge u = \int_X i_0^* S \wedge u = \int_{\mathbb{P}_n} S \wedge i_{0*}u$. Par ailleurs, $\partial S = 0$ revient à $\int_{\mathbb{P}_n} \partial S \wedge v = -\int_{\mathbb{P}_n} S \wedge \partial v = 0$ pour $v \in \mathcal{D}_{n-q-1,n-q}(\mathbb{P}_n)$. De même $\bar\partial S = 0$ revient à $\int_{\mathbb{P}_n} S \wedge \bar\partial w = 0$ pour $w \in \mathcal{D}_{n-q,n-q-1}(\mathbb{P}_n)$.

On sait donc définir S sur l'espace

$$i_{0*}\mathcal{D}_{p-q,p-q}(X) \oplus \{\partial \mathcal{D}_{n-q-1,n-q}(\mathbb{P}_n) + \bar\partial \mathcal{D}_{n-q,n-q-1}(\mathbb{P}_n)\}.$$

Il y a prolongement en une forme linéaire continue sur $\mathcal{F} \supset \mathcal{D}_{n-q,n-q}(\mathbb{P}_n)$. En effet, une formule d'homotopie dans $\mathbb{P}_n \setminus X$ permet d'écrire $\varphi \in \mathcal{D}_{n-q,n-q}(\mathbb{P}_n)$ sous la forme $\varphi = i_{0*}u + \partial A_0(\varphi) + A_1(\partial\varphi) + \bar\partial B_0(\varphi) + B_1(\bar\partial\varphi) + h$ avec h explicite. L'application $\varphi \to u$ n'est pas faiblement continue, mais si φ est un courant, il existe φ_j de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant faiblement vers φ telle que $u_{\varphi_j} \to u$.

Lorsqu'on fait varier θ, on obtient une transformation $\theta \to S$ de la forme $S = \pi_{1*}(G \wedge \pi_2^*\theta)$, où $\mathbb{P}_n \times X \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_n$ et $\mathbb{P}_n \times X \xrightarrow{\pi_2} X$ sont les projections et le noyau intégral G est ici un courant de bidegré (p,p) fermé dans $\mathbb{P}_n \times X$. On écrit ensuite $G - dd^c L \in \mathcal{C}^\infty$ et on pose $U = \pi_{1*}(L \wedge \pi_2^*\theta)$, de sorte que $S - dd^c U$ est $\mathcal{C}^\infty$ fermé dans $\mathbb{P}_n$.

En général $(dd^c U)_{|X} \neq dd^c(U_{|X})$, c'est-à-dire que l'image inverse i_0^* des courants et dd^c ne commutent pas. En effet $(dd^c U)_{|X} = dd^c(U_{|X})$ signifierait, pour toute $(p-q,p-q)$-forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X, l'égalité $\int_{\mathbb{P}_n} dd^c U \wedge i_{0*}u = \int_{\mathbb{P}_n} U \wedge dd^c i_{0*}u$. Ce n'est pas le cas en général, $i_{0*}u$ n'étant pas lisse dans $\mathbb{P}_n$, puisque i_0 est une immersion. Mais l'ensemble

$$\Big\{x \in X,\ \text{il existe un voisinage ouvert } \Omega \text{ de } x \text{ dans } X \text{ tel que } (dd^c U)_{|\Omega} = dd^c(U_{|\Omega})\Big\}$$

est le complémentaire d'un fermé négligeable $E \subset X$. Ainsi, on a en cohomologie l'égalité de classes $\{\theta\} = \{S_{|X}\} = \{S\}_{|X} + i_*\{r\}$, où $i : E \to X$ est l'injection canonique.

Notons enfin que E est algébrique complexe lorsque S est d'ordre 0, ce qui donne une réponse à un problème de Grothendieck. En effet, la décomposition de Lebesgue–Nikodym des mesures permet alors d'écrire $S = S_0 + S_1$, avec S_0 un courant d'ordre 0 exact à support B négligeable, et S_1 une forme différentielle fermée à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Le sous-ensemble B est algébrique complexe et on obtient $S_0 = j_*R$, où ici $j : B \to \mathbb{P}_n$ est l'injection canonique. Ensuite, $S_{0|X} = i_*r$ où $E = B_{|X}$ et $r = R_{|E}$. Par ailleurs, $S_1 = (\deg S)\omega^q + dd^c w$ se restreint à X en $(\deg S)\omega^q_{|X} + dd^c(w_{|X})$ conformément à la relation $\{S_{|X}\} = \{S\}_{|X} + i_*\{r\}$.

2. Extension en un courant fermé dans $\mathbb{P}_n$ avec une rétraction

Soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n \times X$ de dimension pure n tel que l'intersection $\mathcal{G} \cap (X \times X)$ soit formée de la diagonale D_X et d'autres composantes irréductibles de dimension p, et soit $\mathcal{G} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_n$ un revêtement ramifié.

Soit $\Lambda \in H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$ telle que $\Lambda_{|X}$ est transverse à la section nulle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)_{|X}$, ce qui est génériquement le cas par le théorème de Bertini.

Alors il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}_n \setminus \Lambda^{-1}(0)$ contenant $Y = X \setminus (X \cap \Lambda^{-1}(0))$ et $\rho : \Omega \to Y$ une rétraction holomorphe telle que $(w, \rho(w)) \in \mathcal{G}$ pour tout $w \in \Omega$.

Proposition. Si θ est positive, le (q,q)-courant positif fermé $T = \pi_{1*}([\mathcal{G}] \wedge \pi_2^* \theta) = (\pi_{1|\mathcal{G}})_*(\pi_{2|\mathcal{G}})^* \theta$ de $\mathbb{P}_n$ est tel que $\rho^*(\theta_{|Y}) \leq T_{|\Omega}$. Donc la forme différentielle égale à $\rho^*(\theta_{|Y})$ dans Ω and 0 in $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$ a ses coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans $\mathbb{P}_n$.

Soit Ω' un voisinage ouvert de Y dans Ω, dont l'adhérence dans $\mathbb{C}^n$ est incluse dans Ω. On note $\psi = \mathbb{1}_{\Omega'} \rho^*(\theta_{|Y})$ et alors $\mathrm{d}\psi$ est à support dans $\partial\Omega'$ égal à $j_*\beta$ où $j : \partial\Omega' \to \mathbb{P}_n$ est l'injection canonique et β est un courant de degré $2q$ fermé dans $\partial\Omega'$. En fait, $\beta = -\rho^*(\theta_{|Y})_{|\partial\Omega'}$ s'écrit $\beta = e + \mathrm{d}\gamma$ où e est une chaîne singulière fermée dans $\partial\Omega'$ et γ est un courant de degré $2q-1$ dans $\partial\Omega'$. Mais $H^{2q+1}(\mathbb{P}_n, \mathbb{C}) = 0$, donc $j_*e = \mathrm{d}c$, où c est une chaîne singulière dans $\mathbb{P}_n$ de degré $2q$. Ainsi $\mathrm{d}\psi = -\rho^*(\theta_{|Y}) \wedge [\partial\Omega'] = \mathrm{d}(c + \gamma \wedge [\partial\Omega']) = \mathrm{d}(c - j_*\gamma)$.

Alors $S = \psi - c + j_*\gamma$ est de degré $2q$ fermé dans $\mathbb{P}_n$. Sa restriction à Y est $\theta_{|Y} - c_{|Y}$ où $c_{|Y}$ s'obtient en prenant les composantes de dimension $2(p-q)$ de $c \cap Y$.

Sa restriction à X est $\theta - (c_{|Y})\tilde{} - i_{1*}r$ où $i_1 : X \cap \Lambda^{-1}(0) \to X$ est l'injection canonique.

Nécessairement $c_{|Y}$ est fermé dans Y et $(c_{|Y})\tilde{}$ est fermé dans X.

Une autre méthode pour définir S consiste à écrire pour ψ une formule de représentation intégrale à partir d'un noyau K sur $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ vérifiant $\mathrm{D}_{\mathbb{P}_n} - \mathrm{dd^c} K \in \mathcal{C}^\infty$ avec $\mathrm{D}_{\mathbb{P}_n}$ la diagonale de $\mathbb{P}_n$.

Notons pr_1 et pr_2 les projections naturelles $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ et ω la forme de Fubini–Study.

Considérant ici le fibré vectoriel holomorphe hermitien $F = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \otimes \mathrm{pr}_2^*(\mathbb{C}^{n+1}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1))$ qui est de rang n au-dessus de $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$, $\mathrm{D}_{\mathbb{P}_n}$ s'interprète comme l'ensemble des zéros de la section s de F, transverse à la section nulle, définie par $s([z],[z']) = z^{-1} \otimes (z \bmod \mathbb{C}z')$. Avec $|s| = \frac{|z \wedge z'|}{|z||z'|}$, on a

$$[\mathrm{D}_{\mathbb{P}_n}] = \sum_{0 \leq m \leq n} \mathrm{pr}_1^*(\omega^m) \wedge \mathrm{pr}_2^*(\omega^{n-m}) + \mathrm{dd^c} K \ \text{ avec } \ K = -\frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{\mathrm{dd^c}|s|^2}{2|s|^2} \right)^{n-1} + O\left(\frac{1}{|s|^{2n-4}} \right).$$

Proposition. La $(q-1,q-1)$-forme différentielle $U = \mathrm{pr}_{1*}(K \wedge \mathrm{pr}_2^* \psi)$ est à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans $\mathbb{P}_n$.

On note alors $S = (\int_{\Omega'} \psi \wedge \omega^{n-q})\omega^q + \mathrm{dd^c} U = \psi + \mathrm{d^c} U_0 - U_1$ avec $U_0 = -\mathrm{pr}_{1*}(K \wedge \mathrm{pr}_2^* \mathrm{d}\psi) = \mathrm{pr}_{1*}(K \wedge \mathrm{pr}_2^*([\partial\Omega'] \wedge \rho^*(\theta_{|Y})))$ et $U_1 = -\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{d}K \wedge \mathrm{pr}_2^* \mathrm{d^c}\psi)$ qui a même composante de bidegré (q,q) que $\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{d^c}K \wedge \mathrm{pr}_2^* \mathrm{d}\psi) = -\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{d^c}K \wedge \mathrm{pr}_2^*([\partial\Omega'] \wedge \rho^*(\theta_{|Y})))$.

Par tranchage, la restriction de K à $\mathbb{C}^n \times \partial\Omega'$ est à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Par le théorème d'Hörmander–Lojasiewicz, la restriction de $\mathrm{d^c}K$ à $\mathbb{C}^n \times \partial\Omega'$ est bien définie.

Alors, la restriction de S à X est définie en utilisant l'éclatement de $\mathbb{P}_n$ de centre X, et elle est égale à $\theta + (\mathrm{d^c}U_0 - U_1)_{|X}$.

3. Existence de la restriction à X d'un courant positif fermé dans $\mathbb{P}_n$ avec un éclatement

Pour S un (q,q)-courant positif fermé quelconque dans $\mathbb{P}_n$, on peut ainsi définir la « restriction » $S_{|X}$ et en fait l'hypothèse $S_{|\mathbb{P}_n \setminus X}$ positif fermé de masse finie suffit.

Soit $\tilde{\mathbb{P}}_n \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}_n$ l'éclatement de $\mathbb{P}_n$ de centre X et $H \subset \tilde{\mathbb{P}}_n$ le diviseur exceptionnel. Alors le courant $R = (\mu_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H})^*(S_{|\mathbb{P}_n \setminus X})$, qui est positif fermé dans $\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H$, est de masse finie dans $\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H$. En effet, soit (S_j) une suite de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ positives fermées dans $\mathbb{P}_n$ convergeant faiblement dans $\mathbb{P}_n$ vers S. Alors les $R_j = (\mu^* S_j)_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H}$ convergent faiblement vers R et si $\tilde{\omega}$ est une $(1,1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive fermée dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$, on a

$$\int_{\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H} R \wedge (\tilde{\omega}^{n-q}_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H}) \leq \liminf_j \int_{\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H} R_j \wedge (\tilde{\omega}^{n-q}_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H}) \leq \lim_j \int_{\tilde{\mathbb{P}}_n} \mu^* S_j \wedge \tilde{\omega}^{n-q} \leq \mu^*(\{S\})\{\tilde{\omega}\}^{n-q}.$$

L'extension triviale $\tilde{R}$ de R à $\tilde{\mathbb{P}}_n$ est un courant positif fermé dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$ d'après le théorème de Skoda-El Mir.

Pour définir le produit $\tilde{R} \wedge [H]$ dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$, on utilise une régularisation de $[H]$, au lieu d'utiliser le théorème de division de Hörmander–Lojasiewicz avec la formule de Poincaré–Lelong écrite localement. Pour cela, on écrit $[H] = \alpha + \mathrm{dd^c}\Psi$ avec α une $(1,1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ fermée dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$ et Ψ une fonction quasi-plurisousharmonique dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H$. Il existe une suite (T_j) de $(1,1)$-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ fermées dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$, s'écrivant $T_j = \alpha + \mathrm{dd^c}\Psi_j$ avec Ψ_j de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$ décroissant vers Ψ lorsque $j \to \infty$ donc convergeant faiblement dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$ vers $[H]$ et vérifiant $T_j \geq -C\tilde{\omega}$ pour une constante $C > 0$. La suite $\int_{\tilde{\mathbb{P}}_n} \tilde{R} \wedge (T_j + C\tilde{\omega}) \wedge \tilde{\omega}^{n-q-1} = \{\tilde{R}\}(\{\alpha\} + C\{\tilde{\omega}\})\{\tilde{\omega}\}^{n-q-1}$ est constante, et il existe une suite extraite $\tilde{R} \wedge (T_{j_l} + C\tilde{\omega})$ de la suite $\tilde{R} \wedge (T_j + C\tilde{\omega})$ de courants positifs fermés qui converge faiblement dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$.

On définit alors $\tilde{R} \wedge [H] = (\lim_l \tilde{R} \wedge (T_{j_l} + C\tilde{\omega})) - \tilde{R} \wedge C\tilde{\omega}$ qui est localement plat dans $\tilde{\mathbb{P}}_n$ comme différence de deux courants positifs fermés. Comme on a aussi $\tilde{R} \wedge T_{j_l} = \tilde{R} \wedge \alpha + \mathrm{dd^c}(\Psi_{j_l}\tilde{R})$ avec $(\Psi_{j_l}\tilde{R})_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H}$ qui converge faiblement vers $(\Psi_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H})R$ d'après le théorème de convergence monotone, il vient $(\tilde{R} \wedge [H])_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H} = \lim_l ((\tilde{R} \wedge T_{j_l})_{|\tilde{\mathbb{P}}_n \setminus H}) = 0$ et $\tilde{R} \wedge [H]$ est à support dans H, donc égal à l'image directe par l'injection $j : H \to \tilde{\mathbb{P}}_n$ d'un courant qui est $\tilde{R}_{|H}$.

On définit enfin $S_{|X} = (\mu_{|H})_*(\tilde{R}_{|H} \wedge c_1(\Theta_{\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)})^{n-p-1})$ où $c_1(\Theta_{\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)})$ est la $(1,1)$-forme différentielle dans $H = P(N_{\mathbb{P}_n}X)$, égale à la première forme de Chern de la forme de courbure de $\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)$ pour la métrique hermitienne induite.

La restriction $\mu_{|H} : H \to X$ de μ est une submersion et $(\mu_{|H})_*(c_1(\Theta_{\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)})^{n-p-1}) = 1$. Pour u forme différentielle de bidegré $(p-q, p-q)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X, on a donc

$$\mu_* j_*((\mu_{|H})^* u \wedge c_1(\Theta_{\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)})^{n-p-1}) = i_{0*}(\mu_{|H})_*((\mu_{|H})^* u \wedge c_1(\Theta_{\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)})^{n-p-1}) = i_{0*}u.$$

En prenant l'image réciproque par l'éclatement μ, on obtient $\mu^* i_{0*}u = j_*((\mu_{|H})^* u \wedge c_1(\Theta_{\mathcal{O}_{P(N_{\mathbb{P}_n}X)}(1)})^{n-p-1})$, d'où l'on déduit que $\int_{\mathbb{P}_n} S \wedge i_{0*}u = \int_X S_{|X} \wedge u$, ce qui respecte la définition de i_0^* pour un courant.

4. Théorème de Lefschetz sur la section hyperplane

Si la restriction $S_{|Y}$ est transverse, c'est-à-dire si $c_{|Y}$ est transverse, on obtient

$$\{\theta\} = \{(c_{|Y})\tilde{}\} + i_{1*}\{r\} + (\deg S)\{\omega^q\}_{|X}$$

où $i_1 : X \cap \Lambda^{-1}(0) \to X$ est l'injection canonique et ω est la forme de Fubini–Study. Lorsque $q > p/2$, le théorème de Lefschetz sur la section hyperplane dit que $S_{|Y}$ est transverse.

5. Calcul de la classe de cohomologie de la diagonale D_X

Un choix particulier de $\mathcal{G}$ et de ρ permet d'effectuer le calcul de la classe de cohomologie dans $X \times X$ de la diagonale D_X. Soit

$$0 \to TX \xrightarrow{\alpha} T\mathbb{P}_{n|X} \xrightarrow{\beta} N_{\mathbb{P}_n}X \to 0$$

la suite exacte définissant le fibré normal à X dans $\mathbb{P}_n$. On va d'abord étudier le scindage de cette suite exacte en dehors d'une hypersurface algébrique de X.

Proposition. Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand et $f \in H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k))$ non identiquement nulle dans X, il existe $\Gamma \in H^0(X, \mathrm{Hom}(T\mathbb{P}_{n|X}, TX) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X})$ telle que $\Gamma\alpha = f_{|X} \otimes \mathrm{id}_{TX}$.

Démonstration. On choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(N_{\mathbb{P}_n}X, TX) \otimes \det TX \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X})$ soit > 0 au sens de Nakano dans X, de sorte que, par le théorème d'annulation de Serre–Nakano :

$$H^{0,1}(X, \mathrm{Hom}(N_{\mathbb{P}_n}X, TX) \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X})) = H^{p,1}(X, \mathrm{Hom}(N_{\mathbb{P}_n}X, TX) \otimes \det TX \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X})) = 0.$$

Soit v une section $\mathcal{C}^\infty$ dans X de $\mathrm{Hom}(T\mathbb{P}_{n|X}, TX)$ telle que $v\alpha = \mathrm{id}_{TX}$, i.e. un scindage $\mathcal{C}^\infty$ de α dans X. On cherche u une section de $\mathrm{Hom}(N_{\mathbb{P}_n}X, TX)$ définie dans $X \setminus f^{-1}(0)$ telle que $v - u\beta$, qui est encore un scindage de α dans $X \setminus f^{-1}(0)$, soit holomorphe dans $X \setminus f^{-1}(0)$. Or, $D''v$ est une $(0,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ dans X telle que $(D''v)\alpha = D''(v\alpha) = 0$, donc $(D''v)\beta^{-1}$ est bien définie comme $(0,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(N_{\mathbb{P}_n}X, TX)$ et elle est D''-fermée dans X. Il existe donc u_0 section $\mathcal{C}^\infty$ dans X de $\mathrm{Hom}(N_{\mathbb{P}_n}X, TX) \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X})$ telle que $((D''v)\beta^{-1}) \otimes (f_{|X}) = D''u_0$ dans X, de sorte que $u = \frac{u_0}{(f_{|X})}$ convient. On pose alors $\Gamma = v \otimes (f_{|X}) - u_0\beta$. $\square$

Si on remplace $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$, la propriété peut être fausse pour tout n tel qu'on a un plongement $X \subset \mathbb{P}_n$. En effet, le morphisme surjectif naturel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)^{\oplus(n+1)} \to T\mathbb{P}_n$ induit un morphisme injectif

$H^0(X, T^*\mathbb{P}_{n|X} \otimes TX \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)_{|X}) \to H^0(X, TX)^{\oplus(n+1)}$ et $H^0(X, TX) = H^{p,p}(X, T^*X)^*$, par dualité de Serre, est nul si T^*X est ample, par le théorème d'annulation de Le Potier.

Pour $\Lambda \in H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$ non identiquement nulle dans X, il existe donc

$$\Gamma \in H^0(X, \mathrm{Hom}(T\mathbb{P}_{n|X}, TX) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X})$$

telle que $\Gamma\alpha = \Lambda_{|X}^k \mathrm{id}_{TX}$. Par le théorème de Bertini, on peut choisir Λ telle que $\Lambda_{|X}$ est transverse à la section nulle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)_{|X}$. La section $\gamma = \frac{\Gamma}{\Lambda_{|X}^k}$ de $\mathrm{Hom}(T\mathbb{P}_{n|X}, TX)$ est méromorphe dans X, à pôles d'ordre $\le k$ dans $X \cap \Lambda^{-1}(0)$ et c'est un scindage holomorphe de α dans $Y = X \setminus \Lambda^{-1}(0)$. Soit λ la forme linéaire sur $\mathbb{C}^{n+1}$ associée à Λ i.e. définie par $\lambda(x) = x \otimes \Lambda([x])$ pour $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Y est une sous-variété algébrique affine lisse de $\mathbb{C}^n \simeq \lambda^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}_n \setminus \Lambda^{-1}(0)$ et $\gamma([x])$ induit un scindage $\gamma'(w)$ de $0 \to T_wY \to \lambda^{-1}(0)$. Fixons $[e]$ un point de $\mathbb{P}_n$ hors de $\Lambda^{-1}(0)$ et considérons la carte de $\mathbb{P}_n$ suivante $[z] \in \mathbb{P}_n \setminus \Lambda^{-1}(0) \mapsto \frac{z}{\lambda(z)} - \frac{e}{\lambda(e)} = w \in \lambda^{-1}(0)$, ayant pour bijection réciproque $w \in \lambda^{-1}(0) \mapsto [\frac{e}{\lambda(e)} + w] \in \mathbb{P}_n \setminus \Lambda^{-1}(0)$. Les différentielles sont

$$\zeta \in T_{[z]}\mathbb{P}_n = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}z, \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}z) \mapsto \frac{1}{\lambda(z)}(\tilde{\zeta}(z) - \frac{\lambda(\tilde{\zeta}(z))}{\lambda(z)} z) \in \lambda^{-1}(0)$$

avec $\tilde{\zeta}(z) \in \mathbb{C}^{n+1}$ un représentant de $\zeta(z)$, et pour l'inverse

$$w' \in \lambda^{-1}(0) \mapsto \lambda(z)z^{-1} \otimes (w' \bmod \mathbb{C}z) \in (\mathbb{C}z)^* \otimes (\mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}z).$$

Soit $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n$ l'application naturelle. Le morphisme surjectif naturel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}^{\oplus(n+1)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1) \otimes T\mathbb{P}_n$ et γ donnent pour tout $[x] \in Y$ un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n+1}, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)_{|X} \otimes TX)_{[x]})$ égal à $x \otimes (\gamma([x])\mathrm{d}\pi_x)$. Le scindage $\gamma'(w)$ de $0 \to T_wY \to \lambda^{-1}(0)$ induit par $\gamma([x])$ s'explicite ainsi : à $w' \in \lambda^{-1}(0)$ est associé

$$\gamma'(w)(w') = (\gamma([x])(x^{-1} \otimes w' \bmod \mathbb{C}x))\tilde{}(x) - \frac{1}{\lambda(x)}\lambda((\gamma([x])(x^{-1} \otimes w' \bmod \mathbb{C}x))\tilde{}(x))x,$$

si w correspond à $[x]$.

Donnons alors la construction à partir de γ' d'une rétraction holomorphe $\Omega \xrightarrow{\rho} Y$ sur Y, avec Ω un certain voisinage ouvert de Y dans $\lambda^{-1}(0)$. Pour $w \in \Omega$, $\rho(w)$ est l'élément $y \in Y$ tel que l'équation $w = y + w' - \gamma'(y)(w')$ admette une solution $w' \in \lambda^{-1}(0)$ assez petite. En d'autres termes, $\rho([z])$ est l'élément $[x] \in X$ tel qu'il existe $\xi \in T_{[x]}\mathbb{P}_n$ assez proche de $0_{[x]}$ vérifiant

$$\frac{z}{\lambda(z)} - \frac{x}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda(x)}(\xi(x) - \frac{\lambda(\xi(x))}{\lambda(x)}x) - \frac{1}{\lambda(x)}((\gamma([x])(\xi))\tilde{}(x) - \frac{1}{\lambda(x)}\lambda((\gamma([x])(\xi))\tilde{}(x))x).$$

L'existence de $\xi \in T_{[x]}\mathbb{P}_n$ vérifiant cette égalité est équivalente à l'existence de $\xi \in T_{[x]}\mathbb{P}_n$ tel que $z = \xi(x) - \gamma([x])(\xi)\tilde{}(x) \bmod \mathbb{C}x$, de sorte que $[x]$ est caractérisé par $x^{-1} \otimes (z \bmod \mathbb{C}x) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{id} - \alpha\gamma([x]))$ et $[x]$ assez proche de $[z]$. Comme $\gamma([x])\alpha = \mathrm{id}_{T_{[x]}X}$, on a aussi $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id} - \alpha\gamma([x])) = \mathrm{Ker}\,\gamma([x]) = \mathrm{Ker}\,\Gamma([x])$.

Considérons donc le sous-ensemble algébrique $G = \{([z],[x]) \in \mathbb{P}_n \times X, \Gamma([x])(x^{-1} \otimes (z \bmod \mathbb{C}x)) = 0\}$ de $\mathbb{P}_n \times X$. On note $\mathbb{P}_n \times X \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_n$ et $\mathbb{P}_n \times X \xrightarrow{\pi_2} X$ les projections. Alors G est l'ensemble des zéros de la section holomorphe $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{P}_n \times X$ du fibré vectoriel holomorphe $\pi_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k-1)_{|X} \otimes TX)$ de rang p, définie par $\mathcal{S}([z],[x]) = z^{-1} \otimes x \otimes \Gamma([x])(x^{-1} \otimes (z \bmod \mathbb{C}x))$. Pour $[x] \in Y$, $\Gamma([x])$ est surjective, donc $\dim \mathrm{Ker}\,\Gamma([x]) = n - p$, autrement dit $Y \subset X \setminus \mathcal{C}_\Gamma$ où le sous-ensemble algébrique $\mathcal{C}_\Gamma = \{[x] \in X,\ \text{rang de } \Gamma([x]) < p\}$ de $X \cap \Lambda^{-1}(0)$ est le lieu de dégénérescence de Γ et est encore égal à l'ensemble des zéros de la section $\bigwedge^p \Gamma \in H^0(X, \bigwedge^p T^*\mathbb{P}_{n|X} \otimes \det(TX \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)_{|X}))$. Comme $([z],[x]) \in G$ équivaut à $[z]$ dans le projectivisé $P(\mathrm{d}\pi_x^{-1}(\mathrm{Ker}\,\Gamma([x])))$, qui est donc de dimension $n-p$, $G \cap (\mathbb{P}_n \times Y)$ est quasi-projective, de dimension $\dim Y + n - p = n$.

Alors $\mathcal{G}$ défini comme l'adhérence de $G \cap (\mathbb{P}_n \times Y)$ dans G est un sous-ensemble algébrique de dimension n de $\mathbb{P}_n \times X$. Pour $[z] \in \Omega$ correspondant à $w \in \lambda^{-1}(0)$ et $[x] \in Y$ à $\rho(w)$, on a $([z],[x]) \in \mathcal{G}$. Donc l'ouvert Ω est inclus dans $\pi_1(\mathcal{G})$, qui est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$, de sorte que $\pi_1(\mathcal{G}) = \mathbb{P}_n$ et $\mathcal{G} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_n$ est un revêtement ramifié.

Comme $\mathcal{S}^{-1}(0)$ est la réunion de $\mathcal{G}$ et de composantes dans $\mathbb{P}_n \times (X \cap \Lambda^{-1}(0))$, alors $(\mathcal{S}_{|X\times X})^{-1}(0)$ est la réunion de composantes dans $X \times (X \cap \Lambda^{-1}(0))$ et de $\mathrm{D}_X \cup F$ où F est un cycle de dimension p.

Le cycle F s'obtient en déterminant les $([z],[x]) \in X \times X$ tels que $x^{-1} \otimes (z \bmod \mathbb{C}x) \in \mathrm{Ker}\,\Gamma([x])$, ce qui équivaut à dire que la droite projective $P(\mathrm{Vect}(x,z))$ joignant $[z]$ à $[x]$ est incluse dans le sous-espace projectif $\mathrm{Ker}\,\Gamma([x])$, ce qui équivaut encore à dire que $[z]$ est un point d'intersection de X et de $\mathrm{Ker}\,\Gamma([x])$.

Proposition. Avec $i : X \times (X \cap \Lambda^{-1}(0)) \to X \times X$ l'injection naturelle, il existe un coefficient $a \neq 0$ tel que $a\{\mathrm{D}_X\} + \{F\} + i_*\eta = c_p((\pi_{1|X\times X})^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)_{|X}) \otimes (\pi_{2|X\times X})^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k-1)_{|X} \otimes TX))$ où la classe de cohomologie η se calcule par la formule de Laksov.

Afin d'éliminer le terme $\{F\}$, on utilise la construction suivante.

Pour $[x] \in X$, on choisit $V_{[x]} \subset T_{[x]}\mathbb{P}_n$ un sous-espace vectoriel de dimension $n-p-1$ tel que $V_{[x]} \cap X = \{[x]\}$, en identifiant $V_{[x]}$ au sous-espace projectif $P((\mathrm{d}\pi_x)^{-1}(V_{[x]})) \ni [x]$. On note $\Pi([x]) : T_{[x]}\mathbb{P}_n \to T_{[x]}\mathbb{P}_n/V_{[x]}$ la projection naturelle, et

$$\mathcal{S}_1([z],[x]) = z^{-1} \otimes x \otimes \Pi([x])(x^{-1} \otimes (z \bmod \mathbb{C}x)),$$

qui appartient à la fibre de $\pi_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)_{|X} \otimes (T\mathbb{P}_{n|X}/V))$ en $([z],[x])$.

Alors $V \to X$ est un fibré vectoriel holomorphe générique de rang $n-p-1$. Il est holomorphe au-dessus de $X \setminus A$, où A est un sous-ensemble algébrique de dimension $\leq p-1$, et $(\mathcal{S}_{1|X\times X})^{-1}(0)$ est la réunion de D_X et de composantes dans $X \times A$.

6. Caractérisation des intersections complètes

Soient $Z \subset A \subset \mathbb{P}_n$ des sous-ensembles algébriques de dimensions pures avec $\mathrm{codim}_A Z = q$.

Il existe toujours un sous-ensemble algébrique E de dimension pure $n-q$ dans $\mathbb{P}_n$ tel que $E \cap A$ soit réunion de Z et d'autres composantes de même dimension que Z.

Mais il existe aussi (dans le sens précédemment défini) un (q,q)-courant S fermé dans $\mathbb{P}_n$ tel que $[Z] = S_{|A}$. C'est le transformé correspondant à $\theta = [Z]$ et $X = A$. Alors il existe un sous-ensemble algébrique E de dimension pure $n-q$ dans $\mathbb{P}_n$ tel que $Z = E \cap A$ si et seulement si $S \geq 0$. C'est une conséquence de la formule $S = [E] + R$ de décomposition de Siu. En effet, $R_{|A} = [Z] - [E \cap A]$, où $[E \cap A]$ s'obtient en prenant les composantes de codimension q dans A de l'intersection $E \cap A$, est alors un cycle algébrique nécessairement égal à 0 à cause des dimensions.

Références

[1] J.-B. Poly, Sur l'homologie des courants à support dans un ensemble semi-analytique, Mém. Soc. Math. Fr. 38 (1974) 35–43.

Pour en savoir plus

[1] B. Berndtsson, N. Sibony, The $\bar{\partial}$-equation on a positive current, Invent. Math. 147 (2002) 371–428.
[2] J.-P. Demailly, C. Laurent-Thiébaut, Formules intégrales pour les formes différentielles de type (p, q) dans les variétés de Stein, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. (4) 20 (1987) 579–598.
[3] J.R. King, Residues and Chern classes, Proc. Symp. Pure Math. XXVII (2) (1975) 91–97.
[4] D. Laksov, Residual intersections and Todd's formula for the double locus of a morphism, Acta Math. 140 (1978) 75–92.